

# RePLaT–Chaos-edu

A légköri szennyeződésterjedés kaotikus vonásainak szemléltetésére  
Elméleti háttér és felhasználói dokumentáció

---

Haszpra Tímea

ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék  
MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

Budapest, 2018

# Tartalomjegyzék

<b>1. BEVEZETÉS .....</b>	<b>3</b>
<b>2. FELHASZNÁLÓI DOKUMENTÁCIÓ .....</b>	<b>3</b>
2.1. A PROGRAM RÖVID ISMERTETÉSE .....	3
2.2. A PROGRAM INDÍTÁSA .....	4
2.3. SZIMULÁCIÓ ALATTI MEGJELENÍTÉS BEÁLLÍTÁSAI .....	4
2.4. KÉSZ SZIMULÁCIÓ LEJÁTSZÁSA .....	5
<b>3. ELMÉLETI HÁTTÉR .....</b>	<b>7</b>
3.1. A RÉSZECSKÉK MOZGÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSA .....	7
3.2. NYÚLÁSI ÜTEM .....	9
3.3. ÉLETTARTAM .....	9
<b>KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS.....</b>	<b>11</b>
<b>HIVATKOZÁSOK.....</b>	<b>11</b>

# 1. Bevezetés

A **RePLaT-Chaos-edu** program segítségével egyszerűen szimulálható aeroszol részecskékből vagy gázokból álló szennyeződéshők globális skálájú légköri terjedése, illetve tanulmányozhatók vele a terjedés úgynevezett kaotikus vonásai. A program a korábban kifejlesztett RePLaT (Real Particle Lagrangian Trajectory) modell [1, 2] egyszerűsített változata. A program a légköri áramlások általi szállítódást és a részecskékre ható nehézségi erőt figyelembe véve határozza meg a részecskék mozgását.<sup>1</sup>

Háromdimenziós áramlásokban, így a légkörben is, megjelenik a szennyeződések terjedésének kaotikussága [3]. A terjedés során jól megfigyelhetők a kaotikus viselkedés jellemző jelei, úgymint a kezdeti feltételekre való érzékenység (a közeli részecskék pályái kis idő elteltével gyorsan távolodnak egymástól), az időben szabálytalan mozgás és a szálas, bonyolult, de egyben rendezett geometriai megjelenés. A program segítségével könnyen látható, hogy a kibocsátott szennyeződések a légkörben nem „tintapacaszzerűen” oszlanak el, hanem a fentieknek megfelelően az idő folyamán egyre jobban megnyúlva, összegyűrődve, az áramlások hatására bonyolult, tekervényes „fonalak” formájában terjednek szét. A program lehetőséget ad a szimulált terjedési események kaotikusságát leíró két mérőszámra, a nyúlási ütemre és a részecskék légkörben töltött élettartamának számítására és a szennyeződéshők sodródási képeivel való összevetésére. A nyúlási ütemmel a szennyeződéshők hosszának exponenciális ütemű megnyúlása, míg az élettartammal a részecskék légkörből való kiülepedésének üteme számszerűsíthető [3].

## 2. Felhasználói dokumentáció

### 2.1. A program rövid ismertetése

A programmal különböző szennyeződéshők légköri terjedése szimulálható többféle szimulációs beállítási lehetőség mellett. A szennyeződéshőt a felhasználó által megadott számú részecske testesíti meg. A részecskék terjedésének számításához a megadott időszakot (2010. 04. 14. 00 UTC – 2010. 04. 30. 12 UTC) felölelő, megfelelő meteorológiai adatokat tartalmazó fájlok szükségesek, amelyek letöltődnek a programmal együtt. A szennyeződéshő (és részecskéinek) kezdeti pozíciója, mérete, egyéb tulajdonságai a szimulációkhoz megadhatók. A program a terjedés szimulációja során minden egyes időlépésben a meteorológiai adatok alapján kiszámítja a szennyeződéshő részecskéinek új helyét, és 6 órás időközönként az adatokat fájlba is kiírja. A program emellett meghatározza a szennyeződéshő hosszát és a légkörből még nem távozott részecskék arányát. Ezek két, a terjedés kaotikusságát leíró mennyiségnek, a szennyeződéshők nyúlását jellemző nyúlási ütemnek, valamint a részecskék kiülepedésének gyorsaságát leíró élettartam meghatározásához szükségesek. A program lehetőséget nyújt az említett két, kaotikus viselkedést számszerűsítő mennyiség meghatározására is.

---

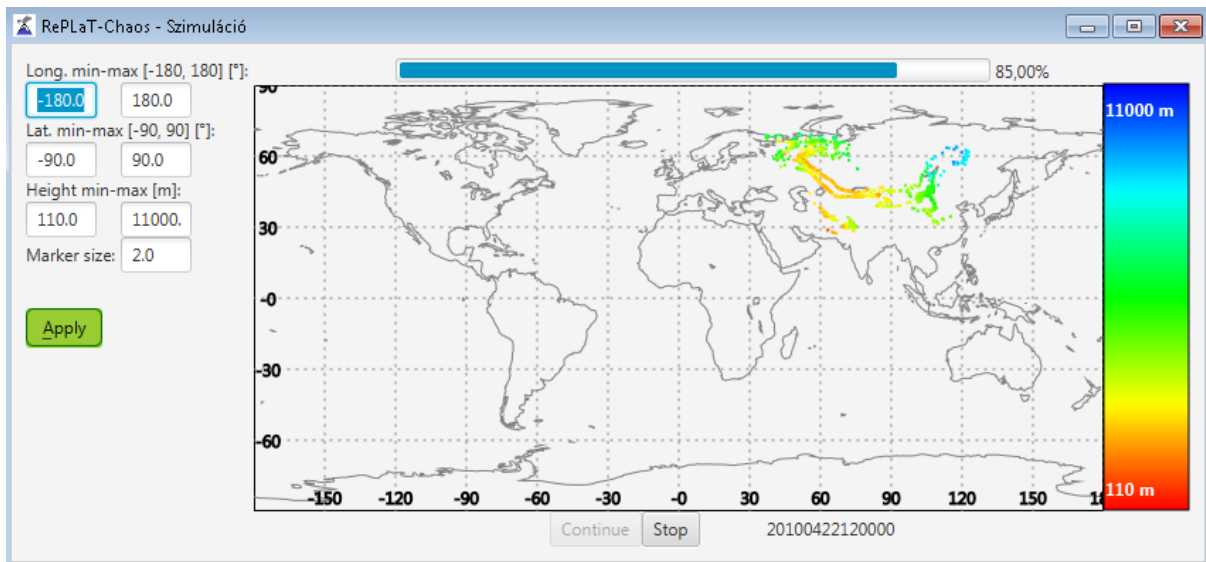
<sup>1</sup> Egyéb folyamatok, mint például a turbulens diffúzió vagy a szennyeződések csapadék általi kimosódásának hatását elhanyagolva.

## 2.2. A program indítása

A programot az operációs rendszertől függően többféle módon, a <http://hatimi.web.elte.hu/RePLaT/index.html> honlapon leírtaknak megfelelően lehet letölteni, telepíteni és indítani.

A **kezdőoldalon** és a **További kitörések** menüpontban különböző, elképzelt vulkánkitörésekből származó részecskék légköri sodródásának animációja található. Saját szennyeződésterjedési szimulációk a **Kitörés tervezése** és a **Káosz mérése** menüpontokból indíthatók a vulkáni hamu- vagy gázfelhő megfelelő paramétereinek megadása után a **Start** gombra kattintva. A számolt káosz-mérőszámokról a **Káoszjellemzők** menüpont alatt olvasható egy rövid, színes illusztrációkkal tarkított összefoglalás. Az **Érdekességek** menüpontban a program segítségével megfigyelhető jelenségek legfontosabb tanulságai, érdekességei találhatóak.

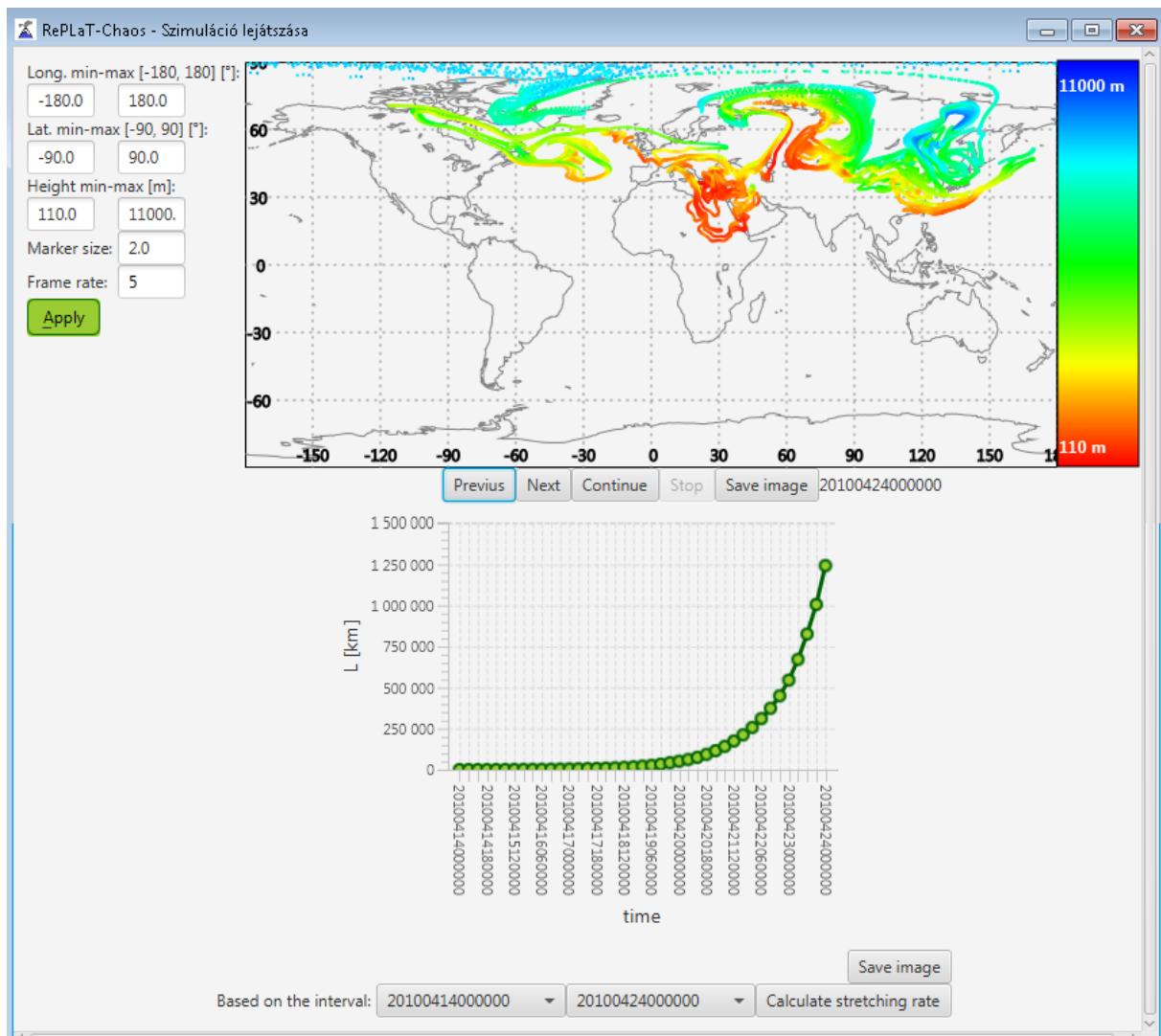
## 2.3. Szimuláció alatti megjelenítés beállításai



1. ábra: A szimuláció futásának követése a részecskék helyzetének megjelenítésével.

A szimuláció közben a program egy térkép felett megjeleníti a szennyeződéssel járó részecskék aktuális helyzetét is (a függőleges koordináták szerinti színezéssel) egy folyamatjelző sávval együtt, amelyről leolvasható, hogy a teljes szimulációs időintervallum hány százalékánál és melyik időpontnál jár a számítás. A felhasználó a **Stop** és a **Continue** gombokkal a szimulációt leállíthatja, illetve folytathatja. Az ablak bal oldalán lévő mezőkkel megadható más térkép kivágat, a részecskék különböző magasság szerinti színezése, valamint a részecskék kirajzolási mérete (formátumok: valós számok a megadott intervallumokban). A beállítások az **Apply** gombbal érvényesíthetők. Hibás adatok vagy üres szövegmező megadása esetén ezt egy felugró ablak jelzi, és a hibás mezőt pirossal színezi a program.

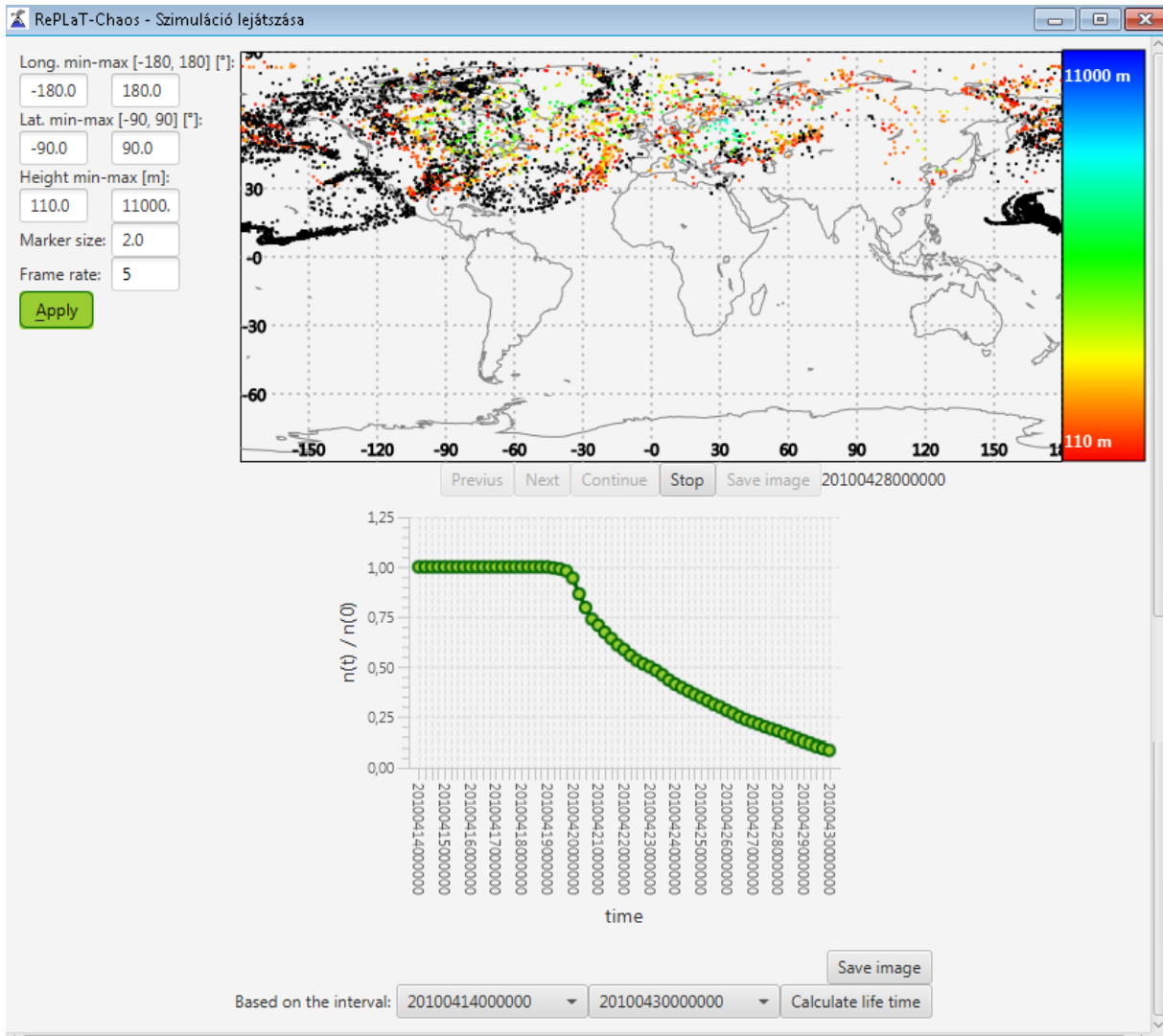
## 2.4. Kész szimuláció lejátszása



2. ábra: Mentett szimuláció és a hozzá tartozó hossz megjelenítése.

A szimulációs számítás végével a szimuláció betöltődik, és elindul a visszajátszása. Attól függően, hogy a **Kitörés tervezése**, a **Káosz mérése: Vulkanai gáz / Vulkanai hamu** menüpontokból jutott erre az oldalra a felhasználó, a szennyeződéshő kirajzolása alatt megjelenik a szennyeződéshő hosszának, illetve a ki nem ülepedett részecskék arányának időfüggése is egy-egy grafikonon (2. ábra, 3. ábra). A kirajzolás alapértelmezetten időben előrefele ciklikusan történik a megadott képsebességnek (**Frame rate**) megfelelően. A felhasználó a **Stop** és a **Continue** gombokkal leállíthatja vagy folytathatja a kirajzolást, a **Previous** és **Next** gombok megnyomásával pedig egyesével léptetheti előrefele és hátrafele. A **Save image** gombra kattintva a felhasználó elmentheti a szennyeződéshő pillanatnyi helyzetét. A kirajzolás beállításai (térképkivágat, részecskék) a 2.3. fejezetben ismertetett módon állíthatók át az **Apply** gombra kattintva. Itt ezen kívül még a lejátszás gyorsasága (Frame rate) is módosítható.

Amennyiben a szennyeződéssel hosszának vagy a ki nem ülepedett részecskék arányának időfüggését ábrázoló grafikon is szerepel, az ablak alsó részén a felhasználó kiválaszthat a két legördülő menüből egy kezdő- és végidőpontot. A **Calculate stretching rate**, illetve a **Calculate life time** gombra kattintva a program a megadott időintervallumban a exponenciális függvényt illetve a grafikon pontjaira, és kiírja ennek kitevőjét (azaz a nyúlási ütemet (2. ábra), illetve az élettartamot (3. ábra)). A kirajzolt grafikonokat a **Save image** gombra kattintva el is lehet menteni.



3. ábra: Mentett szimuláció és a hozzá tartozó ki nem ülepedett részecskék arányának megjelenítése.

### 3. Elméleti háttér

#### 3.1. A részecskék mozgásának meghatározása

Kis méretű aeroszol részecskék esetén megmutatható [2], hogy a részecskék vízszintes sebességkomponenseit az aktuális helyi szélmező vízszintes komponensei határozzák meg, míg függőleges mozgásukhoz a levegő függőleges sebességkomponensén kívül a részecskék nehézségi erőből adódó határsebessége<sup>2</sup> is hozzájárul. A program vízszintes irányban szabályos hosszúsági–szélességi hálón, függőlegesen különböző nyomási szinteken adott meteorológiai adatokat használ fel, ezért vízszintesen gömbi polárkoordinátákat, függőlegesen nyomási koordinátákat alkalmazva a részecskék mozgását a következő egyenletek határozzák meg:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda(t)}{dt} &= u_{\text{rad}}(\lambda(t), \varphi(t), p(t), t) = \frac{u(\lambda(t), \varphi(t), p(t), t)}{R \cos(\varphi(t))}, \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= v_{\text{rad}}(\lambda(t), \varphi(t), p(t), t) = \frac{v(\lambda(t), \varphi(t), p(t), t)}{R}, \\ \frac{dp(t)}{dt} &= \omega(\lambda(t), \varphi(t), p(t), t) + \omega_{\text{term}}(\lambda(t), \varphi(t), p(t), t),\end{aligned}$$

ahol  $\lambda(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $p(t)$  a részecske hosszúsági, szélességi [rad] és nyomási [Pa] koordinátái a  $t$  időpillanatban,  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  a sebességmező zonális, meridionális [m/s] és függőleges [Pa/s] sebességkomponensei,  $u_{\text{rad}}(\mathbf{r}(t), t)$ ,  $v_{\text{rad}}(\mathbf{r}(t), t)$  a sebességmező zonális és meridionális szélkomponensei [rad/s]-ban,  $R = 6371$  km a Föld sugara,  $\omega_{\text{term}}$  pedig a részecske határsebessége, mely a következőképpen határozható meg:

$$\omega_{\text{term}} = \begin{cases} \frac{2}{9} \frac{\rho_p r^2 g^2}{\nu} & , \text{ ha } \text{Re} \ll 1, \\ \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\rho_p \rho r}{C_D} g^3} & , \text{ ha } \text{Re} \gg 1, \end{cases}$$

ahol  $\rho_p$  a részecske sűrűsége,  $\rho$  a levegő sűrűsége,  $r$  a részecske sugara,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $\nu$  a kinematikai viszkozitás,  $C_D$  az alaktényező (gömb alakúnak feltételezett részecskék esetén  $C_D = 0,4$ ),  $\text{Re} = 2rV/\nu$  a Reynolds-szám ( $V$  karakterisztikus sebesség, melyről belátható, hogy a határsebességhez tart). A gázok  $r = 0$   $\mu\text{m}$  sugarú „részecskéknek” feleltethetők meg ebben a megközelítésben, melyeknek a határsebessége  $\omega_{\text{term}} = 0$ .

A fenti egyenletekhez szükséges meteorológiai adatok a szélmező  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  komponensei, illetve a levegő  $\rho$  sűrűsége és  $\nu$  kinematikai viszkozitása. Ez utóbbi két változó azonban nem tölthető le meteorológiai adatbázisokból, így ezeket a  $T$  hőmérséklet segítségével határozzuk meg. A sűrűség kifejezhető az ideális gázok állapotegyenletéből az alábbi alakban:

$$\rho = \frac{P}{R_d T},$$

<sup>2</sup> A részecske a határsebességével esik álló levegőben, ha a rá ható erők éppen kiegyensúlyozzák egymást.

ahol  $R_d = 287 \text{ J/kg/K}$  a száraz levegő gázállandója. A kinematikai viszkozitást a  $\mu$  dinamikai viszkozitás segítségével lehet megadni, ahol  $\mu$  már szintén a  $T$  hőmérséklet függvénye (Sutherland-törvény [4]):

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ ahol}$$

$$\mu = \beta \frac{T^{3/2}}{T + T_S}, \text{ azaz}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \beta \frac{T^{5/2}}{T + T_S} \frac{R_d}{p},$$

ahol  $\beta = 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-0.5}$  a Sutherland-állandó és  $T_S = 110,4 \text{ K}$  a Sutherland-hőmérséklet.

Így a részecskék mozgását leíró három egyenletből álló közönséges differenciálegyenlet-rendszer jobb oldalán már minden mennyiség ismert. A differenciálegyenleteket a más terjedési modelleknél is szokásos explicit másodrendű Runge–Kutta-módszerrel oldja meg a program. Így egy részecske  $\mathbf{r}(t + \Delta t) = [\lambda(t + \Delta t), \varphi(t + \Delta t), p(t + \Delta t)]$  pozíciója a  $t + \Delta t$  időpontban a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) = [u_{\text{rad}}(\mathbf{r}(t), t), v_{\text{rad}}(\mathbf{r}(t), t), \omega(\mathbf{r}(t), t) + \omega_{\text{term}}(\mathbf{r}(t), t)]$  sebességnek a függvényében a következőképpen számítható:

$$\mathbf{r}_0(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) \Delta t \quad (\text{segéd lépés}) \text{ és}$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{2} [\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}_0(t + \Delta t), t + \Delta t)] \Delta t.$$

A felhasznált meteorológiai adatok csak szabályos hosszúsági–szélességi rácson, különböző nyomási szinteken adottak, bizonyos (itt 6 órás) időbeli felbontásban. Ezért a részecskék mozgásegyenletének a megoldásához, a részecskék útvonalának számításához az  $u, v, \omega, T$  adatokat a részecskék aktuális helyére kell térben és időben interpolálni. A program a legtöbb terjedési modellhez hasonlóan mindhárom irányban, valamint időben is lineáris interpolációt alkalmaz.

A  $\Delta t$  időlépést a program minden egyes részecske esetén minden iterációban a Courant–Friedrichs–Levy-kritérium alapján számítja a következő egyenlet alapján:

$$\Delta t_{\text{CFL}} = \text{CFL} \cdot \min \left\{ \frac{\Delta \lambda_g}{|u_{\text{rad}}(\mathbf{r}(t), t)|}; \frac{\Delta \varphi_g}{|v_{\text{rad}}(\mathbf{r}(t), t)|}; \frac{\Delta p_g}{|\omega(\mathbf{r}(t), t) + \omega_{\text{term}}(\mathbf{r}(t), t)|} \right\},$$

ahol  $\Delta \lambda_g, \Delta \varphi_g, \Delta p_g$  a rácsméret zonális, meridionális [rad] és függőleges [Pa] irányban,  $\text{CFL} < 1$  a Courant–Friedrichs–Levy-szám. A minimális  $\Delta t_{\text{min}}$  időlépés értéke a programban 300 s, és ha  $\Delta t$  ezek alapján nagyobb lenne annál az időtartamnál ( $t_{\text{next}} - t$ ), ami a részecskék adatainak következő fájlba mentéséig (6 óra) vagy a következő meteorológiai mező beolvasásáig (6 óra) hátra van, akkor az időlépés ennek megfelelően módosul:

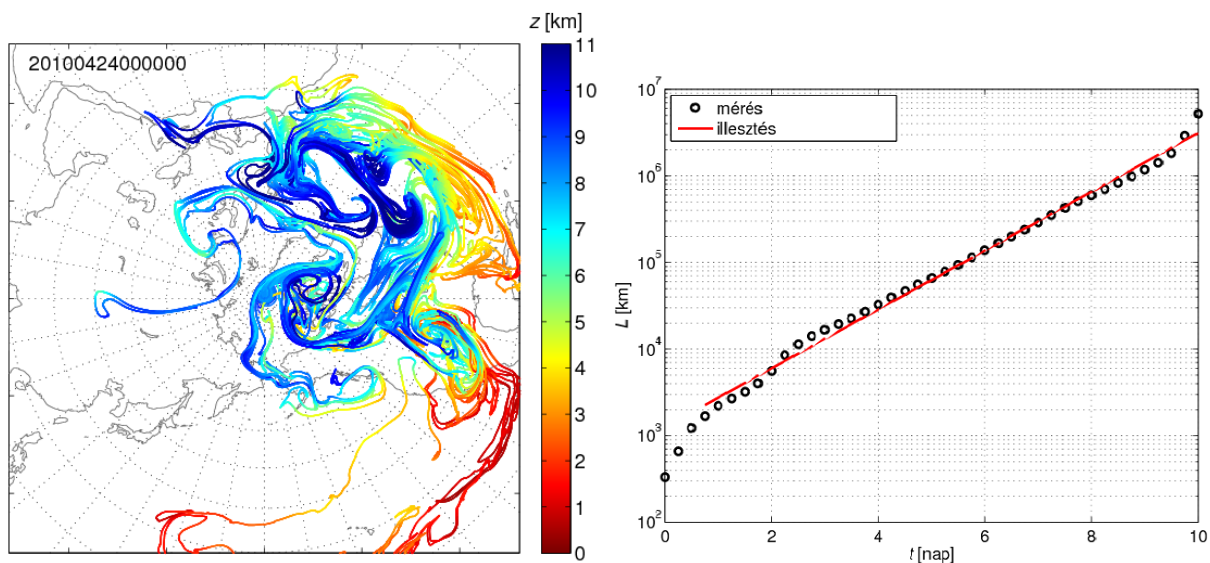
$$\Delta t = \min \{ t_{\text{next}} - t; \max \{ \Delta t_{\text{CFL}}; \Delta t_{\text{min}} \} \}.$$



## 3.2. Nyúlási ütem

A dinamikai rendszerek elméletében az ún. topologikus entrópia, amit itt a nyúlási ütemnek nevezünk, a mozgás bonyolultságának, szabálytalanságának mértékét számszerűsíti. A káosz egyik lehetséges definíciója szerint egy rendszer kaotikus, ha a topologikus entrópia pozitív [3]. A légköri áramlásokban való sodródás hatására egy-egy szennyeződéshő alakja hamar eltorzul, az idő során gyorsan nyúlik: a szennyeződéshő  $L$  hossza jó közelítéssel exponenciálisan nő a  $t$  idővel, vagyis  $L(t) \sim \exp(ht)$  (4. ábra). A szennyeződések terjedése esetén éppen a  $h$  kitevő felel meg a topologikus entrópiának. Minél nagyobb értéket vesz fel, a szennyeződéshő hossza annál sebesebben növekszik, annál bonyolultabb, kacskaringósabb alakot mutathat [5]. A középiskolás ismereteknek megfelelően a RePLaT-Chaos-edu programban a nyúlási ütemnek itt nem az  $L(t) \sim e^{ht}$ , hanem az  $L(t) \sim 10^{ht}$  függvény  $h$  kitevőjét nevezzük. A szennyeződéshő a  $h$  reciprokának megfelelő idő alatt nyúlik a 10-szeresére.

Egydimenziós, vonalszerű szennyeződéshők esetén a felhő szomszédos részecskéi közötti távolságokat összeadva kapjuk a szennyeződéshő hosszát. Mivel az egymást követő részecskék idővel elég távol is kerülhetnek egymástól, az ugyanezekből a kezdőfeltételekből induló, de végtelen sok részecskével rendelkező (folytonos) felhő hosszához képest a hosszt alulbecsüljük véges számú részecske esetén. Ez például abban is megnyilvánulhat, hogy a számított hossz bizonyos idő után, amikor már sok a „levágott” szakasz a részecskék között, eltér az exponenciális függvénytől, kisebb értékeket vesz fel. Ezen alulbecslés csökkentése érdekében egy kritikus távolságnál (itt: 100 km) messzebb kerülő részecskepár esetén a két részecske közé új részecskéket szűr be a program a szimulációban, amíg el nem éri a maximális 100 000-nek definiált részecskeszámot.

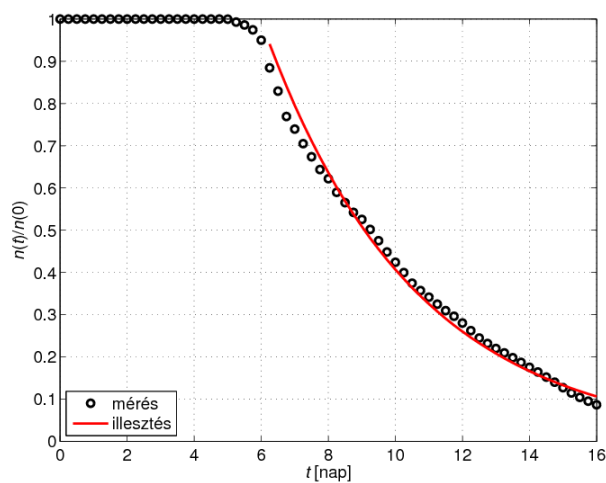


4. ábra: A szennyeződéshők hossza exponenciális ütemben nő a légköri sodródás során. Bal: Egy kezdetben 300 km hosszú vonaldarab 10 nap elteltével betéríti az Északi-félteke jelentős részét. Jobb: A vonaldarab hosszának időfüggése.

## 3.3. Élettartam

Az előző fejezetben említett kaotikus mozgást a szennyeződéshők részecskéi csupán véges ideig végezhetik, mivel például a Föld felszínét elérve kiülepedhetnek. Ezt a

típusú káoszt tranziens káosznak nevezik [3]. Létezik azonban egy nullmértékű halmaz, az ún. kaotikus nyereghalmaz, amelyről indulva a részecskék a terjedés során sohasem hagynák el azt, és végtelen hosszú ideig kaotikus mozgást végeznének. Mivel nullmértékű halmazról van szó, annak a valószínűsége, hogy kezdetben a részecskék éppen a halmazon helyezkedjenek el, nulla, és a részecskék előbb-utóbb elhagyják a nyereghalmaz tetszőleges nagyságú környezetét. Ennek az elhagyásnak a gyorsaságát jellemzi az élettartam. Elegendően hosszú  $t_0$  idő után a tartományban (a légköri szimulációkban a meteorológiai adatok által meghatározott szimulációs tartományban) maradó részecskék  $n(t)/n(0)$  aránya a tapasztalat szerint exponenciális csökkenést mutat:  $n(t)/n(0) \sim \exp(-t/T)$  (ha  $t > t_0$ ), ahol  $T$  a részecskék átlagos élettartamának felel meg [1] (5. ábra). A RePLaT-Chaos-edu programban a nyúlási ütemnél leírtakhoz hasonló módon nem az  $e$  függvény kitevőjében, hanem az  $n(t)/n(0) \sim 10^{-t/T}$  (ha  $t > t_0$ ) függvény kitevőjében lévő  $T$  értéket számítja a program. A csökkenési szakaszban  $T$  idő elteltével a részecskéknek már csak mindössze egytizede tartózkodik a légkörben. Könnyű részecskékre nagyobb az értéke, de függ a légköri viszonyoktól is.



**5. ábra: A szennyeződéshók még a felszínre ki nem üledett részecskéinek aránya exponenciálisan csökken az időben.**

## Köszönetnyilvánítás

A munka a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, az NKFIH PD-121305 és FK-124256 pályázatok, valamint a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programjának támogatásával készült.

## Hivatkozások

- [1] Haszpra, T., Tél, T.: Escape rate: a Lagrangian measure of particle deposition from the atmosphere, *Nonlin. Proc. Geophys.* 20(5), 2013, 867–881.
- [2] Haszpra T.: A RePLaT modell és alkalmazása légköri szennyeződések terjedésének vizsgálatára, PhD értekezés, ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest, 2014, 121 o.
- [3] Tél T. és Gruiz M.: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002, 356 o., ISBN-9789631932805.
- [4] Sutherland, W.: LII. The viscosity of gases and molecular force, *Philosophical Magazine, Series 5*, 36, 1893, 507–531.
- [5] Haszpra, T., Tél, T.: Topological entropy: a Lagrangian measure of the state of the free atmosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 70(12), 2013, 4030–4040 (doi: 10.1175/JAS-D-13-069.1).
- [6] <http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/jre8-downloads-2133155.html>
- [7] <http://apps.ecmwf.int/datasets/>
- [8] <http://nco.sourceforge.net>