Magfizika fizikus hallgatók részére

Németh Judit

1995. július 2.

Tartalomjegyzék

1. Fejezet

Bevezetés

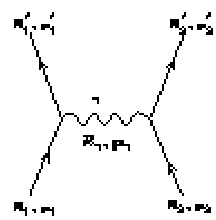
1.1 Atommag alkotórészei közötti kölcsönhatások

Mi tartja össze az atommag alkotórészeit?

1932, a neutron felfedezése óta tudjuk, hogy az elektromágneses és gravitációs erő nem jó. Kell lenni erős kölcsönhatásnak!

Az elektromágneses kölcsönhatás folyamatának áttekintése

Töltött részek közt fotonok kicserélése



Rugalmas szórás esetén: $E_1 = E_1^{'}$, $E_2 = E_2^{'}$ Impulzus megmaradás a két csomópontra: $\mathbf{p}_1^{'} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_\gamma$ és $\mathbf{p}_2^{'} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_\gamma$
Energiamegmaradás a két csomópontban: $E_1 = E_1^{'} + E_\gamma$, $\qquad E_2 = E_2^{'} - E_\gamma$.
Ezekből az következik, hogy $E_\gamma = 0$, és egyben van $p_\gamma > 0$ impulzusa. A fotonokra szokásos $E = pc$ összefüggés nem áll fenn ezekre a közvetítő fotonokra. Nem valódi foton cserélődik ki, hanem virtuális!
Ütközés előtt a teljes energia: $E = E_1 + E_2$
Foton emisszió után, de reabszorpció előtt: $E = E_1 + E_2 + E_\gamma$
Nem marad meg az energia, ha $E_\gamma > 0$
Virtuális foton kilépésének magyarázata a határozatlansági reláció. A fotonemisszió és reabszorpció között eltelt Δt ideig fennállhat ΔE energiabizonytalanság. $\Delta E \Delta t \approx \hbar$. Ebből:

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{\hbar\omega} = \frac{1}{\omega}$$

A foton által megtett út Δt idő alatt: $\Delta s \approx \Delta t \cdot c = \frac{c}{\omega}$. Az ω tetszőlegesen kicsi, így Δs tetszőlegesen nagy lehet.
Zérus tömegű közvetítő részek végtelen hatótávolságot jelentenek. Ilyenek az elektromágneses és a gravitációs kölcsönhatás. (A foton és a graviton közvetíti.) Ez az egyik oka, hogy hasonlítanak.

Az erős kölcsönhatás folyamatának áttekintése:

Analógia alapján hogyan írható le az erős kölcsönhatás?
A közvetítő részecske legyen most egy m nyugalmi tömegű részecske a foton helyett, ennek a cseréje során az energiabizonytalanság $E = mc^2$. Mag mérete: $a \sim 10^{-13}\ cm = 1\ fm$. A virtuális közvetítő részecske ezt az utat futja be a rendelkezésére álló idő alatt, akkor $a \approx c\Delta t \approx \frac{c\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{2mc}$. Ebből a közvetítő részecske tömegére adódik:

$$m = \frac{\hbar}{2 \cdot c \cdot a} \approx 10^{-28}\ kg \approx 100 m_e$$

Yukawa gondolatmenete:

Yukawa gondolatmenete matematikaibb volt, de ott is megtalálható az elektrodinamikai analógia. Az elektromágneses potenciálra fennáll a Poisson-egyenlet: $\Delta\Phi = 0$. A kvantummechanikában az impulzus $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, ezért a Δ operátor: $\Delta = -\frac{\hat{p}^2}{\hbar^2}$. A Poisson-egyenlet tehát $\hat{p}^2\Phi = 0$ -ként is felfogható. Ennek relativisztikus általánosítására – a négyesimpulzus $p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \hat{p}^2 = m_0^2c^2$ segítségével – a Klein-Gordon-egyenletet adódik:

$$\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\Phi - m_0^2c^2\Phi = 0$$

Statikus megoldásnál:

$$\Delta\Phi - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Phi = 0$$

Oldjuk meg a statikus Klein Gordon egyenletet. A Laplace-operátor polárkoordinátákban: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{r^2}$. Bevezetve a $b = \frac{\hbar}{mc}$ jelölést, az

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi - \frac{\hat{L}^2}{r^2}\Phi = \frac{1}{b^2}\Phi$$

egyenletet kapjuk. Keressük a megoldást gömbszimmetrikus esetre. Ekkor $\frac{\hat{L}^2}{r^2}\Phi = 0$, hiszen $\hat{L}^2$-ben a szögek szerinti deriválások szerepelnek. Egyenletünket kicsit átalakítva kapjuk:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) = \frac{1}{b^2}(r\Phi)$$

Az $r\Phi = u$ függvény használatával:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{b^2}u$$

alakú lesz egyenletünk. Ennek megoldása az exponenciális függvény:

$$u = Ae^{\frac{r}{b}} + Be^{-\frac{r}{b}}.$$

Ha $r \to \infty$, akkor $u \to 0$ feltétel szükséges, ezért $A = 0$. Visszatérve Φ-re kapjuk a Yukawa potenciált:

$$\Phi = -g\frac{e^{-\frac{r}{b}}}{r}.$$

A hatótávolság

$$\bar{r} = \frac{\int r|\Phi|^2 dV}{\int |\Phi|^2 dV} = \frac{\int re^{-\frac{2r}{b}}dr}{\int e^{-\frac{2r}{b}}dr} = \frac{b}{2} = a = \frac{\hbar}{2mc}$$

azaz ugyanaz jött ki, mint a határozatlansági relációnál!
A potenciális energia előjele negatív, mert a potenciál vonzó:

$$V = -g^2\frac{e^{-\frac{r}{b}}}{r}.$$

Ha $g = e$ és $b = \infty$, visszakaptuk a Coulomb potenciált.

$$g \sim 6e, \qquad \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \qquad \frac{g^2}{\hbar c} \sim 1$$

Következmény: 2 foton kicserélése valószínűtlen, 2 mezon kicserélése jelentős!
Yukawa gondolatmenete alapján a müon illetve pi-mezon felfedezése.

1.2 Bomló állapotok

Tekintsük független részek halmazát. Egy részecske bomoljon el λ valószínűséggel egységnyi idő alatt. Ha a t időpillanatban $N(t)$ részecske van összesen, a dt idő alatt elbomló részek száma $dN = -\lambda N(t)dt$, ebből az egyszerű bomlás differenciálegyenlete adódik, aminek megoldása az exponenciális bomlástörvény: $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$.
Féléletartam, amikor $N(0)/2$ rész van jelen, $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Az átlagos élettartam (τ) az, amennyit átlagosan egy részecske él az elbomlása előtt:

$$\tau = \frac{\int t e^{-\lambda t} dt}{\int e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda}.$$

Tekintsünk most kvantummechanikailag egy részecskét, azaz vizsgáljunk egy bomló állapotot. Egy E energiájú részecske hullámfüggvénye: $\Psi(t) = \Psi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Ha E valós, akkor $|\Psi(0)|^2 = |\Psi(t)|^2$, és a részecske nem bomlik el. Ha azonban az energia tartalmaz képzetes részt, $E = E_0 - i\frac{\Gamma}{2}$, akkor $|\Psi(t)|^2 = |\Psi(0)|^2 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}$. Visszakapjuk az exponenciális bomlástörvényt, ha $\Gamma = \lambda\hbar$. Így a bomló részecske hullámfüggvénye:

$$\Psi(t) = \Psi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}e^{-\frac{\lambda}{2}t}.$$

Nézzük meg, mi a valószínűsége annak, hogy a kibocsátott energia E. Fourier transzformációval megkapjuk a valószínűségi amplitúdót. Egy f(t) függvény Fourier-transzformáltja:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt.$$

Az f(t) helyett az állapotfüggvényt transzformálva és figyelembe véve, hogy $E = \hbar\omega$, illetve $\Psi(t) = 0$ ha $t > 0$,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Psi(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\omega - \frac{E_0}{\hbar}\right)t}e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t}dt = \frac{\Psi(0)}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\hbar}{\hbar\omega - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}}.$$

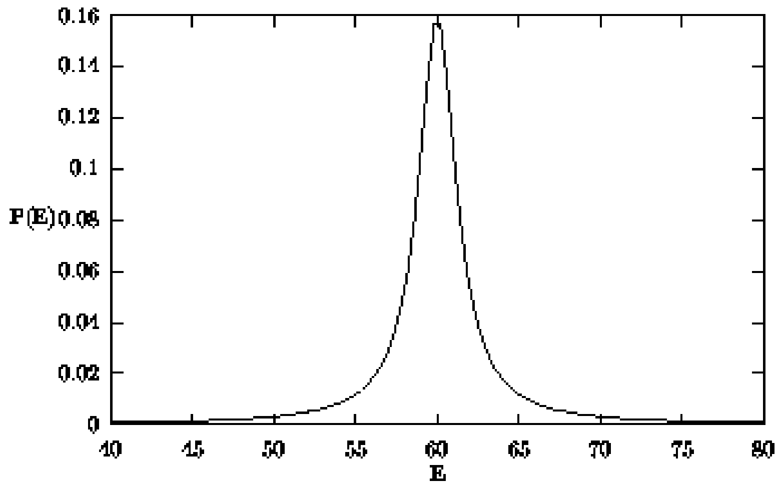
Az E állapot valószínűsége:

$$P(E) = |g(\omega)|^2 = \frac{C}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

A C együtthatót a valószínűség egyre való normálásával kaphatjuk meg. Így a valószínűségi eloszlásra megkapjuk az ún. Breit-Wigner-formulát:

$$P(E) = \frac{\frac{\Gamma}{2\pi}}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

ahol $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar}{\Gamma}$ a bomló állapot féléletartama, és $\Gamma = \lambda\hbar$ az energiaszélesség: $\Gamma\tau = \hbar$.



1.3 Átmeneti valószínűségek maghatározása (aranyszabály)

Legyen a rendszerünk Hamilton-operátora egy ismert megoldású tag és egy további kölcsönhatás összege: $H = H_0 + H_{int}$. A H_0 megoldása $\varphi_n = u_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$, ami kielégíti a Schrödinger-egyenletet:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} = H_0\varphi_n \qquad H_0 u_n = E_n u_n$$

H megoldását sorbafejthetjük a φ_n teljes rendszer szerint:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H_0 + H_{int})\Psi, \qquad \Psi = \sum a_n(t)u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

Helyettesítsük be ezt a Schrödinger-egyenletbe:

$$i\hbar\sum\dot{a}_n(t)u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} + \sum E_n a_n u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} = \sum a_n(H_0 + H_{int})u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$i\hbar\dot{a}_n(t) = \sum_m \langle n|H_{int}|m\rangle a_m e^{-\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t},$$

ahol $\langle m|H_{int}|n\rangle = \int d^3x u_m^*(x)H_{int}u_n(x) = H_{mn}$
Ha kezdetben a rendszer adott $|\alpha\rangle$ állapotban volt és a kölcsönhatási operátor H_{int} gyenge, közelíthetünk:

$$a_\alpha(t_0) = 1 \quad \text{és} \quad a_n(t_0) = 0, \quad n \neq \alpha$$

Tetszőleges t időre:

$$a_\alpha(t) \sim 1 \quad \text{és} \quad a_n(t) << 1, \quad n \neq \alpha$$

$$\dot{a}_\beta(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle\beta|H_{int}|\alpha\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_\beta - E_\alpha)t}$$

Ha H_{int} időfüggetlen, akkor

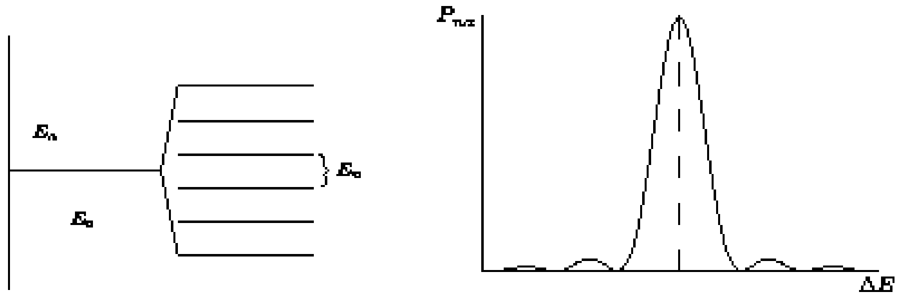
$$a_\beta(T) = \frac{1}{i\hbar}\langle\beta|H_{int}|\alpha\rangle\int_0^T e^{-\frac{i}{\hbar}(E_\beta - E_\alpha)t} = \frac{H_{\beta\alpha}}{E_\beta - E_\alpha}\left(e^{\frac{i}{\hbar}(E_\beta - E_\alpha)T} - 1\right)$$

Annak a valószínűsége, hogy a rendszer T időpillanatban egy adott n állapotban van

$$P_{n\alpha}(T) = |a_n(T)|^2 = \frac{4|H_{n\alpha}|^2}{(E_n - E_\alpha)^2}\sin^2\frac{(E_n - E_\alpha)T}{2\hbar}$$

Ha $E_n - E_\alpha = \Delta E >> |H_{n\alpha}|$, nagy T időkre $P_{n\alpha} \to 0$. Ha $E_n \approx E_\alpha$, akkor $\langle n|H_{int}|\alpha\rangle \approx$ független n-től.

$$P_{n\alpha} \approx \frac{\sin^2(\Delta E \frac{T}{2\hbar})}{\Delta E^2}$$



Az átmenet csak akkor valószínű, ha $\Delta E \frac{T}{2\hbar} << \pi$, azaz ha $\Delta E << \frac{2\pi\hbar}{T}$.
A fenti közelítés annyi ideig jó, amíg

$$T >> \frac{2\pi\hbar}{E_\alpha}, \qquad \Delta E << E_\alpha, \qquad t >> \frac{4 \cdot 10^{-21}\ MeV\ s}{E_\alpha}$$

Összegzés helyett integrálhatunk: $P = \sum_{n \in \Delta E} P_{n\alpha} = \int dn P_{n\alpha}$. Az $x = \frac{\Delta E}{2\hbar}T$ jelölést bevezetve, $dn = \frac{dn}{dE}dE = \frac{2\pi\hbar}{T}\frac{dn}{dE}dx$, így az integrál:

$$P(T) = 4H^2_{\beta\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{2\pi T}{\hbar}H^2_{\beta\alpha}\frac{dn}{dE}$$

Ebből az időegységre eső átmeneti valószínűség, $\frac{dn}{dE} = \rho(E_\beta)$ jelölés használatával:

$$w_{\beta\alpha} = \frac{P(T)}{T} = \frac{2\pi}{\hbar}H^2_{\beta\alpha}\rho(E_\beta)$$

2. Fejezet

Magerők

A két nukleon állapot vizsgálatának a célja elsősorban az, hogy információt nyerjünk a magerőkről. Kiindulásként felhasználhatjuk ismereteinket az erős kölcsönhatás szimmetriáiról.
Két kölcsönható részecske Schrödinger egyenlete:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\triangle_1\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\frac{\hbar^2}{2m_2}\triangle_2\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=E_{tot}\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2),$$

ahol $V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ a két részecske között ható potenciál , ami az eltolási invariancia miatt nem lehet $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ függvénye , csak a kettő különbségéé , $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ -é. Bevezetve az $\mathbf{r}$ relatív és az $\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1-m_2\mathbf{r}_2}{m_1-m_2}$ tömegközépponti koordinátát , a Schrödinger egyenlet és a hullámfüggvény szeparálható egy tömegközépponti és egy relatív koordinátáktól függő részre:

$$\Psi_{tot}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\Phi(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{r})$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\triangle\Psi-V(\mathbf{r})\Psi=E\Psi,\qquad\qquad -\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\Phi=E_{CM}\Phi,$$

ahol $\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\Psi(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{R}),\quad E_{tot}=E_{CM}+E$, M a rendszer teljes tömege és $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1-m_2}$ a relatív tömeg.
Rögzítsük a rendszer tömegközéppont koordinátáját (közelítés), akkor $E_{CM}=0$. Célszerű a következőkben a Schrödinger egyenletet polár koordinátákban felírni:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\Psi(\mathbf{r})\big)-\frac{L^2}{r^2}\Psi(\mathbf{r})\Big]+V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})=E\Psi(\mathbf{r}).$$

A hullámfüggvényt fejtsük sorba gömbhullámfüggvények szerint:

$$\Psi(\mathbf{r})=\sum_{l,m}\frac{u_l(r)}{r}Y_{lm}(\vartheta,\varphi).$$

A továbbiakban feltételezzük , hogy az erős kölcsönhatás Hamilton operátora invariáns a tértükrözéssel szemben. Ez azt jelenti, hogy a sorfejtésben paritás megmaradás miatt csak vagy páros, vagy páratlan komponensek jelennek meg. Jelöljük a paritás operátorát P-vel, az a gömbhullámfüggvényeket a

$$PY_{lm}(\vartheta,\varphi)=Y_{lm}(\pi-\vartheta,\varphi+\pi)=(-1)^lY_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

alakba viszi át.. A teljes hullámfüggvény csak akkor lesz invariáns tértükrözéssel szemben, ha l vagy csak páros, vagy csak páratlan értéket vesz fel. Ha V csak az r skalár függvénye, az egyenlet tovább egyszerűsíthető, parciális komponensekre bonthatjuk. A radiális Schrödinger egyenlet az l-ik parciális hullámra

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Big(u_l''-\frac{l(l+1)}{r^2}u_l\Big)+V(r)u_l=Eu_l.$$

Alapállapotban $l=0$.

2.1 Két nukleon kötött állapota: a deuteron

Tekintsünk egy proton-neutron rendszert, és határozzuk meg ennek kötött állapotát. A Yukawa potenciál helyett egyszerűség kedvéért használjunk négyszög potenciált és legyen l=0.

$$V = \begin{cases} -V_0 & r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Bevezetve a

$$\frac{2\mu V_0}{\hbar^2} = K_0^2, \qquad \frac{2\mu W}{\hbar^2} = \alpha^2, \qquad \frac{2\mu E}{\hbar^2} = k^2, \qquad \kappa^2 = K_0^2 - \alpha^2, \qquad K^2 = K_0^2 + k^2, \qquad W = -E$$

jelöléseket, az egyenlet egy külső és egy belső részre választható szét:

$$\begin{matrix} u_b + \kappa^2 u_b = 0 \\ u_k - \alpha^2 u_k = 0 \end{matrix} \quad E < 0 \qquad \begin{matrix} u_b + K^2 u_b = 0 \\ u_k + k^2 u_k = 0 \end{matrix} \quad E > 0$$

Ha $E < 0$, kötött, ha $E > 0$, szórt állapotot kapunk. A külső megoldások a két esetben erősen különböznek:

$$\begin{aligned} u_b &= A\sin(\kappa r) + B\cos(\kappa r), \qquad & u_b &= A\sin(Kr) + B\cos(Kr), \\ u_k &= Ce^{-\alpha r} + De^{\alpha r}, \qquad & u_k &= C\sin(kr + \delta). \end{aligned}$$

A külső és belső hullámfüggvényeket és deriváltjaikat illeszteni kell a határon. Ezenkívül a hullámfüggvény aszimptotikus véges volta miatt $D = 0$, az $r = 0$ pontban való véges volta miatt pedig (mivel a hullámfüggvény valójában $\frac{u}{r}$) $B = 0$. Elosztva a deriváltakat a hullámfüggvényekkel, kötött és szórt állapot energiájára a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\kappa \operatorname{cotg}(\kappa b) = -\alpha, \qquad K \operatorname{cotg}(Kb) = k \operatorname{cotg}(kb + \delta)$$

A kötött állapot egyenlete egzaktul is megoldható, de az eredményt közelítőleg azonnal tudjuk értékelni. A deuteron kötési energiája 2.226 MeV. Tételezzük fel első közelítésben, hogy $\alpha = 0$. Az egyenlet megoldása:

$$bK_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad b \approx 1.6\,fm, \qquad b\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}} \approx \frac{\pi}{2}, \qquad V_0 \approx 40\,MeV$$

A kinetikus energia ezzel szemben 38 MeV, azaz a rendszer gyengén kötött.

$l \neq 0$ állapotban a potenciális energia megnő a centrifugális potenciál pozitív volta miatt:

$$V \to V_{eff} = V + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Ilyenkor a mag már nem biztos, hogy kötött. Kísérletileg az figyelhető meg, hogy a deuteronnak nincs gerjesztett állapota. A kötött állapotok energiájából összesen egy adatot tudunk meg, ami nem túl sokat mond a két nukleon potenciálról.

További információkat nyerünk a magerőkről, ha a deuteron spinjét vizsgáljuk. A deuteron spinje mindig 1. Statisztikus meggondolások alapján azt várjuk, hogy a spin 75%-ban 1, 25%-ban 0. Ugyszintén nincs kötött bineutron, illetve kötött biproton állapot sem. Ennek egyetlen oka lehet csak: a magerők spinfüggőek. A potenciál gyengébb szinglet állapotban, mint tripletben. Mivel a magerők triplet állapotban éppen hogy kötni tudják a deuteront, a szinglet állapot potenciál 5%-os gyengülése már azt jelenti, hogy a rendszer nem lesz kötött. A bineutron, mivel azonos részekből áll és így a Pauli elv érvényes rá, l=0 szimmetrikus térbeli hullámfüggvény esetén csak antiszimmetrikus spin hullámfüggvénnyel rendelkezhet, ami szinglet állapotnak felel meg.
A magerők spinfüggését leíró operátor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2),$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}_1$ és $\boldsymbol{\sigma}_2$ a két részecske spinoperátora. Mivel

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{4}(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2)^2, \qquad \sigma^2 = 3I$$

$$(\underline{\sigma}_1 \underline{\sigma}_2) = 2\,S(S+1) - 3$$

A deuteronnak alapállapotban létezik csak hullámfüggvénye (l=0), ami azt jelenti, hogy töltéseloszlása gömbszimmetrikus. Kísérletileg kimutatható, hogy a deuteronnak van kvadrupólmomentuma, ami nem szimmetrikus töltéseloszlást jelent. Ez azt jelenti, hogy az alapállapot l=0 és l=2-es állapotok keveréke (l=1 nem lehet a paritásmegmaradás miatt).

$$\Psi_D = \Psi_0(r) + \Psi_2(r) P_2(\cos\Theta)$$

Centrális potenciál esetén az egyes parciális hullámok szeparálódnak, így ez a hullámfüggvény csak akkor adhat mélyebb energiát mint a $\Psi_0(r)$ állapot ha a magerők nem teljesen centrálisak. A nem centrális részt tenzorerőnek nevezzük. A tenzorerő úgy van megválasztva, hogy szinglett állapotra hatva zérust ad, triplet állapotra hatva az azonos J-jű, $\Delta l = \pm 2$-es állapotokat csatolja:

$$S_{12} = \frac{3(\underline{\sigma}_1 \mathbf{r})(\underline{\sigma}_2 \mathbf{r})}{r^2} - (\underline{\sigma}_1 \underline{\sigma}_2).$$

2.2 Kis energiájú nukleon-nukleon szórás

Szórassunk egy R sugarú objektumon egy pontszerű részecskét b ütközési paraméterrel. Félklasszikus érveléssel belátható, hogy a két részecske egymás hatását csak akkor érzi, ha

$$\hbar^2 l(l+1) < 2mER^2.$$

Kis energián tehát a relatív impulzusmomentum 0. Érdemes ezért a parciális hullámok módszerét alkalmazni. A szóráselméletből tudjuk, hogy rugalmas szórás esetén a hullámfüggvény aszimptotikusan

$$\Psi \to e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}.$$

alakba írható. A hatáskeresztmetszet ilyenkor:

$$\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega, \qquad\qquad \sigma(\theta) = |f(\theta)|^2.$$

$f(\theta)$-t ill $\sigma(\theta)$-t parciális hullámokra bontva

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l\big(\cos(\theta)\big),$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l.$$

Ha a potenciál nem centrális, a fenti gondolatmenet kicsit komplikáltabb, mert a különböző parciális hullámok keverednek. δ_l-t fáziseltolásnak nevezzük, a két nukleon kölcsönhatás vizsgálatánál már találkoztunk ezzel a fogalommal. δ-t a hatáskeresztmetszetből meg tudjuk határozni, az ún. fázisanalízis azzal foglalkozik, hogyan lehet a különböző δ_l értékekből a potenciált megkapni.

A korábbiakban meghatároztuk a szórt hullámfüggvény értékét külső és belső esetre. A határfelületen vett illesztésből

$$K \operatorname{ctg} Kb = k \operatorname{ctg}(kb + \delta).$$

Kis energiájú szórásra $k \to 0$, $\quad K \to K_0$, és így

$$\lim_{k\to 0} k \operatorname{ctg} \delta_0 = \frac{K_0 \operatorname{ctg} K_0 b}{1 - K_0 b \operatorname{ctg} K_0 b}.$$

Ha van kötött állapot, láttuk hogy

$$K_0 \,\mathrm{ctg}\, K_0 b \sim -\alpha$$

és a fázistolás kifejezhető a kötött állapot energiájával

$$\mathrm{ctg}\,\delta_0 = -\frac{\frac{\alpha}{k}}{1+\alpha b}.$$

A hatáskeresztmetszet ezek szerint

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\delta_0} \to \frac{4\pi(1+\alpha b)^2}{k^2(1+\alpha b)^2+\alpha^2} \longrightarrow 4\pi(\alpha^{-1}+b)^2.$$

A következőkben célszerű bevezetni a szóráshossz fogalmát. Definíció szerint

$$a = -\lim_{k\to 0} f(\theta) = -\lim \frac{1}{k}e^{i\delta_0}\sin\delta_0.$$

A hatáskeresztmetszet ekkor nagyon egyszerű

$$\sigma(k)_{k\to 0} = 4\pi a^2,$$

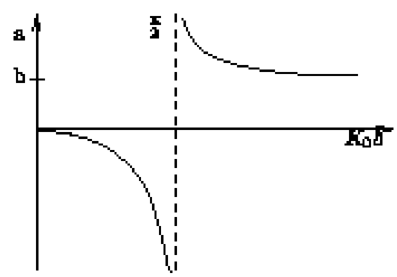
azaz a kis energián a geometria sugárnak felel meg. a kifejezhető a kötött állapot energiájával is

$$a = b + \alpha^{-1} = b\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,K_0 b}{K_0 b}\right).$$

A hatáskeresztmetszetre kapott érték

$$\sigma = 4\pi a^2 = 3.57 \quad \mathrm{barn}$$

a mért érték ezzel szemben 20 barn. Mi az eltérés oka? Ábrázoljuk a szóráshosszt a potenciál függvényében:



Szórásnál szinglet és triplet állapot egyaránt felléphet.

$$\sigma = 4\pi\left(\frac{1}{4}|a_s|^2 + \frac{3}{4}|a_t|^2\right)$$

$$a_t = 5.41 \quad \mathrm{fm} \qquad \Longrightarrow \qquad a_s = -23.7 \quad \mathrm{fm}$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy nincs kötött állapot. A hatáskeresztmetszetből az előjel nem kapható meg. Az előjel meghatározása lassú neutronok ortho illetve parahidrogén molekulán való szórásával határozható meg, a lassú neutron ugyanis interferálni tud a különböző spinű protonokkal

2.3 Izospin

A kisenergiájú n-p p-p és a bonyolultan létrehozott n-n szórások eredményeit összehasonlítva az adódik, hogy Coulomb szórástól eltekintve adott állapotban (szinglet ill. triplet) a hatáskeresztmetszetek megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy a magerők a nukleonok között töltésfüggetlenek, a neutron és proton magfizikai szempontból, ha nem lenne a protonnak töltése, vagy nem is lenne elektromágneses kölcsönhatás, azonos részek. Ezt a felismerést fogalmazta meg matematikai alakban Wigner, amikor bevezette az izospin fogalmát.

Eszerint a gondolatmenet szerint a proton és a neutron azonos részek, pont így mint a felfelé ill.

lefelé mutató spinű elektronok. Az izospint hasonló mátrixszal lehet leírni, mint a spint, csak ezek az izospin térben, tehát az izospin hullámfüggvényekre hatnak. A z kompons operátorát neutonra hattatva 1/2-t, protonra hattatva - 1/2-t kapunk. (Részecskefizikában definíció szerint fordított az előjel.) Két nukleon esetén T=1 ill. T=0 lehet, T=1 három beállással (nn, np, pp 1, 0,-1 értékekkel), a T=0 (np, 0 értékkel) eggyel. Matematikailag az izospin operátorok teljesen azonosak a spin operátorokkal

A magerők töltésfüggetlenek. Izotóp spin

$$\hat{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\sum \hat{\tau}, \qquad \tau_\pm = \tau_x \pm i\tau_y,$$
$$\tau_3\nu = \nu, \qquad \tau_-\nu = 0, \qquad \tau_-\nu = \pi,$$
$$\tau_3\pi = -\pi, \qquad \tau_-\pi = -\nu, \qquad \tau_-\pi = 0.$$

2.4 Nagyenergiájú szórások

A parciális hullámok módszerével meghatározhatjuk a kisenergiájú szóráshatáskeresztmetszeteket. Ahogy növekszik az energia, egyre több parciális hullám járulékát kell figyelembe venni. Ilyenkor célszerű néha, legalább is a kvalitatív vizsgálatok céljából, a Lippmann Schwinger egyenlet megoldását tekinteni

A Lippmann Schwinger egyenlet szórt állapotokra a következő módon vezethető le. Legyen a teljes rendszer Hamilton operátora H, és válasszunk egy H_0 perturbálatlan operátort, aminek tudjuk a sajátértékeit. Ekkor

$$(H_0 + H_1)\Psi = E\Psi, \qquad H_0\Phi = E\Phi.$$

A normálási feltétel Ψ -re legyen az, hogy

$$(\Psi, \Phi) = (\Phi, \Phi).$$

Ekkor

$$(H_0 - E)\Psi = -H_1\Psi + (H_0 - E)\Phi, \quad \text{mivel} \quad r \to \infty - \text{re} \quad \Psi \to \Phi$$
$$\Psi^\pm = \Phi + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} H_1 \Psi^\pm,$$

és a nevező zérushelyeit most egy komplex zérushoz tartó szám hozzáírásával kerüljük el. H_0 egy teljes rendszerét behelyettesítve az egyenletbe

$$\Psi^- = \Phi + \sum_i \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|H_1|\Psi^-\rangle$$

adódik. Figyelembe véve, hogy $\Phi_i = e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}$ és az összegezés helyett integrálásra áttérve

$$\Psi^{(-)} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{\hbar^2}\int \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}}{k^2 - k'^2 - i\epsilon} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')\Psi^-(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{k}'.$$

A hatáskeresztmetszethez $f(\Theta)$ értékét kell tudnunk. A szórt hullámfüggvény aszimptotikus alakját úgy írtuk fel, hogy

$$\Psi^{(-)} \to e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + f(\Theta)\frac{e^{ikr}}{r}.$$

$f(\Theta)$-t úgy kapjuk meg, ha Ψ kifejezésében elvégezzük az integrálást, és az $r \to \infty$ aszimptotikus alakot keressük:

$$\Psi^{(-)} \to e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - \frac{1}{4\pi}\frac{m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int \Psi^-(\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}''\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'.$$

Összehasonlítva ezt az előző egyenlettel, látható hogy a következő alakú lesz:

$$f(\Theta) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int V(\mathbf{r}')\Psi^-(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}''\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}',$$

ahol $\mathbf{k}''$ k abszolút értékű és r irányba mutató vektor.

Nézzük most a fenti integrálás részletes levezetését. A $\Phi_{k'} = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$ függvény H_0 sajátfüggvénye:

$$H_0\Phi_{k'} = \frac{k'^2}{2m}\hbar^2\Phi_{k'},$$

Ezzel $\Psi^{(-)}$-t a következő képpen írhatjuk le:

$$\Psi^{(-)}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int G_k^{(-)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\Psi^-(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}',$$

$$G_k^{(-)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\Phi_{k'}(\mathbf{r})\Phi^*_{k'}(\mathbf{r}')}{k^2 - k'^2 + i\epsilon}d^3\mathbf{k}'.$$

$G_k^{(-)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ a perturbálatlan probléma Green-függvénye, a

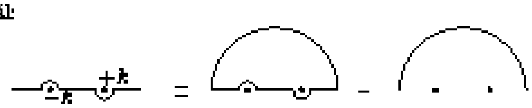
$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

differenciálegyenlet megoldása.
Először integráljuk a fenti kifejezést szög szerint:

$$\int e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d\Omega = 2\pi\int e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta}\sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - e^{-ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right).$$

$$G_k^-(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{2\pi}{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_0^\infty\frac{k'dk'}{k^2-k'^2+i\epsilon}\left[e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - e^{-ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \frac{2\pi}{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_0^\infty\frac{k'dk'}{k^2-k'^2+i\epsilon}e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

A vonal menti integrál:



vagyis kiterjesztjük az integrált a komplex felső félsíkra.
Cauchy tétele értelmében (reziduum csak a $k = k'$ helyen van)

$$\frac{1}{k^2 - k'^2 \pm i\epsilon} = \frac{P}{k^2 - k'^2} \mp i\pi\delta(k^2 - k'^2),$$

$$\delta(k^2 - k'^2) = \frac{1}{2k}\delta(k - k') = -\frac{1}{2k}\delta(k' - k).$$

Aszimptotikusan

$$G^- = \frac{2\pi}{8\pi^3}\int\frac{(i\pi)}{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{1}{2k'}\delta(k-k')k'^2dk'e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{r}e^{ikr}e^{-i\mathbf{k}''\mathbf{r}'},$$

$$\Psi^{(-)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{m}{4\pi\hbar^2}\frac{1}{r}e^{ikr}\int e^{-i\mathbf{k}''\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}')\Psi^-(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'.$$

Így megkaptuk a fenti integrált.

A továbbiakban alkalmazzuk a Born-közelítést. Ez olyankor jogos, ha H_0 nagy H_1 mellett. Ilyenkor $\Psi^-(\mathbf{r}') \to e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}$, Ezt figyelembe véve és szög szerint integrálva

$$f(\Theta) = -\frac{m}{\hbar^2}\int_0^\infty V(r)\frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2iqr}r^2dr,$$

ahol $q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}''| = 2k\sin\frac{\Theta}{2}$ az átadott impulzus és $k^2 = k'^2 = k''^2$. Yukawa potenciálra könnyen meghatározhatjuk $f(\Theta)$-t.

$$V(r) = -V_0\frac{e^{\frac{-r}{\lambda}}}{\frac{r}{\lambda}}, \qquad f(\Theta) = \frac{m\lambda^3V_0}{\hbar^2}\frac{1}{1 + 4\lambda^2k^2\sin^2(\frac{\Theta}{2})}.$$

Ha

$$V_0 = \frac{e^2}{b}, \quad b \to \infty, \quad V \to \frac{-e^2}{r}, \quad f(\Theta) = \frac{me^2}{\hbar^2}\frac{1}{4k^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}},$$

azaz a Rutherford szórás hatáskeresztmetszetét kapjuk meg. Bevezetve a $\sigma_0 = \frac{m^2 b^4 V_0^2}{\hbar^4}$ jelölést:

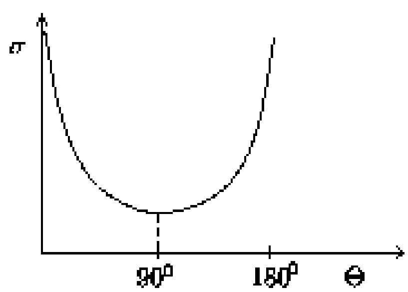
$$\sigma(\Theta) = |f(\Theta)|^2 = \frac{\sigma_0}{[1 + \frac{4mb^2 E}{\hbar^2}\sin^2\frac{\Theta}{2}]^2}.$$

Nagyenergiájú n-p szórás

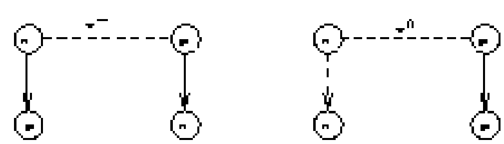
A szóráshatáskeresztmetszet vizsgálatából az jön ki, hogy nagyenergiájú n-p szórásnál az előre és hátraszórás viszonya

$$\frac{\sigma(0)}{\sigma(\pi)} = [1 + \frac{4mb^2 E}{\hbar^2}] \sim 100 \qquad ha \quad E \sim 100 \quad MeV.$$

A kísérleti eredmény ezzel szemben



Kérdés, mi az oka ennek? A magerők kicserélődő jellegűek.



$$V \to \frac{1}{2}(1 + P)V,$$

P itt a tértükrözés operátora. Bekövetkezhet tehát, hogy egy proton neutronná, egy neutron protonná alakul. A kicserélődő jelleg egyik következménye:

$$\Psi(\mathbf{r}) \to \frac{1+P}{2}\Psi(\mathbf{r}),$$

$$f(\Theta) \to (\frac{1+P}{2})f(\Theta) = \frac{1+P}{2}\frac{1}{2ik}\sum(2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(cos\Theta) \to \frac{1}{2}(f(\Theta) + f(\pi - \Theta))$$

Mivel

$$Y_{lm}(\pi - \Theta, \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\Theta, \varphi),$$

ezért l=páratlan állapotokban a magerők nagyon gyengék.

Nagyenergiájú p-p szórás

Kísérleti megfigyelés

a) $\sigma(\theta) \sim 100 - 500\ MeV$-ig a szögfüggés közel izotróp. Itt már nem mindig rugalmas a szórás, pionok keletkezhetnek.

b) $\sigma_t(E)$ azaz a teljes keresztmetszet független a beeső energiától kb. 600 MeV-ig.

Hogyan lehet ez ?

a)
Ha a hatáskeresztmetszet szögfüggését nézzük nagyobb energiákon, P_l járulékai:

$$l = 1 \quad P_1 \sim \cos\Theta$$
$$l = 2 \quad P_2 \sim \tfrac{3}{2}\cos^2\Theta - \tfrac{1}{2}$$

azaz erősen szögfüggő kellene, hogy legyen. Ugyanakkor a hatáskeresztmetszetekhez a P_1, P_2 ad járulékot, ugyanis ha nem adna,

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 < \frac{4\pi}{k^2} \sim 25\,mb, \quad ha \quad E = 400 MeV$$

lenne, ezzel szemben a kísérleti érték 30 mb. l=1 figyelembevételével:

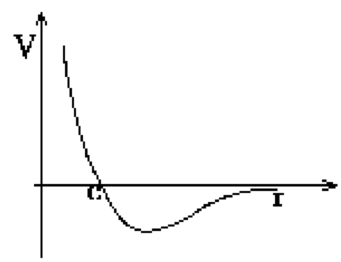
$$f(\Theta) \sim \sin^2\delta_0 P_0^2(\Theta) + 6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos(\delta_0 - \delta_1)P_0(\Theta)P_1(\Theta) + 9\sin^2\delta_1 P_1^2(\Theta)$$

Az eltérés oka a spin-pálya csatolás. Ha ugyanis a Schrödinger egyenlet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + V_0(\mathrm{r})\Psi + V_1(\mathrm{r})\mathbf{LS}\Psi = E\Psi$$

alakú, akkor más δ-t ad ${}^3P_0$, ${}^3P_1$ és ${}^3P_2$ állapotra és ezek lineáris kombinációja lép fel $f(\Theta)$-ban. Megmutatható, hogy ha $\delta^2_{11} = \delta^0_{11} = -\delta^1_{11}$, akkor P együtthatói éppen kiejtik egymást.

b)
A második jelenségre a magyarázat az, hogy δ_0 nagyobb energián negatívvá válik, és δ-k járulékai kiejtik egymást. δ_l akkor lesz lesz negatív, ha a két nukleon potenciál taszító, tehát nagy energián.



$c \sim 0.5\,fm$

p-p szórásnál új jelenségek léptek fel, amiket az n-p szórásnál nem észleltünk. Az ok: a Pauli elv miatt bizonyos hullámok tiltottak, az n-p szórásnál sokkal több hullám ad járulékot, ez módosítja a kvalitatív képet. Bizonyos jelenségek csak p-p szórásnál figyelhetők meg.

Fázisanalízis
Az elmondottakból látható, hogy a potenciál meghatározására fázisanalízist kell végezni. Ez azt jelenti, hogy felírjuk a teljes potenciált, behelyettesítjük a Schrödinger egyenletbe, keressük a hullámfüggvény megoldást

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + (V_c + V_s(\sigma_1, \sigma_2) + V_{LS}\mathbf{LS} + V_T S_{12})\Psi = E\Psi,$$
$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1^a \\ \Psi_2^a\end{pmatrix}, \qquad \Psi^a \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum \frac{A_{lk}}{r} e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2} - \eta_l(r) - \delta_{l,j,s})}$$

alakban, és megoldjuk. A spinfüggés miatt $f(\Theta)$ mátrixszá válik. A hatáskeresztmetszet mérésekből meghatározzuk a $\delta_{l,j,s}$ fázisokat, és abból következtetünk a potenciál alakjára. Az eljárás természetesen nem egyértelmű, a potenciálokat elvi alapon valamilyen szabad paraméterekkel jellemzett r függő alakkal írjuk le és a fázisanalízisből ezeket a paramétereket kapjuk meg. Reid potenciál, kb. 40 paraméter van benne. (η_l csak akkor lép fel, ha Coulomb-szórás is van).

2.5 Két nukleon potenciál általános alakja a kísérletek alapján

1. Rövid hatótávolságú (magok mérete, α szórás)
2. Közel töltésfüggetlen (kis energiájú n-p, n-n, p-p szórás szóráshossza azonos)
3. Spinfüggő (d spinje 1, nincs bineutron)
4. Nem teljesen centrális (tenzorerő, deuteron kvadrupólmomentuma)
5. Kicserélő jellegűek (nagyenergiájú n-p hátraszórás)
6. Spin-pálya csatoló (nagyenergiájú p-p szórás közel izotróp)
7. Sebességfüggő vagy taszító törzsű (nagyenergiájú p-p szórás energiafüggetlen)

Potenciál hatása különböző állapotokban:

	$^1S_0$	$^3S_1$	$^1P_1$	$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$	$^1D_2$	$^3D_1$	$^3D_2$	$^3D_3$
V_c	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$V_S(\sigma_1\sigma_2)$	-3	$+1$	-3	$+1$	$+1$	$+1$	-3	$+1$	$+1$	$+1$
$V_{LS}(\mathbf{LS})$	0	0	0	-2	-1	$+1$	0	-3	-1	$+2$
$V_T S_{12}$	0	$^3D_1$	0	0	0	$^3F_2$	0	$^3S_1$	0	$^3G_3$

2.6 Potenciálok hely és sebességfüggése

Az eddigiekben elhanyagoltuk a sebességfüggést, de ez nem lokális potenciál esetében mindig fellép.

$$V\Psi(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')d^3r'$$

Fejtsük sorba ezt $\mathbf{r}' \sim \mathbf{r}$ körül. Mivel $\nabla = \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}$,

$$= V_0(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) + V_1(\mathbf{r})(\mathbf{r}\mathbf{p})\Psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}V_2(\mathbf{r})(\mathbf{r}\mathbf{p})^2\Psi(\mathbf{r}) + \dots$$

$$V_0(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}'\, V(\mathbf{r},\mathbf{r}'),$$

$$r_j V_1(\mathbf{r}) \sim \int d^3\mathbf{r}'\, (r_j' - r_j)V(\mathbf{r},\mathbf{r}'),$$

$$r_j r_k V_2(\mathbf{r}) \sim \int d^3\mathbf{r}'\, (r_j' - r_j)(r_k' - r_k)V(\mathbf{r},\mathbf{r}').$$

A nem lokális potenciál sebességfüggő potenciálnak felel meg.
Hogyan határozhatjuk meg a helyfüggést ?
Célszerű elméletből következtetni. Az egy mezon kicserélő potenciál, mint láttuk, a Yukawa potenciál:

$$V = -g\frac{e^{-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}_A|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_A|}.$$

Az egy bozon kicserélő potenciálok térelméletileg levezethetők, mint a következőkben majd látjuk.

2.7 Két nukleon potenciál általános alakja szimmetria elvekből

Szimmetria tulajdonságok

a.) Eltolási invariancia: csak $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, és $\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2$-től függhet.
b.) Időeltolási invariancia: időtől explicit módon nem függ
c.) Forgás invariancia: skalár kell hogy legyen
d.) Tértükrözési invariancia: paritás megmarad
e.) Időtükrözési invariancia: időparitás megmarad
f.) Két rész felcserélésével szembeni invariancia
g.) Izotóp spin z tengelye körüli forgás invariancia: töltésmegmaradás

Nézzük meg ezek után az egyes vektorok viselkedését az egyes operációk esetén.

2.7.1 Vektorok viselkedése szimmetrikus operációk esetén

	Tértükrözés	Időtükrözés
$\mathbf{r}$	V	$+$
$\mathbf{p}$	V	$-$
$\underline{\sigma}$	AV	$-$
$\underline{\sigma}_1 \times \underline{\sigma}_2$	AV	$+$
$\underline{\sigma} \times \mathbf{r}$	V	$-$
$\underline{\sigma} \times \mathbf{p}$	V	$+$
$\mathbf{r} \times \mathbf{p}$	AV	$-$

V: vektor, AV: axiálvektor.
V és AV vektoriális szorzata mindig V
V és V vektoriális szorzata mindig AV
AV és AV vektoriális szorzata mindig AV.

2.7.2 A legáltalánosabb potenciál szimmetriaelvek alapján

$V = V(r^2, p^2, L^2)$ függő, ezek külön nem szerepelnek.

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{r}\times\mathbf{p})(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \mathbf{L}^2 \\ (\mathbf{r}\mathbf{p})(\mathbf{r}\mathbf{p}) = \mathbf{r}^2\mathbf{p}^2 - \mathbf{L}^2 \\ \mathbf{r}\mathbf{r} = r^2, \qquad \mathbf{p}\mathbf{p} = p^2 \end{array}\right\} \text{ tehát ezek a kombinációk sem szerepelnek}$$

$$(\underline{\sigma}\mathbf{a})(\underline{\sigma}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) + i\underline{\sigma}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$\underline{\sigma}_1$, $\underline{\sigma}_2$ mindegyik csak egyszer fordulhat elő.

Invariáns szorzatok szimmetrikus operációk esetén:

	Időtükrözés	2 rész csere
1 (skalár)	+	+
$(\mathbf{rp})$	−	+
$(\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2)$	+	+
$(\underline{\sigma}_1+\underline{\sigma}_2)(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$	+	+
$(\underline{\sigma}_1-\underline{\sigma}_2)(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$	+	−
$(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})$	+	+
$(\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})$	+	+
$(\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})+(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})$	−	+
$(\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})-(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})$	−	−
$\big(\underline{\sigma}_1(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)\big(\underline{\sigma}_2(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)$	+	+
$(\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2)(\mathbf{rp})$	−	+
$\big((\underline{\sigma}_1+\underline{\sigma}_2)(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)(\mathbf{rp})$	−	−
$\big((\underline{\sigma}_1-\underline{\sigma}_2)(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)(\mathbf{rp})$	−	+
$(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})(\mathbf{rp})$	−	+
$\big((\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})+(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})\big)(\mathbf{rp})$	+	+
$\big((\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})-(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})\big)(\mathbf{rp})$	+	−
$\big(\underline{\sigma}_1(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)\big(\underline{\sigma}_2(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)(\mathbf{rp})$	−	+

Mivel csupa skalármennyiségről van szó, a tértükrözést nem kell külön vizsgálni.
Ezek alapján a legáltalánosabb potenciál:

$$V = V_1 + V_2(\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2) + V_3(\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r}) + V_4(\underline{\sigma}_1+\underline{\sigma}_2)(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) +$$

$$+V_5\big(\underline{\sigma}_1(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big)\big(\underline{\sigma}_2(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\big) + V_6(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p}) + V_7\big((\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{p})+(\underline{\sigma}_1\mathbf{p})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})\big)(\mathbf{rp}).$$

Itt minden V_i-re igaz, hogy:

$$V_i = U_i + W_i(\tau_1\tau_2).$$

Ha felteszük, hogy a potenciál p-től csak az $\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\mathbf{L}$ kombinációban függ, és bevezetjük a tenzorerőt,

$$\hat{S}_{12} = \frac{3(\underline{\sigma}_1\mathbf{r})(\underline{\sigma}_2\mathbf{r})}{r^2} - (\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2),$$

valamint a $\underline{\sigma}_1+\underline{\sigma}_2 = 2\hat{S}$ vektort,akkor

$$\hat{V} = V_c + V_S(\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2) + V_T\hat{S}_{12} + V_{LS}(\mathbf{LS}) + V_Q(\mathbf{LS})^2$$

adódik. Ez a legáltalánosabb potenciál, amit a szimmetriaelvek megengednek, és ez jön ki a kísérletekből is. A potenciál hatása szinglet és triplet állapotra:

$$\hat{V}\Psi\chi_S = \Big(V_c - 3V_S\Big)\Psi\chi_S.$$

$$\hat{V}\Psi\chi_T =$$

$$= \Big(V_c + 3V_S + \frac{1}{2}\big(J(J+1) - L(L+1) - 2\big)V_{LS} + \frac{1}{4}\big(J(J+1) - L(L+1) - 2\big)^2 V_Q\Big)\Psi\chi_T +$$

$$+V_T\hat{S}_{12}\Psi\chi_T.$$

2.8 Egy bozon kicserélő potenciálok

A kölcsönhatásokat levezethetjük egy effektív térelméletből is. Egy tetszőleges $\mathcal{L}$ Lagrange függvény esetén, ha az valamilyen téroperátortól és annak a deriváltjától függ, a Lagrange egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_\alpha)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\alpha} = 0.$$

A Ψ_α-hoz tartozó térimpulzus (Π_α)

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)}.$$

A teljes Hamilton operátor

$$H = \int (\Pi_\alpha \dot{\Psi}_\alpha - \mathcal{L}) d^3x.$$

Tekintsük skalár mezonok és nukleonok Lagrange függvényét.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left((\partial_\mu \Phi)^2 + m^2\Phi^2\right) - \overline{\Psi}(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\Psi + g_s \overline{\Psi}\Phi\Psi.$$

Az első két tag a szabad mezonok illetve nukleonok Lagrange függvénye, az utolsó tag a nukleonok és a mezonok kölcsönhatását írja le. A Lagrange egyenletek a két téroperátorra

$$\partial_\mu^2 \Phi - m^2\Phi = g_s \overline{\Psi}\Psi,$$
$$(\gamma^\mu \partial_\mu + M - g_s\Phi)\Psi = 0.$$

Látható, hogy az utolsó tagban bevezethetünk egy effektív tömeget:

$$M^* = M - g_s\Phi$$

A téregyenletek megoldása csak közelítőleg lehetséges. Az egyik megoldási mód az ún. átlagtér közelítés, ilyenkor szorzatot az átlagértékével helyettesítjük, és

$$\overline{\Psi}\Psi \to \langle \overline{\Psi}\Psi \rangle,$$
$$\overline{\Psi}\Psi\Phi \to \langle \overline{\Psi}\Psi \rangle \Phi.$$

Egy másik közelítő megoldás a Born közelítés. Vezessük be a szabad mezontér Φ_Q operátorát:

$$\partial_\mu \Phi_Q = -Q^2\Phi_Q \qquad Q = (\mathbf{q}, E)$$

A téregyenletekből Φ_Q kielégíti a

$$\Phi_Q = P\frac{g_s \overline{\Psi}\Psi}{m^2 + Q^2}$$

egyenletet. Mivel a kölcsönható tag nem függ $\partial_\mu\Phi$, $\partial_\mu\Psi$-től, a kölcsönható Hamilton operátor kölcsönható része:

$$H_k = -g_s\overline{\Psi}\Psi\Phi = -g_s^2\overline{\Psi}\Psi\frac{P}{m^2 + Q^2}\overline{\Psi}\Psi.$$

Born közelítés azt jelenti, hogy

$$\langle \varphi | H_k | \Psi \rangle \to \langle \varphi | H_k | \varphi \rangle$$

A kölcsönható Hamilton operátor mátrixeleme ezek szerint.

$$\langle i | H_k | i \rangle = -g_s^2 \sum_n \langle i | \overline{\Psi}\Psi | n \rangle \langle n | \frac{P}{m^2 + Q^2} | n \rangle \langle n | \overline{\Psi}\Psi | i \rangle,$$

ahol $|n\rangle$ egy lehetséges közbenső állapot, a Ψ-k pedig négy- komponensű spinorok. Némi számolás után a mátrixelem meghatározható.

A különböző mezonkicserélő potenciálok esetén a kölcsönhatás:

skalár	σ (nincs)	T=0 I=0 P=+	$\mathcal{L}_k = -g_\sigma \overline{\Psi}\Phi_\sigma\Psi$,
PS	η	T=0 I=0 P=−	$g_\eta \overline{\Psi}\gamma_5\varphi_\eta\Psi$,
Vektor	φ, ω	T=0 I=1 P=−	$-g_\omega \overline{\Psi}\gamma_\nu\varphi_\omega^\nu\Psi$,
Pszeudoskalár izovektor	π	T=1 I=1 P=−	$-g_\pi \overline{\Psi}\gamma_5\tau\varphi_\pi\Psi$,
Vektor - izovektor	ρ	T=1 I=1 P=−	$-g_{\rho 1}\overline{\Psi}\gamma_\nu\tau\varphi_\rho^\nu\Psi$,
			$+cg_{\rho 2}(p_1 + p_2)_\nu\overline{\varphi}_\rho\overline{\Psi}\Phi$.

Nemrelativisztikus közelítésben a két nukleon potenciálok:

$$V_s = -g_s^2 Y_s \left(1 - \frac{m_\sigma^2}{4m^2}\right) - g_s^2 Y_{LS}(\mathbf{LS}) + g_s^2 + \hat{Y}_p,$$

$$V_p = \frac{1}{2} g_p^2 Y_\sigma (\sigma_1 \sigma_2)(\tau_1 \tau_2) + g_p^2 Y_T S_{12} (\tau_1 \tau_2),$$

$$V_v = g_v^2 Y_s \left(1 + \frac{m_v^2}{2M^2}\right) - 3 g_v^2 Y_{LS}(\mathbf{LS}) - g_v^2 Y_T S_{12} + g_v^2 Y_\sigma (\sigma_1 \sigma_2) + g_v^2 \hat{Y}_p,$$

$$Y_s = \frac{e^{-mr}}{r} \quad Y_\sigma = \frac{m^2}{6M^2} Y_s \quad \hat{Y}_p = \frac{1}{2M^2}(Y p^2 + p^2 Y),$$

$$Y_T = \frac{m^2}{12M^2}\left(1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{m^2 r^2}\right) \quad Y_{LS} = \frac{1}{2M^2}\left(\frac{m}{r} + \frac{1}{r^2}\right).$$

Összefoglalva a következőt mondhatjuk az egyes mezon kölcsönhatásokról

Skalár :	vonzó centrális tag
	vonzó spin-pálya tag
	taszító sebességfüggő tag
Pszeudoskalár:	spinfüggő tag
	tenzorerő
Vektor:	taszító centrális tag
	spin-pálya tag
	tenzorerő
	spinfüggő tag
	taszító sebességfüggő tag
Tenzor:	minden tag szerepel benne

Legfontosabb potenciálok:

Vonzó mezon (2 pion kicserélés, σ)

Taszító mezon (ω)

3. Fejezet

Alapállapotú atommagok

3.1 Magmodellek

3.1.1 Modellalkotás a magfizikában, maganyag fogalma

Az atommagok több száz szabadsági foktól függenek, ilyen hullámfüggvények Schrödinger egyenletét nem tudjuk megoldani. Valami módon néhány szabadsági foktól függő egyenletek megoldására kell a problémát visszavezetni.
Az alapegyenlet a Schrödinger egyenlet, azaz időtől független esetben $H\Psi = E\Psi$. A Hamilton operátor, feltételezve hogy a magerők kéttest erők,

$$H = \sum_i t_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} v_{ij}, \qquad t_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i$$

alakban írható, ahol v_{ij} a két nukleon közötti kölcsönhatás operátora, t_i pedig a kinetikus energiáé. A v operátor függhet a spin operátortól, az impulzustól, stb. A Schrödinger egyenlet közelítő megoldására a módszer a perturbációszámítás. Kiindulunk egy H_0 perturbálatlan operátorból, és annak Φ sajátfüggvényéből. A teljes Hamilton operátor

$$H = H_0 + H_1, \qquad H_0\Phi = E\Phi,$$

alakban írható. Φ egy tetszőleges hullámfüggvény, amiről azt tételezzük fel, jó közelítésben leírja az atommagot.. H_0 az ennek megfelelő Hamilton operátor.

A modellalkotásnál az alapkérdés az, mi az a néhány szabadsági fok, ami jellemző az atommagra. Egyik lehetőség az, hogy a magot az alakjával jellemezzük, és a hullámfüggvény az alakparaméterektől függ. Ezt a modellt nevezzük kollektív típusú modellnek, mert a mag egészét leíró kollektív mozgást jellemző paraméterektől függ. Ha a mag sugara

$$R = R_0\left[1 + \sum_{\lambda\geq 2}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}\right],$$

akkor a hullámfüggvény az $\alpha_{\lambda\mu}$ paraméterek függvénye.

A modellek másik legegyszerűbb típusa az, amikor a hullámfüggvényt egyrészecske hullámfüggvények antiszimmetrizált szorzataként írjuk fel. Ilyenkor a Hamilton operátorban H_0-t egyrészecske operátorok összegének választjuk

$$H_0 = \sum (t_i + V_i).$$

A teljes hullámfüggvény

$$\Phi = \mathcal{A}\prod_{i=1}^{A} \psi_i,$$

ahol a ψ_i-k az egyrészecske Schrödinger egyenletek megoldásai. Ezeket a modelleket nevezzük független részecske modelleknek, és az egyes modellek abban különböznek egymástól, hogyan választjuk meg az egyrészecske V_i potenciált.. Teljesen világos, hogy a kétféle modell típus teljesen különböző magról alkotott elképzelésnek felel meg. A kollektív modellnek az az alapfeltevése, hogy az atommag alkotórészei a magon belül elvesztik individualitásukat, beleolvadnak a mag egészébe. Ilyen rendszer a folyadék, a folyadékban nem beszélhetünk egyedi nukleonokról, csak a folyadék egészéről. Ezért az első ilyen modellt cseppmodellnek nevezték el. A független részecske modell alapfeltevése az, hogy a nukleonok egymástól közel függetlenül mozognak egy átlagos potenciálvölgyben, miközben megőrzik individualitásukat és kvantumszámaikat..

3.1.2 Maganyag

A modellalkotásnál segítséget nyújt egy fiktív rendszer, a maganyag fogalma. Ha a protonok között nem hatna elektromos taszítás, a magnak a legkedvezőbb állapota egy végtelen nagy, azonos neutron és protonszámból álló rendszer lenne. Ezt a fiktív rendszert nevezzük maganyagnak. Az erős kölcsönhatás szempontjából célszerű a maganyagot bevezetni, mert a magerők hatását ebben a rendszerben lehet legjobban vizsgálni.

3.1.3 Magmodell típusok

1.) Cseppmodell

   1.a) Kollektív modell (visszatérés a cseppmodellhez)

2.) Független részecske modellek

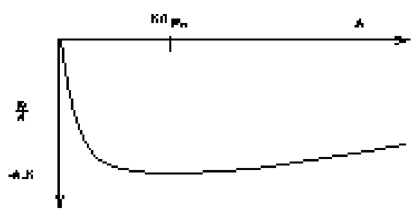
   2.a) Ezek egy típusa: megengedünk kis deformációt.

   2.b) Szelfkonzisztens független rész modellek (Hartree Fock)

3.) Egyesített magmodell

3.2 Telítettség és cseppmodell

A cseppmodell az atommag kísérleti tulajdonságai közül jól tudta magyarázni a kötési energiát és a telítettséget.. Ha megnézzük az egy nukleonra eső kötési energiát a tömegszám függvényében



azt látjuk, hogy átlagosan az egy nukleonra eső kötési energia azonos, kb. 8 MeV . Az egy részecskére eső kötési energiát az ún. félempirikus energia formulával lehet jól leírni.

$$B = -c_1 A + c_2 A^{\frac{2}{3}} + c_3 \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 A - c_4 \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 A^{\frac{2}{3}} + c_5 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + c_6 \frac{\delta}{A^{0.75}},$$

ahol

$$\delta = \begin{cases} -1 & ps \quad ps \quad \text{magra} \\ 0 & ptl \quad\quad\;\; \text{magra} \\ +1 & ptl \quad ptl \quad \text{magra} \end{cases}$$

Az együtthatók értékei :

$$
\begin{array}{lll}
c_1 \sim 15-16\,MeV, & c_3 \sim 32\,MeV, & c_5 = 0.71\,MeV, \\
c_2 \sim 18-20\,MeV, & c_4 \sim 45\,MeV, & c_6 = 16\,MeV.
\end{array}
$$

Mivel az atommagok közel gömbalakúak, és a mag sugara illetve átlagsűrűsége első közelítésben

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad r_0 \sim 1.2\,fm, \quad \rho_0 = \frac{A}{V} \sim 0.16\,fm^{-3}$$

a félempirikus kötési energia formula első tagja a térfogattal arányos vonzó kifejezés, a második tag a felülettel arányosan csökkenti ezt a vonzást. A harmadik és negyedik tag az ún. térfogati és felületi szimmetria tag, az ötödik tag a Coulomb energia és végül az utolsó tag a párenergia.

A cseppmodell alapján az első két tag világos, a második tag adja meg a felületi energiát, amelyik a folyadékoknál található felületi feszültségnek felel meg. A szimmetria energiák oka a Pauli elv. A legalacsonyabb energia állapotban a Pauli elv szerint csak egy részecske helyezkedhet el, de ha a neutronok és a protonok különböző részek, két részecske van a legmélyebb állapotban. A szimmetria tagok az N=Z esetet favorizálják.

A párenergia felléptét kísérleti megfigyelések indokolják. A periódusos rendszerben kb. 250 olyan atommag van, amiben a neutron és protonszám páros, kb. 130-130 olyan, amiben csak egyik páros és végül összesen csak 4 olyan atommag van, amelyikben mindkét részecskeszám páratlan. Valahogy úgy néz ki, hogy a páros neutron ill. protonszámú magok erősebben vannak kötve. Ennek a tagnak a felléptét a magszerkezeti vizsgálatoknál meg kell érteni.

A félempirikus kötési formulában jól látható a telítettség jelensége. A Coulomb energia a protonszám négyzetével arányos, míg a vonzó nukleáris energia csak a részecskeszámmal.

A maganyag energiáját megkapjuk, ha elhagyjuk a Coulomb energiát. Ilyenkor N=Z, és a rendszer végtelen lesz, azaz csak az első tag marad meg. Az energia -16 MeV részecskénként, azaz egyaktul tömegszám független. Ezt a jelenséget nevezzük energia telítettségnek.

Az energia telítettsége egyúttal a sűrűség telítettségét is jelenti. Ez a folyadékoknál ismert jelenség: a tenger vize és egy pohár víz első közelítésben egyformán sűrű. A folyadékcsepp modell alapján tehát érthető a telítettség. A független részecske modellek alapján azonban látszólag nem lehet megérteni, hogy a két nukleon kötésekből származó energia miért nem a tömegszám négyzetével arányos. Ez a körülmény okozta a cseppmodell kezdeti sikereit, és ezeket a sikereket csak megerősítette a hasadásról 1938-ben Bohr által adott magyarázat.

3.3 Független részecske modellek

A cseppmodellre a döntő csapást a mágikus számok léte mérte. Vannak olyan neutron illetve protonszámú magok, amelyek különlegesen stabilak, az utolsó nukleonok erősen kötöttek bennük, sok stabil izotóp van adott neutron ill. protonszám mellett, és a kötési energiák kiemelkedően magasak. Ezek a számok: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Hasonló jelenséget ismerünk az atomfizikából: ilyen különleges tulajdonságokkal rendelkeznek a nemesgázok. Az elektronok az atommag Coulomb terében első közelítésben egymástól mintegy függetlenül mozognak. Minden egyes elektront adott kvantumszámok, jellemeznek. Az energiák degeneráltak: különböző kvantumszámokhoz tartozó állapotoknak azonos energiája van. Ha egy adott energiaértékhez tartozó valamennyi elektronállapot be van töltve, különlegesen stabil atom keletkezik, amelyik nehezen vesz részt kémiai kötésben, nehezen vesz fel vagy ad le elektront.
Az atomban azonban érthető ezeknek az állapotoknak a jelenléte: a mag elektron kölcsönhatás mellett az elektronok közti kölcsönhatás, amíg nem túl sok elektron van, elhanyagolható.

A magon belül nincs egy centrális erő, ami a különleges nukleonszámok felléptét előidézhetné. A magerők erősek, nem érthető, hogy ezek mi mellett hanyagolhatók el első közelítésben.

A mágikus számok léte azonban mégis azt bizonyította, hogy a magokon belül a független részecske modell kép a jó közelítés. A továbbiakban minden használandó modell ezen alapszik, és ezekkel kell az atommagok megfigyelt tulajdonságait megmagyarázni.

3.3.1 Fermi gáz modell

A független részecske modellben, mint láttuk, a hullámfüggvény egyrészecske hullámfüggvények antiszimmetrizált szorzata. A legegyszerűbb közelítés az, amikor perturbálatlan hullámfüggvényeknek a kinetikus energia operátor sajátfüggvényei, azaz síkhullámokat tekintünk. Ezt a modellt nevezik Fermi gáz modellnek.

$$H\Psi = E\Psi, \qquad H_0\Phi = E_0\Phi, \qquad H_0 = \sum t_i, \qquad \Phi = \mathcal{A}\prod_{i=1}^{A}\psi_i$$

A teljes energia

$$E = \frac{(\Phi, H\Psi)}{(\Phi, \Psi)} = E_0 + \frac{(\Phi, H_1\Psi)}{(\Phi, \Psi)},$$

ami Born közelítésében

$$E_B = E_0 + \frac{(\Phi, H\Phi)}{(\Phi, \Phi)} = (\Phi, H\Phi).$$

Ha a perturbálatlan hullámfüggvényt behelyettesítjük a Schrödinger egyenletbe, és balról skalárisan szorozzuk az A-1 részecske hullámfüggvényével, kihagyva belőle az i-ik állapotot,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i\psi_i = e_i\psi_i$$

egyenlet adódik. Ennek megoldása síkhullámfüggvény.
Figyelembe véve, hogy a részecskéket spin és izospin érték is jellemzi, az egyrészecske állapotot jellemző hullámfüggvény

$$\psi_i = \varphi_i(\mathbf{r})\chi_i\tau_i, \qquad \varphi_i = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}.$$

A kinetikus energia most éppen a perturbálatlan energiával egyezik meg:

$$E_0 = T = \frac{1}{\Omega}\sum\frac{\hbar^2}{2m}k_i^2 = \sum_i(\psi_i, t\psi_i)$$

Az energia kiszámításához térjünk át összegezés helyett integrálásra. A statisztikus fizika értelmében a lehetséges állapotok száma:

$$N = \sum_{i=1}^{N} 1 = \int\int_0^{p_N} dn(p)$$

$$dn = g\frac{d\Omega \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

ahol p_N a maximális p érték, ameddig az állapotok be vannak töltve. Ezt Fermi szintnek szokás nevezni. g az egy energia állapotban található részek száma (spin izospin faktor). Az állapotszám a fázistérfogat osztva az elemi Planck féle cella méretével. Bevezetve a $p = \hbar k$ jelölést:

$$N = \frac{\Omega k_N^3}{6\pi^2}g \qquad k_N = \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}$$

Az integrálást elvégezve megkapjuk a részecskeszám és a Fermi impulzus közti összefüggést. Két spin és két nukleon típus esetén $g = 4$, két spin esetén $>= 2$, így

$$k_n = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}}\rho_n^{\frac{1}{3}} \qquad \rho = \rho_n + \rho_p \qquad k_F = \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}$$

A kinetikus energia:

$$T = \sum\frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \Omega\frac{\hbar^2}{2m}\frac{3}{5}\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{5}{3}} = \frac{3\hbar^2}{10m}A\left(1+\frac{5}{9}\alpha^2\right)\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{2}{3}},$$

$$\alpha = \frac{N-Z}{A}.$$

A potenciális energia meghatározása egy kicsit nehezebb feladat, mert itt antiszimmetrizált kétrészecske hullámfüggvényeket kell figyelembe venni. Könnyű ugyanis belátni, hogy az egy részecske hullámfüggvények ortogonalitása miatt csak ezek adnak járulékot. A kétrészecske hullámfüggvényt szét lehet választani térbeli, spin és izospin hullámfüggvények szorzatára (három részecske esetén ez már nem igaz).

$$\Psi_{ij} = \varphi_{ij}\chi_{ij}\tau_{ij}.$$

A teljes hullámfüggvény antiszimmetrikus kell hogy legyen. Figyelembe véve, hogy a triplet spin ill. izospin hullámfüggvények szimmetrikusak, a szingletek antiszimmetrikusak

Izospin	Spin	Valószínűség	Térbeli rész
T=1	S=1	9/16	antiszimm.
T=1	S=0	3/16	szimm
T=0	S=1	3/16	szimm
T=0	S=0	1/16	antiszimm.

azaz a térbeli rész 3/8 valószínűséggel szimmetrikus, 5/8 -dal antiszimmetrikus.

A szimmetrikus ill antiszimmetrikus térbeli kétrészecske hullámfüggvény síkhullámok esetén

$$\varphi_{ij}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \phi_{ij}(\mathbf{r}_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi_i(\mathbf{r}_1)\varphi_j(\mathbf{r}_2) \pm \varphi_i(\mathbf{r}_2)\varphi_j(\mathbf{r}_1)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}\Omega}e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})$$

ahol

$$\mathbf{R} = \tfrac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$
$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \qquad \mathbf{k} = \tfrac{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}{2}.$$

A potenciális energia mátrixeleme

$$V_{ij} = (\varphi_{ij}(\mathbf{kr})|v(\mathbf{r})|\phi_{ij}(\mathbf{kr})),$$

ami szimmetrikus és antiszimmetrikus részre összegezve, R-re és a szög szerint integrálva

$$V_{ij} = \frac{3}{8\Omega}\int d^3r\, v(\mathbf{r})(1+\cos 2\mathbf{kr}) + \frac{5}{8\Omega}\int v(\mathbf{r})(1-\cos 2\mathbf{kr})d^3r = \frac{4\pi}{\Omega}\int v(r)r^2dr\left[1 - \frac{1}{4}\frac{\sin 2kr}{2kr}\right].$$

Helyettesítsünk v(r) helyébe Yukawa potenciált, és integráljunk r-re

$$V_{ij} = -\frac{4\pi v_0}{\Omega}\left[\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{4k^2+\mu^2}\right].$$

Látható, hogy a kicserélő tag sebességfüggő.
Az itt szereplő mátrixelem két részecske hullámfüggvénye között van kiszámolva. Ha a teljes hullámfüggvénnyel számolunk

$$E_{pot} = (\Phi|V|\Phi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\phi_{ij}|V|\phi_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\varphi_{ij}|V|\phi_{ij})$$

azaz éppen a V_{ij} kifejezés impulzusra való kettős összegezése lesz. A kettős összegezést csak k-tól függő kifejezés esetén átalakíthatjuk k szerinti összegezéssé.

$$\sum_i\sum_j = \left[\frac{4\cdot 4\pi\Omega}{(2\pi)^3}\right]^2\int_0^{k_F}k_i^2dk_i\int_0^{k_F}k_j^2dk_j = \frac{16\Omega^2}{3\pi^4}\int_0^{k_F}k^2dk\left[2k_F^3 - 3k_F^2k + k^3\right].$$

$\frac{\mu}{2k_F} \ll 1$ esetén sorbafejtve és integrálva a potenciális energia

$$E_{pot} = -\frac{2\pi v_0}{\mu^2}A\rho\left(1 - \frac{9}{16}\frac{\mu^2}{k_F^2}\right) = -A\beta\rho + A\gamma\rho^{\frac{1}{3}}.$$

Az egy részecskére jutó teljes energia maganyagra

$$W = \frac{E}{A} = \alpha\rho^{\frac{2}{3}} - \beta\rho + \gamma\rho^{\frac{1}{3}}.$$

Ez a kifejezés nem telített a sűrűségben, legmélyebb energia állapota

$$\rho = \infty.$$

Látható, hogy nem a magerők rövid hatótávolsága okozza a telítettséget: itt rövid hatótávolságú erőkkel számoltunk, és az energia mégsem telített.
Hogyan lehet telítettséget elérni?
Legegyszerűbb eset, ha $v = -v_0 + v_1 k^2$ sebességfüggő magerőt használunk, mint már az előzőekben is. Ekkor a v_1-es tag előjele ellenkező, mint v_0-é, és $\rho^{\frac{2}{3}}$-nál magasabb ρ függvény szerepel benne, azaz

$$W = \frac{E}{A} = \alpha\rho^{\frac{2}{3}} - \beta\rho + \gamma\rho^{\frac{1}{3}} + \delta\rho^{\frac{5}{3}},$$

ami már telített ρ-ban.

3.3.2 Harmonikus oszcillátor modell

A Fermi gáz modell nyilvánvalóan végtelen maganyagra igaz, hiszen a síkhullámokból képzett sűrűség

$$\rho = const$$

azaz mindenütt egyformán valószínű. Véges magokra olyan egyrészecske potenciált kell választanunk, amelyiknél a kapott sűrűség a mag sűrűségével közel megegyezik. Első közelítésben tekintsünk egy harmonikus oszcillátor potenciált.

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = V_0\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right).$$

Az egy-részecske Schrödinger egyenletek ilyenkor

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi_n(\mathbf{r}) + V_0\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}).$$

Kvantummechanikából ismert, hogy ezeket a parciális differenciálegyenleteket szétválasztással megoldhatjuk. Ha a hullámfüggvényt

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \varphi_{n_1}(x)\varphi_{n2}(y)\varphi_{n_3}(z)$$

alakban keressük, meglapjuk az egydimenziós harmonikus oszcillátor egyenleteket.

$$\frac{d^2\varphi_{n_i}}{dx_i^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(e_{n_i} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi_{n_i} = 0.$$

Ezeknek a megoldásai a Hermite polinomok, és az energia értékek

$$e_{n_i} = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right).$$

A teljes energia a három részenergia és a konstans potenciális energia összege

$$E_n = -V_0 + e_{n_1} + e_{n_2} + e_{n_3} = -V_0 + \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right),$$

ahol $n = n_1 + n_2 + n_3$.
Látható, hogy egy adott E energiához több állapot tartozik, azaz az állapotok degeneráltak. A degeneráltság foka

$$N = 2\sum_{k=0}^{n}(n + 1 - k) = 2\sum_{k=0}^{n}(k + 1) = (n + 1)(n + 2),$$

ahol a 2 szorzó a kétféle spinállapot miatt lép fel.

Nézzük meg, milyen mágikus számokat ad a harmonikus oszcillátor modell

n	0	1	2	3	4	5	6
N	2	6	12	20	30	42	56
L	0	1	0 2	1 3	0 2 4	1 3 5	0 2 4 6
N	2	6	2 10	6 14	2 10 18	6 14 22	2 10 18 26
$\sum$N	2	8	20	40	70	112	168

Írjuk fel a harmonikus oszcillátor egyenletet polárkoordinátákban, kvantumszámok n,l,m. Adott n esetén l 0 és n között változhat, de paritás megmaradás miatt vagy páros, vagy páratlan. 2 spin miatt adott l-hez $2(2l+1)$ állapot tartozik. Harmonikus oszcillátor potenciál nem írhatja jól le a magot ugyanis $V \to \infty$ ha $r \to \infty$, a valódi V ezzel szemben 0-hoz tart.
A használandó potenciál alakjára információt nyerhetünk a sűrűség-eloszlásból. Végtelen maganyagban

$$\rho(r) \sim k_F^3(r)$$

Legegyszerűbb esetben

$$E_F = T_F + V = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2(r) + V$$

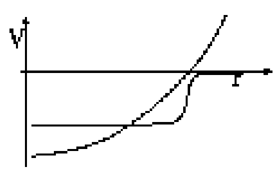
Tehát a potenciál alakja

$$V \sim E_F - c\rho^{\frac{2}{3}}.$$

Ennek a módosított változatát hívják Saxon-Woods potenciálnak.

$$V \sim \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

A Saxon Woods és harmonikus oszcillátor potenciál összehasonlításából látható, hogy az első a szélén mélyebb, a közepén kevésbé mély. Hogy változtatja ez mágikus számokat?



Az ábrából látható, hogy mélyíti a nagy l-ű állapotok energiáját.

1949-ben Mayer-Jensen : spin-pálya csatolás van egyrészecske potenciálban. (Relativisztikus tárgyalásban nemrelativisztikus közelítést véve ez magától kijön)

$$V = -V_c + 2V_{LS}\mathbf{LS} = -V_c + V_{LS}(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi_n - V\varphi_n + V_{LS}(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2)\varphi_n = E_n\varphi_n.$$

$$E_{nlj} = E_{nl} - V_{LS}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right).$$

$$j_> = l + \tfrac{1}{2} \qquad 2(2l+1) = (2j_> + 1) + (2j_< + 1).$$
$$j_< = l - \tfrac{1}{2}$$

Ezek után a mágikus számok:

n	l	j	N	$\sum N$
0	0	1/2	2	2
		3/2	4	
1	1	1/2	2	8
		5/2	6	
2	2	3/2	4	20
	0	1/2	2	
	3	7/2	8	28
3		5/2	6	
	1	3/2	4	
		1/2	2	50
	4	9/2	10	
		7/2	8	
4	2	5/2	6	
		3/2	4	82
	0	1/2	2	
	5	11/2	12	
		9/2	10	
5	3	7/2	8	
		5/2	6	
	1	3/2	4	126
6		1/2	2	
	6	13/2	14	

3.3.3 Hartree Fock közelítés

Kérdés, milyen a legjobb egyrészecske potenciál. Eddig sűrűség analógia alapján választottuk. A válasz variációszámítással kapható meg. Egy tetszőleges hullámfüggvényt sorbafejtve a H sajátfüggvényei szerint.

$$\Phi = \sum c_k \psi_k,$$

ahol

$$H\psi_k = E_k \psi_k.$$

Az E_k energiák közül E_0 a legmélyebb, így

$$\langle \Phi | H | \Phi \rangle = \sum c_k c_{k'} E_k \langle \psi_k | \psi_{k'} \rangle = \sum |c_k|^2 E_k \geq E_0,$$

azaz tetszőleges hullámfüggvénnyel képezve H sajátértékét, az mindig nagyobb a valódi energiánál. Feltételes variációszámítással ortogonális függvényeket használva

$$W = \langle \Phi | H | \Phi \rangle = \sum_i \langle \varphi_i | t | \varphi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle \varphi_i \varphi_j | \bar{v} | \varphi_i \varphi_j \rangle,$$

$$\delta \big(W - \sum e_i \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle \big) = 0.$$

ahol $\sum_{i,j} \langle \varphi_i \varphi_j | \bar{v} | \varphi_i \varphi_j \rangle$ antiszimmetrizált mátrixelemet jelent.
Innen megkapjuk a hullámfüggvényekre vonatkozó egy-részecske egyenletrendszert:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi_i(\mathbf{r}_1) + \sum \langle \varphi_j(\mathbf{r}_2) | v | \varphi_j(\mathbf{r}_2) \varphi_i(\mathbf{r}_1) \rangle - \sum_j \langle \varphi_j(\mathbf{r}_2) | v | \varphi_i(\mathbf{r}_2) \varphi_j(\mathbf{r}_1) \rangle = e_i \varphi_i(\mathbf{r}).$$

Bevezetve a

$$\int \rho(\mathbf{r}_2)v(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}_2\varphi_i(\mathbf{r}_1) - \sum_j \int \varphi_j(\mathbf{r}_2)^* v(\mathbf{r})\varphi_i(\mathbf{r}_2)d^3\mathbf{r}_2\varphi_j(\mathbf{r}_1) = \int V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

jelölést,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi_i(\mathbf{r}) + \int V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = e_i\varphi_i(\mathbf{r})$$

lesz az egyenlet.
A megoldandó egyenletekben célszerű a nem lokális potenciálok helyett ekvivalens lokális potenciált használni

$$U_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{r})}\int V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}', \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi_i(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\varphi_i(\mathbf{r}) = e_i\varphi_i(\mathbf{r}).$$

A megoldás önkonzisztens módszerrel kapható meg:

$$W = \sum\langle\varphi_i|t|\varphi_i\rangle + \frac{1}{2}\sum\langle\varphi_i\varphi_j|v|\varphi_i\varphi_j\rangle \neq \sum e_i$$

A teljes energia nem az egyrészecske energiák összege, míg a héjmodellben az volt.

3.3.4 Független részecske modellek

A független részecske modell lényege: a nukleonok egymástól közel függetlenül mozognak egy átlagos, valamennyi nukleon által kialakított potenciálvölgyben.
Ilyen potenciálvölgyet csak Hartree-Fock közelítésben kapunk. A többi független részecske modell egy külső, a mag nukleonjától független potenciálvölgyet használ. *A teljes hullámfüggvény első közelítésben egyrészecske hullámfüggvények antiszimmetrikus szorzata.*

Foglaljuk össze a független részecske modelleket:

$$H = H_0 + H_1 = \sum t_i + \frac{1}{2}\sum v_{ij}$$

$$H_0\Phi = E_0\Phi, \qquad H\Psi = E\Psi, \qquad \Phi = \mathcal{A}\prod_{i=1}^{A}\varphi_i.$$

$$E = E_0 + \frac{(\Phi, H_1\Psi)}{(\Phi,\Psi)}.$$

Born közelítés : $\quad E = E_0 + (\Phi, H_1\Phi) = (\Phi, H\Phi).$

A független rész modellek abban különböznek, hogyan választjuk H_0-t:

1. Végtelen rendszer: Fermi gáz modell

$$H_0 = \sum t_i \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi_i = e_i\varphi_i$$

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\chi_i\tau_i$$

2. Harmonikus potenciál, héjmodell, stb.

$$H_0 = \sum(t_i + V_i), \qquad H_1 = \frac{1}{2}\sum v_{ij} - \sum V_i,$$

$$-\tfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi_i + V_i\varphi_i = e_i\varphi_i, \qquad \text{lokalizált.}$$

$$\begin{array}{lll} V_i = V_{HO}, & V_i = V_{Saxon\text{-}Woods}, & V_i = V_{SW} + V_2\mathbf{LS}, \\ E = E(n) & E = E(n,l), & E = E(n,j). \end{array}$$

3. A potenciál önkonzisztensen van meghatározva : Hartree-Fock számolás

$$V_i\varphi_i = \sum_j (\varphi_j|\hat{v}_{12}|\varphi_j\varphi_i) = \int V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_i(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\varphi_i(\mathbf{r}) = e_i\varphi_i(\mathbf{r}),$$

$$U_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{r})}\int V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_i(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'.$$

3.3.5 Héjmodell alkalmazása

A fentiek alapján a magot két részre választjuk a héjmodellben egy zárt, inert törzsre, és a törzsön kívül levő nukleonokra. Az extrém héjmodellnél egy fokkal jobb közelítást kapunk, ha a külső nukleonok közti kölcsönhatást figyelembe vesszük: $\sum = \sum_{\text{Zárt}} + \sum_{\text{Maradék}}$ (ez utóbbit $\sum'$-vel jelöljük a következőkben)

$$E = \sum(\varphi_i|t|\varphi_i) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_i\varphi_j) =$$

$$= \sum_Z(\varphi_i|t|\varphi_i) + \frac{1}{2}\sum_Z\sum_Z(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_i\varphi_j) +$$

$$+\sum{}'(\varphi_i|t|\varphi_i) + \sum_{j\in Z}\sum_i{}'(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_i\varphi_j) + \frac{1}{2}\sum_i{}'\sum_j{}'(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_i\varphi_j) =$$

$$= E_0 + \sum{}'(\varphi_i|t + V_{eff}|\varphi_i) + E_m,$$

ahol

$$\sum{}'(\varphi_i|V_{eff}|\varphi_i) = \sum_i{}'\sum_{j\in Z}(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_i\varphi_j),$$

$$E_m = \frac{1}{2}\sum_i{}'\sum_j{}'(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_i\varphi_j).$$

Legyen a külső törzsön kívül két nukleon. A Hamilton operátor

$$H_0 = H_{\text{törzs}} + H_{01} + H_{02},$$

$$H_{0i} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V_{eff}(\mathbf{r}_i).$$

Ennek a sajátfüggvénye

$$\Phi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2) = \varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_2}(x_2)$$

ahol $\varphi_{\alpha i}$ $j_i^2, l_i^2, S_i^2, j_{iz}$ sajátfüggvénye.
Beszélhetünk tehát j-j ill L-S csatolásról, aszerint hogy az impulzusmomentumokat hogy adjuk össze. A héjmodell csatolás zárt héjak közelében j-j csatolást indokol, de a zárt héjaktól messze ez már nem biztos. Nézzük most a maradék kölcsönhatást. H sajátfüggvényei Φ_α-k, ezekből képzünk teljes hullámfüggvényt.

$$\psi = \sum_\alpha c_\alpha\Phi_\alpha.$$

A Hamilton operátort diagonalizálni kell.

$$\sum_\alpha c_\alpha|H_0 + v_{12}|\Phi_\alpha) = E_\alpha\sum c_\alpha|\Phi_\alpha), \qquad / \quad \sum_\alpha(\alpha'|$$

$$\sum_\alpha\left[\delta_{\alpha\alpha'}(E_\alpha - E_{\alpha'}) + (\alpha'|v_{12}|\alpha)\right]c_\alpha = 0.$$

3.3.6 Az egyrészecske energia fogalma

A független részecske modellben mindig definiálhatunk egyrészecske energiát.

$$\begin{array}{ll} \Phi = \mathcal{A}\prod \varphi_i, & H_0 = \sum(\hat{t}_i + \hat{V}_i) = \sum \hat{h}_i, \\ \hat{h}_i\varphi_i = e_i\varphi_i, & e_i = (\varphi_i|\hat{h}_i|\varphi_i) = t_i + V_i, \\ t_i = (\varphi_i, \hat{t}\varphi_i), & V_i = (\varphi_i|\hat{V}_i|\varphi_i). \end{array}$$

Héjmodellnél az energia: $E_0 = \sum(t_i + V_i) = \sum e_i$.
Külső potenciál van, az eredmény erősen közelítő.
Hartree-Fock számolás

$$e_i = t_i + (\varphi_i|\hat{U}_i|\varphi_i) = t_i + U_i,$$

$$E = \sum t_i + \frac{1}{2}\sum(\varphi_i\varphi_j|\hat{v}_{12}|\varphi_i\varphi_j) =$$

$$= \sum t_i + \frac{1}{2}\sum U_i = \frac{1}{2}\sum e_i + \frac{1}{2}\sum t_i.$$

U_i most lényegesen állapotfüggő, nem zárt héjak esetén például deformált lesz.
Önkonzisztens potenciál esetén, amikor a nukleonok együttesen alakítják ki azt a potenciálvölgyet, amiben mozognak, az energia nem az egyrészecske energiák összege. Ez a fizikai valóság.

3.3.7 Független részecske modell alkalmazhatóságának oka

A modell akkor alkalmazható, ha a részecskék megtartják kvantumszámaikat.
Képzeljünk el egy rendszert, ahol a nukleonok kezdetben mind adott kvantumszámokkal rendelkeznek. Két nukleon ütközése után azonban ezek a kvantumszámok megváltoznak. Mivel a kölcsönhatás erős, sok ütközés következhet be, a kvantumszámok teljesen összekavarodnak, és végül nincs már értelme beszélni róluk. Miért nem így van ez?
Az ok elsősorban a Pauli elv. A Pauli elv értelmében két nukleon kölcsönhatása során nem kerülhet olyan állapotba, amiben már van egy részecske. Tehát az ütközés során csak akkor változik meg a kvantumszám, ha a k érték a Fermi szint fölé kerül.
A határozatlansági reláció értelmében $\Delta\tau$ ideig fennállhat $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta\tau}$ energiabizonytalanság, azaz két részecske bizonyos valószínűséggel a Fermi szint fölé kerülhet. Nézzük meg ennek a feltételét.

Tekintsünk két nukleont kezdeti síkhullám állapotban, k_1 k_2 hullámszámmal. Hasson közöttük a két nukleon V mély derékszögű potenciállal. A relatív Schrödinger egyenlet

$$\frac{d^2u}{dr^2} + K^2u = 0 \qquad r < b,$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k^2u = 0 \qquad r > b.$$

A szórás során egy részecske k hullámszáma legfeljebb K értékkel változhat, ahol

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)} \sim \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0}.$$

A Fermi szint fölé kerülés feltétele az, hogy $K > k_F = \left(\frac{3\pi^2}{2}\rho\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$V_0 > \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{2}\rho\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Maganyagban $k_F = 1.36\, fm^{-1}$, tehát a független részecske modell alkalmazhatóságának a feltétele

$$V_0 < 40MeV.$$

A Pauli elv mellett tehát a rendkívül nagy maganyag sűrűség a modell alkalmazhatóságának az oka. Hiába erősek a potenciálok, annyira nem, hogy egy átlagos ütközésnél a Fermi szint fölé kerüljenek a nukleonok.

3.4 Magmomentumok független részecske modell alapján

3.4.1 Spin

Zárt héjú magban minden állapot be van töltve, a mag gömbszimmetrikus, a teljes impulzusmomentum zérus. A mag spinje alatt a teljes impulzusmomentumát értjük.

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \sum \mathbf{j}_k,$$

Tapasztalati tény, hogy minden páros páros mag impulzusmomentuma zérus. Ez csak úgy lehet, ha két nukleon impulzusmomentuma azonnal összeadódik ellentétesen. Az állapot betöltődése mindig a legmagasabb m értékkel kezdődik.

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = 0, \qquad (j_1)_z = j(j_2)_z = -j(j_3)_z = j - 1, \qquad (j_4)_z = -j + 1 \ldots$$

Páratlan mag impulzusmomentuma az utolsó nukleon impulzusmomentuma, ebből tudjuk meghatározni, hogy töltődnek be a nívók egymás után. A felhasadás sorrendje a már ismertetett. Elmélet és tapasztalat teljes egyezése.

3.4.2 Elektromágneses kvadrupólmomentum

A mag viselkedését ρ töltéssűrűséggel és $\mathbf{j}$ áramsűrűséggel jellemezhetjük. Elektromágneses térben ha a tér skalár ill vektorpotenciálja Φ és $\mathbf{A}$, a potenciális energia:

$$U(\mathbf{R}) = \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{R}+\mathbf{r})d^3r + \frac{1}{c}\int \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}+\mathbf{R})d^3r.$$

Mivel a mag mérete kicsi a mag és a megfigyelőpont távolságához képest, r szerint sorbafejthetjük. A potenciál:

$$U = q\Phi(\mathbf{R}) - \hat{\mathbf{M}}\mathbf{H}(\mathbf{R}) - \frac{1}{6}\sum \hat{Q}_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i},$$

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r})(3x_i x_j - \delta_{ij}r^2)d^3r,$$

ahol q a töltés, $\hat{M}$ a mag mágneses momentum és $\hat{Q}_{ij}$ a mag elektromos kvadrupólmomentum operátora. Főtengelyre transzformálva

$$\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_i\delta_{ij}.$$

Kvadrupólmomentum alatt $\hat{Q}_z$-nek a sajátértékét értjük, azaz

$$Q = \langle\Psi|\hat{Q}_z|\Psi\rangle = \int \rho(\mathbf{r})(3z^2 - r^2)d^3r$$

Ha egyetlen nukleon van a zárt törzsű gömbszimmetrikus magon kívül, a kvadrupólmomentum ezen nukleon kvadrupólmomentuma lesz.

$$Q = \langle\varphi_{nljj}(\mathbf{r})|3z^2 - r^2|\varphi_{nljj}(\mathbf{r})\rangle.$$

Gömbfüggvények szorzási szabályai alapján $j_z = m$-re

$$Q(m) = \sum 2\langle jm\frac{1}{2}m_s|jm\rangle^2\langle r^2\rangle = \frac{j(j+1) - 3m^2}{2j(j+1)}\langle r^2\rangle.$$

Ha $m = j$

$Q(\text{zárt}) = \sum_{m=-j}^{j} Q(m) = 0,$

$Q(1) = -Q(2j) = \frac{-2j-1}{2(j-1)}\langle r^2\rangle.$

Abszolút értékben a kvadrupólmomentum nő mindaddig, amíg $j(j+1) < 3m^2$, azaz $m \sim \frac{j}{1.53}$.

Az elméleti számítások nagyon jól megadják a kísérleti értékek előjelét, de abszolút értékben teljesen rosszak, a tapasztalat szerint a magok sokkal deformáltabbak, mint ahogy a héjmodell mondja.

3.4.3 Magok mágneses momentuma

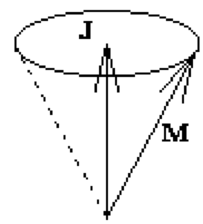
A mágneses momentum operátora:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mu_m \sum_{k=1}^{A} (g_k^l \mathbf{l}_k + g_k^s \mathbf{s}_k),$$

$$g_k^l = \begin{cases} 1 & proton \\ 0 & neutron \end{cases} \qquad g_k^s = \begin{cases} 2.793 & \mu_m \\ -1.913 & \mu_m \end{cases},$$

ahol a g-k az ún. giromágneses faktorok, és $\mu_m = \frac{e\hbar}{2m_p c}$

A magok teljes impulzusmomentuma jó kvantumszám, M a teljes impulzusmomentum operátor iránya körül precesszál :



A mag mágneses momentuma alatt $\hat{\mathbf{M}}$ $\hat{\mathbf{J}}$-re vetített értékét értjük, azaz

$$\mu = \frac{1}{\mu_m}(\Psi_{JJ}, \hat{M}_z \Psi_{JJ}) = \frac{1}{\mu_m} \frac{(\hat{J}_z)(\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{M}})}{(\hat{\mathbf{J}}^2)} = \frac{1}{\mu_m} \frac{1}{J+1} (\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{M}}).$$

Páros-páros magoknál az impulzusmomentum zérus, így a mágneses momentum is zérus kell hogy legyen. Páratlan magokra ha az utolsó nukleon neutron

$$\hat{\mathbf{M}}_n = \mu_m g^n \mathbf{s}, \qquad \mu_n = \frac{g_n}{j+1}(\mathbf{s}(\mathbf{s}+\mathbf{l})) = \frac{g_n}{2(j+1)}\Big[j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}\Big],$$

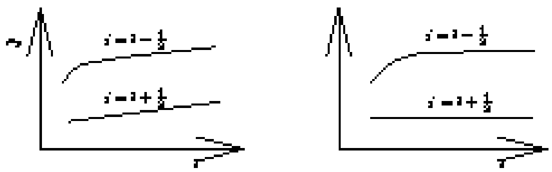
míg ha proton

$$\hat{\mathbf{M}}_p = \mu_m(\mathbf{l} + g_p \mathbf{s}), \qquad \mu_p = \frac{1}{j+1}((\mathbf{l} + g_p \mathbf{s})(\mathbf{l} + \mathbf{s})),$$

$$\mu_p = \frac{1}{2(j+1)}\Big[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} + g_p\big(j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}\big)\Big].$$

A kísérleti adatok ettől kicsit eltérnek, de nem nagyon.

$$\begin{array}{llll} j = l + \frac{1}{2} & Rightarrow & \mu_n = \frac{1}{2} g_n & \mu_p = j + \frac{1}{2} g_p \\ j = l - \frac{1}{2} & Rightarrow & \mu_n = -\frac{1}{2} g_n \frac{j}{j-1} & \mu_p = \left(j - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} g_p\right) \frac{j}{j-1} \end{array}$$



A mágneses momentumok mérése azért fontos, mert számos gyakorlati alkalmazása van (mag mágneses rezonancia, Mössbauer effektus), és a mérés révén sok mindent megtudunk az anyagról.

3.5 Egyesített magmodell

3.5.1 Atommagok energiája deformált potenciálvölgyben

Nagy kvadrupólmomentum nagyobb deformáltságot jelent. Felül kell vizsgálni független részecske modellt.
Kérdés, nukleonok energiája gömbszimmetrikus vagy deformált potenciálvölgyben mélyebb-e?
Eddig természetesnek vettük választ. Meg kell nézni!
Tekintsük a nukleonok energiáját deformált potenciálvölgyben

$$V = -V_0 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

ahol

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \omega^3, \qquad \omega_x = \omega_y = \omega_0 e^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad \omega_z = \omega_0 e^{-\alpha}$$

Az egy részecske energiák

$$E_n = -V_0 + \hbar\omega_x(n_x + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_y(n_y + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_z(n_z + \frac{1}{2}),$$

míg a mag teljes energiája:

$$E = \sum E_i = V_0 A + \hbar\omega_0 \sum_i \left[e^{\frac{\alpha}{2}}(n_x + n_y + 1)_i + e^{-\alpha}(n_z + \frac{1}{2})_i\right]$$

Keressük a minimális energiát α függvényében

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sum_i \left[e^{\frac{\alpha}{2}}(n_x + n_y + 1)_i + e^{-\alpha}(n_z + \frac{1}{2})_i\right] = 0,$$

$$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}\alpha} = \frac{\sum_i (2n_z + 1)_i}{\sum_i (n_x + n_y + 1)_i}$$

Ha az egyes nukleonállapotok úgy vannak betöltve, hogy

$$2\sum(n_z + \frac{1}{2})_i = \sum(n_x + n_y + 1)_i \Rightarrow \alpha = 0.$$

Zárt héjú mag soha nem deformált.
Vezessük be a következő jelölést :

$$\sigma_z = \sum_i (n_z + \frac{1}{2})_i$$

A mag kvadrupólmomentuma

$$Q = \sum_i \left[3\langle z_i^2\rangle - \langle r_i^2\rangle\right] = \sum_i \langle 2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2\rangle =$$

$$= \sum \left(\frac{2E_z}{\omega_z^2} - \frac{E_x}{\omega_x^2} - \frac{E_y}{\omega_y^2} \right)_i \frac{1}{m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2\sigma_z}{\omega_z} - \frac{\sigma_x}{\omega_x} - \frac{\sigma_y}{\omega_y} \right].$$

Itt felhasználtuk, hogy $E = t_i + \frac{1}{2} m\omega_i x_i^2$, t_i nem deformált, $t_x = t_y = t_z$, így a teljes energia különbségek éppen a potenciális energia különbségek. Zárt héjra

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \frac{1}{3}\sigma_0.$$

Kifejezve az ω-kat a σ-kal, a teljes kvadrupólmomentum:

$$\omega_x = \omega_0 e^{\frac{\varepsilon}{3}} = \omega_0 \left(\frac{2\sigma_z}{\sigma_x + \sigma_y} \right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \omega_z = \omega_0 \left(\frac{2\sigma_z}{\sigma_x + \sigma_y} \right)^{-\frac{2}{3}},$$

$$Q = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \left[(2\sigma_z)^{\frac{5}{3}} (\sigma_x + \sigma_y)^{-\frac{2}{3}} - (\sigma_x + \sigma_y)^{-\frac{4}{3}} (2\sigma_z)^{-\frac{1}{3}} \right].$$

Legyen a zárt héjon kívül egy nukleon, N_x, N_y, N_z kvantumszámokkal. Ekkor a σ-k

$$\sigma_x = \frac{\sigma_0}{3} + N_x + \frac{1}{2} = \frac{\sigma_0}{3} \left[1 + \frac{3}{\sigma_0} (N_x + \frac{1}{2}) \right],$$

és a teljes kvadrupólmomentum

$$Q = \frac{\hbar}{m\omega_0} (2N_z - N_x - N_y) = \frac{Z}{A} Q_p,$$

ahol Q_p az utolsó rész kvadrupólmomentuma. Ez azt jelenti, hogy már egyetlen külső nukleon esetén is megnő a kvadrupólmomentum.

$$Q = Q_p + \frac{Z}{A} Q_p.$$

Zárt törzstől távol sok nukelon van a magon kívül, ezáltal a törzs erősen deformálódik. A tényleges Hartree Fock számolás ezt jól megadja, de a számolás bonyolult, az állapotok nem degeneráltak, aranynál tényleg 197 hullámfüggvényt kell szelfkonzisztensen megoldani.

3.5.2 Kollektív modell

Azt akarjuk, hogy olyan legyen a perturbálatlan hullámfüggvény, hogy a mag alakjára

$$R = R_0 \left[1 + \sum \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \right]$$

sugarat adjon. Ebből a célból a Hamilton operátort négy részre osztjuk

$$H = H_{\mathrm{coll}}(\alpha_{\lambda\mu}) + H_{\mathrm{rész}}(x_i) + H_{\mathrm{csat}}(x_i, \alpha_{\lambda\mu}) + H'$$

ahol H_{coll} csak a kollektív, $H_{\mathrm{rész}}$ csak az x_i egy részecske koordinátáktól függ, H_{csat} írja le a kollektív és egy részecske koordináták közti csatolást és H' a maradék kölcsönhatás.

$$H_{\mathrm{coll}} \Phi(\alpha_{\lambda\mu}) = E_{\mathrm{coll}} \Phi(\alpha_{\lambda\mu})$$

A kollektív Hamilton operátor

$$H_{\mathrm{coll}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2$$

ahol C_λ és B_λ a forgó és vibráló folyadékcsepp mozgását írja le.
Főtengelyre deformálva a forgásellipszoidot.

$$\alpha_{20} = \beta \cos\gamma, \qquad \alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin\gamma, \qquad \alpha_{1m} = 0$$

$$V = \frac{c}{2} \beta^2, \qquad T = \frac{1}{2} B(\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \omega_k^2 \Theta_k,$$

$$\Theta_{k_\gamma} = 4B_l\beta^2 \sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right),$$

ahol Θ_{k_γ} az effektív tehetetlenségi nyomaték.
T -ben az első tag a kinetikus energia a főtengely koordináta-rendszerben, a második tag a főtengelynek a fix tengely körüli forgása miatt fellépő energia:

$$\hbar L_k = \omega_k \Theta_k.$$

$$H = T_{\beta_\gamma} + \hbar \sum \frac{L_k^2}{2\Theta_k} + \frac{1}{2} C_l \beta^2.$$

Operátorokra áttérve a kollektív Hamilton operátor Schrödinger egyenlete megoldható.
A gerjesztett állapotok a forgás és a rezgés. Ezek energiája:

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J(J+1),$$

illetve

$$E_{vib} = E_0 + \sum_m \hbar\omega \left(n_m + \frac{1}{2}\right).$$

A gerjesztett magok energiállapotainak tanulmányozásánál látni fogják, hogy a rotációs energiaállapotok jóval mélyebben vannak, mint a vibrációs energiák.

3.5.3 Egyesített magmodell

A perturbálatlan Hamilton operátort aszerint választjuk meg, milyen a mag betöltöttsége.

1. Gyenge csatolás

$$H_0 = H_{rész} + H_{coll} \Rightarrow \Psi = \Phi(\alpha_{\lambda\mu}) \mathcal{A} \prod_i \varphi_i(x_i)$$

$$H_{rész} = \sum \left(t_i + V_i(i)\right)$$

$$E = E_{coll} + E_{rész} + E_{perturb}$$

2. Erős csatolás

$$H_0 = H_{coll} + H_{rész} + H_{cent} = \sum \left(t_i + V_i(\alpha_{\lambda\mu}, i)\right)$$

$$H_{rész} + H_{cent} = \sum t_i + \frac{1}{2} \sum V(\alpha_{\lambda\mu}, i)$$

$$\Psi = \Phi(\alpha_{\lambda\mu}) \mathcal{A} \prod_i \varphi_i(x_i, \alpha_{\lambda\mu})$$

Ezekkel a perturbálatlan Hamilton operátorokkal oldjuk meg a hullámfüggvényekre vonatkozó egyenleteket.

4. Fejezet

A soktestfizika elemei

4.1 Állapotegyenlet és effektív tömeg

Állapotegyenlet

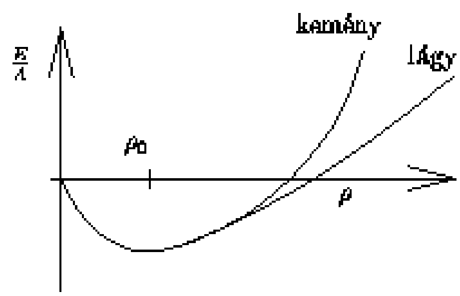
Alapállapotú maganyag állapotegyenlete az energia és a sűrűség összefüggését adja meg. A maganyag egy részecskére jutó energiája, mint láttuk, -16 MeV. A magok centrális sűrűsége, amit a tömegeloszlás mérésekből ismerünk, $0.16-0.17\ fm^{-3}$, ennél az értéknél minimális a mag energiája. Ez azt jelenti, hogy akármilyen is a maganyag állapotegyenlete, ezt a két adatot ki kell elégítenie, azaz

$$\frac{E}{A}(\rho_0) = -16\,MeV,$$

$$\left(\frac{d\frac{E}{A}}{d\hat{\rho}}\right)_{\rho=\rho_0} = 0, \qquad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\kappa = 9\rho_0^2\left(\frac{d^2E}{d\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}, \quad \rho_0 \text{ : maganyag sűrűsége.}$$

A harmadik adat a maganyag összenyomhatóságára vonatkozik, ezzel kapcsolatban jobban eltérnek a vélemények. Eredetileg fizikai meggondolások azt mondták, hogy a kompresszibilitás értéke 400, újabban azonban asztrofizikai alapon (szupernova robbanás illetve a pulzárok felgyorsulása) vannak olyan nézetek, hogy a kompresszibilitás ennél jóval kisebb értékű, mintegy 150-220. A kompresszibilitás értéke szerint beszélhetünk kemény ill. lágy állapotegyenletről.



Az egy részecskére jutó kinetikus energia

$$\frac{E_{kin}}{A} = \alpha\hat{\rho}^{\frac{2}{3}}, \qquad \alpha = 23\,MeV.$$

A potenciális energiának van egy ρ-val arányos vonzó része, és egy telítettséget okozó, ρ magasabb hatványával arányos taszító része. Legegyszerűbb esetben az alapállapotú állapotegyenletet a következő módon írhatjuk fel

$$\frac{E}{A} = \alpha\rho^{\frac{2}{3}} - \beta\rho + \gamma\rho^{\sigma-1}, \qquad \frac{2}{3}\alpha\rho^{\frac{2}{3}} - \beta + (\sigma+1)\gamma\rho^{\sigma} = 0.$$

Az egy részecskére jutó kötési energia és a telítettség feltétele

$$\begin{array}{ll} \alpha - \beta + \gamma = -16, & \frac{2}{3}\alpha - \beta + (\sigma+1)\gamma = 0, \\ \beta = -39 - \gamma, & \sigma\gamma = 23.5. \end{array}$$

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{llll} 1 & \beta = 62.5 & \gamma = 23.5 & \text{kemény állapotegyenlet,} \\ \frac{1}{6} & \beta = 180 & \gamma = 141 & \text{lágy állapotegyenlet.} \end{array} \right.$$

A kompresszibilitás értéke kemény és lágy esetre

$$\kappa = \left\{ \begin{array}{l} 380 \\ 201 \end{array} \right. .$$

Effektív tömeg

Az energia egyenletből visszakövetkeztethetünk a maganyagban fellépő effektív potenciálra:

$$E_{pot} - E_{kin} = \frac{1}{2}\sum\sum\langle ij|v_{eff}|ij\rangle.$$

Tekintsük most azt az egyszerű esetet, amikor az effektív potenciál $v = v_1 - v_2 k^2$. Az energia ezzel, mint láttuk

$$\frac{E}{A} = W = \frac{1}{A}\Big[\sum_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} v_{ij}\Big] =$$

$$= \frac{3\hbar^2}{10m}\rho^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}v_1\rho + \frac{3}{5}v_2\rho k_F^2.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{5m}\rho^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}v_1 + v_2 k_F^2 = 0 \qquad \textit{telítettség}$$

Az egyrészecske energia

$$V_i = \sum V_{ij} = -\frac{A}{\Omega}v_1 + \frac{A}{\Omega}v_2\big(k_i^2 + \frac{3}{5}k_F^2\big),$$

$$E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} - v_1\rho + v_2\rho k_i^2 + \frac{3}{5}v_2\rho k_F^2 = -V_0(\rho) + \frac{k_i^2}{2m^*},$$

$$\frac{1}{2m^*} = \frac{1}{2m} + \frac{3}{5}\frac{v_2\rho}{\hbar^2}, \qquad V_0(\rho) = v_1\rho - \frac{3}{5}v_2\rho k^2 = v_0(\rho)\rho.$$

azaz a nukleon úgy mozog a maganyagban, mintha a tömege kisebb lenne, mint a szabad nukleon tömeg. Mivel az effektív tömeg sűrűségfüggő, véges magokban ez helyfüggő értéknek felel meg, amint azt láttuk. A maganyag belsejében $m^* \sim 0.6m - 0.7m$. A $v_0(\rho)$ egyrész potenciál sűrűségfüggő. Nézzük meg a Fermi szinten levő (legkevésbé kötött) nukleon kötési energiáját a magban:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - v_1\rho + \frac{8}{5}v_2\rho k_F^2.$$

Ha kivonjuk ezt az egy részecskére eső kötési energiából,

$$E_F - W = \frac{2}{5}\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{1}{2}v_1\rho + v_2\rho k_F^2 = 0,$$

azaz éppen a telítettség feltételét kapjuk meg. A telítettség miatt az egy részecskére eső kötési energia megegyezik az utolsó nukleon kötési energiájával. Ez az összefüggés véges magokra is igaz közelítőleg, de ott $E_F < W$.

$$\begin{array}{cc} E_F \sim -(10-14) & E_F \sim -(4-9) \\ \text{könnyű magra} & \text{nehéz magra} \end{array} .$$

Természetesen a héjszerkezet miatti korrekciók ehhez képest fluktuációkat okoznak.

4.2 Soktestfizikai közelítés az energiára

A Fermi gáz modellnél azt tételeztük fel, hogy az energia meghatározásánál Born közelítést alkalmazhatunk, de azt is láttuk, hogy taszító végtelen taszító törzsű potenciálnál ez nem lehet. Ha ugyanis V nagy, a Born közelítés rossz!

$$\psi_{12} = 0, \quad \text{ha} \quad v = \infty, \qquad ha \quad r_{12} < c \qquad \langle\varphi_{12}|v|\varphi_{12}\rangle = \infty,$$

$$\langle\varphi_{12}|v|\psi_{12}\rangle = ?$$

Kérdés, hogyan kell egy olyan effektív erőt meghatározni, amire igaz az, hogy

$$\langle\varphi_{12}|v_{eff}|\varphi_{12}\rangle = \langle\varphi_{12}|v|\psi_{12}\rangle$$

minden mátrixelemre.
Az eljáráshoz a soktestfizika elemeit kell megvizsgálni.
Célszerű először a kéttest kölcsönhatásra felállított ún Lippmann-Schwinger egyenletből kiindulni

Tekintsünk egy egyszerű két nukleon problémát. Ha $H = H_0 + H_1$, és a perturbálatlan H_0 sajátfüggvénye Φ, akkor

$$\begin{array}{c} H_0\Phi = E_0\Phi \\ (H_0 - E_0)\Phi = 0 \end{array} \qquad (H_0 - E_0)\Psi = -H_1\Psi \qquad \Psi = \Phi - \frac{1}{H_0 - E_0}H_1\Psi$$

Az integrálegyenletben el kell kerülni a nevező zérushelyeit (az, hogy ezt hogyan hajtjuk végre, a megfelelő differenciálegyenletben a határfeltételnek felel meg). Erre két lehetőség van: vagy hozzáadunk a nevezőhöz egy infinitezimálisan kis immaginárius mennyiséget (szórás), vagy főértéket veszünk (kötött állapot).

$$\begin{array}{ll} \Psi = \Phi - \frac{1}{H_0 - E_0 \pm i\varepsilon}H_1\Psi & \text{szórás} \\ \Psi = \Phi - \frac{\hat{P}}{H_0 - E_0}H_1\Psi & \text{kötött} \end{array}$$

A $\hat{P}$ operátor most főértéket jelent, ami azt jelenti, hogy a nevező soha nem lehet zérus. Behelyettesítve egy teljes rendszert.

$$\psi_{ij} = \varphi_{ij} - \sum_{n\neq 0}|\frac{\hat{P}}{H_0 - E_0}\varphi^n_{12}\rangle\langle\varphi^n_{12}|H_1|\psi_{ij}\rangle$$

azaz az alapállapot függvényt kihagyjuk az összegezésből. Ha maganyagban vagyunk, és a betett teljes függvényrendszer síkhullámok antiszimmetrizált szorzata, az alapállapot kihagyása azt jelenti, hogy a kétrészecske hullámfüggvény nem lehet semmilyen, alapállapotban betöltött állapot.
Ilyenkor P helyett Q operátort használunk az integrálegyenletben, ami a Fermi szint fölé vetít.

$$\psi_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\psi_{ij},$$

ahol Q segít a Pauli elvet figyelembe venni.
A teljes energia

$$E = \sum\langle\varphi_i|H_0|\varphi_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\langle\varphi_{ij}|H_1|\varphi_{ij} - \frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\psi_{ij}\rangle.$$

A Ψ_{ij} két részecske hullámfüggvényt sorbafejtve

$$\Psi_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\varphi_{ij} + \frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\varphi_{ij} + \cdots$$

Alkalmazzuk erre az egyenletre a H_1 kölcsönható Hamilton operátort, akkor

$$H_1\psi_{ij} = H_1\varphi_{ij} - H_1\frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\psi_{ij}.$$

Bevezetve a G és az Ω operátorokat, ahol $\psi_{ij} = \Omega\varphi_{ij}$, $G = H_1\Omega$,

$$H_1\Omega\varphi_{ij} = H_1\varphi_{ij} - H_1\frac{Q}{H_0 - E_0}H_1\Omega\varphi_{ij},$$

az egyenletünk átalakítható

$$G\varphi_{ij} = H_1\varphi_{ij} - H_1 \frac{Q}{H_0 - E_0} G\varphi_{ij},$$

és megkapjuk az ún. Bethe Goldstone (BG) egyenletet.

$$G = H_1 - H_1 \frac{Q}{e} G,$$

ahol $e = H_0 - E_0$, azaz egy operátor.
A két részecske mátrixelem ezek szerint.

$$(\varphi_{ij}|G|\varphi_{kl}) = (\varphi_{ij}|H_1|\varphi_{kl}) - \sum_{m,n>k_F} (\varphi_{ij}|v|\varphi_{mn}) \frac{Q(\varphi_{mn})}{e(\varphi_{mn}, \varphi_{ij})} (\varphi_{mn}|G|\varphi_{kl}).$$

Ha a szórás olyan, hogy két részecske az i,j betöltött állapotból az a,b üres állapotba kerül, az energia különbség, ha a perturbálatlan Hamilton operátor éppen a kinetikus energia volt,

$$e = E_a + E_b - E_i - E_j = \frac{k_a^2}{2} + \frac{k_b^2}{2} - E_i - E_j = k^2 + \gamma^2 + \underbrace{K_{ab}^2 - K_{ij}^2}_{0}.$$

(Itt bevezettük a k relatív és a K teljes impulzusmomentumokat)
A G mátrix bevezetésével az energia elsőrendben:

$$E = \sum T_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\varphi_{ij}|G|\varphi_{ij}).$$

Az effektív potenciált megkapjuk, ha a G mátrixot valamilyen ésszerű függvénnyel sikerül helyettesíteni. Ehhez meg kell oldani a BG egyenletet.
A BG egyenlet megoldására sok módszert dolgoztak ki, a legszemléletesebb az ún. szeparációs módszer. Vezessünk be két potenciált, v_A-t és v_B-t, ahol

$$G_A = v_A - v_A \frac{Q_A}{e_A} G_A, \qquad G_B = v_B - v_B \frac{Q_B}{e_B} G_B.$$

Elemi átalakítással megmutatható, hogy

$$G_A = G_{\bar{B}} \Omega_{\bar{B}} (v_A - v_{\bar{B}}) \Omega_A + G_{\bar{B}} \Big(\frac{Q_{\bar{B}}}{e_{\bar{B}}} - \frac{Q_A}{e_A} \Big) G_A.$$

Válasszuk szét most a potenciált egy hosszú és egy rövid hatótávolságú részre.

$$v = v^r + v^\ell$$

és legyen v_A a teljes, v_B pedig a rövidhatótávolságú rész. Elhanyagolva az utolsó tagot az egyenletben, és figyelembe véve, hogy a hosszúhatótávolságú részben már használható a Born közelítés, azaz

$$G^\ell \sim v^\ell, \qquad \Omega^\ell \sim 1,$$

a G mátrix

$$G \sim G^r + v^\ell,$$

A hosszúhatótávolságú tag járulékának a kiszámításánál már Born közelítést alkalmazunk, tehát csak a rövidhatótávolságú rész járulékával kell foglalkoznunk.

$$G^r = v^r - v^r \frac{Q}{e} G^r.$$

Mivel a potenciál ilyenkor nagy, v_r a Fermi szint fölé szór, így Q első közelítésben elhanyagolható. Relatív és TK hely és impulzus koordinátákat bevezetve és a TK koordinátákra integrálva a két részecske hullámfüggvény:

$$\Psi_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{1}{(2\pi)^3}\iint \underbrace{\frac{d^3\mathbf{k}}{k^2+\gamma^2}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}_{K(\mathbf{r},\mathbf{r}')} v(\mathbf{r}')\psi_{ij}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'.$$

A k szerinti integrálásban elvégezve a szögfüggő részt,

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{2\pi}{i}\int kdk\frac{\left[e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]}{(k^2+\gamma^2)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

kapunk. Cauchy tétele értelmében a felső illetve az alsó komplex félsíkra kiterjesztve az integrált, azok a reziduumokkal lesznek egyenlőek, így

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{2\pi^2 e^{-\gamma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \psi_{ij} = \varphi_{ij} + \frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{-\gamma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}v(\mathbf{r}')\psi_{ij}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

adódik.
Gömbszimmetrikus potenciál és csak r-től függő (s állapotú) hullámfüggvények esetén a második tagban a szög szerinti integrál elvégezhető, és a fenti egyenlet

$$\psi^0_{ij}(r) = \varphi^0_{ij}(r) - \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma r}\int_0^\infty\left[e^{-\gamma|r-r'|} - e^{-\gamma(r-r')}\right]v^r(r')\psi_{ij}(r')r'^2dr'$$

alakban írható. Kétszer deriválva a fenti összefüggést, ψ-re egy differenciálegyenletet kapunk

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[r(\psi^0_{ij} - \varphi^0_{ij})\right] - \gamma^2 r(\psi^0_{ij} - \varphi^0_{ij}) = v^r r\psi^0_{ij}.$$

Tekintsünk most egy egyszerű végtelen taszító potenciált. Ekkor a megoldandó differenciálegyenletek

$$v^r = \infty \qquad ha \quad r < c, \qquad \psi_{ij} = 0$$
$$v^r(r)r\psi^0_{ij} = (k^2+\gamma^2)r\varphi^0_{ij}$$
$$r > c \qquad v(r) = 0 \qquad r(\psi^0_{ij} - \varphi^0_{ij}) = Ae^{-\gamma r}$$

és innen a potenciális energia

$$v^r_{ij} = \int\varphi^*_{ij}v^r\psi_{ij}d^3rd^3R = \frac{4\pi}{\Omega}\int_0^c r^2dr(k^2+\gamma^2) = \frac{1}{\Omega}V_c(k^2+\gamma^2)$$
$$V_c = \frac{4\pi}{3}c^3$$

ahol

$$V = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j V_{ij} = \frac{1}{2}A\rho V_c\Big(\underbrace{\frac{3}{5}k_F^2}_{\rho^{\frac{2}{3}}} + \gamma^2\Big) - \beta\rho = -\beta'\rho + \delta\rho^{\frac{5}{3}},$$

azaz a taszító törzs tényleg telítettséget okoz.

4.3 Effektív erők származtatása

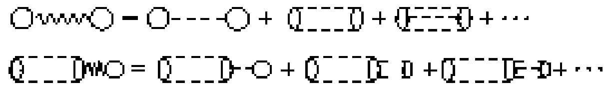
Jobb konvergenciát kaphatunk, ha H_0-t és H_1-et másképp választjuk, vagyis ha csökkentjük H_1 hatását.

$$H_0 = \sum_i(T_i + U_i)$$
$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{ij}v_{ij} - \sum U_i$$

Kérdés, hogyan kell U-t megválasztani. A soktestfizikai számítások megmutatták, hogy egy betöltött állapotra a legjobb választás

$$U(m) = \sum_n \langle mn|G|mn\rangle.$$

Gráf nyelven megfogalmazva ezt.



A Goldstone mátrix igazában a két lyuk állapotok járulékát veszi figyelembe de még nem ad elég jó közelítést.. A maganyag energiája -16 MeV, 23 MeV a kinetikus energia, így a potenciális energia -39 MeV kellene hogy legyen. Ezzel szemben kb. -31 MeV adódik csak így. Konvergens sort kapunk, ha a két lyuk után a három lyuk, négy lyuk stb. járulékokat vesszük figyelembe. A kapott energia érték azonban kicsit kevesebb a kívántnál, ezért a maganyag probléma megoldására más eljárásokat is kigondoltak.

Kérdés, hogyan lehet a maganyag számításokból egy olyan effektív potenciált levezetni, amelyikkel véges magokra is lehet számolni. Ezt az ún. lokális sűrűség közelítésben lehet megcsinálni.

Alapfeltevésünk az, hogy két részecske kölcsönhatása véges rendszerben olyan, mintha a lokális sűrűségnél végeznénk maganyag számítást. Amint láttuk, a mag energiájánál a sűrűség (k_F) mellett fellép az egyrészecske energia is. Véges magokra való áttérésnél figyelembe kell venni természetesen azt, hogy az egyrészecske energiák -8 MeV-ek -16 MeV helyett.. Ezzel le lehet vezetni egy sűrűség függő effektív két részecske potenciált.

Zárt héjú magokra csak r-től és ρ-tól függő effektív két nukleon potenciál esetén az energia ezek szerint.

$$E = \sum \langle\varphi_i|t|\varphi_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{ij}\langle\varphi_i\varphi_j|v_{eff}\big(\mathbf{r},\rho(\mathbf{r})\big)|\varphi_i\varphi_j\rangle =$$

$$= \sum t_i + \frac{1}{2}\int \big(\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) - \rho(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^2\big) v_{eff}\big(\mathbf{r}_1,\rho(\mathbf{r})\big) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2.$$

Gyakorlati számításoknál szokás az ún. Skyrme erőt használni. Ezt megkaphatjuk, ha az energiában a nemlokális tagokat sorbafejtjük. Ilyenkor

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i(\varphi_i^*\triangle\varphi_i) + \int d^3r\left[\alpha\rho^2(r) + \beta\rho^{\sigma-2}(r) + \gamma(\triangle\rho)^2\right] -$$

$$-\sum_i \hbar^2\int d^3r\, f\big(\rho(r)\big)\varphi_i^*\triangle\varphi_i$$

adódik. Érdemes felfigyelni rá, hogy az első és utolsó tag összevonható egy taggá:

$$\frac{1}{2m^*(r)} = \frac{1}{2m} + f\big(\rho(r)\big).$$

m^* itt az r-től függő effektív tömeg.
Leegyszerűsített Skyrme erőt kapunk, ha v-re a

$$v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\big(\alpha + \beta\rho^{\sigma}(r)\big) + V_{\mathrm{Coulomb}}$$

kifejezést használjuk.

4.4 Optikai potenciál mikroszkópikus származtatása

Ha egy részecskével bombázunk egy magot, a mag egésze első közelítésben egy potenciálként hat a részre. Ezt a potenciált nevezzük optikai potenciálnak.

Könnyen belátható, hogy az optikai potenciál energiafüggő és komplex, ha mikroszkópikusan származtatjuk le.

Jelöljük a mag belső koordinátáit ξ-vel, a beeső nukleon koordinátáját a-val. A teljes, A+1 részecskéből álló rendszer hullámfüggvénye Ψ, míg az A nukleonból álló mag hullámfüggvénye Φ. Fejtsük sorba a teljes hullámfüggvényt a maghullámfüggvények teljes rendszere szerint:

$$(E - H)\Psi = 0.$$

$$H = H(\xi) + T_a + V, \qquad V = V(a, A),$$

$$\big(e_\alpha - H(\xi)\big)\Phi_\alpha = 0, \qquad e_0 = 0,$$

$$\Psi = \sum_\alpha u_\alpha(r_\alpha)\Phi_\alpha(\xi).$$

Vezessünk be egy alapállapotra vetítő operátort, amit P-vel jelölünk, és legyen ennek ortogonális operátora Q.

$$P\Psi = u_0(r_\alpha)\phi_0(\xi)$$

$$Q = 1 - P, \qquad P^2 = P, \qquad Q^2 = Q, \qquad PQ = QP = 0$$

Látható, hogy P felírható úgy hogy

$$P = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$$

Behelyettesítve ezt a Schrödinger egyenletbe

$$(E - H)\Psi = (E - H)(P + Q)\Psi = 0$$

adódik. Alkalmazzuk erre az egyenletre a P ill. Q operátorokat. A kapott egyenletek:

$$(E - H_{PP})P\Psi = H_{PQ}Q\Psi,$$

$$(E - H_{QQ})Q\Psi = H_{QP}Q\Psi,$$

ahol

$$H_{PP} = |\Phi_0\rangle\big[T_a + \underbrace{\langle\Phi_0|V|\Phi_0\rangle}_{V_a}\big]\langle\Phi_0|,$$

$$H_{PQ} = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0 VQ|.$$

Kifejezve $Q\Psi$-t a második egyenletből, $P\Psi$-re egy Schrödinger egyenlet szerű egyenletet kapunk:

$$\left(E - H_{PP} - H_{PQ}\frac{1}{E - H_{QQ}}H_{QP}\right)P\Psi = 0.$$

A nevező zérushelyeit egy komplex energiaérték bevezetésével tudjuk elkerülni

$$\left[E - T_a - V_a - \lim_{\epsilon\to 0}\langle\Phi_0|VQ\,\frac{1}{E + i\epsilon - H_{QQ}}QV|\Phi_0\rangle\right]u_0 = 0.$$

Látható, hogy a második tag erősen energiafüggő, hiszen a nevezőnek közel zérushelyei vannak, és ugyanakkor komplex is. Fizikailag ez teljesen érthető. Nyilvánvalóan a kölcsönhatás függ attól, hogy milyen energiával jön be a nukleon. Másrészt a teljes Hamilton operátorból most leválasztottunk egy részt, a beeső nukleonra vonatkozó Hamilton operátort. Ez nem kell, hogy hermitikus legyen. Mivel az eredeti nukleon bizonyos valószínűséggel abszorbeálódik a magban, a potenciál okvetlen komplex kell hogy legyen.

4.5 A β-bomlás elmélete

β bomlás során a magban egy neutron átalakul protonná:

$$A \to B + \overline{\nu} + e^-.$$

A és B itt a mag két állapota, amelyek az izospin harmadik komponensében különböznek egymástól Az izospin harmadik komponense 1-et változik.

$$T_3 = \frac{1}{2}\sum \tau_z = \frac{N-Z}{2}, \qquad |\Delta T_3| = \frac{|N \mp 1 - (Z \pm 1)|}{2} = 1.$$

A β bomlás során bekövetkező átmenet valószínűsége

$$dw_{\beta\alpha} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle\beta|H_w|\alpha\rangle|^2 \rho(E).$$

ahol $\rho(E)$ a végállapot energiasűrűsége. Ha a mag egy adott energiájú állapotba bomlik, a végállapot energiasűrűségéhez a $\overline{\nu}$-k és az e-k adnak járulékot.

$$\rho(E) = \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6}\frac{d}{dE_{max}}\left[p_e^2 dp_e d\Omega_e \cdot p_{\overline{\nu}}^2 dp_{\overline{\nu}} d\Omega_{\overline{\nu}}\right].$$

Legyen az elektron energiája E és E +dE között. Figyelembe véve, hogy a lehetséges maximális energia

$$E_{max} = E_e + E_{\overline{\nu}},$$

és hogy a neutrínó energiája

$$E_{\overline{\nu}} = p_{\overline{\nu}} c \quad \Longrightarrow \quad p_{\overline{\nu}}^2 = \frac{E_{\overline{\nu}}^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(E_{max} - E_e)^2,$$

azaz

$$\frac{dp_{\overline{\nu}}}{dE_{max}} = \frac{1}{c}\frac{dE_{\overline{\nu}}}{dE_{max}} = \frac{1}{c}, \qquad \rho(E) = \frac{d\Omega_e d\Omega_{\overline{\nu}}}{(2\pi\hbar)^6}\frac{1}{c}p_e^2 dp_e p_{\overline{\nu}}.$$

Mindezek alapján az átmeneti valószínűség

$$dw_{\beta\alpha} \sim \left|\overline{\langle pe\overline{\nu}|H_w|n\rangle}\right|^2 p_e^2 (E_{max} - E_e)^2 dp_e,$$

ahol az átlagolási jel a szögekre átlagolt mátrixelem. Ha a mátrixelem független az energiától,

$$\left(\frac{dw_{\beta\alpha}}{p_e^2 dp_e}\right)^{\frac{1}{2}} \sim |H_{\alpha\beta}|(E_{max} - E_e),$$

azaz megkapjuk a Kurie görbét. Ezt a fenti összefüggést a Coulomb kölcsönhatás még módosítja. Ennek szerepét egy faktorral vesszük figyelembe, ahol

$$F_c(z, E_z) = 2\pi\eta\left[1 - e^{-2\pi\eta}\right]^{-1}, \qquad \eta = \frac{2e^2}{\hbar v_e},$$

és v_e az elektron sebessége. Az átmenet valószínűsége ezek szerint

$$P(p_e)dp_e = (\epsilon_{max} - \epsilon)^2 \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 1}\, d\epsilon F_c(z, \epsilon)\left|\overline{\langle pe\overline{\nu}|H_w|n\rangle}\right|^2.$$

A bomlás élettartamát megkapjuk a $w = \frac{1}{\tau}$ összefüggésből, ahol w a a dw integrálja 0-tól a maximális p impulzusig. Ha a mátrixelem gyengén függ az energiától, kiemelhetjük az integrál elé és

$$w = \left|\overline{\langle pe\overline{\nu}|H_w|n\rangle}\right|^2 \int_0^{p_0} dp_e F p_e^2 (\epsilon_{max} - \epsilon)^2 = \left|\overline{\langle pe\overline{\nu}|H_w|n\rangle}\right|^2 f.$$

Bevezetve a $f\tau = f_{t_{1/2}}$ jelölést, az idő helyett szokás az $f_{t_{1/2}}$ kifejezést használni.
A mátrixelem értéke rendkívül erősen változik. A feltevés az, hogy a H_w operátor ugyanaz, a mag hullámfüggvényében fellépő különbségek okozzák ezt a nagy változást. Néhány példa

bomlás	spin,paritás	$t_{1/2}$	E_{max}	$f t_{1/2}(s)$
$n \to p$	$\frac{1}{2}^- \to \frac{1}{2}^-$	$10.6\ min$	0.782	1100
${}^6He \to {}^6Li$	$0^- \to 1^-$	$0.813\ s$	3.5	810
${}^{14}O \to {}^{14}N$	$0^- \to 0^-$	$71.4\ s$	1.812s	3100

4.5.1 A β-bomlás Fermi elmélete

Fermi azt mondta, a bomlás lokális, a folyamat során eltűnik egy neutron és egy neutrínó, és egy proton és egy elektron keletkezik. A Hamilton operátor

$$H = F\Big[\big(\overline{\Psi}_p(x)\Psi_n(x)\big)\big(\overline{\Psi}_e(x)\Psi_\nu(x)\big) + hc\Big],$$

a Ψ-k eltüntető, a $\overline{\Psi}$-k keltő operátorok. A gyenge kölcsönhatás mai elmélete szerint tudjuk ez a feltevés nem igaz, de nagyon jó közelítést jelent.

A Fermi átmenetnél a mag spinje nem tud változni, kezdeti és végállapotban ugyanaz kell hogy legyen: $\Delta J = 0$, $J_e = J_h$. Ugyszintén megegyezik a kezdeti és a végállapot paritása is. Kísérletileg a β bomlás során találtak megengedett és tiltott átmeneteket. Tiltott átmeneteknek azokat az átmeneteket nevezzük, ahol a mátrixelem legalább négy nagyságrenddel kisebb. A meglepő az volt, hogy voltak olyan átmenetek is, amelyek a Fermi átmenetek nagyságrendjével megegyeztek, ugyanakkor $\Delta J = 1$, tehát a spin változott. Ennek magyarázatára Gamow és Teller bevezettek még egy tagot a Hamilton operátorba, ahol a spin változhat.

$$H_{GT} = G\sum_i \Big[\big(\overline{\Psi}_p\vec{\sigma}\Psi_n\big)\big(\overline{\Psi}_e\vec{\sigma}\Psi_\nu\big) + hc\Big]$$

A $\vec{\sigma}$ mátrixok meg tudják változtatni a végállapot spinjét. GT átmenetnél S=1 kell hogy legyen, $0 \to 0$ átmenet nem lehet. Ezek szerint a megengedett átmenetek:

$$\begin{array}{lllll}
S=0 & \Delta J = 0 & & \pi_e = \pi_h & \text{Fermi} \\
S=1 & \Delta J = 0, \pm 1 & 0 \neq 0 & \pi_e = \pi_h & GT \\
 & \Delta J = 0 & 1 \to 1 & \pi_e = \pi_h & \text{szupermegengedett.}
\end{array}$$

Néhány példa:

$$\begin{array}{ll}
{}^{14}_{8}O \to {}^{14}_{7}N + e^- + \nu & \text{Fermi} \\
{}^{6}_{2}He \to {}^{6}_{3}Li + e^- + \overline{\nu} & GT \\
n \to p + e^- + \overline{\nu},\ {}^{3}_{1}H \to {}^{3}_{2}He + e^- + \overline{\nu} & \text{kevert.}
\end{array}$$

Tiltott átmenetek

Hogyan jönnek létre? Nemrelativisztikus esetben a Hamilton operátor:

$$H \sim \sum_i \Big[\big(\hat{\overline{\Psi}}_p O_i \hat{\Psi}_n\big)\big(\hat{\overline{\Psi}}_e O_i \hat{\Psi}_\nu\big) + hc\Big],$$

és ennek mátrixeleme

$$\langle H\rangle \sim \sum_i \Big[\big(\Psi_p^-(x) O_i \Psi_n(x)\big)\big(\Psi_e^-(x) O_i \Psi_\nu(x)\big) + hc\Big],$$

ahol O_i 1 vagy σ. Itt a Ψ-k már a részecskék hullámfüggvényei. A leptonok hullámfüggvénye

$$\Psi_e = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}x} u_e(p), \qquad \Psi_{\overline{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}x} u_{\overline{\nu}}(p),$$

ahol u_k-k a Pauli spinorok. A mátrixelem ezek szerint

$$H \sim \sum_i (\overline{u}_e O_i u_\nu) \int e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{q})x} \Psi_p^-(x) O_i \Psi_n(x) d^3x.$$

Ψ_p és Ψ_n természetesen magba beágyazott hullámfüggvényt is jelenthet. Mivel a mag méretre kicsiny $\left(\frac{R_{mag}}{\lambda_n} = \frac{1}{50}\right)$, az $e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}}$ kifejezés sorba fejthető az $x = 0$ hely körül:

$$e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = \sum_j \frac{1}{j!}\left[e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}}\right]^j = \sum_j (-i)^j e^{(j)},$$

$$M = M_0 + M_1 + M_2,$$

ahol $\quad M_{nh}^{(j)} = \int \Psi_h^* H^\beta \Psi_n e^{(j)} d^3\mathbf{r}.$
Minden együttható faktor egy $\frac{1}{50}$ faktorral csökken és l=1,2 stb. multipól átmenetet jelent. Az első tiltott átmenet ezek szerint

$$\begin{array}{lll} \text{Fermi} & \Delta J = 0, \pm 1 & \pi_a = -\pi_i \\ GT & \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2 & \pi_a = -\pi_i \end{array}$$

A csökkenés nagyságrendje mátrixelemenként 10^{-4}. A ^{40}K élettartama pl. $1,3 \cdot 10^9$ év, mert harmadrendűen tiltott átmenet.

Relativisztikus elmélet

Az eddigiek alapján teljes általánosan relativisztikusan is felírhatjuk a β bomlás Hamilton operátorát. $\Psi_e^- \Psi_\nu$ négyes spinorok, $4 \cdot 4 = 16$ lehetséges kombináció léphet fel. Ez lehet: skalár, vektor, antiszimmetrikus tenzor, axiálvektor és pszeudoskalár.1+4+6+4+1=16

A β bomlás általános elméletének kidolgozásánál, minden γ mátrix kombináció felléphet:

$$H = c_s H^s + c_v H^v + c_T H^T + c_A H^A + c_p H^p.$$

Nemrelativisztikus esetre az első kettőből Fermi átmenet lesz, a második kettőből GT átmenet, az utolsó zérussá válik. Az egyes tagok a Γ mátrixokkal fejezhetők ki:

$$\Gamma_s = 1, \qquad \Gamma_v = \gamma_\mu, \qquad \Gamma_T = \frac{i}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\lambda), \qquad \Gamma_A = i\gamma_\mu\gamma_5, \qquad \Gamma_p = \gamma_5,$$

és a Hamilton operátor

$$H^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_i \left\{\left(\overline{\Psi}_p \Gamma_i \Psi_n\right)\left[g_i\left(\overline{\Psi}_e \Gamma_i \Psi_\nu\right) + g_i'\left(\overline{\Psi}_e \Gamma_i \gamma_5 \overline{Psi_\nu}\right)\right]\right\}.$$

Nemrelativisztikusan

$$H_F = F\left[\left(\overline{\Psi}_p^* \Psi_n(x)\right)\left(\overline{\Psi}_e(x)\Psi_\nu(x)\right) + hc\right],$$
$$H_{GT} = G\sum_i \left[\left(\overline{\Psi}_p \sigma_i \Psi_n\right)\left(\overline{\Psi}_e \sigma_i \Psi_\nu\right) + hc\right],$$

vagyis visszakapjuk a korábbi eredményünket.

A paritássértés felismerése szükségessé tette a kölcsönhatásban a paritássértő tagok bevezetését. Wu és mások kísérletei arra mutattak, hogy a neutrínó teljesen polarizált, $g_i' = \epsilon g_i$, ahol $\epsilon = \pm 1$. ($\epsilon = 1$ ha a neutrínó spinje mindig hátra mutat, $\epsilon = -1$ ha mindig előre.) A neutrínók polarizáltságából következik az is, hogy a β részecskék polarizáltak lesznek. Az általános kölcsönhatás segítségével meghatározható az elektronok polarizáltsága:

$$P_{e^\pm}: \begin{array}{|cccc|} \hline S & V & T & A \\ \hline \mp\epsilon & \pm\epsilon & \mp\epsilon & \pm\epsilon \\ \hline \end{array}$$

A mérések szerint $\alpha^\pm = \pm 1$, amiből azonnal látható, hogy $\epsilon = -1$ esetén S, T csatolás valósul meg, $\epsilon = +1$ esetén V, A csatolás. Goldhaber kísérlete azt mutatja, hogy a neutrínó spinbeállása a mozgásiránnyal ellentétes, $\epsilon = 1$. A Goldhaber kísérlet egyértelműen a vektor-axiálvektor csatolás mellett döntött, és végeredményben a teljes β bomlás kölcsönhatás

$$H=\sum_{i=1}^{4} g\left(\overline{\Psi}_p\gamma_i(1+\lambda\gamma_5)\Psi_n\right)\left(\overline{\Psi}_e\gamma_i(1+\gamma_5)\Psi_\nu\right)+h.c.$$

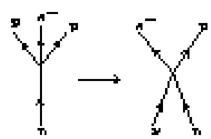
alakban írható, ahol $g=\frac{G}{\sqrt{2}}$ és $\lambda=1.18$. Ez a képlet több évtizedes kutatómunka eredményét foglalja össze, s alapjává vált a gyenge kölcsönhatások általános elméletének.

4.5.2 A Fermi elmélet módosítása

Áram-áram algebra

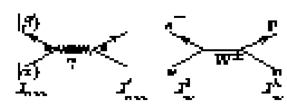
Fermi elképzelése: lokális kölcsönhatás. Ezt kell módosítani az elektromágneses kölcsönhatás mintájára:

Eredeti Feynman gráf



$$\left|\langle pe^-\overline{\nu}|H_w|n\rangle\right|^2=\left|\langle pe^-|H_w|n\nu\rangle\right|^2$$

Módosítás elektromágneses analógiára



mert

$$H_{em}=\frac{-q}{c}\int d^3\mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{q'}{c^2}\int d^3\mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x}')\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},$$

$$H_{em}=-\frac{qq'}{c^2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\mathbf{j}(\mathbf{x})\mathbf{j}(\mathbf{x}')\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

Áram-áram kölcsönhatás végtelen hatótávolságú a foton 0 tömege miatt, ezért lép fel $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$.
Analógia:

$$H_w=-\frac{g^2}{c^2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\mathbf{J}^l_w(\mathbf{x})\mathbf{J}^h_w(\mathbf{x}')f(r).$$

J_w a leptonok vagy a hadronok gyenge árama, $f(r)$ adja meg a hatótáv függést.

$$f(r)=\frac{e^{-\frac{r}{R_w}}}{r}\qquad\qquad R_w<0.1fm.$$

A rövid hatótáv miatt

$$H_w=-\frac{4\pi g^2R_w^2}{c^2}\int d^3\mathbf{x}\mathbf{J}^l_w(\mathbf{x})\mathbf{J}^h_w(\mathbf{x}),$$

ahol $d^3\mathbf{x}'$-re kiintegráltunk. $G=\sqrt{2}4\pi g^2R_w^2$-et bevezetve

$$H_w=-\frac{G}{\sqrt{2}c^2}\int d^3\mathbf{x}\mathbf{J}^l_w(\mathbf{x})\mathbf{J}^h_w(\mathbf{x}).$$

Ez még nem jó, mert az áram nem négyesvektor. Az elektromágneses kölcsönhatásban $\mathbf{j}_{em}$ hermiticitása garantált, mert megfigyelhető.
Hermitikussá tehető. Bevezetve a
$\mathbf{J}_w=\mathbf{J}^l_w+\mathbf{J}^h_w$ lepton és hadron gyenge árama

$$H_w=-\frac{G}{\sqrt{2}c^2}\int d^3\mathbf{x}\mathbf{J}_w(\mathbf{x})\mathbf{J}^-_w(\mathbf{x}).$$

Elektromágneses kölcsönhatásnál a Coulomb kölcsönhatás is hozzájárul a kölcsönhatáshoz.

$$H_c = e^2 \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

Megismételve az előbbi elgondolást

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}c^2} \int d^3\mathbf{x} \Big[c^2 \rho(\mathbf{x})\rho^-(\mathbf{x}) - \mathbf{J}_w(\mathbf{x})\mathbf{J}_w^-(\mathbf{x}) + \mathrm{hc} \Big]$$

A $J_w = (c\rho_w, \mathbf{J}_w)$ négyesvektort bevezetve

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}c^2} \int d^3\mathbf{x} \Big[J_{w\mu}(\mathbf{x}) J_w^{\mu}(\mathbf{x}) + \mathrm{hc} \Big].$$

5. Fejezet

Relativisztikus magfizika és nehézion fizika

5.1 Relativisztikus magfizika

Probléma: relativisztikus soktestfizikai számítások nem léteznek
Az effektív magerők egy effektív Lagrange-függvényből származtathatók le:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{kh},$$

ahol $\mathcal{L}_N$ a szabad nukleonok, $\mathcal{L}_B$ a szabad bozonok, és $\mathcal{L}_{kh}$ a kölcsönhatás Lagrange függvénye. Ha csak skalár és vektor mezont tekintünk, a téregyenletek:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\Phi = g_s \overline{\Psi}\Psi$$
$$(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu) = g_v \overline{\Psi}\gamma^\nu \Psi$$
$$\left[\gamma^\mu(\partial_\mu - g_v V_\mu) - \underbrace{(M - g_s \Phi)}_{m^*}\right]\Psi = 0$$

m^* az effektív nukleon tömeg a kölcsönható rendszerben, hasonlóan a nemrelativisztikus esethez.
A téregyenletek egy megoldási lehetősége az ún. átlagtér közelítés, ahol maganyagban

$$\Phi \to \langle\Phi\rangle = \Phi_0,$$
$$V_\mu \to \delta_\mu^0 \langle V\rangle = \delta_\mu^0 V_0.$$

A Dirac egyenlet ilyenkor egyszerű alakú lesz:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m^* \Psi - g_0 \gamma^0 V_0 \Psi = 0,$$

ahol m^* az effektív tömeg.
Egy másik lehetőség az egy bozon kicserélő potenciál:

$$\Phi \to \frac{1}{\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2} g_s \overline{\Psi}\Psi,$$

amiről már beszéltünk.
Az együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy maganyagra jó eredményeket adjanak. Előny: nem relativisztikus közelítésben kijön a spin-pálya csatoló tag.

Az átlagtér közelítés problémái

1. A relativisztikus erők függenek m^*-tól, vagyis magától a közeg hatásától
2. V_0 és Φ_0 csatolása, g_s es g_v nagyon nagy, az egyik pozitív, a másik negatív.

3. Ha véges magokról beszélünk, a közelítés sokkal bonyolultabb, Φ és V r-től és p-ől függ, és V-nek vektor komponensei is vannak.

4. Az adatokat a maganyag sűrűségénél határoztuk meg, holott biztos csak nagyobb sűrűségnél jó a közelítés.

5. $m^* \to 0$ bizonyos esetekben. Elkerülhető a Zimányi Moszkowski eljárással : $m^* = \frac{1}{M - g_s \Phi}$

6. Nagy eltérések a relativisztikus és nem relativisztikus számolásoknál.

5.2 Nehézion fizika

Nagyenergiájú nehézionokat lövünk egymásba meghatározott ütközési paraméterrel, és nézzük, mi történik.

Mit várhatunk a nehézion fizikától ?

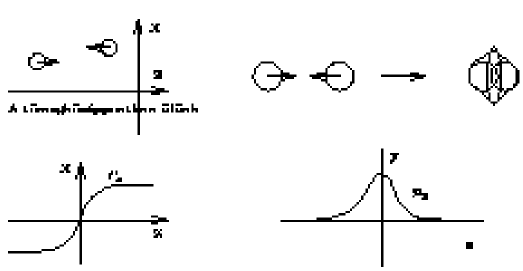
1. Kvark-gluon plazma kialakulása, ennek megfigyelése
   Nagyenergiájú ütközésnél ha nagy energiasűrűség van, sok új részecske-antirészecske pár keletkezik. Ha elég nagy a sűrűség, kvark-gluon plazmába megy át. Ennek megfigyelése elvi jelentőségű, és az asztrofizikában is fontos.

2. Az állapotegyenlet ismerete
   Az alapállapotú magoknál tanulmányoztuk $E(\rho)$-t, de nem tudjuk, hogy nagy sűrűségnél ez milyen (kompresszibilitás). Itt a részecskék száma 100-1000 körül van, statisztikus és kinetikus fizika alkalmazható, egyensúlyi és nem egyensúlyi helyzetben és magas hőmérsékleten, azaz $P(\rho, T)$-t kell meghatározni.

3. Fázisátmenetek és instabilitások vizsgálata
   Ha az anyag nagy sűrűségen közel alapállapotban van, folyadékhoz hasonlóan viselkedik. A tágulás során instabilitások keletkeznek, az átlagtér feltörik. Instabilitás ott várható, ahol $\nabla P < 0$. Ez kb. fél maganyag sűrűségnél fordul elő. Ilyenkor a rendszer gáz állapotba megy át, és ebben lehetnek nukleon klaszterek.Ezt nevezik multifragmentációnak. Egy másik fázisátmenet a kvark-gluon plazma – hadronanyag átmenet.

4. A nem egyensúlyi helyzetben levő anyag viselkedéséből következtetni lehet a transport-együtthatókra, in medium hatáskeresztmetszetekre, az effektív tömeg impulzus függésére, stb.

5. Új kollektív jelenségek várhatók. Ilyenek a lökéshullámok, a folyás (oldal,transzverzális,radiális)



6. Részecskekeltés közegben. Nagyobb energián hadronok keletkeznek, ezeknek a keletkezési hatáskeresztmetszete függ a közegtől

7. Relativisztikus effektusok kontrollja

A négy energiatartomány:

- Alacsony energia ($E < 20 MeV \cdot A$)
  Érdekesség: az egyensúly kialakulása, fázisátmenet.

- Közepes energia ($E < 500 MeV \cdot A$)
  Érdekesség: állapotegyenlet; a relativisztikus és nem relativisztikus erők illesztése nem igazán jó.

- Relativisztikus energia ($500\ MeV \cdot A - 2\ GeV \cdot A$)
  Érdekesség: magas hőmérsékleten az állapotegyenlet; hadronok effektív keletkezési hatáskeresztmetszete kölcsönható rendszerben.

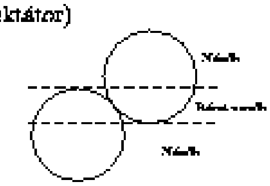
- Ultrarelativisztikus energia
  Kvark-gluon plazma kialakulása
  Megállító tartomány
  Áteresztő tartomány

Fontos fogalmak

Rapiditás: $y = \frac{1}{2} ln \frac{E+p}{E-p} \longrightarrow p_{\|}$ nem relativisztikusan. $p_{\|}$ a beesési irányba mutató impulzus

Ütközési paraméter. Az ütközés lehet centrális és perifériális.

Alapkép : résztvevők és nézők (spektátor)



Multiplicitás: hány töltött rész jön ki az ütközés után.
IMF : azoknak a részeknek a száma, amelyeknél $Z \geq 3$.

Kötött Z: az egy reakcióban IMF-ben levő protonok száma.

Multifragmentáció: egyszerre legalább három IMF keletkezik.

Folyás: a tömegközépponti rendszerben a rapiditás függvényében nem szimmetrikus a p_x ill. p_y eloszlás, vagy centrális folyás van centrális ütközésben.

5.3 Nehézion reakciók tárgyalása

Az ütközés során az anyag összenyomódik és felmelegszik. A belső energia megnő a kinetikus energia rovására. Az ütközések során termalizálódik a rendszer. A termalizáció során kialakulhat lokális termikus ill. kémiai egyensúly. A rendszerre jellemző adat az eloszlásfüggvény:

$$f(x^\mu, p^\mu) = \frac{C}{e^{\frac{p_\mu x^\mu - \mu(u^\mu \pi_\mu)}{T(u^\mu \pi_\mu)}}}.$$

Ha az energia elég nagy, akkor a klasszikus leírásmód alkalmazható, néhány kvantumeffektus figyelembevételével (Pauli-elv).

A rendszer mozgását valamilyen dinamikai egyenlettel kell leírni. A dinamikai egyenleteket az eloszlásfüggvény időbeli változásából kapjuk. Ez a Boltzmann egyenlethez hasonló egyenlet, csak az ütközési tagok mellet átlagenergia (mean-field) is van. Nagy energiákon ennek a relativisztikus verzióját kell figyelembe venni:

$$\frac{\partial}{\partial t} + F\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - V_{pot}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{coll}$$

I_{coll} itt az ütközést írja le.
Ha a nukleonokat hullámcsomagokkal írjuk le, a fenti egyenletből megkapjuk az energiát, mint a részek helyének és impulzusának függvényét. Ha a hullámcsomagok tömeg- és impulzusközéppontjának a koordinátái $\mathbf{r}_i$ és $\mathbf{p}_i$, akkor a Hamilton egyenletek leírják a dinamikai fejlődést.

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_i}, \qquad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Ha elég energia van, az ütközésben figyelembe kell venni az új részecskék keletkezését is.

5.4 Kvark-gluon rendszer

A QCD két legfontosabb tulajdonsága (mint más nem abeli mértékelméletnél) :

1. Nagy energián aszimptotikus szabadság. Ez azt jelenti, hogy nagy energiákon perturbációszámítás alkamazható.
2. Kis energián bezártság: csak color szingulettek létezhetnek szabadon.

Ok: A vákuum szerkezete bonyolult.

A QCD szerint igen nagy sűrűségeknél és hőmérsékleteken kvark-gluon plazmának (QGP) kell léteznie. Ebben az új fázisban a hadronok szétbomlanak, az erős kölcsönhatás nagyon gyenge lesz, és plazma alakul ki. A hosszú hatótávolságú színerők kollektív effektusok miatt leárnyékolódnak, akárcsak az elektromágneses plazmában, és a kvarkok rövid hatótávolságú erők révén hatnak kölcsön. A két fázis: a színvezető nagyenergiájú QGP és a színszigetelő hadron fázis. Valami új típusú fázisátmenet van köztük.

Az átmenet és a QGP fontos a QCD szempontjából is. A két fázis két vákuumnak felel meg: perturbatív és fizikai vákuum.

A QCD Lagrange függvényéből indulunk ki:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{N_f}\left[\overline{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - g_s\gamma^\mu\hat{A}_\mu)\Psi - m_f\overline{\Psi}\Psi\right] - \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a,$$

ahol $F_{\mu\nu}$ a nemlineáris gluon térerősség tensor

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

$$\hat{A}_\mu = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\infty} A^a_\mu\lambda_a$$

$\hat{A}$ tartalmazza a gluon terek és az erős csatolás állandóját: $g_s \Rightarrow \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$.

A Maxwell egyenletek analogonjai

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}_a = g_s j^\nu_a - g_s f_{abc} A_{b\nu} F^{\mu\nu}_c,$$

ahol a kvarkok színárama

$$j^a_\mu = \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\lambda_a\Psi.$$

Az utolsó tag azt mutatja, hogy a színtér részben úgy hat, mint a saját forrása, azaz a gluonoknak is van színtöltésük.

A Lagrange-függvény invariáns egy lokális mértéktranszformációval szemben (skálainvariáns)

$$\Psi \to \Psi' = [1 - i g_s \epsilon_a(x) \lambda_a] \Psi,$$

$$A_a^\mu \to A_a^{\mu'} = A_a^\mu + \partial_\mu \epsilon_a(x) + g_s f_{abc} \epsilon_b(x) A_c^\mu(x).$$

A renormalizáció miatt a skála invariancia sérül, és a csatolási állandó skálafüggő lesz.

$$g^2(Q^2) = \frac{16\pi^2}{\left(11 - \frac{2}{3} N_f\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)},$$

$$\Lambda \sim 150\ MeV, \qquad N_f \quad \text{egész szám.}$$

Innen látható az aszimptotikus szabadság.

Alacsony energián, amikor csak u és d kvarkok vannak, fennáll a királis aszimmetria, ha feltesszük, hogy ezek tömege zérus. Mivel a királis aszimmetria nem egzakt,

$$m_d \sim 9, \quad m_u \sim 5, \qquad de \quad m_{d,u} \ll \lambda.$$

Áramalgebra segítségével megmutatható, hogy

$$2 m_u^2 f_\pi = -(m_u + m_d) \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle,$$

ahonnan a kvark kondenzátum értéke -225 MeV. Ha a kvarkok tömegei zérusok lennének, a pion tömege is zérus lenne. A fizikai, nem perturbatív vákuumban a királis szimmetria spontán sérül. A vákuum várható értéke nem zérus.

Hadron fázisban a kvark tömege nagy, de QGP-ben közel 0.

Kérdés: mi a deconfinement és királis szimmetria helyreállása között a különbség ? Ha különbözőek, a deconfinement alacsonyabb hőmérsékleten következik be. Lehet, hogy egyszerre következnek be. Rácson számolva m=0-ra biztos.

5.5 Zsákmodell

A bezártságot egyszerűen zsákmodellel lehet leírni.
Két tartomány van : nagy energiájú színvezető QGP , és kis energiájú színszigetelő hadron.

A zsákmodell kép

Nukleon buborék van a fizikai vákuumban, benne 3 kvark. Színes gluonok közvetítik a kölcsönhatást.

Gluonok nem csak a buborékon belül, hanem kívül is vannak. Az önkölcsönhatásuk, ami a szín miatt van, negatív energiajárulékot eredményez. Az üres tér energiaminimuma nem az eltűnő gluontér, hanem gluonok sokasága. A buborék körül kondenzátum van, ahova a kvark nem tud kilépni. A kondenzátum nyomást gyakorol a buborék falára. Kvark csak ott terjedhet, ahol a valódi vákuum, ami a gluonkondenzátumot tartalmazza, elromlott. Az elromláshoz energia kell, $\epsilon = B$, ez a zsák energia. A vákuum Lorentz-invarianciája miatt $P_0 = -B$. Ha elhanyagoljuk a rövid hatótávolságú erőt, a kvark Dirac egyenlete (szabad Dirac egyenlet):

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - M\Psi + (M - m)\Theta_v \Psi = 0$$

ahol $\Theta_v = 1$ a zsákon belül, $\Theta_v = 0$ kívül. $M \to \infty$ -re megmutatható , hogy $\Psi = 0$ a zsákon kívül. A részecskeáram a felületen:

$$n_\mu \gamma^\mu \Big|_F = n^\mu_{\mu f} = n_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \qquad \text{bezártság.}$$

Ha a külső tömeg nagyon nagy, a határfeltétel azt eredményezi, hogy a kvarkáram normális komponense a felületen zérus. A szabad Dirac egyenletet ezzel a határfeltétellel meg lehet oldani.

Az energia-impulzus tenzor megmaradása követeli, hogy a felületen külső nyomás lépjen fel. Ez azt jelenti, hogy a zsákon belül negatív nyomás van.

A zsákmodell tehát durván tartalmazza az aszimptotikus szabadságot és a bezártságot. A zsákon belül a kölcsönhatást perturbatíve vesszük figyelembe, kívül pedig szín szinglet állapotot követelünk meg. Ez úgy érhető el, hogy a vákuumhoz egy állandó energiasűrűséget adunk. Ezáltal egy hadron energiája:

$$E_H(R) = BV + \frac{c}{R}.$$

A második tag a kvark kinetikus energiája, ami a határozatlansági reláció miatt $\frac{1}{R}$-rel arányos. Az effektív sugár a minimalizálásból kapható meg.

$$\frac{\partial E_H}{\partial R} = 4\pi R^2 B - \frac{c}{R^2} = 0 \qquad\qquad R = \left(\frac{c}{4\pi B}\right)^{\frac{1}{4}}$$

A hadron tömege: $M = \frac{4\pi}{3} R^3 B$

A Dirac-egyenletből: $c \approx 6.12$, így a zsákállandó: $B^{\frac{1}{4}} \approx 200 MeV$

5.6 Kvark-gloun plazma (QGP)

A QGP állapotegyenlete a gluonok és a kvark-antikvarkok állapotegyenletéből tevődik össze. Multiplicitás

$N_g = 2$ (spin) * 8 (szín) = 16

$N_q = 2$ (spin) * 3 (szín) * 2 (íz) = 12

Első közelítésben csak u és d kvarkot tekintünk, m=0 tömeggel. Ekkor $\epsilon_q \approx p$.

A gluonok energiája:

$$e_g = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p\, p \frac{1}{e^{\beta p} - 1} = \frac{4\pi T^4}{(2\pi)^3} \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \frac{\pi^2 T^4}{30}.$$

(T : 160 MeV egységekben)

A kvarkok energiája:

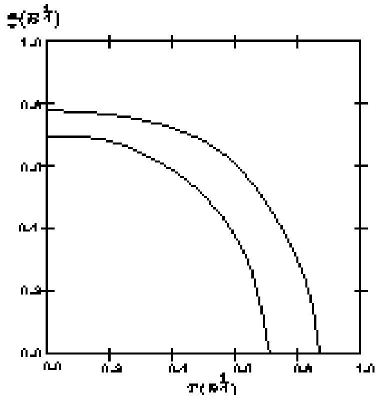
$$e_q = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p\, p \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} - 1} = \frac{T^4}{(2\pi)^2} \int_{-\beta\mu}^{\infty} dx \frac{(x-\beta\mu)^3}{e^x - 1},$$
$$e_{\bar{q}} = \frac{T^4}{(2\pi)^2} \int_{\beta\mu}^{\infty} dx (x - \beta\mu)^3 \frac{1}{e^x - 1}, \qquad\qquad \mu \to -\mu,$$

$$e_q + e_{\bar{q}} = \frac{7\pi^2 T^4}{120} + \frac{\mu^2 T^2}{4} + \frac{\mu^4}{8\pi^4}.$$

Ha barion szimmetrikus esetet nézünk, (ez azt jelenti, hogy a barionok és az antibarionok száma megegyezik, $(\mu = 0)$)

$$e = 16 e_g + 12(e_q + e_{\bar{q}}) \approx \frac{37\pi^2 T^4}{30} \approx \left(\frac{T}{160 MeV}\right)^4 \frac{GeV}{fm^3}.$$

$$e_{nuc} \approx 125 \frac{MeV}{fm^3}, \qquad\qquad \Delta e = e - e_{nuc} \approx 4B \approx 300 - 500 \frac{MeV}{fm^3}.$$



A fenti ábra a kvark-gluon plazma stabilitásgörbéje a $T-\mu$ síkon. A belső görbe az $\alpha_s = 0$ csatolási állandóhoz tartozik, a külső az $\alpha_s = 0.5$ értékhez.

A plazma elbomlása

Lehetőségek:

1. Expanzió, fázisátmenet.
2. Párolgás (π kibocsátás)

A Planck-törvény szerint az egységnyi idő alatt egységnyi felületen kilépő energiaveszteség:

$$\frac{dE}{dt\, d^2x} \sim 0.2\, T^4$$

Integrálva a kvark-gluon plazmára egy 2 fm sugarú plazma az energiája felét $20\frac{fm}{c}$ idő alatt veszti el $(6 \cdot 10^{-23} s)$. Ez túl hosszú időtartam.
Pontosabb számolások szerint

$$\frac{dE}{dt\, d^2x} \sim 0.02 \frac{T^5}{fm^2}$$

Magasabb hőmérsékleteken fontosabb az expanzió, mint a termikus pionok kibocsátása.
Valószínű, hogy fázisátmenet következik be, és ez okozza a rehadronizációt.

5.7 Fázisátalakulások kvark és hadronanyag között

V_H, V_Q térfogatok
N_c hadronok száma, N_a kvarkok és gluonok száma
S_H, S_Q entrópia

A rendszer teljes belső energiája:

$$E = E_H(V_H, N_i, S_H) + E_Q(V_Q, N_a, S_Q)$$

$$E_H = V_H\, e\left(\frac{N_a}{V_H}, \frac{S_H}{V_H}\right)$$

$$E_Q = V_Q\, e\left(\frac{N_Q}{V_Q}, \frac{S_Q}{V_Q}\right)$$

Tegyük még fel a szeparálhatóság mellett, hogy $n = p$, $S = 0$ (ritkaság), $Z = \frac{B}{2}$.
Egy termodinamikai rendszer adott entrópián belső energiáját minimalizálni igyekszik, adott

belső energián entrópiáját maximalizálja.

$$\delta\big(V_H e_H(n_p, n_n) + V_Q e_Q(n_u, n_d, n_s)\big) = 0,$$

$$V_N(n_p + n_n) + \tfrac{1}{3}V_Q(n_u + n_d + n_s) = B = const,$$

$$V_n n_p + \tfrac{1}{3}V_Q(2n_u - n_d - n_s) = Z \sim \tfrac{B}{2} = const,$$

$$n_n + n_p \equiv n_N, \qquad n_d = n_u \equiv n_q, \qquad n_s = 0.$$

A Gibbs feltételt az energia variációjából kapjuk meg: a két fázis közti intenzív paraméterek egyenlőek. A hadron fázisban

$$\mu_N = 3\mu_q, \qquad \mu_s = 0, \qquad \mu = \frac{\partial E}{\partial N},$$

$$p_H = p_N = p_Q, \qquad T_N = T_Q,$$

$$p_n = -\frac{\partial E_N}{\partial V_N} = n_N\left(\frac{\partial e_N}{\partial S_n}\right) - e_N,$$

$$e_N(n_N) \sim mc^2 n_N + \frac{g^2\hbar c n_N^2}{2} + \frac{3}{2}n_N T + \frac{\pi^2}{10}\frac{T^4}{(\hbar c)^3}.$$

A második tag a közeli mezonokkal való taszító kölcsönhatási tag. Vonzás a nagy sűrűség miatt nincs. A harmadik tag a nukleonok termikus energiája, a negyedik tag a pionoké.
Kvarkanyagra, mint láttuk:

$$e_Q \sim \frac{K_1\mu^4 + K_2\mu^2T^2 + K_3T^4}{(\hbar c)^3} + B, \qquad e_Q = e_0 + B,$$

ahol K_1, K_2, K_3 a fent meghatározott kiszámítható dimenziótlan konstansok.
A nyomások:

$$P_Q = \tfrac{1}{3}e_0 - B = \tfrac{1}{3}(e_0 - 4B)$$
$$P_H = \tfrac{1}{3}e_H$$

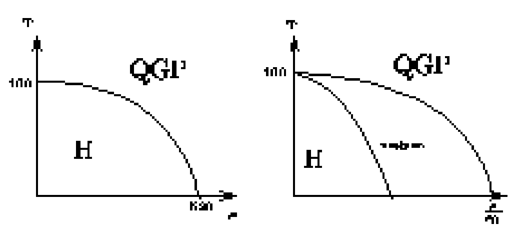
A plazma akkor válik instabillá, mikor át tud menni hadronállapotba. A stabilitás feltétele az, hogy a két rendszer nyomása megegyezzen.

$$P_Q(T_c) = P_H(T_c), \qquad T_c \sim 200\ MeV.$$

A B zsákenergia hatása az, hogy a két rendszer energiája jelentősen különbözik a kritikus hőmérsékleten:

$$\Delta E_c \sim 4B \sim 0.8\,\frac{GeV}{fm^3}.$$

Ez az egyszerű modell egyértelműen elsőrendű fázisátmenetet jósol, ΔE_c a latens hő. α_s szerepe módosítja a képet.



5.8 Szignatúrák

Kérdés: miről ismerjük fel a reakció után, hogy ott kvark-gluon plazma létrejött.

1. γ és lepton-antilepton ($l\bar{l}$) párok kilépése. Korai forró kvarkok által kisugárzódnak, utána a gyenge kölcsönhatás miatt nem bomlanak el hamar, az anyag szétbomlása nélkül.
   Az impulzuseloszlásukban bizonyos nagy p transzverzális csúcsok csak plazma esetén jelennek meg.

2. Bájos kvarkok: $c\bar{c}$ párok keletkeznek a korai ütközésekben , majd szétválnak. Utána nehezen találnak egymásra, hogy J/Ψ képződjön, de megnő a $D\overline{D}$ mezon keletkezésének valószínűsége:

$$q\bar{q} \longrightarrow c\bar{c}, \qquad\qquad gg \longrightarrow c\bar{c}.$$

3. Ritka rész keltés:
   Fázisátmenet esetében u d s termikus egyensúlyban van.

$$N_s \sim \frac{3}{\sqrt{2}} V \left(\frac{T_s m}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m_s}$$

$$\frac{N_{\bar{s}}}{N_{\bar{q}}} \sim \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{N_s}{N_q} \sim 0.04$$

   $\bar{s} + u \longrightarrow K^-$ könnyen kialakul
   $s + \bar{u} \longrightarrow K^-$ nehezen talál s $\bar{u}$ partnert.
   $\frac{K^+}{\pi^+}$ nagy, $\frac{K^-}{\pi^-}$ kicsi

4. Végállapotú részek sebességének vizsgálata. QGP esetén a benne fellépő erős súrlódás miatt a q sebesség azonos

5. A mennyiségek fluktuációja és korrelációs tulajdonsága megváltozhat QGP-ben. Kérdés, mi lyen ez a fázisátmenet, első vagy másodrendű, mert akkor más a korrelációs hossz. A multiplicitásban is lehet fluktuáció – fraktál szerkezet – intermittencia
   A QGP fázisátmenetében nagy, nem statisztikus fluktuációk lépnek fel. Az intermittencia vizsgálata nehéz a statisztikus zaj miatt. $e^- + e^-$ -ban megfigyeltek fluktuációkat.

6. Legfontosabb a ritka antibarionok vizsgálata

6. Fejezet

Csillagfejlődés

6.1 Viriál tétel

A viriál tétel a Newton egyenletekből levezethető:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \qquad\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(mx^2) = mx\frac{d^2x}{dt^2} + m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(m\mathbf{r}^2) = m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}\mathbf{F}.$$

Minden tömegpontra összegezve, és felhasználva, hogy $I = \sum m_i r_i^2$ a tehetetlenségi nyomaték és $K = \sum m_i \dot{r}_i^2$, a kinetikus energia:

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K + \sum_i \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i.$$

Ha az erő gravitációs erő, akkor a viriál:

$$\text{viriál} = \sum_i \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i = \sum_{ij} -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}} = \Omega$$

azaz

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K + \Omega.$$

Ha a rendszer egyensúlyban van, I nem változik, $2K + \Omega = 0$. Ez a viriál tétel.

Alkalmazás ideális gázokra

Ideális gáz esetén egy részecske átlagos kinetikus energiája $\frac{3}{2}kT$. Egy adott dm tömegben dN molekula van, így ennek kinetikus energiája:

$$dK = \frac{3}{2}kTdN = \frac{3}{2}RTdm = \frac{3}{2}(\gamma-1)c_vTdm, \qquad (\gamma = \frac{c_p}{c_v}), \qquad k = 3.3\cdot 10^{-24}\frac{cal}{fok}.$$

A gáz belső energiája $E = c_vTdm$, így a kinetikus energia és belső energia kapcsolata: $K = \frac{3}{2}(\gamma-1)E$, ahol (egyatomos) ideális gázra $\gamma = \frac{5}{3}$, $K = E$. A teljes energia $U = E + \Omega$.

- Egyensúly esetén a viriál tétel alapján $2K = -\Omega$, tehát

$$U = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\Omega, \qquad\qquad E = -\frac{\Omega}{3(\gamma-1)}$$

a) Ideális gázra $U = \frac{1}{2}\Omega$, $E = -\frac{1}{2}\Omega$,
b) Degenerált gázra $\gamma = \frac{4}{3}$, $U = 0$, $E = -\Omega$.

- Ha a rendszer kontrahálódik, $2K + \Omega < 0$, így $2K < |\Omega|$.

Egyenletes anyageloszlásra $\Omega = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$, ekkor ideális gázra

$$K = E = \frac{3}{2}k\overline{T}N = \frac{3}{2}k\overline{T}\frac{M}{\mu m}.$$

A kontrakció feltétele ezek szerint.

$$3k\overline{T}\frac{M}{\mu m} < \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}, \qquad k\overline{T} < \frac{1}{5}\frac{GM}{r}\mu m.$$

Bevezetve a sugár helyett a sűrűséget $\left(\overline{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}\right)$, a kontrakció feltétele:

$$M > 1.2\,10^{-10}\frac{T^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{3}{2}}\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}}.$$

Konklúziók:

- Intergalaktikus anyagra $\mu \sim 1$, a galaktikák kialakulása idején $T = 10^4\,K$ volt, $\rho = 10^{-26}\frac{g}{cm^3}$, így $M > 1.2\,10^{10}$, azaz ez az egyszerű meggondolás jól adja a galaxisok tömegét.
- Egyensúly esetén $T = 4.1\,10^6\,\mu M\overline{\rho}^{\frac{1}{3}}$ (K^o) azaz növekvő tömeggel nő a hőmérséklet.

Degenerált rendszerek

Degenerált rendszerre a részecskék kinetikus energiája a sűrűséggel lesz arányos:

$$\frac{E}{A} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2\rho)^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{E}{A} = \frac{3}{5}E_F$$

Ultrarelativisztikus esetre $E = pc$ miatt $p_F c \sim \rho^{\frac{1}{3}}$, $\frac{E}{A} = \frac{3}{4}E_F$.
Egy rendszer akkor válik degenerálttá, ha a hőmérsékleti energiája sokkal kisebb a Fermi energiánál, azaz ha $kT << E_F$. Degenerált rendszerek fontos tulajdonsága, hogy alapállapotban levén nem tudnak sugározni.
Teljesen ionizált hidrogén gázban a protonok sűrűsége, így fermi impulzusuk is megegyezik az elektronokéval, a kinetikus energiájuk ezerszer kisebb. Az elektrongáz hamarabb degenerálódik, mint a protongáz.
Relativisztikus elektrongáz esetén az egyensúly feltétele $\frac{3}{4}N_e\hbar c(3\pi^2\rho_e)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$, ahol $N_e = \frac{M}{\mu M_H}$, $\rho_e = \frac{N_e}{V}$. Ez maximálisan kb. $1.2 - 1.4\,M$ tömeget jelent. Ezt hívják Chandrasekhar határnak.

6.2 A csillagfejlődés törvényeinek egyenletei

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r),$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} = -g\rho,$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho\epsilon(r),$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{k\rho}{T^3}\frac{1}{4\pi r^2}L(r) \quad \text{sugárzás},$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T(r)}{P(r)}\frac{dP(r)}{dr} \quad \text{áramlás}$$

6.3 Magreakciók csillagokban

6.3.1 Reakciósebesség

A csillagfejlődést leíró egyenletekben egy fontos meghatározandó mennyiség az ϵ, azaz a termelt energia. ϵ sok részből tevődhet össze. Mi a következőkben a nukleáris energiatermelést tanulmányozzuk.

10 millió fok esetén $E_T = \frac{3}{2}kT \approx 1 keV$. Klasszikusan a fúzióhoz szükséges energia $E_T \approx E_C \approx 0.5\, MeV$. Kvantummechanikát és statisztikus fizikát figyelembe véve kisebb energián is bekövetkezhet, de kb. $1\, keV$ a minimális hőmérséklet.

Legyen n_1 és n_2 az ütköző részek sűrűsége. Az egységnyi térfogatban, egységnyi idő alatt bekövetkezett reakciók száma: $r = n_1 n_2 < \sigma v >$, ahol $< \sigma v >$ az átlagos marad.

$$< \sigma v >= \frac{\int \sigma(v) v N(v) dv}{\int N(v) dv}.$$

$N(v)$ itt a v sebességű részek száma: $N(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ és m a redukált tömeg.

Kis energián a magreakciók hatáskeresztmetszete neutronokra $\sigma \approx \frac{S}{E}$, $E = \frac{1}{2}mv^2$. Protonokra még a Coulomb gáton való átjutást is figyelembe kell venni. Az α bomlásból ismert, hogy $\sigma \approx \frac{S}{E}e^{-2\pi\eta}$, $\eta = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v}$. A hatáskeresztmetszet eszerint

$$< \sigma v >= \left(\frac{2}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} 2 \frac{S}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int dE e^{-\frac{E}{kT} - \frac{B}{\sqrt{E}}},$$

ahol $B = 2\pi\eta\sqrt{E}$ az energiától nem függő konstans. Az integrandus értéke ott maximális, ahol

$$\frac{E}{kT} + \frac{B}{\sqrt{E}} = min, \qquad \frac{E}{kT} = \frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{E}}, \quad \text{amiből} \quad E = \left(\frac{1}{2}BkT\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Sorbafejtve a minimum hely környékén,

$$< \sigma v >= \frac{16}{9\sqrt{3}} \frac{\hbar}{2\pi e^2} \frac{1}{Z_a Z_b} S \tau^2 e^{-\tau},$$

ahol

$$A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \qquad m = m_p A, \qquad E = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \tau = 3\left(\frac{B}{2\sqrt{kT}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

A magreakciók hatáskeresztmetszete különösen nagy lesz rezonancia értékeknél. A Breit Wigner formulákból tudjuk, hogy ott

$$\sigma(a, b) = g \frac{\pi}{k_a^2} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2},$$

ahol $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$. és g a spintől függő súlyfaktor. σ értéke $E = E_r$- nél kiugróan nagy, így E helyébe ezt helyettesíthetjük:

$$< \sigma v >= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v_r^3 e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}} \int_0^\infty \sigma(v) dv = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \hbar^2 g \frac{\Gamma_a(E_r)\Gamma_b}{\Gamma} \left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_r}{kT}}.$$

Rezonancia értékeknél a hatáskeresztmetszet nagyságrendekkel nagyobb lehet, mint rezonancia nélkül. A reakciósebesség ezek szerint függ az adott részek sűrűségétől, a keletkezett közbenső rendszer állapotától, és rendkívül erősen a hőmérséklettől.

6.3.2 A Nap energiatermelése

Gravitáció során az eddig felszabadult energia a Napban: $W = -\frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot} + \frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_0}$. A sugárzás ideje $t = \frac{W}{2\overline{L_\odot}}$, ahol $\overline{L_\odot}$ az átlagosan 1 sec alatt kisugárzott energia. A Napra az adatok: $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{33}\, g$, $R_\odot = 6.96 \cdot 10^{10}\, cm$, $L_\odot = 3.86 \cdot 10^{33}\, \frac{erg}{s}$ és ha $\overline{L_\odot} = \frac{L_\odot}{10}$-et veszünk, $t = 2 \cdot 10^{8}$ év. A Föld kora $5 \cdot 10^9$ év, tehát ennél jóval hosszabb.
A magreakciókban felszabadult energiával kifejezve $\frac{\Delta M c^2}{L_0} = t$. $t = 5 \cdot 10^9\, a$ és $L_0 = L_{max}$ értékekkel $\Delta M = 5 \cdot 10^{-4} M_\odot$ adódik, azaz a Nap tömegének csak 0.05%-a sugárzódott ki. Ha a csillag tömegének 10%-a égeti a hidrogént, annak mintegy fele fogyott el máig. Ha a Nap teljes tömege vas körüli elemekké alakul, a felszabadult energia $\Omega = QM_\odot = 1.6 \cdot 10^{52} erg$, $Q = 8\, MeV$/nukleon, ami mai fényességgel $t = 1.2 \cdot 10^{11}$ évig világítana. Nukleáris energiatermelés nélkül tehát Napunk nem tudna ma világítani, de könnyű elemek fúziójából elegendő energia áll rendelkezésre.

6.3.3 A csillagokban lezajló magreakciók

Kérdés, milyen magreakciók mehetnek végbe a csillagokban? $T = 10^7\, K$ hőmérsékleten

- *Proton lánc*

Folyamat			Felszabaduló energia (MeV)	Idő
$^1H + {}^1H$	$\rightarrow$	$^2H + e^- + \nu$	1.44	$14 \cdot 10^9$ év
$^2H + {}^1H$	$\rightarrow$	$^3He + \gamma$	5.49	6 sec
$^3He + {}^3He$	$\rightarrow$	$^4He + 2\,{}^1H$	12.85	10^6 év

$E_{pp} = 26.2\, MeV$, $E_\nu = 0.26\, MeV/\nu$.

- *Berillium-bór lánc*

$$\begin{array}{lcl@{\quad}c@{\quad}l} {}^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^- + \nu & & & & \\ {}^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma & \Rightarrow & {}^3He + {}^4He \rightarrow {}^7Be + \gamma & \Rightarrow & {}^1H + {}^7Be \rightarrow {}^8B + \gamma \\ {}^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2\,{}^1H & & e^- + {}^7Be \rightarrow {}^7Li + \nu & & {}^8B \rightarrow {}^8Be^* + e^- + \nu \\ & & {}^1H + {}^7Li \rightarrow 2\,{}^4He & & {}^8Be^* \rightarrow 2\,{}^4He \end{array}$$

- *Katalizátoros magreakció*

Folyamat			Felszabaduló energia (MeV)	Idő
$^{12}C + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{13}N + \gamma$	1.95	$1.3 \cdot 10^7$ év
^{13}N	$\rightarrow$	$^{13}C + e^- + \nu$	2.22	7 perc
$^{13}C + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{14}N + \gamma$	7.59	$2.7 \cdot 10^6$ év
$^{14}N + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{15}O + \gamma$	7.35	$3.2 \cdot 10^8$ év
^{15}O	$\rightarrow$	$^{15}N + e^- + \nu$	2.71	82 sec
$^{15}N + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{12}C + {}^4He$	4.96	$1.1 \cdot 10^5$ év

$$E_C = 25.2 MeV, E\nu = 0.72 MeV/\nu.$$

- *Nehezebb elemek kialakulása*

$2\,{}^4He \rightarrow {}^8Be \rightarrow 2\,{}^4He + \gamma \quad \tau = 10^{-17}\, sec.$
A ^8Be gyorsan elbomlik, de ha azalatt míg létezik a mag, befog egy α-t, $T = 10^8\, K$-nek megfelelő energiánál, ^{12}C alakulhat ki

2 termikus α	$\longrightarrow$	^8Be	92 keV-es rezonancia	Hoyle ezt megjósolta!
3 termikus α	$\longrightarrow$	^{12}C	7.57 MeV-es rezonancia	

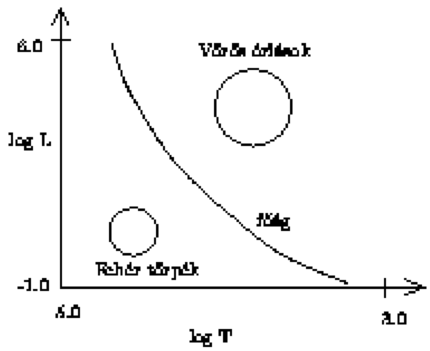
Magasabb hőmérsékleten α és β befogás, esetleg β bomlás: az elemek lassan kialakulnak a vasig.

- *További fontos magreakciók*

$$\begin{aligned}
2\,{}^{12}C &\rightarrow {}^{24}Mg + \gamma \quad 5\cdot 10^{8}\,K \text{ a küszöbenergia},\\
2\,{}^{12}C &\rightarrow {}^{20}Ne + \alpha,\\
2\,{}^{16}O &\rightarrow {}^{32}S + \gamma \quad 7\cdot 10^{8}\,K \text{ a küszöbenergia},\\
2\,{}^{16}O &\rightarrow {}^{28}Si + \alpha,\\
2\,{}^{28}Si &\rightarrow {}^{56}Ni.
\end{aligned}$$

6.4 A csillagfejlődés menete

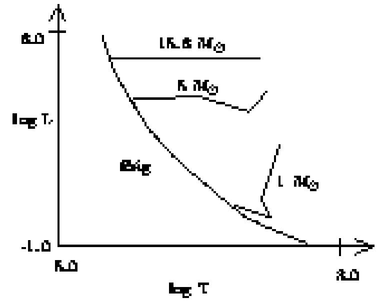
Az ismert csillagokat hőmérsékletük és kisugárzott energiájuk függvényében egy síkon ábrázolhatjuk: ez az ún. Hertzsprung-Russel diagram.



A legtöbb csillag egy vastag meghatározott vonalon található: ezeket a csillagokat nevezik főág menti csillagoknak. Ezenkívül még két tartományban találhatóak nagyobb számban csillagok: a vörös óriás ill. a fehér törpe tartományban. A diagram többi részén viszonylag kevés csillag helyezkedik el. A H-R diagram megérthető a csillagfejlődés lefolyásának ismeretében. A következőkben röviden ennek a főbb vonásait tekintjük át.

A csillagok fejlődésének kezdeti szakaszában még nem elég magas ahhoz a hőmérséklet, hogy magreakciók végbemenjenek. Ilyenkor a kissé meleg csillag sugárzási energia veszteségét csak a kontrakció során felszabaduló gravitációs energia pótolja. A viriál tétel értelmében a kontrakció során a felszabadult energia fele a csillag hőmérsékletét növeli. A megnőtt hőmérsékletű gáz nyomása képes csak a növekvő gravitációs nyomást ellensúlyozni. Ahogy nő a hőmérséklet, nő a kisugárzott energia, így az azt fedező kontrakció is gyorsul. Ha a hőmérsékletet eléri a 10^7 K-ot, a csillagok közepében beindulnak a magreakciók.

A kezdeti kontrakciós stádiumban a csillag összehúzódik, így az effektív hőmérséklete növekszik. A kisugárzott energia mennyisége függ attól, hogy milyen mechanizmus juttatja a felszabadult energiát a felületre: sugárzás vagy konvektív vezetés, azaz a csillaganyag egyes részeinek mozgása. A konvektív vezetés hatásosabb, ilyenkor a csillag több energiát sugároz ki, mint sugárzási vezetésnél. Kezdeti stádiumban a csillagok konvektívak, aztán sugárzóvá válnak, a csillag tömegétől függően. A csillag a jobb felső vagy középső sarokból a bal alsó vagy középső rész felé vándorol, tömegétől függően bejut a főágba. A következő ábrán ezek a folyamatok láthatóak.



A $^1H \rightarrow ^4He$ égés lassan megy végbe a csillagokban. Mialatt a kisugárzott energia a magreakciók során felszabadult energiával pótlódik, gravitációs kontrakcióra nincs szükség, a csillag hőmérséklete és a kisugárzott energiamennyiség állandó, a csillag a HR diagramon a helyén marad. A hidrogént égető csillagok alkotják a főágat. A főágban azért van olyan sok csillag, mert ez a csillagfejlődés leghosszabb szakasza. Nap nagyságú csillagok 10^{10} évig égetik a közepén levő hidrogén készletüket, 10-szer nagyobb csillagoknál a kontrakció során a hőmérséklet magasabb lett, ezért ezekben egy-másfél nagyságrenddel gyorsabban zajlik le a hidrogénégés, de minden csillagnál ez a folyamat 1-3 nagyságrenddel tovább tart, mint a fejlődés bármelyik másik szakasza.

Ha a csillag közepén a hidrogénkészlet kimerült, a csillag energiaveszteségét megint csak gravitációs kontrakcióval tudja pótolni. A kontrakció során megint emelkedik a centrális hőmérséklet. Ha a csillag hőmérséklete eléri a 10^8 K°-t, a hélium égető reakciók is beindulnak. Ismételt gravitációs kontrakció, illetve magreakciók révén a csillag eljuthat egy olyan stádiumba, amikor a közepén levő elemek mind vas körüli elemek. Újabb magreakció ekkor már nem jelent energianyereséget, ugyanakkor a csillag hőmérséklete $10^9 - 10^{10}$ K° körülivé válik. A csillag elérkezett egy olyan fejlődési ponthoz, amikor a békés fejlődést jelentő egyensúlyi elvek nem tudnak érvényesülni; valami katasztrófa kell, hogy bekövetkezzen.

6.5 A csillagfejlődés végállapotai

6.5.1 Fehér törpék kialakulása

Nem minden csillag jut el abba a stádiumba, amikor a csillagtörzsben levő elemek mind vas körüli elemek: kisebb csillagokat ebben megakadályozhat a csillaganyagban levő degenerált elektrongáz.
Az elektrongáz szerepével eddig nem túlságosan sokat foglalkoztunk a csillagfejlődés során. Nyilvánvaló azonban, hogy az elektrongáz szerepe a gáznyomás kialakulásánál nagy, hiszen a nyomás $1/m$-mel arányos. Ahogy a protonok egyre nehezebb elemekké tömörülnek, a barionokból álló részek száma csökken, míg az elektronok száma változatlan marad, azaz az elektronok szerepe a nyomás kialakulásánál egyre jelentősebb.

Egy rendszer akkor válik teljesen degenerálttá, ha egy bizonyos küszöbérték alatt minden állapot be van töltve a rendszerben. Minél kisebb egy részecske, a kvantummechanikai határozatlansági reláció értelmében annál nagyobb az impulzus bizonytalansága, azaz annál nagyobb a fázistcella, amit elfoglal. Egy ideális és egy degenerált gáz nyomása akkor lesz egyenlő, ha

$$p = \frac{k}{m}\rho T = c_1 \frac{\rho^{\frac{5}{3}}}{m^{\frac{8}{3}}},$$

azaz

$$\rho \sim m^{\frac{5}{2}}.$$

Minél kisebb a részecske tömege, annál kisebb az a sűrűségérték, ahol a gáz degenerálttá válik. Egy degenerált gáz nyomása és így belső energiája nem a hőmérséklettől függ, hanem a sűrűségtől. Vagyis ha az elektrongáz degenerálódott, a gravitációs kontrakció nem a hőmérsékletet növeli, hanem a nyomást. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor újabb magreakciók beindítására nem lesz a hőmérséklet elég nagy.

Az elmondottak alapján világos a kis csillagok fejlődésének a végállapota. Ha a csillag kicsi, a gravitációs kontrakció során hamar degenerálttá válik az elektrongáz, további magreakció ilyenkor nem következik be, a rendszer lassan zsugorodik. A zsugorodás csak egy kritikus értékig tarthat, a gáznyomás a további kontrakciót megakadályozza. Mivel további energiafelszabadító folyamatok nem mennek végbe a csillag lassan lehűl. A degenerált gáz sugárzása jóval kevésbé intenzív, mint az ideális gázé, a sugárzás során elektronátmenetek nem következhetnek be, mert az elektronpályák mind be vannak töltve. Ezek a kicsi, fehér, lassan pislákoló égitestek a fehér törpék.

Ahogy a csillagban középen kifogy a hidrogénanyag, a külső rétegek a közép felé kontrahálódnak, miközben megnő a csillag hőmérséklete és nagy lesz a sugárnyomás. A nagy sugárnyomás felfújja a csillagot, nagy méretű lesz, miközben a külső rétegek hőmérséklete lecsökken. Az ilyen csillagok a sok energiát kisugárzó, de kis felületi vagy effektív hőmérsékletű vörös vagy fehér óriások, amelyek a HR diagram jobb felső sarkában helyezkednek el. Ha további magreakciók nem indulnak be, a csillag összezsugorodik, azaz a felületi hőmérséklete a nagy sűrűsége miatt megnő, nincsenek hideg felületi zónák, ugyanakkor a kisugárzott energia lecsökken, a csillag fehér törpévé válik. A fehér törpék a HR diagram bal alsó sarkában helyezkednek el.

Körülbelül az $M < 10\ M_\odot$ könnyű csillagok válnak fehér törpévé, azaz jelenlegi tudásunk szerint a Nap is egyszer fehér törpe lesz majd. Körülbelül 5 milliárd évig tart még a Napban a centrális hélium égés, ezalatt a Föld átlaghőmérséklete egfeljebb $20^\circ C$-ot növekszik. Ezután gravitációs kontrakció következik be majd, amelynek során a Föld átlaghőmérséklete becslések szerint $800^\circ C$-ra emelkedik, majd kb. 10-100 millió évig tart a külsőbb rétegek hidrogénjének ill. a centrális héliumnak az égése. Valószínűleg további magreakciók nem indulnak be a Napban, a Nap (és a Föld légköre is) lassan kihűl, egyikévé válik a jelentéktelen és nagy számú fehér törpéknek.

A körülbelül tízszeres Naptömegnél nagyobb csillagok közepe mai elméletünk szerint teljesen vagy részlegesen vassá alakulhat át. További energianyereség most már magreakciók révén nem lehetséges, a hatalmas, 10^9 fok hőmérsékletnek megfelelő kisugárzott energiát csak a gravitációs kontrakció fedezheti. A legkülső rétegek ilyenkor szinte szabadon esnek a csillag belseje felé, minden egyensúly felborul. A külső rétegek még könnyű elemekből állnak, ezek a forró centrumba beérkezve magátalakulásokban vesznek részt. A korábban milliárd évekig tartotó folyamatok itt pillanatok alatt bekövetkeznek, és hihetetlen nagy energiamennyiség szabadul fel. A rendkívül nagyenergiájú részecskék és fotonok a legkülönbözőbb magreakciókban vesznek részt; minden lehetséges izotóp kialakul. Ez az a műhely, ahol a nehéz elemek keletkeznek.

Most már két energiafogyasztó mechanizmus is van a csillagban: a nehéz elemek kialakulása és a sugárzás. További gravitációs kontrakció következik be. A középpontban hatalmas mennyiségű nagyenergiájú neutrínó, antineutrínó sugárzás keletkezik, elsősorban párkeltés révén. Ezek a külső rétegekben elnyelődnek, energiájukat átadják az anyagnak. A nagy mennyiségű kivitt energia hatására a csillag felrobban. Ezt a folyamatot nevezik szupernova robbanásnak.

Szupernova-robbanás során a csillagnak akár 80-90 %-a is kirepülhet a világűrbe. A visszamaradó csillag maganyag sűrűségű rendszer, ami elsősorban neutronokból áll. Az elektronok kinetikus energiája ugyanis a Pauli elv értelmében olyan nagy, hogy energetikailag kedvezőbb egy elektronnak és protonnak neutron állapotba menni át. A neutroncsillagban neutronok protonná, protonok neutronná alakulnak át, így a fellépő neutrínók miatt a csillagok hamar elvesztik hőenergiájuk nagy részét és 10^6 K alá hűlnek le, és nem tudjuk őket direkt módon megfigyelni. Mivel az utóbbi években megfigyelt pulzáló rádiócsillagok (pulzárok) valójában neutron csillagok, közvetett módon megfigyelhetők.

Ha a neutroncsillag tömege egy kritikus méret alatt van, a csillaganyag nyomása és a gravitációs nyomás egyensúlyt tart; a csillag stabilis. A neutroncsillag a csillagfejlődés egy másik végállapota. A kritikus méret meghatározása nehéz feladat, függ a nagy sűrűségű nukleonok között ható erőktől, a neutrínó kilépések gyakoriságától, stb. A kritikus méret 1-3 Naptömeg között változik a számításoktól függően. Ez azt jelenti, hogy akár 10-25 Naptömeg nagyságú csillagok végállapota még mindig neutroncsillag. Egy dolog azonban világos: van egy olyan kritikus méret, aminél nagyobb csillagnak nincs stabilis végállapota, a csillag menthetetlenül egyre jobban kontrahálódik, míg gravitációs sugarán belül kerül. A csillagfejlődés ezen harmadik végállapotairól, a fekete lukakról fotonok révén nem nyerhetünk információt, ugyanis az elektromágneses sugárzás útja olyan görbült, hogy ezek nem tudnak a fekete lukból kijönni. Ezeket a csillagokat legfeljebb csak nagy gravitációs terük segítségével figyelhetjük meg.

6.5.2 Szupernova robbanás

A szupernova robbanás az Univerzum leglátványosabb jelensége. A kibocsátott energia a robbanás során $\sim 10^{52}$ erg, aminek a sugárzások (minden hullámhossztartományban) csak kb. 1%-t viszik el. Ennél tízszer nagyobb a szétvetett anyag kinetikus energiája, és százszor nagyobb a neutrinók által elvitt energia. A robbanás során felszabadult energia fényesebbé tehet egy csillagot, mint az egész galaktika. Néhány hónap alatt a felrobbant csillag több fényt sugároz ki, mint a Nap öt milliárd év alatt. Évente mintegy 10 szupernova robbanást figyelnek meg a környező galaxisokban. A Tejútrendszerben valószínűleg 50 évente van egy robbanás, ennek mi csak kis részét tudjuk megfigyelni. Nagyon fontos az 1054-ben kínai csillagászok által megfigyelt Rák-köd robbanása. Mintegy 10000 évvel ezelőtt robbant a Vela, ami egy második Nap fényességű objektum megjelenését jelentette.

A szupernova robbanásokat két nagy csoportra osztják, I. és II. típusú robbanás csoportjaiba. Ezeknek több alcsoportja van. Az eredeti megkülönböztetés onnan adódott, hogy az I. típusú szupernovákban nem volt található hidrogén vonal, míg a II. típusban igen. Ma már tudjuk, hogy a fejlődésük egészen más.

I.a típusú szupernova

Eredetileg binér rendszerben létező fehér törpe. A csillag magához vonz a partnertől anyagot, és eközben tömege a kritikus tömeg fölé nő (a kritikus érték $1.4\,M_\odot$, az a tömeg amivel egy degenerált elektrongáz egyensúlyt képes tartani). Amikor ez bekövetkezik, gravitációs kontrakció megy végbe, a csillag anyaga rendkívüli mértékben felmelegszik, felmelegedés során vas körüli elemek alakulnak ki, utána lassan robban a rendszer (detonáció, nem explózió). Robbanás után csillag egész anyaga szétmegy, nem marad vissza neutroncsillag. Fehér törpében nincs hidrogén, érthető hogy H színképvonal sincs. A csillag felülete kicsi, nagyon fényes a robbanás, egy nagyságrenddel fényesebb, mint a II. típusé. Az I. típusú szupernova robbanások 80%-a ilyen, 20% sok más alcsoportra oszlik, ezekről most nem beszélünk. Az I.a típusú szupernova robbanások távolság mérésére alkalmazhatóak.

II. típusú szupernova

Sokkal drámaibb, és fizikailag is érdekesebb. Három részre tagolható folyamat: *preszupernova kialakulása, kollapszus és robbanás.*

a) Preszupernova fejlődés, elemek kialakulása

Ha a csillag elég nagy volt ahhoz, hogy a törzse úgy alakulhasson át vas körüli elemekké, hogy közben az elektrongáz nem degenerálódik, a csillag zavartalanul fejlődhet, újabb héjakat égetve, vas körüli atommagokká. H égéssel szemben fontos különbség, hogy most a neutronok és protonok száma durván megegyezik. Ez nagyon meggyorsítja a magreakciókat.
Legfontosabb magreakciók amik lejátszódnak:

$$
\begin{array}{rcll}
{}^{12}C + {}^{4}He & \to & {}^{16}O + \gamma, & \\
{}^{16}O + {}^{4}He & \to & {}^{20}Ne + \gamma, & \\
{}^{12}C + p & \to & {}^{13}N + \gamma, & \\
{}^{13}N + p & \to & {}^{13}C + e^{-} + \nu, & \\
{}^{13}C + {}^{4}He & \to & {}^{16}O + n & \text{nagyon fontos neutron forrás,} \\
{}^{16}O + p & \to & {}^{17}F + \gamma, & \\
{}^{17}F & \to & {}^{17}O + e^{-} + \nu, & \\
{}^{17}O + p & \to & {}^{14}N + {}^{4}He & \text{A CNO törzs legfontosabb eleme.}
\end{array}
$$

További égések a felszabaduló energiával:

$$
\begin{aligned}
{}^{16}O + {}^{4}He &\rightarrow {}^{20}Ne + \gamma, && \\
{}^{12}C + {}^{12}C &\rightarrow {}^{24}Mg + \gamma && \text{14 MeV valószínűtlen,} \\
{}^{12}C + {}^{12}C &\rightarrow {}^{23}Mg + n && -2.6\,MeV, \\
{}^{12}C + {}^{12}C &\rightarrow {}^{23}Na + p && \text{2.2 MeV valószínű,} \\
{}^{12}C + {}^{12}C &\rightarrow {}^{20}Ne + {}^{4}He && \text{4.6 MeV valószínű,} \\
{}^{12}C + {}^{12}C &\rightarrow {}^{16}O + 2\,{}^{4}He && -0.1\,MeV, \\
{}^{14}N + {}^{4}He &\rightarrow {}^{18}F + \gamma, && \\
{}^{18}F &\rightarrow {}^{18}O + e^{-} + \nu, && \\
{}^{18}O + {}^{4}He &\rightarrow {}^{22}Ne + \gamma, && \\
{}^{22}Ne + {}^{4}He &\rightarrow {}^{25}Mg + n && \text{nagyon fontos neutronforrás,} \\
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{28}Si + {}^{4}He, && \\
{}^{28}Si + n &\rightarrow {}^{29}Si + \gamma, && \\
{}^{29}Si + n &\rightarrow {}^{30}Si + \gamma, &&
\end{aligned}
$$

de ugyanakkor Si könnyen elbomlik könnyebb elemekre He, n, p kibocsátásával. Ezeket a maradék Si-k befogják, és kialakul az ${}^{56}Ni$.
Robbanó Si égésnél, ami az összeroskadó héj mögött közvetlenül szomszédos rétegben megy végbe, kialakulhat közvetlenül is:

$$
\begin{aligned}
{}^{28}Si + {}^{28}Si &\rightarrow {}^{56}Ni + \gamma && \text{kb. 2 nap alatt következik be,} \\
{}^{56}Ni &\rightarrow {}^{56}Co + e^{-} + n && \text{6 nap felezési idő,} \\
{}^{56}Co &\rightarrow {}^{56}Fe + e^{-} + n && \text{77 nap felezési idő.}
\end{aligned}
$$

Nehéz elemek kialakulása

s-folyamat
Neutronok találhatók csillagban, ezek probléma nélkül befogódnak magokba. n befogás után béta bomlás is bekövetkezhet, ennek révén a csillagfejlődés utolsó stádiumában, amikor már a vas körüli magokon fogódik be a neutron, kialakul az összes nehéz elem. Ezt a folyamatot nevezik s folyamatnak (lassú, *slow* n befogás)

r-folyamat
A robbanó folyamatokban nagy neutron sűrűséget kapunk, hiszen itt neutrondús magok szétesnek. Ekkor neutrongazdag stabil izotópok alakulnak ki, héjszerkezetet is figyelembe véve, hiszen a mágikus neutronszámú magok kialakulásának valószínűsége nagy. Meteoritekből lehet következtetni valószínűségekre, nagyon jó egyezések, pl. urán körüli elemekre.

Preszupernovában a helyzet nem kaotikus, a rendszer a nagyobb rend felé halad. H csillagban minden rész tetszőlegesen mozoghat, egy nukleonra eső entrópia 15. Vastörzsben 56 nukleon együtt mozog, entrópia 1. Különbséget neutrínók és fotonok vitték el.

b) Kollapszus

Amikor a csillag törzse vas körüli elemekből áll, további fúziós energia nyereség nem lehet, gravitációs kontrakció történik. 18-20 $M_\odot$ tömegű kezdeti csillagnál a vastörzs 1.4 $M_\odot$ körüli tömegű, törzs nyomás nem tud egyensúlyt tartani gravitációs nyomással (Chandrasekhar limit kb. 0.7 $M_\odot$), 0.1 sec alatt kollapszus. Gravitáció miatt a törzs felmelegszik, de ez nem csökkenti kollapszust, sőt ellenkezőleg. Ok: A törzs nyomását elsősorban az elektronok száma és energiája szabja meg. Kollapszuskor a vasmagok kis része feltörik, amihez energia kell, ezáltal csökken részecskék átlagenergiája. Másrészt $p + e^-$ neutronná alakul, neutrínók lépnek ki, ezek elviszik energiát, és csökken a relativisztikus elektronszám. Mindez még elősegíti kollapszust.
Az elektron befogódás folytatódhatna, ha a neutrínók tetszés szerint kimehetnének a törzsből. Ha a törzs sűrűsége $4 \cdot 10^{11} \frac{g}{cm^3}$ lesz, a neutrínók bennragadnak az anyagban, szóródnak a magokon. Amikor a rendszer sűrűsége eléri a $2 \cdot 10^{12} \frac{g}{cm^3}$-t, az elektronokon is szóródnak. Ezután elektronok száma sem csökken, egyensúly áll be. Az elektronok nukleonokhoz való aránya egyensúlyban kb. 0.39.

A kollapszus első része véget ér.

Az összehúzódás még tart tovább, de elektron szám már nem csökken. Kollapszus második része akkor ér véget, amikor sűrűség eléri a maganyag néhányszorosát. Magok ilyenkor szétolvadnak, maganyag keletkezik. Anyag nem tud tovább összenyomódni, ellenállás keletkezik, ez végül lökéshullámot jelent. A lökéshullám meghatározásához fontos a maganyag állapotegyenlete, azaz a $P(\rho)$ függvény meghatározása. Az állapotegyenlet magfizikai ismeretekből alapállapotban:

$$\frac{E}{A} = \alpha\rho^{\frac{2}{3}} - \beta\rho + \gamma\rho^{\sigma-1}.$$

Ebből adott hőmérsékleten meghatározható $P(\rho, T)$
További sűrűségnövekedéssel szemben ez akkor taszító, ha

$$P \sim \rho\frac{d^2E}{d\rho^2}, \qquad \frac{dP}{d\rho} < 0, \qquad \frac{2}{9}\alpha\rho^{\frac{2}{3}} > \sigma(\sigma+1)\gamma\rho^{\sigma-1}.$$

c) Robbanás

Amikor az anyagsűrűség maganyagénál nagyobb, és nem nyomható tovább össze, a nyomás megnő, és a befele esés sebessége leáll. Nyomáshullámok terjednek kifele, egészen a törzs széléig. Felület közelében lelassulnak, mert szembe találkoznak beeső anyaggal, majd megállnak, és az újabb hullámok elérik az előket, nyomást okozva. Nyomás csökkenti anyag beesését. Hullámfront mögött anyag sűrűsége nagyobb lesz, mint hullám által el nem ért térrészben, adiabatikusan összenyomott állapotba kerül, megnő a hőmérséklete, nagyobb a nyomás mint hullám előtt. Később induló hullámok nyomása még nagyobb, egyre jobban utolérik korábbi nyomáshullámokat, hullámfront meredekké válik, sebességben szakadás következik be: lökéshullám keletkezett.
Lökéshullám a vastörzs közepében, kb. $0.7 M_{\odot}$-nál keletkezik.
Nyomáshullám nem okoz állandó változást a közegben, lökéshullám igen. Nagy változás sűrűségben stb., viszi ki magával anyagot. Sebességet nem a közeg határozza meg, mint hanghullámnál, hanem hullám energiája. Lökéshullám $30 - 50\ 000\frac{km}{s}$ sebességgel halad kifele. Prompt lökéshullám nem jut ki csillag felületére, már a törzs felületére érve elveszti energiáját, lelassul. Ok: a magok disszociációja, energiát visz el, hőmérséklet és nyomás csökken. Ekkor $p + n \to e^- + \nu$ folyamat is fellép, kisebb sűrűségben neutrínók már kimehetnek, ez is elvisz energiát. A nyomáshullám 300-500 km-ig kijut csillaganyagba. Mai nézet szerint lökéshullámot a neutrínók indítják újra.
Visszamaradt neutroncsillag hihetetlen nagy energiájú, energiáját neutrínók viszik el. Ezek nagyrészt kijutnak rendszerből, de kb 100 km-re a centrumtól még minden ezredik ütközik az anyaggal, nagy energiát adva át az atommagoknak. Nagy entrópiát adnak át a rendszernek, kijebb entrópia kisi, nagy entrópia gradiens konvekciót okoz, meleg anyag kiáramlik. Ez a kiáramló anyag a lökésfrontnak nagy energiát ad át.
500-3000 km között lökés felmelegíti anyagot, robbanásos magreakciók keletkeznek, itt jön létre az ^{56}Ni. 3000 km után már szabadon kijut a lökés a felületre, és magával víve a nagy energiát, szétrobbantja csillagot. Szupernova robbanás láthatóvá válik.

d) Az 1987-es szupernova robbanás

A Nagy Magellán Köddben, 160 000 fényévnyire, egy 18 $M_{\odot}$-ű kék csillag robbant fel
Történet:

- Első információt a ν-k hozzák, ν burst, 12 db. 8-10 sec-on belül (függetlenül energiától → 20 eV tömeg),
- Két órával később nem látható, három órával később igen.
- Először intenzív UV, mire megfigyelik, halványodik.
- Lassú felfényesedés láthatóban 2 hónapig, aztán halványodás.

- 5 hónap után megjelenik röntgen és γ sugárzás.
- háló sugárzás korábban kilökött felmelegített burokból.
- 2 év után pulzáló jel, 2000/s, de eltűnik.

Az elméletet igazolja:

- ν kilépése a neutroncsillag kialakulását bizonyítja. Ennek tömege 1.4 $M_{\odot}$, 10^{53} erg energiát viszinek el. Ennek tizede kinetikus energia, százada fényenergiaként szabadul fel.
- UV sugarak bizonyítják a nagyenergiájú lökéshullámot.
- Fényesség gyengülése 77 nap felezési idejű, a

  $$^{56}Ni \to {}^{56}Co + e^- + \nu \to {}^{56}Fe + e^- + \nu$$

  folyamatnak megfelelően.
- Átlátszóság 5500 foknál, rekombináció, nincs e^- amin ν ütközzön.
- Mikorra a külső réteg elvékonyodik, megjelenik röntgen és γ sugárzás, és a többi elem is. Az elemgyakoriság a várt.

Érthetetlen:

- Miért kék óriás a csillag? (Kisebb csillag kevésbé fényes)
- Hol a pulzár? A kialakult neutron csillaggal mi lett?

6.6 Neutroncsillag

A szupernova robbanás után visszamaradt csillag neutroncsillag vagy fekete lyuk.
A neutroncsillag maximális tömege relativisztikus degenerált rendszer egyenleteiből:

$$m(r) = \int_0^r d^3 r \rho(r)$$

és az Oppenheimer Volkoff egyenlet (a hidrosztatikai egyensúly relativisztikus általánosítása)

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G\frac{\left(\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2}\right)\left(m(r) + \frac{4\pi r^3}{3}\frac{p(r)}{c^2}\right)}{r^2\left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)},$$

(nem relativisztikus esetre $\frac{dp(r)}{dr} = -G\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}$).
A csillag hőmérséklete alacsony, ν-k elviszik az energiát.

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}, \qquad p \to n + e^- \nu.$$

Az állapotegyenletet kell meghatározni.

6.6.1 A neutroncsillag szerkezete

1. Külső héj: rácsban elhelyezkedő magok és elektronok $10^4 < \rho < 4.3 \cdot 10^{11} \frac{g}{cm^3}$ sűrűségnél. Az energiasűrűség W:

   $$W = n_e \epsilon_e + n_N(\epsilon_N + \epsilon_L), \qquad \epsilon_e = \frac{3}{p_F^3}\int_0^{p_F} p^2 dp \sqrt{p^2c^2 + m_e^2 c^4}.$$

   Itt a rácsenergia:

   $$\epsilon_L = -\frac{0.89 Z^2 e^2}{r_e}, \qquad \epsilon_N = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - B(A, Z).$$

   A csillag elektromosan semleges, ezért $n_e = Z n_N$. Adott $n_B = A n_N$ barionsűrűség mellett W-t minimalizálni kell. Feltételek: β bomlással szembeni stabilitás: $\frac{\partial W}{\partial Z} = 0$.
   Legkedvezőbb atommagok kialakulása: $\frac{\partial W}{\partial A} = 0$.

2. Belső héj: $4.3 \cdot 10^{11} < \rho < 2 \cdot 10^{14}\ \frac{g}{cm^3}$.
A neutrondús atommagokból a neutronok kicsepegnek:

$$W = n_e \varepsilon_e + (1 - V_N n_N) n_n \varepsilon_n + n_N(\varepsilon_N + \varepsilon), \qquad n_B = n_n(1 - V_N n_N) + n_N A, \qquad n_e = Z n_N$$

Itt ε_n a külső neutronok energiája, V_N az egy mag által elfoglalt térfogat, n_n a külső neutrongáz sűrűsége.
Feltételek: β bomlással szembeni stabilitás:

$$\frac{dW}{dZ} = 0 \Rightarrow \mu_e = \frac{\partial(n_e \varepsilon_e)}{\partial n_e} = -\frac{\partial(\varepsilon_N + \varepsilon_L)}{\partial Z}.$$

A neutronok kémiai potenciálja megegyezik a magon belül és a magon kívül:

$$\mu_n(\text{mag}) = \mu_n(\text{gáz}), \qquad \frac{dW}{dn_n} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial A}(\varepsilon_N + \varepsilon_L) = \frac{\partial}{\partial \mu_n}(\mu_n \varepsilon_n).$$

A nyomásegyensúly átalakítás után:

$$p(\text{mag}) = -\frac{\partial}{\partial V_N}(\varepsilon_N + \varepsilon_R), \qquad p(\text{gáz}) = n_n^2 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_n}.$$

Az egy nukleonra eső kötési energia minimális:

$$\frac{\partial W}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial A}\frac{\varepsilon_N + \varepsilon_R}{A} = 0.$$

A teljes nyomás $p = p_n + p_e + p_L$, ahol $p_n = n_n^2 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_n}$, $p_e = n_e^2 \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial n_e}$, $p_L = n_N^2 \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial n_N}$,
és az atommagok energiája most függ a külső neutron gáztól:

$$\varepsilon_N = \varepsilon_N(\mu_n, A, Z).$$

Ahogy nő a sűrűség, nő a szabad neutrongáz energiája, nő a nyomás neutrongáztól származó járuléka. $\rho \approx 10^12 \frac{g}{cm^3} - p_n \approx 0.2\,p$; $\rho \approx 10^{13} \frac{g}{cm^3} - p_n \approx 0.8p$. Kb. maganyag sűrűségnél kisimul rendszer.

3. n, p, e^- anyag: $\rho \sim 10^{12} \frac{g}{cm^3}$ $p_n \sim 0.2p$, $\rho \sim 10^{13} \frac{g}{cm^3}$ $p_n \sim 0.8p$

$$2 \cdot 10^{14} \frac{g}{cm^3} < \rho < 5 \cdot 10^{14} \frac{g}{cm^3}$$
$$\mu_n = \mu_p + \mu_e$$

Maganyagon belül a n p rendszer szuperfolyékony.

4. Centrum:
Lehet: kvark-gluon plazma
hiperoncsillag
megszilárdult neutron gáz (sűrűségtől függ).

Tetszőleges centrális sűrűségből kiindulva kiszámíthatjuk a neutroncsillag tömegét. Az állapotegyenlet szerepe fontos a stabilitás szempontjából, főleg a kompresszibilitás, attól függ a maximális tömeg. A legtöbb számítás lágy állapotegyenletet akar, beléjátszhat kaon kondenzáció: $e^- \to K^- + \nu$, stb. Ezekből meghatározható a neutroncsillag tömege. A stabilitás felső határa általában 1.4-1.5 $M_\odot$-nek adódik.
Lehet, hogy a meleg neutroncsillag kevésbé stabilis, mint a lehűlt, így fekete lyuk már kisebb tömegnél keletkezhet.

Tetszés szerinti $\rho = \rho_C$ értékből kiindulva, az állapotegyenlet és az Oppenheimer-Volkoff egyenlet felhasználásával $p(r)$ és $\rho(r)$ meghatározható:

$$M(r) = \int_0^\infty \rho(r) d^3 r, \qquad M = M(\rho_C).$$

6.6.2 A neutroncsillag megfigyelési lehetőségei

a) *Pulzárok*

10^{12} gauss mágneses tér, rotációs és mágneses tengely nem egyezik meg. A mágneses tér irányában kilökődik az anyag: szinkrotron sugárzás.
Megfigyelések:

1. Periódus illetve pulzusidő $\longrightarrow$ M és R ebből meghatározható.
2. Lassulási idő (megjósolták)

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\Omega^2, \qquad \dot{E}_r = \Omega\Theta\dot{\Omega} = \frac{\Omega^2\Theta}{T}.$$

   $T = \frac{\Omega}{\dot{\Omega}}$ a lassulás, Θ a tehetetlenségi nyomaték, Ω a szögsebesség .
   Rák-ködre: $\Theta \approx (4.9 \pm 3.9)10^{14}\,\frac{g}{cm^3}$, $\quad M \approx (1.1 \pm 0.8)M_{\odot}$.

3. Felgyorsulás.
   Ok:csillagrengés.
   $\Omega(t) = \Omega(t) + (\Delta\Omega_0)(Qe^{-\frac{t}{\tau}} + 1 - Q)$
   Belső szerkezetre lehet következtetni
4. Felgyorsulás gyakorisága: Más a Vela és a Rák-köd esetén.

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx \begin{cases} 10^{-4} & \text{Vela} \\ 10^{-8} & \text{Rák} \end{cases}$$

   Szerkezet, belső feszültség más.

b) *Pulzáló kettőscsillagok*

Her X-1, M=1.33 $M_{\odot}$
Röntgenpulzációs periodus 1.24 s
Binér forgás 1.7 nap, látható a partner mozgásából. Relativisztikus precesszió 35 nap.

Pulzáció oka: anyag beáramlás partnertől, felmelegszik 10 millió fokra. Röntgen sugárzás. Az akkréció 15-60-szor annyi energiát szabadít fel, mint a H fúzió. A kvazár energiája is innen van.
Vannak más pulzárok, ahol a beeső anyag felgyorsítja a forgást (600/s).
A fekete lyuk összenyomja a mágneses teret, nem lehet pulzár.

Binér rendszerben lehet röntgen pulzár vagy burst. A pulzár fiatal, nagy tömegű, partnere kék csillag, a másik öreg. Utóbbi lehet I. típusú szupernova eredménye. Mágneses térerősség különböző. 59 ms pulzár és partner tömege mindegyik kb. 1.4 $M_{\odot}$.

Gravitációs hullámokra mérés lehetősége: ismerve a két tömeget, a binér pulzár periódusa 75 mikrosec-mal kell hogy csökkenjen évente. Mérés: $76 \pm 2ms$. Mérhetőség oka: pulzus periódus (nem orbitális) évente 0.25 ns. 50000-szer kisebb mint a Rák-ködé.

Binér rádio pulzárok is vannak. A partner fehértörpe vagy neutroncsillag, valaha röntgen binér volt, eközben felgyorsult. Van egyedülálló is. 1.56 ms, 10000-szer gyengébb mágneses tér. Partner elszakadt.

7. Fejezet

Kozmológia

Newtoni program: mozgásegyenlet és kezdeti feltétel:

$$\frac{d\,y}{d\,t} = F(y), \qquad\qquad y(0) = a.$$

A kezdeti feltétel speciális, ehelyett állandó Univerzum feltevés. A mozgásegyenletek egyensúlyi megoldását kell keresni:

$$F(y_0) = 0, \qquad\qquad \frac{d\,y}{d\,t} = 0.$$

A legfontosabb paradoxonok:

1. Clausius hőhalál. Minden intenzitásparaméter kiegyenlítődik, kémiai és termodinamikai egyensúly. Ma nincs!
2. Seeliger paradoxon: Ha gravitációs terek, erő, gyorsulás.

   $$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho.$$

   Az egyenletnek sztatikus megoldása csak r=0 esetén van. Még Einstein is keresett ilyet.

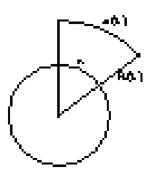
7.1 A modern kozmológia kezdetei

1. Friedman: mozgásegyenletnek nincs sztatikus megoldása. Vagy összehúzódik, vagy tágul az Univerzum.
2. 1929. Hubble törvény: az Univerzum minden irányban egyenletesen tágul (A tágulás megoldja hőhalál problémát)
3. Fekete test sugárzás. T=2.75 K-nak megfelelő háttérsugárzás van. Meglepően egyenletes.

1. és 2. következménye:

Tegyük fel egy homogén izotróp Univerzum létezését (nagy skálán ez igaz). Ekkor

$$x(t) = aR(t), \qquad\qquad v(t) = a\dot{R}(t).$$



a állandó vetített távolság

$$v(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}x(t) = H(t)x(t),$$
$$H(t_{max}) = H_0.$$

Hubble törvény:

$$v = H_0 r.$$

Távolodás során vöröseltolódás. A Wien féle eltolódási törvény szerint. :

$$\lambda_{max} \sim T^{-1},$$

de az előzőekből

$$\lambda \sim R(t)$$

és így a hőmérséklet.

$$T \sim R(t)^{-1}.$$

Doppler effektus van a távolodás miatt, a hullámhossz változik:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = z, \qquad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$$

itt λ_e a kibocsátott hullámhossz λ_0 a mért t_0 időben.

A z Doppler eltolás arányos távolsággal. Ebből az Univerzum kora meghatározható, amikor távolságok zérusok.

$$H_0 = \frac{9.78}{h} 10^9 év, \qquad t = H_0, \qquad 0.4 \leq h \leq 1.$$

A fekete test sugárzás energiasűrűsége :

$$\rho(t) = aT^4.$$

A hőmérséklet, mint láttuk $T \sim R(t)^{-1}$ így a sugárzás energiasűrűsége:

$$\rho_s \sim R(t)^{-4},$$

míg az anyagé:

$$\rho_h \sim R(t)^{-3}.$$

Ma jóval kisebb sugárzás sűrűsége, mint anyagé, valaha nagyobb volt. A korai időszakban a sugárzás dominált.

7.2 A newtoni Univerzum fejlődése

A gravitációs erő

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \qquad M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho.$$

A teljes energia

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m r^2 \left[H(t)^2 - \frac{8\pi}{3} G\rho \right] \lesseqgtr 0.$$

Az energia negatív illetve pozitív értéke meghatározza az Univerzum tágulását. A kritikus sűrűség:

$$\rho_{krit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \sim (4-16) \cdot 10^{-27} \frac{kg}{cm^3},$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{krit}}.$$

($\rho_{krit} = 5 \frac{H atom}{m^3}$, nagyon jó vákuumban $2 \cdot 10^{11} \frac{molekula}{m^3}$).

Az energia átírható sebesség korábbi definíciójával. Bevezetve a $k = -\frac{2E_{tot}}{m r^2}$ kifejezést:

$$k = R(t)^2\left[\frac{8\pi}{3}G\rho(t) - H^2(t)\right],$$

azaz m-től és x-től független egyenletet kapunk. Ha k=0, a differenciál egyenlet könnyen megoldható. Ha az anyagsűrűség dominál:

$$\rho \sim R^3, \qquad \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho, \qquad \dot{R}^2 \sim \frac{1}{R}, \qquad R(t) \sim t^{\frac{2}{3}},$$

$$H(t) = \frac{2}{3}t, \qquad \Longrightarrow \tau = \frac{3}{2}H_0,$$

és megkaptuk $R(t)$ időfüggését.
Sugárzásos esetben az egyenlet megoldása

$$\rho \sim R^{-4}, \qquad \frac{\dot{R}^2}{R^2} \sim R^{-4}, \qquad R(t) \sim t^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} = -4\frac{\dot{R}}{R} \sim \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_r}, \qquad \rho(t) = aT^4.$$

és a hőmérséklet időfüggése

$$T(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}.$$

Az Universum tágulása lassul, ugyanis

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{R}}{R}\rho_m,$$

$$\dot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho(t)R(t).$$

Az energiasűrűség $\epsilon(t) = \rho(t)c^2$ és így a $V(t) = V_0R^3(t)$ térfogatban az energia:

$$E(t) \sim \rho(t)V(t).$$

A tágulás során a rendszer munkát végez:

$$dE = -pdV, \qquad E = -3\frac{\dot{R}}{R}\rho(t)V(t).$$

Ebből megkaphatjuk egy ideális gázra a sűrűség változását:

$$\rho dV + Vd\rho = -pdV,$$

$$\dot{\rho} = -(\rho + p)\frac{\dot{V}}{V} = -3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R},$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R},$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho R^2,$$

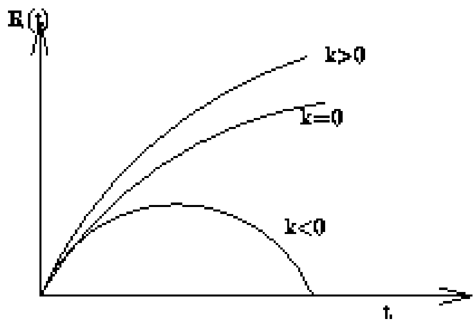
$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi}{3}G\left(\dot{\rho}R^2 + 2R\dot{R}\rho\right),$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G\rho(t)R(t).$$

Az Einstein egyenleteket használva az első egyenlet, ami az energiamegmaradást írja le, változatlan.

$$\dot{R}(t)^2 = -k + \frac{8\pi}{3}G\rho R^2$$

k különböző értékei a különböző tágulási módoknak (elliptikus, parabolikus, hiperbolikus) felelnek meg (hasonlóan, mint a bolygómozgásnál a pálya).



A második egyenlet relativisztikus esetre módosul

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)R,$$

ami

$$dE + pdV = 0$$

alakban írható egyszerű esetre. Ez az egyenlet az adiabatikus tágulást írja le. Ha a nyomás nem zérus az energiaváltozás sem az.
Az Univerzumban nincs energia megmaradás!
Ha R csökken, E és M nő,

$$M \sim \rho \sim \frac{1}{R^3},$$
$$E \sim M.$$

Finom egyensúly, nehéz létrehozni $\frac{E_{kin}}{E_{pot}} \to 1 - \varepsilon$.
Ha

$$\frac{E_{kin}}{E_{pot}} - 1 \sim \begin{cases} 10^{-4} & T \sim 1 \quad eV, \\ 10^{-16} & T \sim 1 \quad MeV, \\ 10^{-30} & T \sim 100 \quad MeV, \\ 10^{-50} & T \sim 15 \quad GeV. \end{cases}$$

$P \to 0$ esetén M és R ellentétesen változik, visszafele haladva $\frac{M}{R}$ nő, E_{pot} nő, $\frac{E_{kin}}{E_{pot}} \to 1$ nő. Ez egy kezdeti feltétel probléma. Megoldható, ha feltesszük, p nem mindig pozitív. (Ilyen van nehézion reakciókban is, instabilitás)

A negatív p jelentésének megértéséhez nézzük általában p jelentését. Bevezethetjük az effektív tömeget:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)R = -\frac{G\tilde{M}_{eff}}{R^2}$$
$$\tilde{M}_{eff} = \frac{4\pi}{3}R^3(\rho + 3p)$$

Kezdeti forró Univerzumban a sugárzás $p = \rho/3$.

$$\tilde{M}_{eff} = 2M$$

Negatív nyomás gravitációsan kompenzálja a tömegsűrűséget (antigravitáció), gyorsulás $\to 0$. Tömeg termelődik, éppen úgy hogy $\frac{M}{R}$ állandó legyen.
Nem csak megállítani lehet a fékeződést, de megfordítani is. Ha feltesszük, hogy

$$p = -\rho$$

$$\frac{GM}{R} \sim R^2, \qquad R \sim e^{\alpha t}, \qquad \tilde{M}_{eff} = -2M.$$

Ilyenkor $p + \rho = 0$ (legnegatívabb lehetséges nyomás) A speciális kezdeti feltételt kezdeti negatív nyomás szükségtelenné teszi.

7.3 Extrapoláció vissza

Húzzuk össze Universumot. Kék eltolás

$$T = (1+z)T^0, \qquad \begin{matrix} fotonra: \\ E_{sug} \sim (1+z)^4 E_0 \end{matrix}$$

A hőmérséklet, sugárzásos energia illetve nyugalmi energia változása az összehúzódás során:

$$E_m \sim (1+z)^3 E_0.$$

- $z = 1500$, $T = 4000K$ – A hidrogén atom ionizálódik. Korábban plazma volt, A compton szórás miatt egyensúly van elektron és foton közt. Minden szerkezet foton szórásban ekkor keletkezik, a háttérsugárzásból ezt az időpontot figyeljük meg.
- $z \sim 10^9$, $T \sim 3 \cdot 10^9 K$ – ekkor $\sim MeV$ nagyságrendű fotonok, szétverik magot. A mai elemek itt keletkeznek. Korábban csak nukleonok voltak.
- $z \sim 3 \cdot 10^9$, $T \sim 10^{10} K$ – párkeltés. Termodinamikai egyensúly e^-, e^-, γ között. A részecske sűrűség itt még tipikus laboratóriumi sűrűség.
- $z \sim 10^{13}$, $T \sim 3 \cdot 10^{13} K$ – antirészek keletkezése. A teljes sűrűség még mindig kisebb mint ρ_n

Még tovább visszamenve történt a kvarkanyag keletkezése. Az Universum nukleáris fejlődése (amikor még a magfizika fontos) akkor kezdődik, amikor a barionok megjelennek.

A részecskék egyensúlyban vannak a sugárzással nagy energián. Amíg $mc^2 \sim E$, ugyanolyan gyakoriak, mint a fotonok, mert keletkezni tudnak.

$$2\gamma \leftrightharpoons \pi + \bar{\pi}.$$

Protonok és neutronok addig vannak egyensúlyban, amíg a kölcsönhatás erős, át tudnak alakulni egymásba.

$$n + \nu \leftrightharpoons p + e^-,$$

10^{15} K körül ez gyakori folyamat. Amikor ν kifagy

$$\frac{[n]}{[p]} = e^{-\frac{\Delta mc^2}{kT}}.$$

Kb. 10^{10} K-nél a gyenge kölcsönhatás ideje hosszabb mint az Universum addigi kora (1s), utána a neutronok már csak bomlanak, illetve magokba rendeződnek. Könnyű magok ($D, {}^3He, {}^4He, {}^7Li$) keletkeznek.
Viszony és számok, amiket ma látunk, Ω értékétől függ. ${}^4He$ eléggé független $(2.15/115) \sim 25\%$.
A könnyű elemek gyakorisága megmondja, mennyi barionos anyag van az Universumban.

Mindezek a jelenségek (nukleoszintézis, háttérsugárzás, stb.) bizonyítják a Big-Bang-et.

7.4 Big Bang modell

Feltevések:

1. A fizikai törvények nem változtak (állandók változhatnak).

2. Forró, egyenletes gáz van az Universumban, termikus egyensúly .
3. Gáz és tér együtt fejlődik .
4. Az anyag állapotában és a sugárzásban bekövetkező változások olyan simák, hogy az Universum termodinamikai fejlődésében nem játszanak szerepet.
5. Az Universum nagy skálán homogén: nincs él és közép.

Következmények mára vonatkozóan

1. Tágulás, vöröseltolódás.
2. Mikrohullámú háttérsugárzás (fekete test).
3. p, α és egyéb könnyű elemek viszonya.

A sikerek mind az első másodperc után vannak csak!
A problémák mind a kezdeti feltételből jönnek:

1. A háttérsugárzásban fotonoknál izotrópia van, ami termikus egyensúlyt jelent. Ma ez nincs. Hogyan jött ki az Universum a termikus egyensúlyból?
2. A horizontalitás problémája: az okság elve miatt az Universum egyes részei soha nem lehettek kapcsolatban a γ sugárzás kibocsátásakor, mégis a γ sugárzása nagyon sima. Horizon távolság: az a maximális távolság, amit a fény megtehetett az Universum kezdete óta. Uniformalitás kezdeti feltétel !?
3. Nagyon speciális kezdeti feltételek szükségesek az anyageloszlásra. $\Omega \sim 1$ az indulás, de attól kicsit eltérő. Simaság!
4. $\frac{[B]}{[\gamma]} \sim 10^{-9}$ Hogyan jött ki egy ilyen arány?
5. A galaxisok (nagy méretű struktúrák) keletkezése nem magyarázható meg.
6. Az antianyag hiánya
7. Távolodásnál $E_{kin} \sim E_{pot}$. Miért?

A kérdések egy részére a GUT tud választ adni .

Big-bang időskála

Idő	Hőmérséklet	Energia	Lehetséges jelenség
10^{-43} s	10^{32} K	10^{19} GeV	Kvantum gravitáció
10^{-35} s	10^{28} K	10^{15} GeV	Erős, elektromágneses és gyenge kölcsönhatás egyesítve
10^{-33} s	10^{27} K	10^{14} GeV	Az anyag predominanciája az antianyag felett
10^{-9} s	10^{15} K	10^{2} GeV	A gyenge kölcsönhatás leválik
10^{-3} s	10^{13} K	1 GeV	A kvarkokból kialakul a p és a n
100 s	10^{9} K	10^{-4} GeV	Nukleonok kötődése: He, D kialakulása
10^{5} év	10^{3} K	0.1 eV	Fotonleválás, a háttérsugárzás eredete
10^{10} év	3 K	10^{-3}eV	Galaxisok kialakulása
$\sim 10^{32}$ év	?	?	Az anyag szétporlad vagy gravitációs kollapszus

7.5 Felfúvódó Univerzum

7.5.1 A nagy egyesített elmélet: GUT

Egyesíteni akarjuk az erős, elektromágneses és gyenge kölcsönhatást. Nagy hőmérsékleten feltételezzük, hogy ezek egyformák.
Analógia: a kristályban élő ember 3 fénysebességet észlel. Folyadékban csak egy van.

Forgásszimmetria: kristályban nincs, folyadékban van. Folyadékban rejtett szimmetriasértés van.

Nagy egyesített elmélet: minden kölcsönhatás Lagrange-függvényből származtatható, tömeg nélküli fermionokkal, vektormezonokkal, egységes csatolási állandóval.
A belső szimmetriát nem látjuk, mert a vákuum nem szimmetrikus. Van egy Φ skalártér, a nagy egyesített mező. A fermionok terében Φ sérti a szimmetriát.

Az első lépés ehhez az elektrogyenge kölcsönhatás volt. Ennek során megjósolták a vektorbozonokat.
A szimmetria közvetítő része az X részecske. Minden részhez másképp csatolódik, ebből származik a tömeg:

$$G \sim \frac{g^2}{m_X^2}, \qquad m_X \sim 10^{15} GeV.$$

Sikerek:

- Az e^- és p azonos töltésnagyságának a magyarázata
- Bizonyos gyenge és elektromágneses folyamatok erősségének magyarázata.

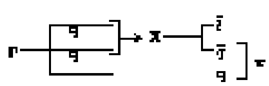
A szimmetria spontán sérül, ez tesz különbséget részek (tömeg) és kölcsönhatások (erősség) között.

$$\begin{array}{llllll} \textbf{Hatás} & \pi & m_\pi = 0.1 & GeV & 10^{-13}\,cm, \\ & W & m_w \sim 10^2 & GeV & 10^{-16}\,cm, \\ & X & m_x = 10^{15} & GeV & 10^{-29}\,cm. \end{array}$$

X fontos szerepe: megbontja a rész-antirész egyensúlyt.

$$\begin{array}{lll} q + q \longrightarrow & X \longrightarrow \bar{q} + \bar{l} & \qquad \overline{X} \longrightarrow \bar{q} + \bar{l}, \\ & \quad\;\, \longrightarrow q + l & \qquad\qquad\quad q + l. \end{array}$$

Nem kell, hogy a két elágazási arány egyforma legyen.



$$p \longrightarrow \bar{l} + \pi$$

Proton bomlásidő: 10^{30} év, ha az elmélet igaz.

Következmények az asztrofizikában

$$\begin{array}{ll} \gamma \longrightarrow X + \overline{X}, & \\ X \longrightarrow a(qq) + (1-a)(\overline{ql}), & \qquad \overline{X} \longrightarrow b(\overline{qq}) + (1-b)(ql). \end{array}$$

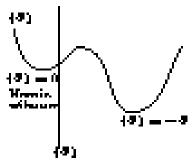
$$\begin{array}{ll} N_B \sim N_q - N_{\bar{q}} & \qquad \dfrac{N_\gamma}{N_B} \sim 10^8 - 10^9. \\ N_\gamma \sim N_{\bar{q}} + N_q, & \end{array}$$

Itt N_B és N_γ a barion- illetve fotonszámot jelöli.
Az elméletet alátámasztja az a megfigyelés, hogy:

$$\frac{K_0 \longrightarrow \mu^+ \pi^- \bar{\nu}}{K_0 \longrightarrow \mu^- \pi^+ \nu} \qquad \textbf{Bomlási arány:} \quad 1.007$$

Ma $T = 3K$, X részek $3 \cdot 10^{26}$ K-nél vannak, $(t \sim 10^{-35} s)$.

7.5.2 Az eredeti felfúvódó Univerzum elmélet



Az átmenet lassú a kihűléshez képest.
– szuperhűlés –
a rendszer a hamis vákuum felé megy.

Kvantumfluktuációk révén fázisátmenet lesz: buborékok keletkeznek, és sérült szimmetriaállapotba megy át a rendszer.

A buborékok növekedésének feltétele : $P_{\text{buborék}} > P_{\text{hamis vákuum}}$

$$P_{\text{igaz vákuum}} = P_{\text{buborék}} \qquad \Longrightarrow \qquad P_{\text{hamis vákuum}} < 0$$

A negatív nyomás antigravitációt jelent.

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\big(\varepsilon(t) + 3p(t)\big)R(t) > 0,$$

$$R \sim e^{\frac{t}{\tau}} \quad \tau \sim 10^{-33} s \quad \text{felfúvódás !}$$

Latens Φ_0 energia $\longrightarrow$ hő $\sim 10^{27}\, K$

Érthető lesz a horizont probléma és a sík világ probléma: $\Omega \to 1$

7.6 Sötét anyag

Ω_B és Ω_0 közt különbség van

A galaxisokra végzett számolások és a megfigyelt spirálkar-mozgások $\Omega_0 \sim 1$-re utalnak.

A galaxis-szerkezet formálódásához $\Omega \sim 1$ kell

Az infláció egyértelműen $\Omega_0 = 1$ -et mond.

Nem döntő
A részecskefizika is favorizál más anyagot.

7.6.1 A sötét anyag létére utaló bizonyítékok

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2},$$

$k = 0$: sík Univerzum

$$\rho = \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \cdot 10^{-29}\, h_0^2\, g\, cm^{-3},$$

$$h_0 = \frac{H_0}{100}\, kms^{-1}\, Mpc^{-1}, \qquad 0.4 \le h_0 \le 1,$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{krit}} \qquad \frac{k}{R^2} = (\Omega - 1)H^2$$

$$\Omega_{\text{Látható}} \sim 0.003 - 0.01.$$

Fényes galaxisok közepében $\Omega_L \sim 0.02 - 0.1$

$$H_0 t_u = \int_0^1 \left(1 - \Omega + \frac{\Omega}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} dx \qquad k = 0$$

$$\begin{array}{llll} t_u > 13\, 10^9 \,év & \Omega h_0^2 < 0.25 & ha & h_0 > 0.5, \\ & \Omega h_0^2 < 0.45 & ha & h_0 > 0.4, \\ t_u > 10 \cdot 10^9 \,év & \Omega h_0^2 < 0.8 & ha & h_0 > 0.5, \\ & \Omega h_0^2 < 1.1 & ha & h_0 > 0.4, \end{array}$$

$$\Omega_B h_0^2 \sim 0.0125, \qquad \Omega_B < 12\%.$$

1. Sötét anyag igazolása galaxisokban

   $$L \sim \frac{1}{r^3}, \qquad v \sim \text{állandó}$$

   $$GM(r) = v^2 r, \qquad \left(\frac{GM}{r} \sim \frac{v^2}{r}\right).$$

   v : a pályamenti sebesség r távolságban $M(r)$: az r-en belüli tömeg Egy adott sugárig a sebesség állandó
   $M(r) \sim \frac{v^2 r}{G}$, Ha M állandó , $v^2 \sim \frac{1}{r}$
   $v \sim const \Longrightarrow M \sim r$ ott is, ahol nincs fény.

2. További igazolás :
   Magas hőmérsékletű gáz galaxishalmaz körül Röntgen sugárzást bocsát ki. A ROSAT mérések alapján meghatározható a gáz mennyisége, valamint a galaxishalmaz (cluster) tömege

   $$\begin{array}{ll} Coma: & M_{gal} = (1.0 \pm 0.2) \cdot 10^{13}\, h^{-1}\, M_{\odot}, \\ & M_{gal} = (5.45 \pm 0.98) \cdot 10^{13}\, h^{-\frac{5}{2}}\, M_{\odot}, \\ & M_{gal} = (6.7 \pm 1.0) \cdot 10^{14}\, h^{-1}\, M_{\odot}, \end{array}$$

   $$\frac{M_h}{M_{tot}} \ge (0.009 \pm 0.005) \cdot h^{-\frac{3}{2}}.$$

   A ROSAT mérések és a radiális sebesség ugyanazt az értéket adja .
   A barionos anyag tehát csak 10 % körüli.

Nagymértékű skálán az elmozdulásokból való kitérések figyelhetők meg – lencsézés.

$$\begin{array}{l} \Omega_L < 0.001 \\ \Omega_{galaxis} \sim 0.03 \\ \Omega_{cluster} \sim 0.1 - 0.2 \\ \Omega_{LLS} \sim 0.1 - 0.2 \\ \Omega_{grav} \sim 0.25 - 0.6 \end{array}$$

Elméleti evidencia: infláció és galaxisképződés

Egy lehetőség a javításra a kozmológiai állandó bevezetése.