

5. fejezet

Rétegzett közegek áramlása

Természetes közegeink, a víz és a levegő nem teljesen homogének, hanem függőleges rétegzettségűek, sztratifikáltak (5.1 ábra). Hosszú idők átlagában felfelé csökkenő sűrűségű, vízszintes rétegekből álló rendszereknek tekinthetők. A természetes közegek rétegzettségét olyan hétköznapi megfigyelések bizonyítják, mint a köd, vagy a felhőréteg élesen kirajzolódó határa, vagy a tavak egyikét méteres meleg felső rétegének nyáron jól érzékelhető elkülönülése a mélyebb hideg tartománytól (5.2 ábra). Az alsó légkör, a troposzféra rétegzettségénél erősebb a felette elhelyezkedő sztratoszféráé. A síma repülést kereső utasszállító gépek ezért választják a 11 km körüli utazási magasságot, a sztratoszféra alján. A rétegzettség fontos következménye, hogy az adott sűrűségű test (léggömb, bólya) megtalálja lebegési szintjét (homogén közegben a lebegési feltétel gyakorlatilag nem állítható be). Felfelé csökkenő rétegzettségű közegben a folyadékrezek nyugalmi állapota stabil (míg homogén közegben csak marginálisan stabil). A stabilitást az mutatja, hogy a függőlegesen kimozdított részecske rezgőmozgást végez nyugalmi helyzete körül. (5.3 ábra). Ennek frekvenciája, az N Brunt–Väisälä-frekvencia a sztratifikált folyadék alapvető jellemzője, s értéke annál nagyobb, minél erősebb a rétegzettség. A rétegzettséget okozó sűrűségkülönbségek azonban a tapasztalat szerint legfeljebb néhány százalékosak (5.2 ábra), ezért a függőleges mozgások gyorsaságát a $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ redukált gravitációs gyorsulás szabja meg, mely a légkörben kb. tízszeres, az óceánokban ezerszeres redukciót jelent. A statikus rétegzettség tehát viszonylag gyenge: $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$. A Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete a redukált gyorsulás és a folyadékmélység hányadosával becsülhető. A gyenge statikus rétegzettség miatt a Brunt–Väisälä-frekvencia a hétköznapi életben tapasztaltakhoz képest alacsony frekvencia, a légkörben 10^{-2} 1/s, az óceánban 10^{-3} 1/s. Ebből az is következik, hogy a rétegzettséggel kapcsolatos hidrodinamikai mozgások mindig lassúak, jellegzetes idejük több perc vagy óra nagyságrendű.

A rétegzett folyadék mozgását egy új dimenziótlan szám, az ún. belső Froude-szám jellemzi, mely a H vastagságú közeg U vízszintes átlagsebességű áramlásában

$$Fr' = \frac{U}{HN} \approx \frac{U}{\sqrt{g'H}}$$

A rétegzettség az áramlás szempontjából akkor lényeges, ha a belső Froude-szám egynél kisebb. Értéke a környezeti áramlásokban $10^{-1} - 10^{-2}$ körüli. Természetes közegeinkben a rétegződés tehát dinamikai szempontból lényeges, annak ellenére, hogy statikai értelemben gyenge. Ezek a feltételek könnyen biztosíthatók laboratóriumi kísérletekben is.

A nagyon kis belső Froude-számnak megfelelő erősen rétegzett határesetben új jelenség fordul elő: az ún. blokkolás. Az áramlás olyan erősen vízszintes rétegekhez kötött, hogy a folyadék az akadályokat a függőleges síkban nem képes körülfolyjni (5.4 ábra). Ez a nem forgatott, rétegzett közegbeli jelenség a forgatott, homogén közegek Taylor-oszlopainak a megfelelője (l. 5.1 táblázat).

A rétegzett folyadék jellegzetes hulláma a belső hullám (5.5, 5.9 ábra), melyben a részecskék a terjedési irányra merőlegesen legfeljebb Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgést végeznek (5.6 ábra).

Ebből következik, hogy a Brunt-Väisälä-frekvenciánál gyorsabb gerjesztések nem képesek belső hullámok keltésére. A belső hullám a forgatott homogén rendszerek tehetetlenségi hullámának megfelelője (de bennük a vízszintes és a függőleges irány szerepe felcserélődik). Az adott frekvenciájú hullám igen anizotróp módon terjed, a vízszintes síkkal csak adott szöveget zárhat be (5.7, 5.8 ábra), mely a ferde felületről történő visszaverődés során is érvényben marad (5.11 ábra). A belső hullámban a csoportsebesség merőleges a hullámszámvektorra. Ezek a tulajdonságok szokatlan következményekre vezetnek a törési törvényben (5.10-5.13 ábra). A légkörben előforduló inverziós helyzetek egy olyan réteg megjelenésével járnak, melyben a Brunt-Väisälä-frekvencia ugrásszerűen megnő (5.14 ábra). Az ilyen réteg az alatta levő szempontjából záróréteggént viselkedik, mert a belső hullámok belőle nem képesek kilépni.

A háttéráramlás és periodikus domborzati egyenetlenségek következtében kialakuló belső hullámok rendelkezhetnek azzal az érdekes tulajdonsággal, hogy a háttéráramlás energiájának egy részét a közeg magasabb rétegeibe juttatják. Belső hullám keltésére csak viszonylag lassú áramlások képesek, melyekben az a frekvencia, mellyel a domborzati periodicitás megjelenik az áramlásban, kisebb a Brunt-Väisälä-frekvenciánál. Ilyenkor a hullámfrontok a háttéráramlás irányába dőlnek, s a csoportsebesség erre merőleges, tehát jelentős felfelé mutató komponenssel rendelkezik (5.15, 5.18 ábra). A jelenség a légkörben a hegy mögötti (lee) hullámok kialakulását jelenti, melyek érdekes felhőképződési folyamatokkal is társulnak (5.16, 5.17 ábra).

A rétegzett közeg sokszor modellezhető két egymás fölötti, eltérő sűrűségű sekély folyadékréteggel (5.20 ábra). Az ilyen rendszerben tipikus az ún. baroklin mozgás, mely a belső elválasztófelület jelentős elmozdulásával jár, miközben a külső felszín változása igen csekély (5.23 ábra). Ennek hullám-megfelelően az elválasztó felület mozgásával járó belső hullám, melyet a felső rétegbeli zavar is kelthet (5.22 ábra). A kis amplitúdójú belső hullám c_1 terjedési sebességének négyzete közel azonos rétegvastagságok esetén a redukált gravitációs gyorsulás és a teljes mélység szorzata: $c_1 = \sqrt{g'H}/2$. A természetben előforduló belső hullámok tehát legalább tízszer lassabbak a $c_0 = \sqrt{gH}$ sebességű felszíni hullámoknál. Meglepő módon a belső hullámban az egymás fölötti rétegek szemben áramolnak (5.21 ábra). Felfedezésükre az vezetett, hogy a torkolatok környékén a sós tengervízen néhány méter vastagságban szétterülő édesvízbe érkező hajók hirtelen lefékeződtek, "dead water"-be kerültek. Ekman adta meg ennek magyarázatát azzal, hogy energiájuk belső hullámok keltésére fordítódott.

Folytonos rétegzettségű sekély folyadékban a belső hullámok több egyszerű típusa is jelen van, az ún. normálmódusok. Közülük az elsőben a folyadék alsó és felső fele szemben áramlik, ez tehát olyan mozgás, melyben a folyadék durván kétréteggéként viselkedik. Hasonlóan, a második normálmódusban a folyadék három olyan rétegre bomlik, melyek dinamikája alapvetően különböző, és így tovább (5.19 ábra).

Zárt medencékben, öblökben, tavakban a belső hullámok állóhullám változatai is megjelennek a tólingés (seiche) jelensége kapcsán. Ilyenkor a legnagyobb lehetséges hullámhossz a medence hosszának kétszerese, a lengési periódus több nap is lehet (12.1 ábra).

Rétegzett folyadékban számos nemlineáris hullám is megjelenik, melyek lineáris társaiktól eltérően anyagárammal járnak, s ezért a környezeti transzportfolyamatok alapvető összetevői. A belső hidraulikus ugrás a belső hullám c_1 sebességénél gyorsabban áramló réteg hirtelen megvastagodása (5.26 ábra). Ilyen nagy sebességre a lejtőn lezúduló folyadék tehet szert (5.26, 5.27 ábra). Mivel azonban az állapot instabil, alkalmas helyre érve a folyadék lelassul, s eközben rétegvastagsága megnő. A hidraulikus ugrás helye térben rögzített (5.28 ábra). A belső torlóhullám (bore) a hidraulikus ugrás egyenletes sebességgel mozgó változata eredetileg nyugvó közegben. A gyorsan mozgó belső bore-okban a lépcső helyi turbulenciával jár, a lassabb változatban azonban a megemelkedett belső folyadékfelszínen nagy amplitúdójú hullámok jelennek meg (5.29, 5.30, 5.31 ábra). A gravitációs áramlat sűrű folyadék behatolása a nyugvó ritkább közeg alá, vagy hígabb folyadék felfutása a sűrűbb tetejére. Hajtóereje a sűrűségkülönbségből adódó redukált gravitációs gyorsulás (5.32, 5.33 ábra), sebessége pedig $\sqrt{g'H}$, ahol h a gyorsan mozgó réteg átlagos vastagsá-

ga. A környezetünk áramlásaiban az ilyen mozgás frontnak felel meg, s számos légköri és óceáni jelenségben megfigyelhető (5.34, 5.35, 5.36 ábra). Figyelemre méltó, hogy már egy ezreléknyi sűrűségkülönbség is (melyett vízben 5 fok hőmérsékletkülönbség vált ki) m/s sebességű áramlatot hoz létre 100 m vastagságú rétegben. A tipikus légköri sebességérték 10 m/s. A belső szolitonok a különböző sűrűségű rétegek közötti elválástó felület olyan kidudorodásai, melyek alakjukat megtartva egyenletes sebességgel haladnak (5.37, 5.38 ábra). A gravitációs áramlatok akadálytalán történő ütközése vagy az árapály hatás válthatja ki őket.

A rétegzett folyadékbeli áramlások rendezetlenné válásának alapvető mechanizmusa az ún. Kelvin–Helmholtz-instabilitás. Ez viszonylag vastag folyadékrétegek között alakul ki, ha azok vízszintes síkban különböző sebességgel áramolnak. Minden sebességkülönbséghez tartozik egy kritikus hullámhossz, s az annál rövidebb hullámhosszú zavarok mind instabilak. Az elválástó felület begyűrődik, s a megtörő felszíni hullámokhoz hasonló alakot vesz fel (5.39 ábra). Ez jól megfigyelhető kísérletekben (5.40, 5.32b, 5.33 ábra) és a mozgó légrétegek határán is (5.41 ábra).

A rétegzett közegek hidrodinamikája új vonásokkal gazdagodik, ha olyan nagy a hőmérsékletkülönbségek lépnek fel, hogy a hővezetésnek is lényeges szerep jut. A konvekció az alulról történő melegítés hatására kialakuló áramlás. A nyugvó ideális folyadék a legkisebb hőmérsékletkülönbség hatására is instabil lenne, benne feláramlások indulnának el. A viszkozitás és a hővezetése miatt áramlás csak akkor alakul ki, ha a folyadék alja és teteje közötti hőmérsékletkülönbség egy véges küszöbértéket meghalad. A küszöbértéket alig meghaladó hőmérsékletkülönbségekhez szabályos térbeli szerkezetű, időfüggetlen áramlások tartoznak (5.43 ábra), melyek a hőmérsékletkülönbség növekedésével időfüggővé és egyre bonyolultabbá válnak. A természetes közegekben a függőleges irányban előálló hőmérsékletkülönbségek a küszöbértéknél több nagyságrenddel nagyobbak. Az áramlást ekkor az jellemzi, hogy a közeg aljáról rendezetlen módon meleg folyadékcsomagok szakad el, melyek gombafelhőszerű alakban emelkednek fölfelé. Ezeket termikeknek nevezzük (5.44, 5.45 ábra). A légkörben, a télen felülről hűtött óceánban, tavakban (sőt a földköpenyben is) a konvekció termikes formája zajlik.

Ha a hővezetéssel valamely anyag diffúziója is társul, akkor kettős diffúziós folyamatról beszélünk. A sűrűséget alapvetően meghatározó ilyen anyag az óceáni vizekben oldott só, vagy a levegőben levő vízpára. A nagyobb anyagtartalom sűrűbbé teszi a közeget, tehát ellenkező hatással van rá, mint a hőmérséklet. A hőmérséklet- és koncentrációkülönbség hatására kialakuló kettős diffúziós konvekció a két komponens versengésének következménye. Az alul hideg folyadékban is beindulhat konvekció, ha fent nagy a koncentráció. Ez a folyamat vezet az ún. só-ujjak kialakulásához (12.2, 12.3 ábra), mely az óceáni sótranszport egyik fontos összetevője is. Légköri analogonja a nagy vízpáratartalmú bugyrok megjelenése a felhőréteg alján (12.4 ábra). Fordított a helyzet, ha a folyadékot alulról melegítjük, de ugyanakkor a nagyobb koncentráció is lent található. A termikus konvekciót ekkor gátolja a nagy koncentrációgradiens. A fűtés által kiváltott áramlás ilyenkor nem tud kiterjedni a folyadék teljes mélységére, hanem közel azonos vastagságú vízszintes rétegekre korlátozódik (12.5 ábra). Ez a rétegekre bomlás jól megfigyelhető a nyugvó tengervízben (12.6 ábra), és a jéghegyek olvadásakor is (12.7 ábra).

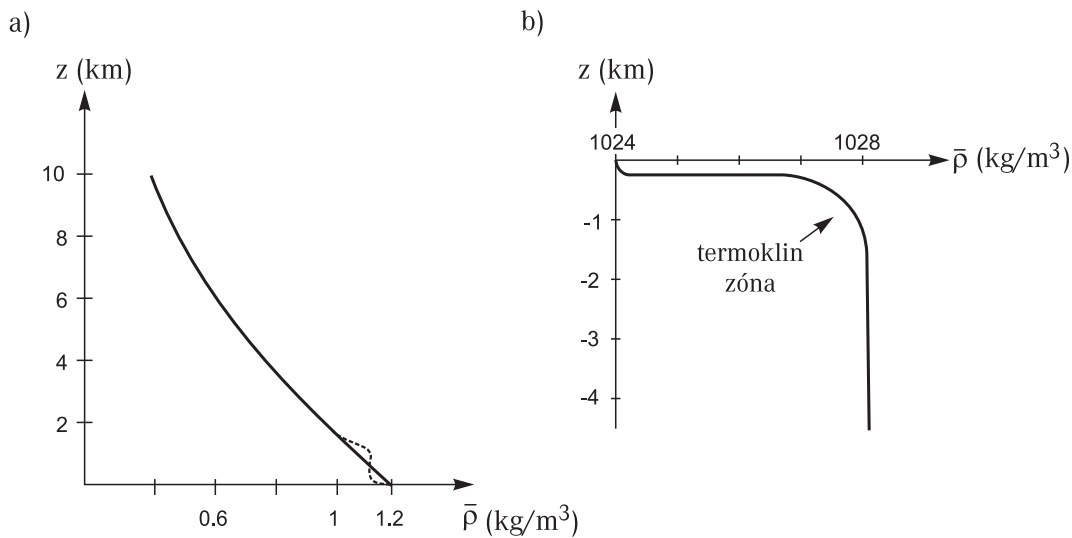
5.1 Folyadékok rétegzettsége

A rétegződés a gravitáció hatására alakul ki, a folyadék a legkisebb potenciális energia elérésére törekszik. A stabil rétegződésben ezért a nagyobb sűrűségű anyag kerül alacsonyabb szintre. A levegő különböző törésmutatójú (hőmérsékletű) rétegei néha jól megfigyelhetők a légkörben (5.1 ábra).

A rétegek rendszerint olyan közeli sűrűségűek, hogy egy folytonos $\bar{\rho}(z)$ átlagos sűrűségeloszlással jellemezhetők, mely csak a függőleges, z koordinátától függ. A légkör sűrűsége monoton csökken a magassággal (5.2a ábra), km-enként kevesebb mint 2 dkg/m^3 -rel, tehát kevesebb mint



5.1 ábra: A levegő különböző sűrűségű és törésmutatójú rétegekből áll, melyek kirajzolódhatnak a légköri képződményekben, mint például az úrhajók fellövése után visszamaradó kondenzcsíkokon [www.drsky.com/ing/nmcontrail.jpg; www.astro.ku.dk/~holger/].



5.2 ábra: A légkör (a) és az óceánok (b) átlagos sűrűségeloszlása (a nyomás magasságfüggéséből adódó járuléktól eltekintve). A légkör alsó rétege időnként jól kevertté válik. Ebben a planetáris határrétegben a sűrűség közel állandó (pontosított vonal). Jól kevert közeg az óceánok felső, ún. keveredési rétegben is. Alatta gyors sűrűség-növekedés következik be a termoklin zónában.

a felszíni 1.2 kg/m^3 sűrűség két százalékával. A föld felszíne fölötti réteg gyakran turbulenssé válik. Ebben a jól kevert rétegben, a *planetáris határrétegben* a sűrűség közel állandó. A planetáris határréteg vastagsága évszak és napszak függvénye, de átlagosan 1 km körülire tekinthető. Az óceáni sűrűségeloszlás (5.2b ábra) a légkörinek szinte a fordítottja. A felső, mintegy 50 – 100 m-es *keveredési rétegben*, mely általában egybeesik az Ekman-féle határréteggel, alig változik a sűrűség, utána következik a legjelentősebb sűrűség-, és hőmérsékletgradienssel jellemzett ún. *termoklin zóna* a több száz méteres, esetleg 1 km-es mélységig, melyet egy igen lassú sűrűség-növekedés követ. A sűrűségkülönbség még a termoklin zóna felső és alsó határa között is csak néhány kg/m^3 , azaz a felszíni 1024 kg/m^3 sűrűségnek csak néhány ezreléke. A tavakban kialakuló sűrűségeloszlás a tengeri eloszlásnak kicsinyített változata, ahol a termoklin zóna a néhány méteres mélységig is feljuthat.

Laboratóriumban csökkenő koncentrációjú só-, vagy cukoroldatok egymásra rétegzésével sem

érhető el 10 százaléknál sokkal nagyobb sűrűségkülönbség a véges telítettségek miatt. Igaz azonban, hogy ez néhányszor 10 cm-en is eloszolhat, tehát a gradiens lehet nagyobb, mint a természetben. Dinamikai szempontból természetesen nem a gradiens erőssége, hanem annak az áramlási paraméterekkel kapcsolatba hozott dimenziótlan kifejezése lesz fontos.

Ha néhány, viszonylag vastag és közel állandó, de egymástól eltérő sűrűségű réteg helyezkedik el egymás fölött, két, három, stb. rétegű rétegzettségről beszélünk. Ilyenkor a $\bar{\rho}(z)$ eloszlás szakaszonként konstans. Első közelítésben az óceáni és tavi vizek kétrétegűnek tekinthetők: a keveredési tartomány és az alatta elhelyezkedő homogénnek gondolt sűrűbb folyadék együttesének. A légkörben gyakran jelentős sűrűségugrások alakulnak ki, de a planetáris határréteg és a fölötté elhelyezkedő légréteg is modellezhető kétrétegű folyadékként. Akár a folytonos, akár a diszkrét esetről van is szó, a jellegzetes $\Delta\rho$ sűrűségkülönbség sokkal kisebb a ρ_0 átlagos sűrűségnél:

$$\Delta\rho \ll \rho_0. \quad (5.1)$$

E statikus értelemben enyhe rétegzettség is már új jelenségekkel jár, melyek homogén folyadékban nem fordulhatnak elő.

A rétegzett folyadék dinamikája érdekes párhuzamba állítható a forgatott homogén folyadékkal. Ezért egyelőre a folyadék sekélységét nem tételezzük fel, és a Föld görbületét sem vesszük figyelembe, tehát más oldalról kezdjük a hidrodinamika vizsgálatát mint az első fejezetben. A közelítések eddig kialakított rendszeréhez a következő fejezetben térünk vissza, ahol a forgatott sekély rétegzett folyadék nagy kiterjedésű Föld felszíni mozgásait tanulmányozzuk majd.

5.2 A Brunt–Väisälä-frekvencia

Tekintsünk egyelőre egy folytonos $\bar{\rho}(z)$ sűrűségeloszlású, nyugalomban levő folyadékot. Ha a z szintről egy egységnyi térfogatú folyadékelemet kissé kimozdítunk és a $z + \Delta z$ szintre juttatunk, akkor az ott nem marad nyugalomban, hiszen más sűrűségű környezetbe került, s a rá ható felhajtóerő megváltozott (5.3 ábra). A folyadék összenyomhatatlansága azt jelenti, hogy a térfogat a mozgás során is egységnyi marad, a részecske sűrűsége az új szinten is $\bar{\rho}(z)$, a környezeté viszont $\bar{\rho}(z + \Delta z)$ ¹. Arkhimédész tétele értelmében a súly a kiszorított folyadék $g\bar{\rho}(z + \Delta z)$ súlyával csökken, tehát az eredő erő

$$g(\bar{\rho}(z + \Delta z) - \bar{\rho}(z)) \approx g \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} \Delta z. \quad (5.2)$$

A mozgásegyenlet

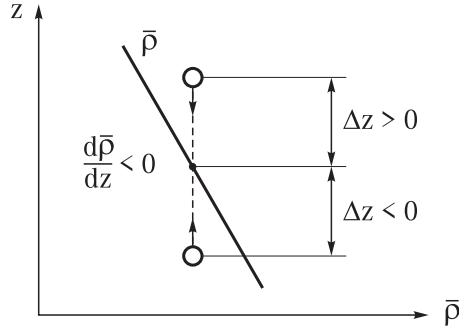
$$\ddot{\Delta z} = \frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} \Delta z. \quad (5.3)$$

Ha a sűrűség felfelé csökken, azaz a gradiens negatív, akkor akármilyen irányú is a Δz kitérés, a gyorsulás mindig vele ellentétes. Így kis kitérésekre harmonikus rezgés alakul ki a $N(z)$ (általános esetben magasságfüggő frekvenciával), ahol

$$N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz}. \quad (5.4)$$

E frekvencia a sztratifikációs vagy Brunt–Väisälä-frekvencia (D. Brunt (1886-1965) angol matematikus, meteorológus, V. Väisälä (1889-1969) finn matematikus, meteorológus, akik szinte egyszerre és egymástól függetlenül mutatták ki e frekvencia fontosságát rétegzett folyadékokban). Homogén folyadékban, ahol a gradiens eltűnik, a Brunt–Väisälä-frekvencia zérus és ott

¹Az összenyomhatóságot is figyelembe vevő gondolatmenetet a 12.3 fejezet mutatja be.



5.3 ábra: Lefelé növekvő sűrűségű sztratifikáció esetén a nyugalmi állapotából felfelé kimozdított összenyomhatatlan folyadékelem a saját sűrűségénél ritkább közegbe kerül, az erők eredője lefelé hat. Lefelé mozdítva sűrűbb közegbe kerül, a rá ható erők eredője felhajtó hatású. A nyugalmi állapot stabil, a körülötte kialakuló rezgések frekvenciája a N Brunt–Väisälä-frekvencia

rezgés nem is alakulhat ki. Ugyanakkor (5.3) azt is mutatja, hogy pozitív sűrűség-gradiens imaginárius frekvenciára vezet, a kitérített részecske egyre messzebb kerül eredeti szintjétől, azaz a fölfelé növekvő sűrűségű rétegződés instabil.

A sztratifikáció stabilitása azt is jelenti, hogy minden folyadékrészecske, szennyeződés, szonda vagy bólya függőleges mozgása során egyértelműen megtalálja a maga sűrűségének megfelelő szintet, s ha onnét kimozdul, akkor vissza is tér.

A H vastagságú, $\Delta\rho$ sűrűségkülönbségű közegben a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete az

$$N^2(z) \approx -g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{H} \quad (5.5)$$

kifejezéssel is közelíthető. Itt megjelent a

$$g' \equiv g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \quad (5.6)$$

ún. redukált gravitációs gyorsulás. Az elnevezés arra utal, hogy a felhajtóerő következtében a súly kisebb a vákuumbelénél. A sűrűségkülönbség kicsinységét kifejező (5.1) feltétel szerint

$$g' \ll g, \quad (5.7)$$

azaz természetes közeinkben a redukció *jelentős*. A rétegzett folyadék függőleges irányú mozgásait a redukált g' szabályozza, s ezért azok jóval *lassabbak* a szabad felszíni mozgásoknál.

A Brunt–Väisälä-frekvencia tipikus értéke mind a légkörben, mind az óceánokban $N = 10^{-2}$ 1/s körüli, mely $T = 2\pi/N = 10$ perc körüli periódusnak felel meg. Az óceáni legnagyobb érték a termoklin zónában alakul ki. Itt 2,5 ezrelék relatív sűrűségváltozással és 600 m-es rétegvastagsággal számolva $N = 6 \cdot 10^{-3}$ 1/s frekvenciát kapunk ($T \approx 17$ perc). A mélyóceáni átlagos érték ennél kisebb: $N = 10^{-3}$ 1/s ($T \approx 1,5$ óra). A troposzférabeli Brunt–Väisälä-frekvencia a $\Delta\rho/\rho_0 = 0,2$ és $H = 10$ km értékekkel becsülhető meg, s $N = 1,4 \cdot 10^{-2}$ 1/s-ot eredményez ($T \approx 7$ perc). Az erősebb rétegzettségű sztratoszférában a Brunt–Väisälä-frekvencia két-háromszor nagyobb. Laboratóriumban ($\Delta\rho/\rho_0 = 0,1$ és $H = 1$ m) N megközelíti az 1/s-ot, mely néhány másodperces T visszatérítési időt jelent.

5.3 A hidrodinamikai egyenletek kis sűrűség-ingadozás esetén, a Boussinesq-közelítés

A természetes közegek rétegzettsége, mint láttuk, csak néhány százaléknyi sűrűség-ingadozást enged meg. Ezért nincs szükség az összenyomható folyadékok mozgását megadó teljes hidrodinamikai egyenletre, mely pl. hang- vagy lökeshullámokat is leír, hanem elegendő a sűrűség-változásokat vezető rendben figyelembe venni. Ez az ún. Boussinesq-közelítés keretében tehető meg.

A közelítés alapfeltevése, hogy a teljes sűrűség mindig írható, mint

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \varrho_0 + \varrho''(\mathbf{r}, t), \quad |\varrho''(\mathbf{r}, t)| \ll \varrho_0, \quad (5.8)$$

ahol ϱ_0 egy konstans, helytől és időtől független referenciasűrűség, pl. a troposzféra vagy az óceánok átlagos sűrűsége. Ehhez képest a $\varrho''(\mathbf{r}, t)$ sűrűségeltérés minden helyen és pillanatban kicsi, összhangban az átlagos sűrűségkülönbségre vontakozó (5.1) megfigyeléssel. Mivel forgatott rendszerekben nemcsak függőleges rétegzettség alakulhat ki, hanem ferde is (ami persze nem feltétlenül stabil), és szeretnénk, hogy az alapegyenletek majd forgatás mellett is érvényben maradjanak, az esetleges $\bar{\varrho}(z)$ egyensúlyi rétegzettséget az (5.8) felbontás nem veszi figyelembe.

Az anyagmegmaradást kifejező (1.21)

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.9)$$

kontinuitási egyenlet (5.8) értelmében:

$$\frac{d\varrho''}{dt} + \varrho'' \operatorname{div} \mathbf{v} + \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.10)$$

A ϱ'' sűrűség-ingadozások kicsisége miatt az utolsó tag elemei, pl. $\varrho_0 \partial u / \partial x$ jóval nagyobbak, mint az első, ezért az utolsó tagnak önmagában is el kell tűnnie,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.} \quad (5.11)$$

Az áramlás tehát a sűrűség-változások ellenére is divergenciamentes marad. Ennek egyik fontos következménye, hogy a viszkózus tag továbbra is a sebesség Laplace-operátorával fejezhető ki (l. (1.19)) a Navier–Stokes-egyenletben. A (5.10) egyenletből az következik, hogy $d\varrho''/dt$ kicsi a $\operatorname{div} \mathbf{v}$ -ben fellépő tagokhoz, pl. $\varrho_0 \partial u / \partial x$ -hez képest.

Hővezetési és diffúziós folyamatok a folyadékelem ϱ'' sűrűségének lassú változására vezetnek. Érdekes az ezen folyamatokkal kapcsolatos jellegzetes távolságot megbecsülni. A diffúzióban résztvevő két, kezdetben közeli részecske (pl. szennyezőanyag) átlagos δr távolsága t idő után nyugvó közegben $\delta r = \sqrt{2Dt}$, ahol D a diffúziós állandó. A só diffúziós állandója vízben $1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, mellyel δr 1 nap után 1,6 cm, de még egy év alatt is csak 30 cm! A hődiffúziós állandó vízben mintegy százszor nagyobb, a vízgőz diffúziós állandója levegőben pedig ismét százszor. Az utóbbival tehát napi 1,6 m-es elmozdulás jár. Még a turbulencia révén felerősödött mintegy $5 \text{ m}^2/\text{s}$ -os levegőbeli diffúziós együttható (l. 7.2 fejezet) is csak napi 300 m-es távolságra vezet. A diffúziós és hővezetési folyamatok tehát a planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben lényegesen², de annál nagyobb méretekben a több napos időskálán is *elhanyagolhatók*.

A nagyléptékű folyamatokban tehát

$$\boxed{\frac{d\varrho''}{dt} = 0.} \quad (5.12)$$

²l. 5.17, 12.3 fejezet

A folyadékelem mozgása során *megtartja* sűrűségét³, hiszen d/dt a teljes deriváltat jelenti.

Az (5.8) közelítés szellemében a Navier–Stokes-egyenletben minden olyan kifejezésben, mely a teljes ϱ sűrűséget tartalmazza, vezető rendben ϱ_0 -at írhatunk. Az egyedüli kivétel a függőleges irányú sebesség, ugyanis annak egyenletében a felhajtóerő alapvető szerepet játszik. Válasszuk le ezért a ϱ_0 sűrűséghez tartozó statikus $p_0(z) = p_0 - \varrho_0 g z$ eloszlást a teljes nyomásról:

$$p(\mathbf{r}, t) \equiv p_0(z) + p''(\mathbf{r}, t). \quad (5.13)$$

Az (1.23) Navier–Stokes-egyenletben a nyomási erő és súly eredője: $-\text{grad}p - g\varrho\mathbf{n}$ úgy is írható, mint $-\text{grad}p'' + g\varrho_0\mathbf{n} - g\varrho\mathbf{n} = -\text{grad}p'' - g\varrho''\mathbf{n}$, azaz kifejezhető a sűrűség-, és nyomásingadozással. A Navier–Stokes-egyenlet így a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\text{grad}p'' - g\frac{\varrho''}{\varrho_0}\mathbf{n} + \nu\Delta\mathbf{v} \quad (5.14)$$

alakot ölti. Itt a ν kinematikai viszkozitást a ϱ_0 referenciasűrűséggel képezzük. A jobboldalon a gravitációs gyorsulás helyett a $g\varrho''/\varrho_0$ redukált gyorsulás jelenik meg ((5.6) lokális megfelelője). A fenti (5.11)-(5.14) egyenletek írják le a rétegzett folyadék mozgását Boussinesq-közelítésben. Ideális folyadéokra adiabatikus mozgást írnak le, melynek során hőközlés nem történik, a folyadékelem *entrópiája* állandó⁴.

A rétegzett folyadék *baroklin*, vagyis mozgása során az állandó sűrűségű és állandó nyomású felületek *nem* esnek egybe. Az olyan folyadékok, amelyekben az említett felületek egybeesnek (pl. összenyomhatatlan homogén folyadék) barotropok. A baroklinitás fontos következménye az, hogy a sűrűség-inhomogenitások okozta térfogati erők a közegre forgatónyomatékokat fejtenek ki. Ezért a cirkuláció még az ideális, nem forgatott, rétegzett folyadékokban sem állandó.

5.4 A hidrodinamikai egyenletek függőleges rétegzettség esetén

Függőleges rétegzettségű esetben $\bar{\varrho}(z) - \varrho_0$ is része a (5.8)-ban definiált ϱ'' sűrűségeltérésnek. Ilyenkor azonban célszerűbb a $\bar{\varrho}(z)$ -től való eltérést megadó $\varrho'(\mathbf{r}, t)$ ingadozást használni, azaz azt írni, hogy

$$\varrho = \bar{\varrho} + \varrho' = \varrho_0 + \varrho'. \quad (5.15)$$

Mivel $\bar{\varrho}(z)$ stacionárius eloszlás, melyhez áramlás nem tartozik, a ϱ' ingadozást dinamikai sűrűségnek nevezik, hiszen mozgás kialakulásával kapcsolatos.

A $\varrho'' \equiv \bar{\varrho}(z) - \varrho_0$ sűrűségeltéréssel áramlás nem jár, $\mathbf{v} = 0$. A hozzá tartozó $p'' = \bar{p}(z)$ nyomást (5.14) alapján a

$$0 = -\frac{1}{\varrho_0}\text{grad}\bar{p} - g\frac{\bar{\varrho} - \varrho_0}{\varrho_0}\mathbf{n} \quad (5.16)$$

hidrosztatikai összefüggés határozza meg. Mozgást nyilván a \bar{p} , $\bar{\varrho}$ eloszlásoktól való eltérés hozhat csak létre. Vezessük be ezért a

$$p(\mathbf{r}, t) \equiv \bar{p}(z) + p'(\mathbf{r}, t) = p_0(z) + p''(\mathbf{r}, t) \quad (5.17)$$

³Ezt a Brunt–Väisälä-frekvencia levezetésében ki is használtuk.

⁴Homogén közegben a sűrűség egyértelmű kapcsolatban van a T hőmérséklettel. Kis változásokra a $\varrho = \varrho_0(1 - \alpha T'')$ állapotegyenlet érvényes, ahol α a hőtágulási együttható, és $T'' \equiv T - T_0$ a T_0 referenciahőmérséklethez tartozó hőmérsékletingadozás. A sűrűségingadozás ekkor $\varrho'' = -\varrho_0\alpha T''$. A T'' hőmérsékletingadozásra (5.12) alapján a $dT''/dt = 0$ dinamikai egyenlet érvényes.

felbontással a p' dinamikai nyomást, mely az (1.19) egyenlettel definiált dinamikai nyomás általánosítása (homogén közegben $\bar{p}(z) = 0$ és $p' = p''$). Az (5.16) összefüggés miatt a p' dinamikai nyomás és a $\varrho' = \varrho - \bar{\varrho}$ dinamikai sűrűség (l. (5.15)) éppúgy kielégíti a mozgásegyenletet, mint p'' és ϱ'' .

A függőleges rétegzettségű folyadék egyenletei tehát

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho_0} \text{grad} p' - g \frac{\varrho'}{\varrho_0} \mathbf{n} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \varrho' = -w \frac{d\bar{\varrho}}{dz} \equiv w \frac{\varrho_0}{g} N^2(z), \quad (5.19)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (5.20)$$

A ϱ'' -re vonatkozó (5.12) sűrűségegyenlet ϱ' -re történő átírásában felhasználtuk, hogy $\bar{\varrho}$ csak a függőleges koordinátától függ, s behelyettesítettük a Brunt–Väisälä-frekvencia definícióját. A dinamikai sűrűség kicsinysége ellenére ez egy nemlineáris egyenletrendszer, mely minden fontos, függőleges rétegzettséggel kapcsolatos jelenséget leír.

5.5 A dimenziótlan alak, a belső Froude-szám

Annak megbecslésére, hogy mikor játszik egy *áramlásban* lényeges szerepet a rétegzettség, érdemes a függőleges sztratifikációjú eset egyenletét dimenziótlan alakba írni. MÉRJÜK a vízszintes síkbeli távolságot valamilyen L jellemző kiterjedés egységében, a függőlegest a folyadék H mélysége, a vízszintes sebességet pedig a U karakterisztikus sebesség egységében. Az időegység tehát L/U . A dinamikai nyomás mértékegységét $\varrho_0 U^2$ -nak választjuk. A ϱ' dinamikai sűrűség nagyságrendjét az adja meg, hogy a $g\varrho'/\varrho_0$ redukált gravitációs gyorsulás összemérhető a dinamikai nyomásból származó $(1/\varrho_0)\partial p'/\partial z$ függőleges irányú gyorsulással (l. (5.18)). ϱ' tipikus értéke ezért $\varrho_0 U^2/(gH)$. A W karakterisztikus függőleges sebesség nagysága az (5.19) egyenlet alapján a dinamikai sűrűség időderiváltja osztva $\varrho_0 N^2/g$ -vel, tehát

$$W = \frac{U^3}{LHN^2}. \quad (5.21)$$

Itt N a Brunt–Väisälä-frekvencia átlagos értéke.

Az

$$\begin{aligned} x, y, z &\rightarrow Lx, Ly, Hz, & \mathbf{u} &\rightarrow U\mathbf{u}, & w &\rightarrow Ww, \\ t &\rightarrow \frac{L}{U}t, & p' &\rightarrow \varrho_0 U^2 p', & \varrho' &\rightarrow \frac{\varrho_0 U^2}{gH} \varrho' \end{aligned} \quad (5.22)$$

áthelyettesítéssel a

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\text{grad} p' + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (5.23)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{Fr^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \varrho' \right) + \frac{1}{Re} \Delta w, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{grad}) \varrho' = w \quad (5.25)$$

dimenziótlan egyenleteket kapjuk. A divergencia-mentesség alakja változatlan. Megjelent egy új dimenziótlan szám, az

$$\boxed{Fr' = \frac{U}{HN}} \quad (5.26)$$

belső Froude-szám. Az ideális, azaz sűrűdásmentes, rétegzett folyadék dinamikáját egyetlen szám, a belső Froude-szám szabályozza. Két rétegzett közegbeli áramlás akkor lehet hasonló, ha belső Froude-számuk azonos.

A belső Froude-szám jelentése és a (1.27)-ben definiált (külső) Froude-számhoz való hasonlósága világossá válik, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzetét a teljes folyadékmélységben kialakuló $\Delta\rho$ sűrűségkülönbséggel becsüljük (5.5), mellyel

$$Fr' \approx \frac{U}{\sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} H}} = \frac{U}{\sqrt{g' H}}. \quad (5.27)$$

A belső Froude-szám tehát ugyanúgy fejezhető ki a sűrűségkülönbség következtében kialakuló (5.6) redukált gravitációs gyorsulással, mint a külső (1.27) Froude-szám a teljes g -vel.

A belső Froude-szám négyzete tekinthető úgy, mint a folyadék átlagos $\rho_0 U^2$ kinetikus energiájának a rétegződés teljes átrendeződéséhez szükséges $\Delta\rho g H$ potenciális energiához való viszonya:

$$Fr'^2 = \frac{\text{mozgási energia}}{\text{rétegzettség helyzeti energia}}. \quad (5.28)$$

Látni fogjuk, hogy Fr' egyben az áramlási sebességnek és a rétegzett folyadékbeli belső gravitációs hullámok sebességének az aránya.

A rétegzettség hatása akkor erős, ha a belső Froude-szám *kicsi*, azaz ha

$$Fr' \ll 1. \quad (5.29)$$

Ez annak a *dinamikai* feltétele, hogy az áramlásban lényeges szerepe legyen a sztratifikációnak, s nincs ellentmondásban azzal, hogy a rétegzettség *statikus* értelemben (l. (5.1)) gyenge.

A belső Froude-szám értéke légköri és óceáni példákban $10^{-1} - 10^{-2}$ körüli. A termoklin zónabeli $N = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ értékkel, $H = 600 \text{ m}$ mélységgel, és a homogén közegre jellemzőknél lassabb, $U = 0,1 \text{ m/s}$ -os sebességgel számolva $Fr' = 3 \cdot 10^{-2}$. A légköri becslés $U = 10 \text{ m/s}$ -mal ($N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $H = 10 \text{ km}$) $Fr' = 0,1$. Ugyanezek az értékek laboratóriumban ($N = 1 \text{ s}^{-1}$, $H = 1 \text{ m}$) $U = 3 - 10 \text{ cm/s}$ -os sebességgel kaphatók meg.

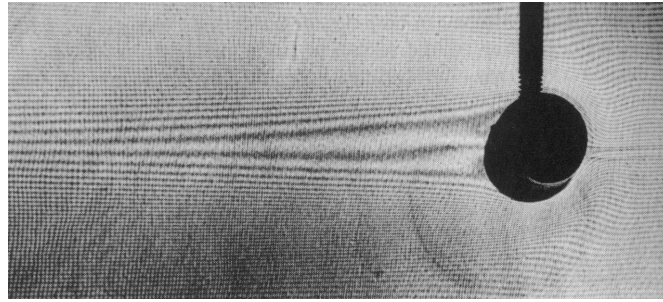
Érdeemes megemlíteni, hogy a függőleges sebesség (5.21) becslése a belső Froude-számmal írható úgy is, mint

$$\frac{W/H}{U/L} = Fr'^2. \quad (5.30)$$

Ez az új dimenziótlan szám tehát meghatározza, hogy milyen erős lehet a feláramlás, pontosabban a $\partial w/\partial z$ derivált értéke a vízszintes síkbeli divergencia U/L nagyságrendjéhez viszonyítva. Annak ellenére, hogy a vízszintes és függőleges méreteket megkülönböztettük, a folyadék sekélységét nem tételeztük föl. A belső Froude-szám kicsinysége, az erős rétegzettség azonban éppolyan típusú megszorítást ír elő a W/U viszonyra, mint a sekélység. Erősen rétegzett folyadékban a feláramlások gyengék.

5.6 Analógia a forgatott folyadékkal

A belső Froude-szám (5.26) definíciója hasonló a Rossby-szám (1.3) kifejezéséhez. Mindkettőben a vízszintes sebességet hasonlítjuk össze egy távolság és frekvencia szorzatával. A



5.4 ábra: A blokkolás jelensége: igen erősen rétegzett folyadékban a mozgó test maga előtt tolja az egész folyadék réteget. A folyadék nem folyja körül az akadályt, mert a függőleges sebességkomponens elhanyagolhatóan kicsi. Ez a Taylor–Proudman-tétel analogonja rétegzett folyadékokra [Tritton].

Rossby-számban azonban a vízszintes, a Froude-félében pedig a függőleges méret jelenik meg. Ebben kifejeződik a Coriolis-erő és a gravitációs erő irányának különbözősége.

Az erős rétegzettség, éppúgy, mint a gyors forgatás, az áramlást kétdimenzióssá teszi. Lát-szik ez az (5.30) összefüggésből is, hiszen $Fr' \rightarrow 0$ mellett $W \rightarrow 0$. Dinamikailag ezt az Fr'^2 -tel megszorított (5.24) egyenlet fejezi ki, melyben az $Fr' \rightarrow 0$ határesetben a függőleges hidrodinamikai gyorsulás elhanyagolhatóvá válik, s a vízszintes peremek miatt a függőleges sebesség eltűnik: $w \equiv 0$. A felső légkörben, a sztratoszférában ezért mozognak a felhők vékony vízszintes síkokban. Ha egy erősen rétegzett folyadékban véges vastagságú akadályt, pl. vízszintes tengelyű hengert mozgatunk, akkor az a vastagságának megfelelő folyadék réteget maga előtt tolja, ill. maga mögött húzza, anélkül, hogy a közeg az akadályt körülfolyná (5.4 ábra). Az adott réteg tehát együtt mozog az akadállyal. Ez az ún. *blokkolási jelenség* (blocking) homogén folyadékban sohasem fordul elő, s a Taylor-oszlopok analogonja rétegzett közegekben.

Bár mind a gyors forgatás, mind az erős rétegzettség kétdimenziós viselkedésre vezet, az előbbi függőleges, az utóbbi pedig vízszintes síkbeli struktúrák kialakulásával jár. Ezért az analógia teljessé tételéhez (5.1 táblázat) ezen irányok felcserélése is szükséges.

RÉTEGZETT	N	függőleges irány	H	Fr'	blokkolás
FORGATOTT	$2 \Omega $	vízszintes irány	L	Ro	Taylor-oszlop

5.1 táblázat: A rétegzett, nem forgatott és forgatott, homogén folyadékok jellemzői közötti megfeleltetés

Végül megjegyezzük, hogy amint az előző fejezetbeli példák is mutatták, a természeti áramlások nem nagyon erősen rétegzettek, hiszen belső Froude-számuk nem rendkívül kicsi. Sőt ezen számok nagyságrendje megegyezik a tipikus Rossby-számokéval, amiből az következik, hogy a környezeti áramlások szempontjából a rétegzettség és a forgatás összemérhető fontosságú (l. 6.4 fejezet).

5.7 Belső hullámok

5.7.1 Síkhullám megoldások

A rétegzett folyadék kollektív mozgásában a Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgés megfelelője egy speciális hullámfajta, a belső hullám. A peremektől távol, a (5.18)-(5.20) hidrodinami-

kai egyenleteket kis amplitudójú mozgásra alkalmazva, a másodrendűen kicsiny advektív gyorsulások elhanyagolhatók, s egy lineáris változathoz jutunk. A megoldást az egyszerűség kedvéért az y irányban eltolásinvariánsnak tételezve, kereshetjük síkhullám alakban. Tételezzük fel, hogy $(u, w, p'/\rho_0, -\rho'g/(\rho_0 N)) = (u_0, w_0, P_0, r_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_z z)$. Itt $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ a hullámszám vektora, ω_0 a frekvenciája. Ezzel elhanyagolható viszkozitás esetén, állandó Brunt–Väisälä-frekvenciát feltételezve az

$$i\omega_0 u_0 = +ik_x P_0, \quad i\omega_0 w_0 = +ik_z P_0 + Nr_0, \quad (5.31)$$

$$i\omega_0 r_0 = -Nw_0, \quad k_x u_0 + k_z w_0 = 0 \quad (5.32)$$

polarizációs egyenletekhez jutunk.

Vegyük észre, hogy ez ekvivalens a tehetelenségi hullámokra kapott (1.64)-(1.67) rendszerrel, ha ott a viszkozitást elhanyagoljuk, és az

$$u_0 \rightarrow w_0, \quad k_x \rightarrow k_z, \quad w_0 \rightarrow u_0, \quad k_z \rightarrow k_x, \quad v_0 \rightarrow r_0, \quad 2\Omega \rightarrow N \quad (5.33)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ez megfelel az előző fejezetben említett iránycserének. Az y irányú sebesség helyett most a sűrűségváltozás szerepel, s 2Ω szerepét a Brunt–Väisälä-frekvencia veszi át.

Nemtriviális megoldás csak akkor létezik, ha

$$\omega_0 = \pm N \frac{k_x}{k} = \pm N \cos \theta, \quad (5.34)$$

ahol θ a \mathbf{k} vektor vízszintes tengellyel bezárt szöge⁵. Ez a belső hullámok diszperziós relációja (5.5 ábra). A \pm előjel azt fejezi ki, hogy minden hullámszámvektorhoz tartozik egy vele azonos és ellentétes irányban haladó hullám is. A $\cos \theta$ tényező mutatja, hogy a hullám frekvenciája felülről korlátos: nem lehet nagyobb az N értéknél: $|\omega_0| \leq N$. Ilyen hullámok tehát *csak* rétegzett rendszerben fordulhatnak elő, de ott sem rezeghetnek gyorsabban N -nél. A legnagyobb frekvenciájúak a vízszintes irányába haladó hullámok ($k_z = 0$), melyekben a folyadékrészecskék függőlegesen mozognak a Brunt–Väisälä-frekvenciával. Ennél gyorsabban rezgő belső hullámok *nem gerjeszthetők*. Gyors gerjesztés esetén ugyanis a részecskéknek nincs idejük saját, N frekvenciájú rezgésük kialakítására, ezért az energiaátadás lokális marad és nem vezet hullámterjedésre.

A (5.32) egyenletből látszik, hogy a sebességtér merőleges a hullámszámvektor irányára, a hullám transzverzális (5.6 ábra). A folyadékelemek tehát a vízszintessel $\pi/2 - \theta$ szöget bezáró "lejtőn" mozognak. A gravitációs gyorsulás lejtő irányú komponense $g \cos \theta$, s a rezgés frekvenciája ezért a Brunt–Väisälä-frekvencia $\cos \theta$ -szorososa. A polarizációs egyenletek szerint, ha u_0, w_0 valós, akkor P_0 is az, de r_0 imaginárius. Ez azt jelenti, hogy a nyomás-, és sűrűségmaximumok negyed periódus különbséggel követik egymást.

5.7.2 Fázis és csoportsebesség

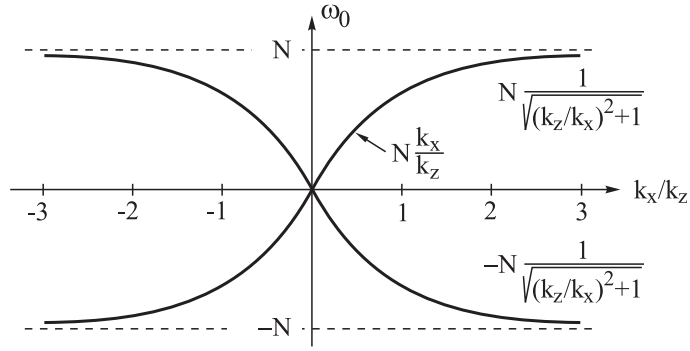
A belső hullámok fázissebessége az x és z irányban

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = \pm N \frac{1}{k}, \quad c_z = \frac{\omega_0}{k_z} = \pm N \frac{k_x}{k_z k}. \quad (5.35)$$

Az energia terjedését megadó \mathbf{c}^* csoportsebességre azt kapjuk, hogy

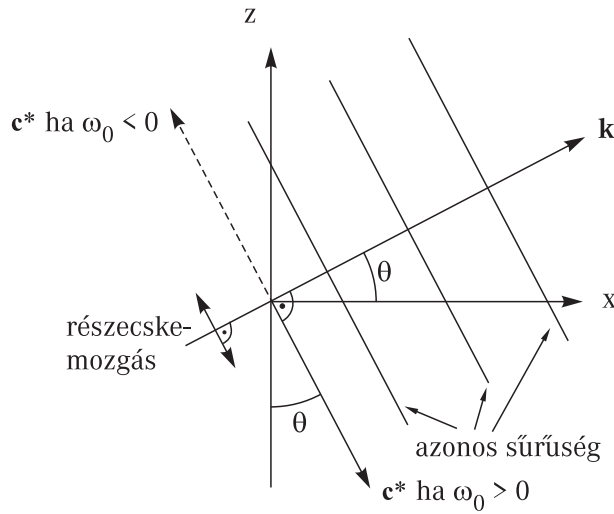
$$c_x^* = \pm N \frac{k_z^2}{k^3}, \quad c_z^* = \mp N \frac{k_x k_z}{k^3}. \quad (5.36)$$

⁵Az összefüggés y irányban is terjedő hullámokra is érvényes, ha θ a hullámszámvektornak a vízszintes síkkal bezárt szögét jelöli.



5.5 ábra: Belső hullámok diszperziós relációja rögzített k_z függőleges hullámszám esetén. A $N \rightarrow 2\Omega$, $k_x \rightarrow k_z$ ($\sin \theta \rightarrow \cos \theta$) cserével a tehetetlenségi hullámok diszperziós relációját kapjuk (1.15 ábra).

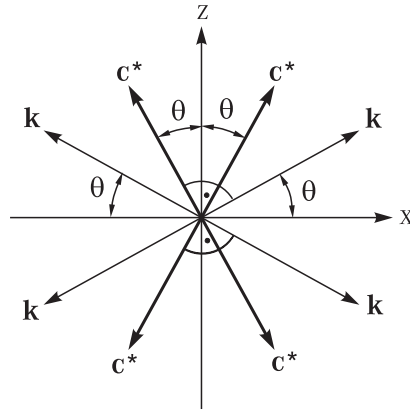
A csoportsebesség abszolútértéke $N \sin \theta / k$, iránya pedig merőleges a \mathbf{k} vektorra. Az első szögnyegyben fekvő hullámszámvektor ($k_x, k_z > 0$) esetén a pozitív frekvenciájú hullám csoportsebessége a \mathbf{k} -tól jobbra lefelé mutat (5.6 ábra). Vízszintes terjedés ($k_z \rightarrow 0$) esetén a Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgés magától is fennmarad, az ilyen irányú hullámmal ezért energia nem halad, csoportsebessége eltűnik. A függőleges irányú terjedés határesetében ($k_x \rightarrow 0$) a hullámzás megszűnik: $\omega_0 \rightarrow 0$, összhangban a blokkolási jelenséggel.



5.6 ábra: A \mathbf{c}^* csoportsebesség és \mathbf{k} hullámszámvektor viszonya belső hullámban. Az energia mindig a hullámfrontokkal párhuzamosan terjed, tehát \mathbf{k} -ra merőlegesen. Az, hogy jobbra vagy balra mutat, a fázissebesség (frekvencia) előjelétől függ. A részecskemozgás a hullámszámvektorra merőleges síkban történik.

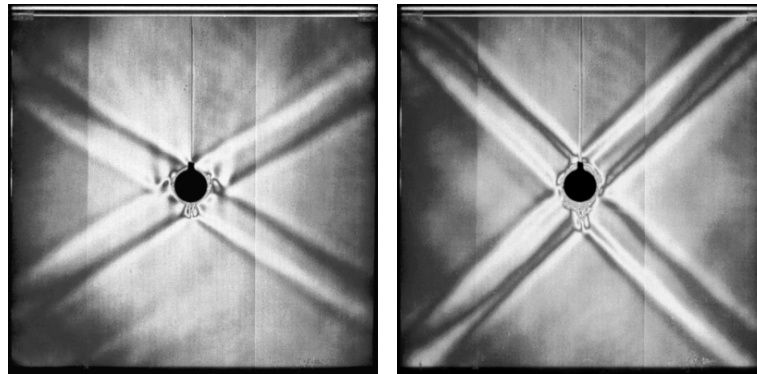
Ha a folyadékot valamilyen kis méretű test ω ($0 < \omega < N$) frekvenciájú mozgásával gerjesztjük, akkor a belső hullámok átveszik ezt a frekvenciát: $\omega_0 = \omega$, és $\theta = \pm \arccos(\omega/N)$ szög alatt haladnak az x tengelyhez képest. A belső hullám tehát erősen *anizotróp* módon terjed. A csoportsebesség vektorok $\pm\theta$ szöveget zárnak be a függőleges tengellyel (5.7 ábra). Ezekben az irányokban megváltozik a törésmutató, s az ergiaterjedés folyamata jellegzetes X alakzatot rajzol ki.

A gerjesztő szögsebesség növelésekor az energia terjedési iránya egyre közelebb esik a függőlegeshez, a kialakuló X alakzat egyre meredekebb, s $\omega_0 = N$ -re eltűnik. Mindez jól látható



5.7 ábra: Pontszerű, $|\omega| < N$ frekvenciájú forrásból induló belső hullámok és csoportsebességeik lehetséges irányai.

laboratóriumi kísérletekben (5.8 ábra). Belső hullámok keltette mintázat gyakran figyelhető meg felhőképeken is (5.9 ábra).



(a)

(b)

5.8 ábra: Kisméretű henger ω frekvenciájú mozgatóásával gerjesztett belső hullámok. Jól megfigyelhető a törésmutató változása egy X alakú tartományban, mely az energia terjedési irányának felel meg. Nagyobb gerjesztési frekvenciára (jobb oldali kép) az X alak meredekebb (v.ö. 1.20 ábra).

5.7.3 A törési törvény, elhajlás, inverzió

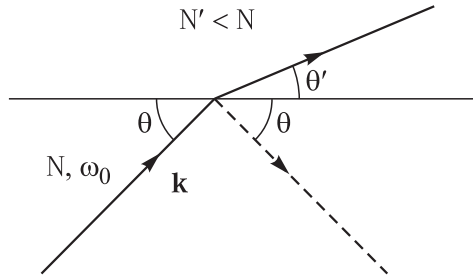
A belső hullámok különböző Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegek határán megtörnek. A törési törvény abból a megszorításból adódik, hogy a hullám frekvenciája nem változik. Ha az N Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegekben a síkhullám a vízszintessel θ szöget zár be, akkor az N' Brunt–Väisälä-frekvenciájú szomszédos közegbe történő áthaladás után az új θ' szögre (5.10 ábra) igaz, hogy

$$N \cos \theta = N' \cos \theta'. \quad (5.37)$$



5.9 ábra: A belső hullámok időnként érdekes felhőalakok kialakulására vezetnek [www.wolkenatlas.de/wolken/wo11403.htm].

A nagyobb Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegben tehát a szög koszinusza kisebb, az erősebben rétegzett közegbe lépve hullámszám-, (csoportsebesség-) vektor a függőleges (vízszintes) felé törik.

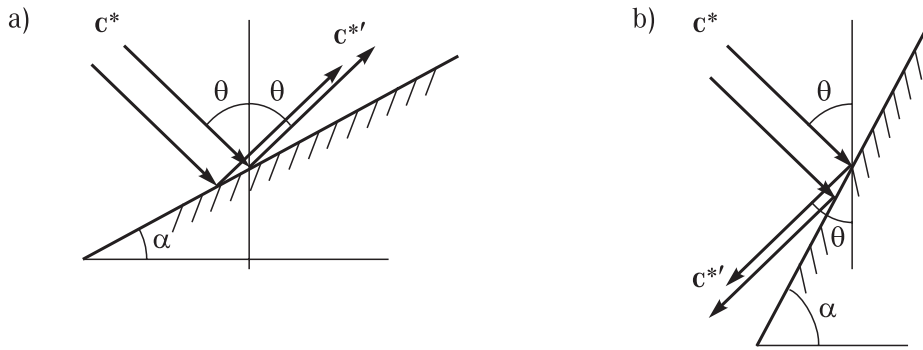


5.10 ábra: A belső hullám terjedési iránya (hullámszámvektorának iránya) megváltozik két különböző Brunt–Väisälä-frekvenciájú közeg határán. A gyengébb rétegzettségű közegbe érve a hullám a vízszintes felé törik. A szaggatott vonal a visszavert hullám irányát mutatja. A csoportsebességvektorok $\pi/2 - \theta$, $\pi/2 - \theta'$ szöget zárnak be a vízszintessel.

Ennek érdekes következménye a teljes visszaverődés jelensége. Amennyiben ugyanis N' kisebb a hullám frekvenciájánál, $N' < |\omega_0|$, a szög koszinuszának 1-nél nagyobbá kellene válnia. A frekvencia túl nagy ahhoz, hogy az új közegben belső hullám kialakulhasson. Ilyenkor az adott ω_0 frekvenciájú hullám az eredeti közegben marad. Közel homogén folyadékrétegről minden belső hullám visszaverődik, hiszen mint láttuk, homogén közegben belső hullámok nem létezhetnek.

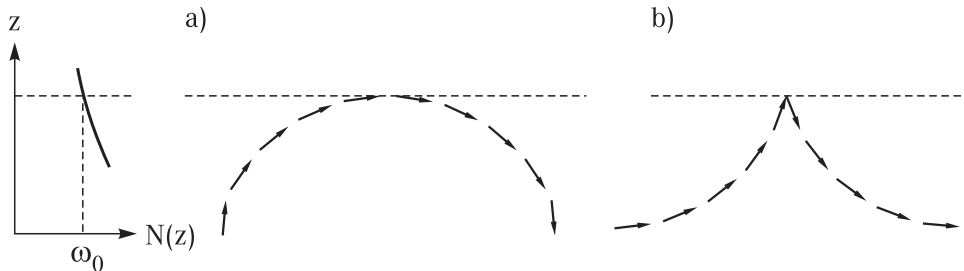
A belső hullámok terjedésének anizotrópiája merev lapról történő visszaverődés esetén is megmarad. A csoportsebességnek irányt kell váltania, de a függőlegessel bezárt szög nagyságának a visszavert hullámban is θ -nak kell maradnia. Az α szögű lejtőn történő visszaverődés jellege függ attól, hogy α mekkora a kritikus $\alpha_c \equiv \pi/2 - \theta$ szöghöz képest. Ha a dőlésszög kicsi, akkor a haladási irány vízszintes komponense nem változik (5.11a ábra), ha viszont nagyobb a kritikusnál, akkor előjelet vált (5.11b ábra). Vegyük észre, hogy egyik esetben sem igaz, hogy a beesési és a visszaverődési szög azonos lenne. Ez is a belső hullámok egy különleges tulajdonsága. A tengeri belső hullámok meredek partvonalról visszaverődnek. Lapos partvonal esetén erre nincs módjuk (a felső rétegről való visszaverődés sem változtatja meg a csoportsebesség vízszintes komponensét). Az ilyen partvonalak mentén a belső hullámok ezért megtörnek, energiájuk turbulens mozgássá alakul.

A fentiek alapján kvalitatív képet alkothatunk arról is, hogy mi történik, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia térben folytonosan változik. Abban az esetben, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia



5.11 ábra: Belső hullám visszaverődése α szögű lapon. A vonalak a csoportsebességvektor irányát mutatják. a) Lapos akadály. A csoportsebesség vízszintes komponense nem változik. a) Meredek akadály. A csoportsebesség vízszintes komponense előjelet vált.

fölfelé gyengül, a fölfelé induló belső síkhullám iránya egyre közelebb kerül a vízszinteshez. Arról a rétegről, melynek Brunt–Väisälä-frekvenciája éppen a hullám ω_0 frekvenciája, a hullám lefelé hajlik, visszaverődik (5.12 ábra).



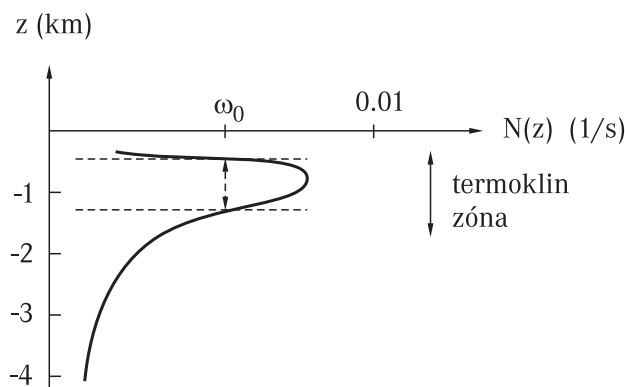
5.12 ábra: ω_0 frekvenciájú belső hullám terjedési irányának változása felfelé gyengülő sztratifikáció esetén. a) A hullámszámvektorok változása haladás közben. b) A csoportsebességvektorok változása haladás közben. Az $N = \omega_0$ szinten teljes visszaverődés történik.

Általánosan, az ω_0 frekvenciájú belső hullám csak abban a tartományban mozoghat, ahol $|\omega_0| \leq N(z)$. Mivel a termoklin zónában a Brunt–Väisälä-frekvenciának lokális maximuma van, az ott keletkezett viszonylag gyors belső hullámok se a felszíni, se a mélytengeri vizekbe nem juthatnak el (5.13).

A légkörben a különleges rétegzettségű tartományokat szokatlan hőmérsékleteloszlásuk jelzi. Ilyenek az ún. *inverziós* helyzetek, melyeket az jellemez, hogy a hőmérséklet *nő* a magassággal, a szokásos csökkenés helyett. A magassággal ekkor nagyon gyorsan csökken a sűrűség, s ezért an inverzió mindig erős rétegzettségnek felel meg (l. 12.3 fejezet).

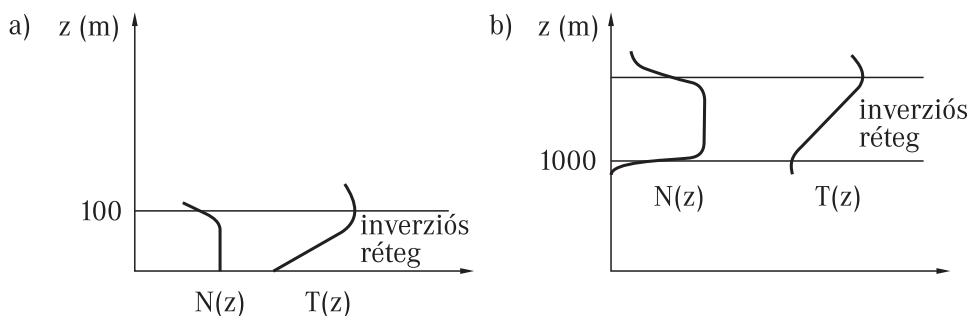
Az inverzió egyik fajtája akkor jön létre, ha szélcsendes időben a talaj lehűlése miatt a hideg éjszakai légtömegek a talaj közelében maradnak, s föléjük melegebb levegő kerül (5.14 a ábra). Különösen gyakori ez télen és zárt völgyekben. A talajközeli levegőben ekkor nagy a Brunt–Väisälä-frekvencia és alig változik. Az áramlások közel síkbeliek, a szennyezések tehát mintegy csapdába záródnak, nem tudnak a magasabb légrétegekbe jutni. Az ilyen rétegek nem túl vastagok (50 – 100 m) és viszonylag gyorsan feloldódnak.

Nagyobb környezeti veszélyekkel jár az inverzió azon, néhány napig is fennállni képes fajtája, melynek során leszálló, viszonylag meleg légtömegek (anticiklon) kerülnek szinte az egész planetáris határréteg fölé. A planetáris határrétegben akár turbulens feláramlások is lehetnek, az tehát nem rétegzett, s feléje kerül egy erősen sztratifikált, és ezért nagyon stabil réteg. Ha az alsó rétegből hideg légcsomagok kerülnek a melegbe, akkor azok környezetüknél jóval nehezebbek



5.13 ábra: A Brunt–Väisälä-frekvencia tipikus mélységfüggése tengerekben. A maximális frekvenciák a termoklin zónában esik. Adott ω_0 frekvenciájú, viszonylag gyors belső hullámok a termoklin zóna azon alrétegére korlátozódnak, ahol $|\omega_0| \leq N(z)$ (szaggatott vonallal jelölt sáv).

és gyorsan elhagyják az inverziós réteget. A teljes visszaverődés miatt az inverziós rétegből sincs energiaáramlás az alsó felé. A réteg sok szempontból úgy hat, mintha egy merev vízszintes zárólap lenne (5.14 b ábra). Az ilyen inverzió ezért jár gyakran erős légszennyeződéssel, szmog képződéssel.



5.14 ábra: a) Talajközeli inverzió. A Brunt–Väisälä-frekvencia nagy, ezért az áramlások közel kétdimenziósak. Az energiacsere gyenge az egymás fölötti vízszintes rétegek között. b) Leáramlás következtében kialakuló inverzió. A planetáris határréteg nem feltétlenül stabil, benne a Brunt–Väisälä-frekvencia nincs értelmezve, az inverziós rétegben viszont hirtelen nagy a Brunt–Väisälä-frekvencia. A két réteg között energiacsere és anyagkicserélődés csak nagy energiabefektetéssel lehetséges.

A légkör legalsó rétege, a troposféra fölött a 10 – 12 km magasságban kezdődő sztratosféra is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy benne a hőmérséklet nő a magassággal (kb. az 50 km-es szintig). Ez tehát egy hatalmas, állandó elhelyezkedésű inverziós rétegnek is tekinthető, mely igen stabilan sztratifikált (innét ered elnevezése, s ezért biztosítja a repülőgépeknek). A sztratosféra ezért mintegy záróréteggént helyezkedik el a troposféra felett. A két réteg között anyagkicserélődés néhány igen erős feláramlással járó folyamat (vulkánkitörés, atom- vagy hidrogémbomba robbantás, nagy viharfelhők) kivételével nem megy végbe. Ezért tekinthetjük a légkör alsó rétegét a felette elhelyezkedőktől függetlennek, s ezért szorítkozunk ezután is főleg a troposzférabeli légköri jelenségek vizsgálatára.

5.8 Hegy mögötti hullámok (lee waves)

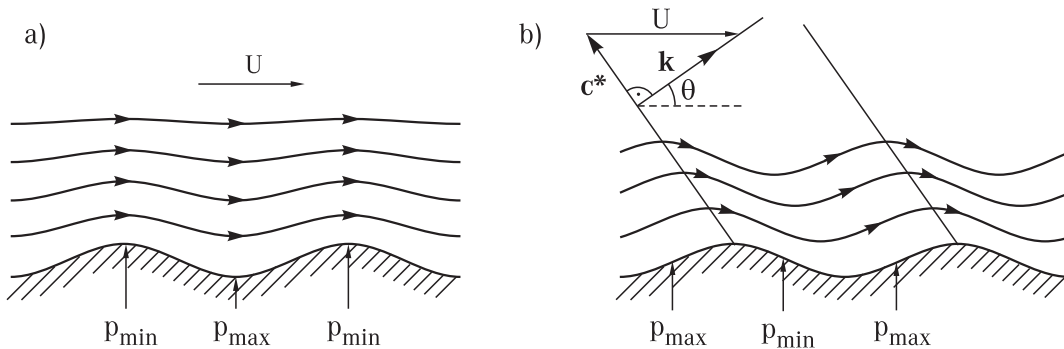
5.8.1 Szemléletes magyarázat

A domborzati egyenetlenségek fölött az adott irányból állandó U sebességgel fújó szél (vagy homogén áramlás) rétegzettség esetén jelentős felfelé irányuló energiaáramot biztosító *stacionárius* belső hullámokat hozhat létre.

A domborzatnak az áramlás irányára merőleges átlagos λ hullámhossza meghatározza az általa keltett belső hullámok k_x hullámszámát. A λ távolságban levő két hegyvonulat közötti áthaladás ideje $\lambda/|U|$, a közeghez rögzített koordinátarendszerben a hegyvonulatok tehát $|\omega| = 2\pi|U|/\lambda$ frekvenciával érkeznek, s ez felel meg a hullám gerjesztési frekvenciájának. Belső hullámok csak $|\omega| < N$ esetén gerjesztődnek, vagyis csak olyan U sebességű áramlásokra, melyekre

$$|U| \leq U_c \equiv \frac{\lambda N}{2\pi}, \quad (5.38)$$

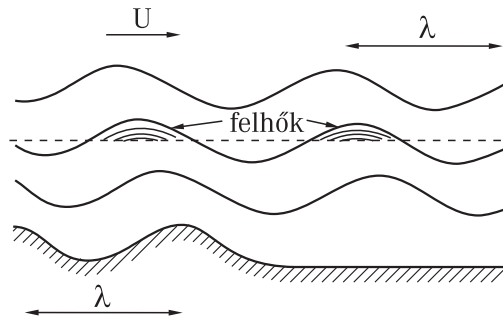
azaz, melyek az U_c kritikus sebességnél *lassabbak* (5.15 ábra). A kritikus sebesség a $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ értékkel számolva, $\lambda = 1 - 10 \text{ km}$ hullámhossz esetén $U_c = 1,6 - 16 \text{ m/s}$. A nagy hegyek és hegyvonulatok mögött tehát még eléggé erős szelek is képesek lee hullámokat keltetni. Az éppen a kritikus sebességgel érkező áramlás a Brunt–Väisälä-frekvenciát biztosítja, s hozzá vízszintes terjedési irány, $k_z = 0$ tartozik. Ennél lassabb áramlások kisebb frekvenciájú gerjesztést jelentenek, mely véges k_z hullámszám-komponens megjelenésével jár (l. (5.34)). Mivel a keltés a domborzaton történik, a hullámok innét távolodnak, ezért a kialakuló hullámok frontja az áramlás felé dől (5.15b ábra).



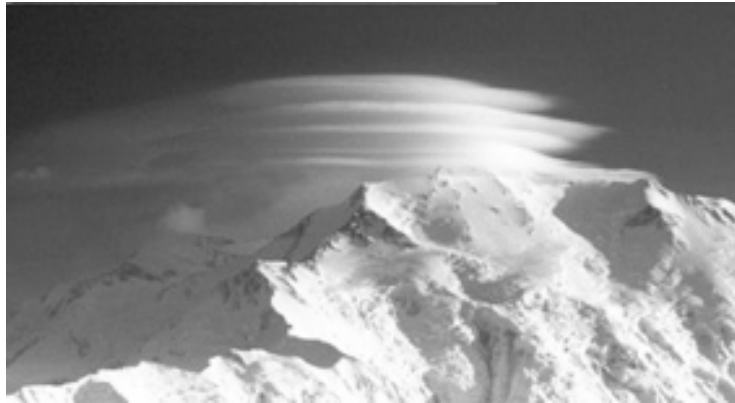
5.15 ábra: Periodikus domborzat háttéráramlásban stacionárius sebességeloszlást alakíthat ki. A kritikus sebességnél gyorsabb áramlás esetén a mozgás erőssége a magassággal csökken (a). Ennél lassabb áramlásban csillapítatlan belső hullámok keletkeznek, melyek az áramlás irányában és felfelé terjednek (b). A relatív mozgás csoportsebessége merőleges a terjedési irányra, de a háttéráramlás sebességével képzett eredő párhuzamos vele. p_{max} és p_{min} a nyomás szélsőértékeit jelzi.

A hegyvonulatok vagy izolált hegyek mögötti hullámok érdekes meteorológiai jelenségekre vezetnek. A hullámzás okozta feláramlás térben periodikus (de időben alig változó) felhősödést és esetleg csapadékképződést okozhat, hiszen a hullámhegyekben a levegő elérheti a kicsapódási szintet. Az ilyen felhősávok a hegyvonulattal párhuzamosan, azaz a szél irányára merőlegesen alakulnak ki (5.16 ábra). A felhősávok távolsága a hegyvonulat szél irányában mérhető hullámhossza. A hegyvonulat egyenetlenségei miatt a hullámhegyekben időnként lokalizált lencsefelhők (lentikuláris felhők) jönnek létre (5.17 ábra). A hegy mögötti hullámokban kialakuló felhőket a szél nem elfújja, hanem éppen ellenkezőleg, átfúj rajtuk: a hullámvölgyekbe kerülve

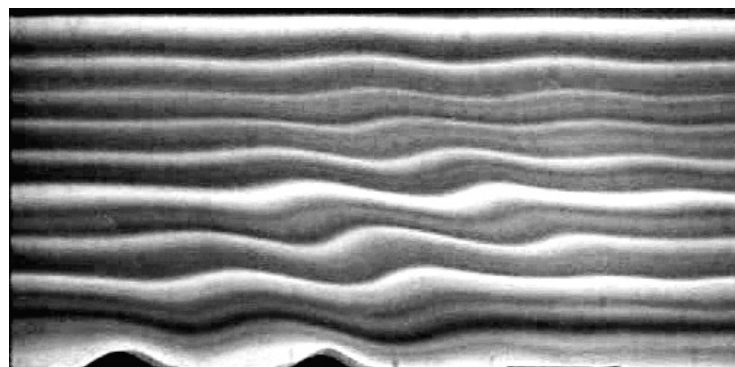
a vízgőz elpárolog, viszont új légcsoomagok érkeznek a hullámhegyekbe, ahol végbemegy a kicsapódás. A felhő dinamikus egyensúlyban létezik, alakja helyhez kötött, a stacionárius áramlásnak megfelelően.



5.16 ábra: Hegy mögötti hullámok sematikus képe. Ha a középső levegőréteg nedves, s a hullámhegyek elérik a kicsapódási szintet (szaggatott vonal), akkor a hegyvonulattal párhuzamos felhősávok, vagy lencsefelhők alakulnak ki.



5.17 ábra: A lencsefelhőkben világosan megmutatkozik a levegő rétegzettsége. A Mount Mc Kinley (Alaszka) mellett kialakult felő [H. Garber felvétele].



5.18 ábra: Hegy mögötti hullámok laboratóriumban. A nyugvó, egyenletesen rétegzett folyadék alján két hegy-alakú akadályt állandó sebességgel húzunk. Ennek következtében nemlineáris belső hullámok alakulnak ki, melyek amplitúdója összemérhető a hegyek magasságával.

5.8.2 Lineáris elmélet

Tekintsünk belső hullámokat egy $u_0 = U, w_0 = 0$ sebességű vízszintes háttéráramlásban. Az (5.18)-(5.20) mozgásegyenletet ekkor a sebességben ezen konstans érték körül kell linearizálni, mely a $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} - (U, 0)$ sebességeltérésekre ideális folyadékban a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0}\text{grad}p' - g\frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{n}, \quad (5.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho' = w'\frac{\rho_0}{g}N^2(z), \quad (5.40)$$

$$\text{div } \mathbf{v}' = 0 \quad (5.41)$$

egyenletekre vezet. Síkhullámmegoldásra az egyenletek azt mutatják, hogy az 5.7 fejezetben tárgyalt belső hullámokban az $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - Uk_x$ helyettesítést kell elvégeznünk. A diszperziós reláció tehát

$$\omega_0 = Uk_x \pm N\frac{k_x}{k}, \quad (5.42)$$

ahol k a hullámszámvektor hossza. Amennyiben a hullámot egy

$$d(x) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (5.43)$$

függvénnyel leírt hegyvonulat hozza létre, a hullám átveszi az ennek megfelelő $k_x = 2\pi/\lambda > 0$ hullámszámot. A hullám akkor válik stacionáriussá, frekvenciája akkor tűnik el, ha

$$|U| = \frac{N}{k}, \quad (5.44)$$

vagyis, ha a függőleges hullámszámkomponensre igaz, hogy

$$k_z^2 = \frac{N^2}{U^2} - k_x^2. \quad (5.45)$$

A valós megoldás feltétele $|N/U| \geq k_x$, azaz $|U| \leq U_c$, ahol U_c az (5.38)-ban meghatározott kritikus sebesség.

Az ennél gyorsabb áramlások esetén a hullámszám imaginárius: $k_z = \pm i/\delta$, ahol δ valós, s ez a függőleges irányban az $\exp(-z/\delta)$ szerinti lecsengő amplitudójú hullámzásnak felel meg, mely pontosan követi a domborzat alakját (5.15a ábra). Ilyen exponenciálisan csillapodó hullámok kialakulhatnak homogén közegben ($N = 0$) is, és nem járnak függőleges energiaáramlással.

A kritikusnál lassabb, $|U| < U_c$ sebességű áramlásokra k_z valós, s térbeli csillapítás nem történik. A balról jobbra haladó ($U > 0$) áramlásokhoz az (5.42) egyenlet alsó előjelének kell tartoznia, hiszen definíció szerint $N, k_x > 0$, s ω_0 csak úgy tűnhet el, ha a második tag negatív. A háttéráramláshoz képest kialakuló belső hullám (5.34) frekvenciája tehát $-Nk_x/k$, azaz negatív. Mivel az energiának felfelé kell haladnia: $c_z^* > 0$, ez (5.36) szerint negatív frekvenciával csak $k_z > 0$ -ra lehetséges (l. 5.6 ábra). Ezért a függőleges hullámszámkomponens pozitív. A hullámszámvektor jobbra fölfele mutat. A hullámszámvektor hossza most N/U , a belső hullám csoportsebességének abszolútértéke ezért $U \sin \theta$. A nyugvó koordinátarendszerbeli teljes csoportsebességben c^* -hoz x irányban hozzáadódik az áramlás U sebessége. Az x komponens így $-U \sin^2 \theta + U = U \cos^2 \theta$, a függőleges komponens pedig $U \sin \theta \cos \theta$, az energiaáram iránya tehát *azonos* a hullámszámvektorával (5.15b ábra). A szél alatti (lee) hullámok energiája a sztratoszféráig is felhatolhat.

5.9 Belső hullámok sekély folyadékban, normálmódusok

Tekintsünk egy H mélységű folytonosan rétegzett közeget, melynek vízszintes kiterjedése sokkal nagyobb mélységénél. A tipikus belső hullámok vízszintes hullámhossza ($2\pi/k_x$) ekkor sokkal nagyobb a függőleges irányhoz tartozó $2\pi/k_z$ -nél. A k_x hullámszámkomponens tehát elhanyagolható a függőleges komponenshez képest, $k_x \ll k_z$, és az (5.34) diszperziós reláció

$$\omega_0 = \pm N \frac{k_x}{k_z} \quad (5.46)$$

alakú. A véges H mélység ugyanakkor meghatározza, hogy a k_z hullámszámkomponens nagyságrendje $1/H$. Az ilyen sekély folyadékbeli belső hullámok tehát nem diszperzívek, hanem jól definiált ω_0/k_z konstans terjedési sebességgel rendelkeznek. Ráadásul a H mélységhez csak bizonyos k_z hullámhosszak illeszkedhetnek, ezeknek egy *diszkrét* $k_z^{(n)}$ rendszere alakulhat csak ki. A belső hullámok tehát függőleges irányú viselkedésük szerint állóhullámok, melyekhez csak a

$$c_n = \frac{N}{k_z^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.47)$$

vízszintes terjedési sebesség tartozhat.

A lehetséges terjedési sebességek spektruma függ a peremfeltételtől. A függőleges hullámszámok lehetséges $k_z^{(n)}$ értékeinek meghatározása ugyanolyan típusú feladat, mint a felhangok spektrumának, vagy a kvantummechanikai potenciálgödrök kötött állapotainak kiszámítása. A legegyszerűbb esetben, amikor a folyadékot egy lappal lefedjük (merev lap közelítés), s ezért felületi mozgás nem alakulhat ki, a peremfeltétel az, hogy a w függőleges sebesség mind az aljzaton, mind a felszínen eltűnik. Állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett a függőleges sebesség magasságfüggése trigonometrikus függvénnyel írható le. Ennek félhullámhossza n egész számszor férhet rá a H intervallumra, azaz $n\pi/k_z^{(n)} = H$, amiből $k_z^{(n)} = n\pi/H$. A lehetséges terjedési sebességek tehát

$$c_n = \frac{NH}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.48)$$

Leggyorsabban az $n = 1$ indexű belső hullám terjed, a többiek sebessége n -nel fordítottan arányos. A légkörben ($N = 10^{-2}$ 1/s, $H = 10$ km) az első módus sebessége $c_1 = 32$ m/s. Az óceánok átlagára jellemző $N = 10^{-3}$ 1/s -os értékkel és $H = 4$ km-rel számolva, $c_1 \approx 1$ m/s. Ugyanez a sebesség sekély vizekben sokkal lassabb. A Brunt–Väisälä-frekvencia átlagos redukált gravitációs gyorsulással megadott (5.5) kifejezését használva

$$c_n \approx \frac{\sqrt{g'H}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.49)$$

Az ilyen belső hullámok tehát a sekély folyadék felszíni hullámainak megfelelői, de őket a redukált gravitációs gyorsulás határozza meg. Ráadásul egész spektrumuk létezik a folytonos rétegzettség következtében. Mindegyik terjedési sebességhez a hidrodinamikai változók más és más függőleges eloszlása tartozik.

A w függőleges sebesség magasságfüggése $\sin(Nz/c_n)$ -nel arányos, hiszen csak így tűnhet el mindkét határon. A divergenciamentesség miatt a vízszintes sebesség $\cos(Nz/c_n)$ alakban függ a magasságtól. (5.18) szerint ugyanilyen a dinamikai nyomás z -függése. A sekély folyadékban érvényes hidrosztatikai viszonyok miatt a sűrűségingadozás ennek integrálja, tehát $\sin(Nz/c_n)$ -nel arányos.

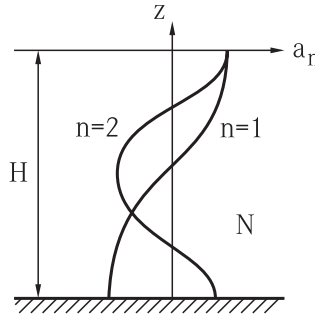
Általánosan igaz, hogy a linearizált (5.18)-(5.20) egyenletek megoldása sekély folyadékban (amikor dw/dt elhanyagolható) írható, mint

$$(u, p', w, \varrho') = \left(u_n a_n(z), p'_n a_n(z), w_n b_n(z), \varrho'_n \frac{da_n(z)}{dz} \right) e^{-ik_x(x-c_n t)}, \quad (5.50)$$

illetve mint ezen kifejezések lineáris kombinációja. Itt $a_n(z)$ egy dimenziótlán függvény, $b_n(z)$ az a_n integrálja, $u_n, p'_n, w_n, \varrho'_n$ pedig (komplex) állandók. Az $a_n(z)$ függvényt a rétegzett folyadék n -edik *normálmódusának* nevezzük. Ez a mennyiségek függőleges iránybeli eloszlását adja meg a c_n sebességgel terjedő hullámban. A magasságfüggés tehát állóhullám, a vízszintes koordinátától való függés pedig haladó hullám jellegű. Az $a_n(z)$ mennyiség a z magasságban haladó hullám amplitudójával arányos. Lineáris problémáról lévén szó, az általános megoldás kifejthető a (5.50) normálmódusok *összegeként*. Az egyes normálmódusok súlyát a kezdőfeltétel szabja meg. Annak ellenére, hogy minden egyes módushoz vízszintes terjedés tartozik, összegük függőleges komponensű mozgást is leírhat. A rövidebb hullámhosszú módusok gyorsabb viszkózus csillapodása miatt (a relaxációs ráta νk^2 -tel arányos) hosszú időskálán csak az *első néhány módusnak* van jelentősége. Merev lap közelítésben állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett tehát a normálmódusok (5.19 ábra)

$$a_n(z) = \cos(Nz/c_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.51)$$

alakúak, ahol a c_n sebességeket (5.48) adja meg, s a függvények maximális értékét 1-re normáltuk.



5.19 ábra: Állandó Brunt–Väisälä-frekvenciájú folyadék első két normálmódusa: $a_1(z), a_2(z)$. A normálmódusokból minden hidrodinamikai változó magasságfüggése megkapható. Az $n = 0$ -hoz tartozó $a_0 \approx 1$ barotróp módus olyan mozgást jellemez, mely homogén folyadékban is előfordul.

Amennyiben a folyadékfelszín mozgását is megengedjük, w nem tűnik el a felszínen. A pontos peremfeltételhez⁶ tartozó normálmódusok kidolgozása helyett, szemléletesen is könnyen elképzelhető, hogy új jelenségment megjelenik egy olyan hullám, melyben az egész folyadék vízszintesen mozgása független a mélységtől, tehát olyan a sebességtér, mint a nem rétegzett sekély homogén folyadék felszíni hullámai esetén. (Ez azért lehet így, mert az átlagos sűrűség-ingadozás csekély, l. (5.1).) Ennek megfelelően kialakul egy

$$c_0 = \sqrt{gH} \quad (5.52)$$

sebességű hullám, melyhez az $a_0(z) \approx 1$ normálmódus tartozik. Az óceáni példában $c_0 = 200$ m/s, tehát két nagyságrenddel gyorsabb, mint a leggyorsabb belső hullám. A többi normálmódus

⁶A felső peremen $w = \partial\eta/\partial t$ és $p' = \varrho_0 g \eta$, azaz $w = 1/(\varrho_0 g) \partial p'/\partial t$. A linearizált (5.19) egyenletből $\partial \varrho'/\partial t = w \varrho_0 N^2/g$, mely a $\partial p'/\partial z = -\varrho' g$ hidrosztatikai egyenlettel a $\partial^2 p'/(\partial z \partial t) = -(N^2/g) \partial p'/\partial t$ összefüggésre vezet. A normálmódusok (5.50) alakja miatt az a_n amplitúdóra a $\partial a_n/\partial z = -a_n N^2/g$ peremfeltételnek kell fennállnia.

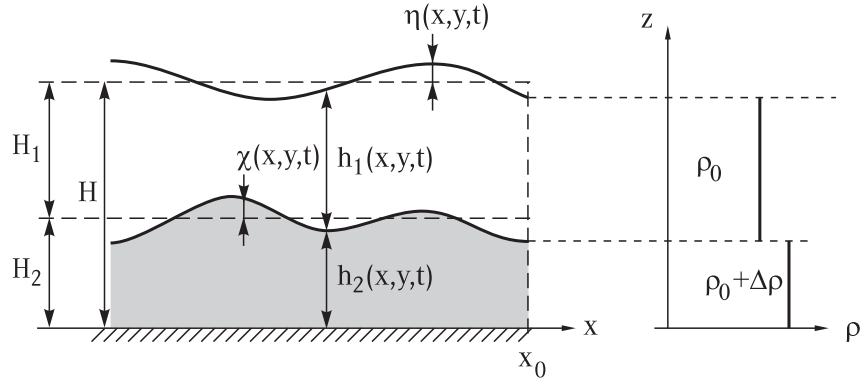
sebessége alig változik (a korrekció $\Delta\rho/\rho_0$ rendű), s (5.48) jó közelítéssel érvényben marad⁷.

Az $n \geq 1$ módusok az ún. *baroklin módusok*, hiszen a hozzájuk tartozó áramlásban a nyomás- és sűrűség-ingadozások magasságfüggése alapvetően különböző. Az ezektől eltérő jellegű $n = 0$ módust *barotrópnak* nevezzük. A merev lap közelítés jellegére vonatkozóan ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az kiszűri a gyors felszíni mozgást, a lassú baroklin módusokat viszont alig módosítja.

5.10 Kétrétegű közegek

5.10.1 Kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika

Amennyiben a $\bar{\rho}(z)$ egyensúlyi sűrűség változása nagyon erős egy keskeny tartományban (pl. a termoklin zónában vagy a planetáris határreteg tetején), akkor ott jó közelítéssel sűrűségugrásról beszélhetünk. A legegyszerűbb közelítésben ilyenkor két homogén összenyomhatatlan réteget különböztetünk meg, köztük valamekkora $\Delta\rho$ sűrűségkülönbséggel. Az egyensúlyi rétegzettség azt követeli meg, hogy a sűrűbb közeg feküdjön alul. A relatív sűrűségkülönbség kicsi, $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$.



5.20 ábra: A kétrétegű közelítésben két élesen elkülönülő, homogén és összenyomhatatlan sekély folyadék-réteggel modellezzük a sztratifikációt. A belső és a külső felszín is szabadon mozoghat. A vízszintes sebesség mindkét rétegben független a magasságtól.

Mindkét réteget keskenynek feltételezve, alkalmazhatjuk a hidrosztatikus közelítést, miszerint a nyomás a sűrűség magasság szerinti integráljaként áll elő. Ez mindkét közegben lineáris z -függést jelent, a két közeg (idő-, és helyfüggő) határán a nyomás folytonos, de gradiense ugrásszerűen változik. Az egyes közegek pillanatnyi és átlagos vastagsága legyen $h_1(x, y, t)$, $h_2(x, y, t)$, ill., H_1 , H_2 (a 2-es közeg a sűrűbb). A $z = 0$ szinten vízszintes aljzatot feltételezve, a teljes nyugalmi folyadékmélység $H = H_1 + H_2$. A felszín és a belső elválasztó felület ingadozását η -val, ill. χ -vel jelölve (5.20 ábra), a pillanatnyi rétegvastagságok

$$h_1 = \eta - \chi + H_1, \quad h_2 = \chi + H_2. \quad (5.53)$$

A teljes nyomáseloszlás a folyadékban:

$$p = p_0 + \rho_0 g(\eta + H - z), \quad \text{ha } z > h_2(x, y, t), \quad (5.54)$$

⁷A $\partial a_n / \partial z = -a_n N^2 / g$ peremfeltétel dimenziótlan jobb oldali együtthatója $N^2 H / g \approx \Delta\rho / \rho_0 \ll 1$, s ezért a peremfeltétel $n \neq 0$ esetén alig tér el a $\partial a_n / \partial z = 0$ feltételtől.

és

$$p = p_0 + \rho_0 g h_1 + (\rho_0 + \Delta \rho) g (h_2 - z) \quad (5.55)$$

egyébként, ahol p_0 a konstans külső felszíni nyomás. Ezután mindkét közegben felírjuk a vízszintes sebességkomponesre vonatkozó Euler-egyenletet, melyben a nyomásgradienst η és χ gradienseivel fejezzük ki. A felső és alsó közeg vízszintes síkbeli, magasságtól független sebességvektorait \mathbf{u}_1 -gyel, ill. \mathbf{u}_2 -vel jelölve:

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = -g \text{grad} \eta, \quad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -g \text{grad} \eta - g' \text{grad} \chi. \quad (5.56)$$

A d/dt derivált csak a vízszintes sebességkomponenseket tartalmazza. Itt $g' \equiv g \Delta \rho / \rho_0$ a sűrűségugrás miatt létrejövő redukált gravitációs gyorsulás. Az egyes összenyomhatatlan folyadék-rétegekben a kontinuitást a folyadékoszlopok térfogatának megmaradása jelenti. Ezért mindkét közeg $h_i, i = 1, 2$ vastagságára fennáll a (2.13) egyenlet, tehát

$$\frac{dh_i}{dt} = -h_i \text{div} \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.57)$$

A fenti egyenletek a (5.53) kapcsolattal együtt zárt egyenletrendszert alkotnak, a két enyhén különböző sűrűségű sekélyfolyadék-réteg egyenleteit. A szokásos dimenziótlanítással a két kontinuitási egyenlet nem változik, a dinamikai egyenletekben $\text{grad} \eta$ előtt a külső (1.27) Froude-szám, $\text{grad} \chi$ előtt pedig az

$$Fr' = \frac{U}{\sqrt{g'H}}. \quad (5.58)$$

belső Froude-szám jelenik meg. Ez mutatja, hogy az utóbbi csak a belső elválasztó felülettel kapcsolatos mozgásokat jellemzi.

5.10.2 Belső hullámok két közeg határán

Kis amplitudójú lineáris hullámokra az egyenletrendszer linearizálható a $h_i = H_i$ átlagos rétegvastagsághoz tartozó nyugalmi állapot körül. Az $(u_1, u_2, \eta, \chi) = (u_{10}, u_{20}, \eta_0, \chi_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakú, x irányban haladó síkhullámmegoldást keresve a

$$\omega_0 u_{10} = g k_x \eta_0, \quad \omega_0 u_{20} = g k_x \eta_0 + g' k_x \chi_0, \quad (5.59)$$

$$\omega_0 (\eta_0 - \chi_0) = H_1 k_x u_{10}, \quad \omega_0 \chi_0 = H_2 k_x u_{20} \quad (5.60)$$

polarizációs egyenletekre jutunk. As első és harmadik egyenletből a sebességeket kiküszöbölve a

$$\chi_0 = \eta_0 \left(1 - g H_1 \frac{k_x^2}{\omega_0^2} \right) \quad (5.61)$$

összefüggésre, majd a sebességek közötti

$$u_{10} = u_{20} \left(1 - g' H_2 \frac{k_x^2}{\omega_0^2} \right) \quad (5.62)$$

alakra jutunk. A sebesség- és felszíningadozások amplitudóinak a két közegben tehát *arányosnak* kell lennie. Az első és utolsó polarizációs egyenletből $u_{10} \chi_0 = u_{20} \eta_0 g H_2 k_x^2 / \omega_0^2$ következik. Ez csak akkor konzisztens (5.61), (5.62)-vel, ha

$$\left(1 - \frac{g' H_2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{g H_1}{c^2} \right) = \frac{g H_2}{c^2}. \quad (5.63)$$

Mivel az egyenletben csak az ω_0/k_x kombináció jelent meg, bevezettük a $c \equiv \omega_0/k_x$ terjedési sebességet, melynek négyzetére a

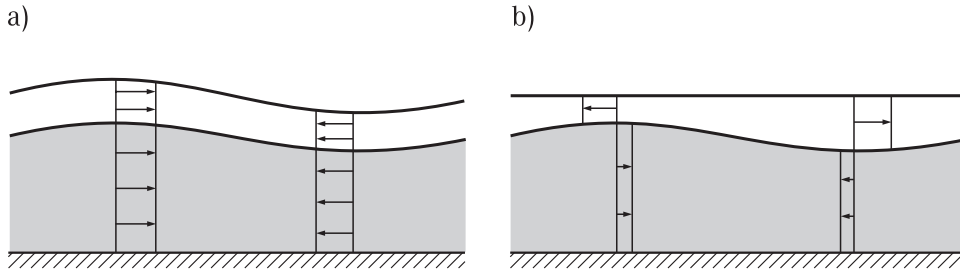
$$c^4 - c^2(gH + g'H_2) + gg'H_1H_2 = 0 \quad (5.64)$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ez természetesen egzaktul is megoldható, de érdemes kihasználni, hogy a relatív sűrűségkülönbség csekély, vagyis $g' \ll g$.

A fenti egyenletnek van olyan megoldása, melyben a sebesség nagy, a g' -vel arányos tagok elhanyagolhatók, s ezért vezető rendben a terjedési sebesség abszolútértéke

$$c_0 = \sqrt{gH}. \quad (5.65)$$

Ekkor $u_{10} \approx u_{20}$ és $\chi_0 = \eta_0 H_2/H$. A sebesség a két rétegben tehát alig különbözik, s a felszíni ingadozások aránya a rétegvastagságok arányát követi (5.21a ábra). Ez nagyon közel esik a H vastagságú összenyomhatatlan homogén sekély folyadék hullámmozgásához, s ezért joggal nevezhető barotróp módusnak.



5.21 ábra: Kis amplitudójú lineáris hullámok kétrétegű folyadékban. a) Barotróp módus: mindkét réteg hasonlóan mozog. b) Baroklin módus: mindkét réteg ellentétes fázisban mozog és az elválasztó felület hullámozgása sokkal erősebb a felszínénél.

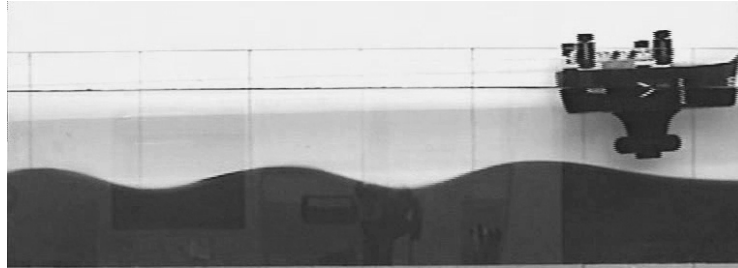
A másik gyök nagysága kicsi, g' -vel arányos, s ekkor c^4 hanyagolható el. Ezzel a

$$c_1 = \sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H}} \quad (5.66)$$

megoldást kapjuk, g'/g rendű korrekciók erejéig. Ilyenkor $u_{20} = -u_{10}H_1/H_2$, és $\chi_0 = -\eta_0 gH/(g'H_2)$. A két rétegben tehát *ellenkező* előjelű a vízszintes sebesség. Ráadásul a belső határfelület hullámozgása jóval *erősebb* (g/g' arányban) a felszínénél. Az előjelek itt is különbözőek, tehát felszíni kidudorodáshoz belső behorpadás tartozik és fordítva (5.21b ábra). Ez a mozgás a kétszintű rétegzett közeg belső hulláma. A c_1 sebességű megoldást nevezik ezért baroklin módusnak is. Egyforma vastagságú rétegek ($H_1 = H/2$) esetén az áramlás analóg a folytonosan rétegzett folyadék első baroklin módusával (l. 5.9 fejezet), hiszen ott is előjelet vált a sebesség a folyadék középvonalában. A két folyadékréteg határfelületén kialakuló hullám $c_1 = \sqrt{g'H}/2$ sebessége azonban valamivel nagyobb a folytonos közegbeli $c_1 = \sqrt{g'H}/\pi$ -nél, mert a kétféle áramlás részletei nem azonosak.

Két közeg határán futó belső hullámok tavakban és tengerekben rendszeresen előfordulnak a felső hígabb és alsó sűrűbb réteg határán, pl. folyótorkolatok közelében vagy a termoklin zónában. A felszínről nézve mozgásuk alig vehető észre (5.22 ábra), legfeljebb a belső hullámhegyek által keltett apró felszíni kapilláris hullámok okozta fényvisszaverés révén. Felfedezésükre az vezetett, hogy a torkolatok környékén a sós tengervízen néhány méter vastagságban szétterülő édesvízbe érkező hajók hirtelen lefékeződtek, mert energiájuk belső hullámok keltésére fordítódott. E

"dead water"-nek nevezett jelenség magyarázatát és a belső hullámok első elméletét ugyanaz a V. Ekman adta meg (1904-ben), akinek nevéhez fűződik a forgatott rendszerek határrétegének megértése. Léggöri rétegek határán futó belső hullámok is gyakran megfigyelhetők pl. füst vagy köd szétterülésekor. A hideg légréteg tetején vízszintes síkban haladó belső hullámok párhuzamos felhősávok kialakulására vezethetnek.



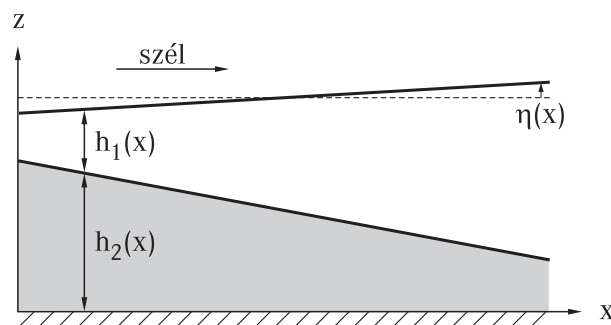
5.22 ábra: Belső hullámok gerjesztése kétrétegű közegben. Az úszó tárgyak a felső híg és alsó sűrűbb folyadék határán belső hullámokat keltenek.

5.10.3 Megjegyzések

A kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika a lineáris hullámokon túl is számos érdekes jelenséget leír. A baroklin mozgásokra jellemző általános tulajdonság, hogy a felszíni alakváltozást azzal ellentétes előjelű és sokkal nagyobb mértékű belső változás követi. Képzeljük el például, hogy valamilyen külső hatás miatt egy csekély felszínemelkedést stabilizálódik. Ezt tavakban gyakran az adott irányból huzamos ideig fújó szél nyírás ereje okozza, mely az egyik oldalra hajtja a vizet. Tekintsük a közel állandó felszíni meredekséget adottnak, s alkalmazzuk az alsó közeg Euler-egyenletét. A stacionárius állapot fentartásából azt a feltételt kapjuk, hogy a két gradiensnek közelítőleg kompenzálnia kell egymást, vagyis

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \approx -\frac{g}{g'} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (5.67)$$

Az állandó szél tehát a termoklin zóna jelentős lejtését válthatja ki (5.23 ábra). A szél elülése után ezen nemegyensúlyi állapot stabilitása megszűnik, a víz elkezd visszaáramolni. Tehetetlensége miatt azonban túllendül a nyugalmi állapoton, s ez okozza az állóhullámok, tölengések kialakulását (l. 12.1 fejezet).



5.23 ábra: Az állandó szélnyírás következtében a tavak felszíne megdől. A belső elválasztó réteg (a termoklin zóna) ezzel ellentétes irányban és jóval nagyobb mértékben lejt.

Több réteg feltételezésekor annyi c_n hullámsebességet találunk, amennyi a rétegek száma. Egyre több, egyre keskenyebb réteg használatával, s a teljes folyadékmélységet állandó H értéken

tartva, visszakapjuk a folytonos rétegzettséghez tartozó c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ normálmódus-eloszlást. A folytonos rétegzettség tehát számos keskeny egymás fölötti réteg határesetének tekinthető, melyek között a sűrűségkülönbség vastagságuk arányában csökken.

5.11 A redukált sekélyfolyadék-modell

A kétrétegű leírás különösen egyszerű esetét kapjuk, ha az egyik közeg jóval nagyobb folyadék-tömeget képvisel, mint a másik. Annak kifejezésére, hogy az eredmény független attól, hogy a keskeny közeg felül vagy alul helyezkedik el, a keskeny közeg pillanatnyi (átlagos) vastagságát $h(x, t)$ -vel (h_0 -lal) jelöljük. Feltesszük, hogy a teljes mélység sokkal nagyobb a vizsgált rétegénél, tehát $h \ll H$.

A dinamikai egyenlet levezetéséhez célszerű azt az esetet tekinteni, amikor a keskeny közeg van alul. Ekkor a felső közeg gyakorlatilag áll, számára a választófelület mozgása elhanyagolhatóan kis perturbációt jelent csak. Így elég az alsó közeg mozgásával törődnünk. Mivel felül érvényes a ρ_0 sűrűségnek megfelelő hidrosztatika, az alsó közegbeli p'' dinamikai nyomás

$$p''(x, y, t) = g\Delta\rho h(x, y, t). \quad (5.68)$$

A sekély mozgó réteg vízszintes síkbeli sebességterét a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{grad})\mathbf{u} = -g' \text{grad}h \quad (5.69)$$

egyenlet adja meg, s homogén közegről lévén szó, kontinuitását a

$$\frac{dh}{dt} = -h \text{div} \mathbf{u} \quad (5.70)$$

egyenlet fejezi ki. Mindez megfelel a kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika $\mathbf{u}_1, \eta \rightarrow 0$ határesetének. Levezetésünkben azonban a felső közeg sekélységét nem tételeztük fel. Az alsó közeg dinamikájára tehát a (2.7) sekélyfolyadék-egyenlettel ekvivalens alakot kaptunk, de benne nem a teljes g gravitációs gyorsulás, hanem a $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ redukált gyorsulás jelenik meg. Ezt az egyenletrendszeret ezért a redukált sekélyfolyadék-modellnek is nevezik. Ugyanezek az egyenletek igazak egy keskeny ritka közegre is, mely egy sűrűbb passzív folyadék felett helyezkedik el, ha a sűrűségek különbsége kicsi.

A keskeny réteg határán kialakuló belső hullámok sebessége természetesen

$$c_1 = \sqrt{g'h_0}, \quad (5.71)$$

melyet az (5.66) egyenlet $h_0/H \rightarrow 1$ határesetéből is megkaphatunk, ahol $h_0 = \min(H_1, H_2)$. A barotróp módus most nem jelenhet meg, hiszen a vastag közeg áll. A közeghatár hullámmozgása, és (5.69),(5.70) értelmében a mozgó közeg egész hidrodinamikája *független* a folyadék teljes mélységétől.

A redukált sekélyfolyadék egyenletek túlzott egyszerűsítésnek tűnhet a kis amplitudójú belső hullámok jellemzésére. Van azonban számos olyan *nemlineáris* jelenség, melyek leírása már a kétrétegű közelítésben is igen nehéz. A redukált sekélyfolyadék-modell viszont sokszor meglepően valóságközeli eredményeket szolgáltat a véges amplitudójú nemlineáris mozgásokra.

A redukált sekélyfolyadékmodell általános megoldása nem ismert. Egydimenziós változata ($u \equiv u(x, t), v \equiv 0$) *stacionárius* esetben két megmaradó mennyiséggel rendelkezik, melyek ekvivalensek a hidrodinamikai egyenletekkel. Az

$$u(x)h(x) = Q \quad (5.72)$$

hozam állandósága a (5.70) kontinuitási egyenletből, az

$$\frac{u(x)^2}{2} + g'h(x) = \frac{Q^2}{2h^2(x)} + g'h(x) = B \quad (5.73)$$

Bernoulli-állandó léte pedig a (5.69) Euler-egyenletből olvasható le. Amennyiben a sűrű alsó közeg egy csekély $d(x)$ domborzati kidudorodás fölött áramlik, úgy, hogy az áramlás lassan változik, az energiamegmaradást kifejező Bernoulli-törvény az

$$\frac{u(x)^2}{2} + g'(h(x) + d(x)) = B \quad (5.74)$$

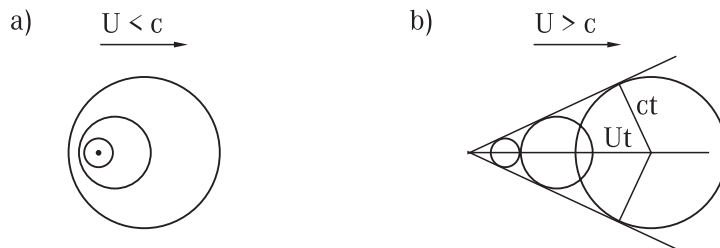
alakot ölti.

5.12 Szuperkritikus áramlások

A sekély folyadékrétegekben kialakuló véges amplitudójú, nemlineáris hullámok rendszerint jelentős áramlással járnak, méghozzá gyorsabban, mint a lineáris belső hullámok terjedési sebessége.

Az olyan áramlásokat, melyek U átlagsebessége nagyobb a lineáris belső hullámok fázis-sebességénél, *szuperkritikusoknak* nevezzük. Az ilyen áramlások Fr' belső Froude-száma tehát egynél nagyobb. Az $Fr' < 1$ feltételt kielégítő áramlások szubkritikusak.

Egy kétdimenziós szuperkritikus áramlás alapvető tulajdonsága, hogy a benne kialakuló lineáris hullámok nem terjedhetnek az áramlással szemben. Így a pontszerű forrásból kiinduló belső hullámok csak a forrás mögötti arcsin $(1/Fr')$ félnyílásszögű tartományba juthatnak el (5.24 ábra), hasonlóan a szuperszonikus áramlásbeli hangterjedéshez.



5.24 ábra: A vízszintes síkban pontszerű forrásból terjedő gravitációs hullámok által elérhető tartomány U sebességű áramlásban. a) Szubkritikus, b) szuperkritikus áramlás. A c paraméter a belső (vagy a felszíni) lineáris hullámok terjedési sebessége.

A továbbiakban az egydimenziós redukált sekélyfolyadék-modellt használjuk. A szuperkritikus és szubkritikus áramlások közötti másik szembevetendő különbség az akadályok fölötti átáramlással kapcsolatos. Tételezzük fel, hogy a h_0 vastagságú U_0 sebességű ($Q_0 = U_0 h_0$ hozamú) alsó sűrű folyadékréteg enyhe $d(x)$ domborzati kitüremkedéssel találkozik. Az (5.74) Bernoulli-tétel értelmében

$$\frac{Q_0^2}{2g'h^2} + h = B/g' - d, \quad (5.75)$$

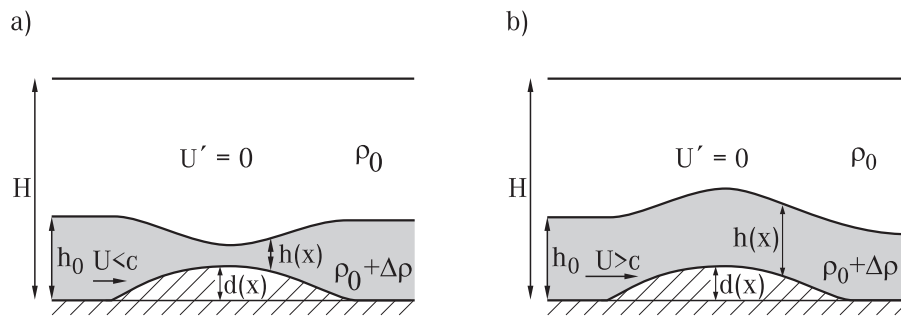
ahol $h(x)$ az x ponthoz tartozó rétegvastagság a sűrű alsó rétegben. A kis Δd domborzati emelkedéshez tartozó Δh vastagságváltozás ebből differenciálással kapható:

$$\frac{\Delta h}{\Delta d} = \frac{1}{Fr'^2 - 1}, \quad (5.76)$$

ahol

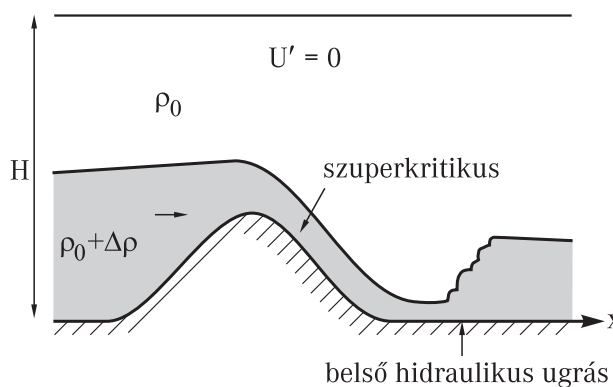
$$Fr' = \sqrt{\frac{Q_0^2}{g'h_0^3}} = \frac{U_0}{\sqrt{g'h_0}} \quad (5.77)$$

a beáramlási belső Froude-szám. A viselkedés alapvetően függ $(Fr' - 1)$ előjelétől. Szubkritikus áramlásban a derivált negatív, sőt mindig kisebb (-1) -nél, melyből következik, hogy $h + d < h_0$. A réteg annyira elkeskenyedik, hogy a folyadékhatár behorpad a domborzat felett: a folyadék a potenciális energiából nyer kinetikus energiát az akadályon való áthatoláshoz (5.25a ábra). Szuperkritikus áramlásban a vastagság megnövekszik, a kezdeti kinetikus energia olyan nagy, hogy a folyadék felgyülemlik (5.25b ábra). Az $Fr' = 1$ értékhez tartozó szinguláris derivált arra utal, hogy ott stacionárius megoldás nem létezhet.



5.25 ábra: A két közeg közötti elválasztó felület alakja enyhe domborzati kidudorodás fölött különböző jellegű a szubkritikus (a) és a szuperkritikus (b) esetben.

Amennyiben az akadály meredek, a sűrű folyadék előtte lelassul, feltorlódik, ezért az áramlás szubkritikus. A legmagasabb ponton áthaladva azonban a folyadék a lejtőn történő lefutás következtében felgyorsul, s az áramlás gyakran szuperkritikussá válik (5.26 ábra). Az ilyen szuperkritikus áramlások instabilak. A bennük felhalmozódott kinetikus energia egy része turbulens áramlás révén leadódik. A folyadék átlagos mozgása hirtelen lelassul, s egy lépcsőszerű vastagodás áll be a sűrű folyadék rétegben, a belső hidraulikus ugrás.



5.26 ábra: A meredek domborzati lejtőn lezúduló folyadék szuperkritikussá gyorsul, és a sík felszínre való kifutás után belső hidraulikus ugrás képződik.

A beható légköri hideg légtömegek hegyek mögött erős lecsapó áramlatokat, bukó szeleket (főn, chinook) okoznak. A hegy mögötti síkságon a belső hidraulikus ugrás időnként kirajzolódik a felhőképekben (5.27 ábra).



5.27 ábra: Hidraulikus ugrás kialakulhat szuperkritikus bukó szelek síkra történő kifutása után. Az ugrást a felette képződő felhők és a felkavart por teszi láthatóvá [Turner].

5.13 A hidraulikus ugrás és a torlópólya (bore) jellemzése

Az időfüggetlen áramlással járó hidraulikus ugrás nagysága vízszintes síkon való áramlás esetén egyszerűen megkapható. Figyelembe kell vennünk, hogy a kontinuitási egyenlet érvényes, de az ugrás közben kialakuló erős turbulencia miatt a lokális Bernoulli-tétel nem alkalmazható. Az ugrás közelében sem a liminaritás (a sebesség függetlensége a magasságtól), sem az időfüggetlenség nem teljesül. Az ugrás előtti (u_1 sebességű, h_1 vastagságú) és utáni (u_2 sebességű, h_2 vastagságú) lamináris tartományban (5.28 ábra) azonban elképzelhetünk két függőleges síkot és a köztük levő tartományra felírhatjuk az Euler-egyenlet integrális változatát. Az egyszerűség kedvéért a sűrűséget most egységnyiinek vesszük. A síkokra ható erők eredőjének stacionárius ugrás esetén a teljes impulzusváltozással kell megegyeznie. Az utóbbi az $uh \cdot u$ mennyiség különbsége a két oldalon, tehát $Q(u_2 - u_1) = Q^2(1/h_2 - 1/h_1)$, ahol felhasználtuk a (5.72) kontinuitási feltételt. Az erő mindkét oldalon az átlagos $g'h/2$ nyomásnövekmény és a h magasság szorzata. Mivel a járulékok a két oldalon különböző előjelű, az eredő $g'(h_1^2 - h_2^2)/2$. A keresett egyenlet ezért

$$g'(h_1 + h_2) = 2u_1^2 \frac{h_1}{h_2} = 2 \frac{Q^2}{h_1 h_2}. \quad (5.78)$$

A beáramlási adatokat általában ismerjük, ezért az érdekes mennyiség az ugrás mértéke, vagyis a h_2 magasság.

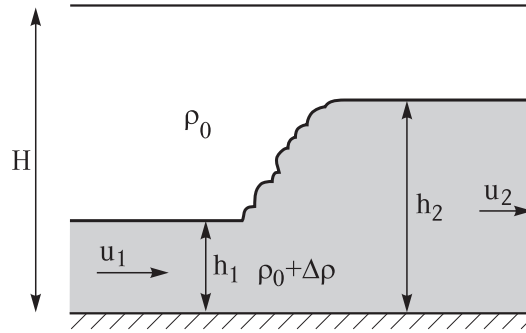
A befolyási sebesség és szintmagasság, ill. a belőlük alkotott $Fr'_1 = u_1/\sqrt{g'h_1} \equiv Q/\sqrt{g'h_1^3}$ belső Froude-szám ismeretében a kifolyási szintmagasság

$$h_2 = h_1 \frac{\sqrt{1 + 8Fr'^2_1} - 1}{2}. \quad (5.79)$$

Ez valóban nagyobb h_1 -nél, amennyiben a befolyás szuperkritikus, tehát $Fr'_1 > 1$. Az ugrás utáni folyadékszint a belső Froude-szám $\sqrt{3}$ értékénél lesz kétszer olyan magas mint a befolyási. A megfelelő kifolyási sebesség

$$u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2} \quad (5.80)$$

természetesen már szubkritikus: $Fr'_2 = u_2/\sqrt{g'h_2} < 1$. Az (5.73) Bernoulli-konstans nem azonos



5.28 ábra: Stacionárius belső hidraulikus ugrás és jellemzői a redukált sekély folyadék modellben. A u_1 sebességgel mozgó koordinátarendszerben az ugrás torlópulchullámként, bore-ként jelenik meg.

a hidraulikus ugrás két oldalán. A

$$B_1 - B_2 = g' \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \quad (5.81)$$

különbség méri azt az energiát, mely turbulencia keltésére fordítódott. Mivel ennek pozitívnak kell lennie, az eredmény mutatja, hogy hidraulikus ugrás csak $h_2 > h_1$, vagyis szuperkritikus beáramlás esetén lehetséges⁸.

Egy szorosan kapcsolódó jelenség a híg és sűrű folyadék határfelületén lépcsőszerű mélységváltozással kísért belső torlópulchullám, vagy belső bore. Mivel a bore közel állandó sebességgel halad, a vízlépcsővel együttmozgó koordinátarendszerben a folyamat ugyanúgy írható le, mint egy hidraulikus ugrás. Az álló folyadékban U sebességgel haladó bore esetén a sekély rétegbeli áramlási sebesség az együttmozgó koordinátarendszerben $u_1 = -U$. Ezért (5.78) most a bore sebességének kifejezésére használható az előtte és mögötte létrejövő rétegvastagságok függvényében. A bore U sebességére tehát fennáll, hogy⁹

$$U^2 = g' h_2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right). \quad (5.82)$$

Ez az U lényegesen *nagyobb* mind az eredeti h_1 , mind az új $h_2 > h_1$ mélységű folyadékréteg felületén kialakuló lineáris belső hullámok $\sqrt{g' h_1}$ ill., $\sqrt{g' h_2}$ sebességénél. Négyszeres mélységi arány, $h_2/h_1 = 4$ esetén pl. $U = \sqrt{10} \sqrt{g' h_1}$. Ezerszeres redukció és 10 m-es keskenyebb rétegvastagság mellett az ilyen bore sebessége $U = 1$ m/s.

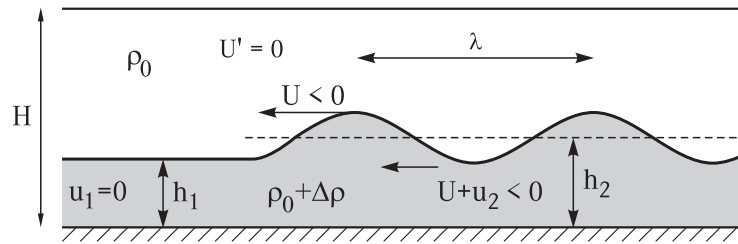
A nagy mélységi arányú erős bore-ok mindig turbulens hullámzás övezte vízlépcső megjelenésével járnak. A gyenge bore-okban azonban, melyeket egy kritikusnál kisebb mélységi arány jellemez (mely belső bore esetén¹⁰ 3 körüli), a hidraulikus ugrásban felszabaduló energiát véges amplitudójú hullámok szállítják el (5.29 ábra). Az ilyen hullámzó (unduláris) bore esetén a magas folyadékszint hullámos felületű. A h_2 mennyiség átlagos mélységként értelmezendő, s a hullámok amplitudója $h_2 - h_1$ nagyságrendű. A λ hullámhossz a h_2 bore-mélység mintegy tízszerese. A belső hullámzó bore-ok a belső hullámok egyik leggyakoribb nemlineáris változatát alkotják.

Ezek a nemlineáris belső hullámok laboratóriumban könnyen tanulmányozhatók (5.30 ábra), és mind a légkörben, mind tengerekben vagy tavakban gyakoriak. Nagy folyadéktömegek vízszintes mozgása az előttük levő folyadékot feltorlaszolja, abban bore-t hoz létre, mely rendszerint

⁸A folyadék-levegő határfelületen is kialakuló külső hidraulikus ugrásra eredményeink a $g' \rightarrow g$ helyettesítéssel érvényesek.

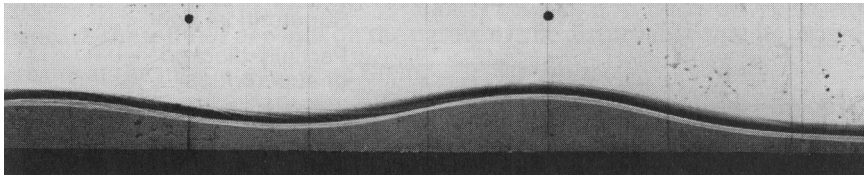
⁹A $g' \rightarrow g$ helyettesítéssel a homogén sekély folyadék felszíni torlópulchullámának sebességet kapjuk.

¹⁰A szabad felszínre 1, 3.

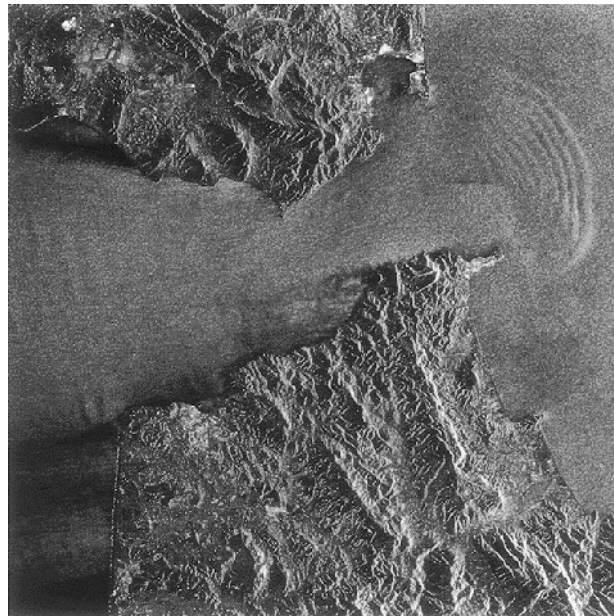


5.29 ábra: A belső torlóhullám (bore) mozgó hidraulikus ugrás. Az ábra a hullámzó (unduláris) belső bore jellemzőit mutatja, mely kis magassági arány ($h_2/h_1 < 3$) esetén alakul ki. Az alsó közeg, melybe az árhullám behatol, nyugalomban van.

a gyengébb, hullámzó típusú. Unduláris bore-t alakíthat ki a sós dagályhullám megérkezése a partmenti édesvízrétegekben, vagy a Földközi-tenger sósabb vizének és az Atlanti-óceán kevésbé sós vizének a Gibraltári-szorosnál történő ki- és beáramlása (5.31 ábra). A gyorsan érkező hideg légáramlatok az előttük telt meleg levegőrétegben hozhatnak létre hullámzó belső bore-okat.



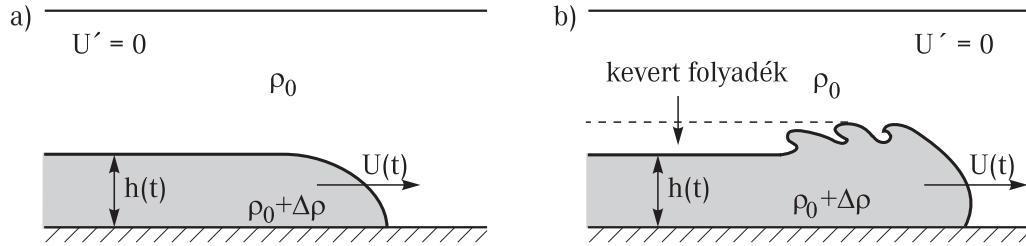
5.30 ábra: Hullámzó (unduláris) belső bore laboratóriumban két különböző (világos és sötét-szürke) közeg határán.



5.31 ábra: Nagy amplitudójú tengeri belső hullámok megfigyelhetők űrhajófelvételeken. Itt az Atlanti-óceán (balra) Földközi-tengerbe áramló hígabb vize kelt hullámokat miután áthaladt (és felgyorsult) a Gibraltári-szorosban. A belső hullámokat a felszín kapilláris hullámai teszik láthatóvá [www.tanger.8m.com/gibraltar.jpg].

5.14 Gravitációs áramlatok

Ha a vékony, sűrű folyadékréteg csak véges vízszintes tartományra terjed ki, vagyis a két közeget elválasztó határfelület valahol kifut a peremre (az alsó domborzatra), az nemegyensúlyi kezdőfeltételt jelent. A kiegyenlítő erős áramlással jár, melynek hajtóereje a gravitáció, noha esetleg csak néhány ezreléknyi sűrűségkülönbség miatt. Az ilyen mozgásokat ezért gravitációs áramlásoknak nevezzük. A gravitációs áramlat határvonalának áthaladása a perem egy rögzített pontján hirtelen sűrűségváltozással jár. Ezért az áramlat elejét jelző diszkontinuitási felületet *frontvonalnak*, magát az áramlatot pedig *frontnak* is tekinthetjük.



5.32 ábra: Gravitációs áramlat sematikus képe. a) Keverés mentes, ideális eset. b) A Kelvin-Helmholtz-instabilitás fej kialakulására vezet, mely mögött jól kevert folyadékréteg marad vissza. A viszkozitás miatt a fej kissé előredudorodik.

A redukált sekélyfolyadék-közelítésben a gravitációs áramlás U haladási sebessége megbecsülhető a keskeny réteg pillanatnyi h vastagságának függvényében (5.32a ábra). Az U sebességű áramlás $(\rho_0 + \Delta\rho)U^2/2 \approx \rho_0 U^2/2$ kinetikus energiasűrűsége ugyanis megegyezik a nyomáskülönbséggel, mely a frontvonal és a mögötte húzódó h vastagságú réteg belseje között kialakul. A frontvonal helyén a nyomás $\rho_0 gH$, ahol H a teljes folyadékvastagság, a h vastagságú réteg alján pedig $\rho_0 g(H - h) + (\rho_0 + \Delta\rho)gh$. A különbség $g\Delta\rho h$ -val egyenlő. Ebből

$$U^2 = 2g'h. \quad (5.83)$$

Ez tehát a front pillanatnyi sebessége és vastagsága közötti kapcsolat. A front terjedési sebessége nagyobb az ugyanolyan átlagos mélységű réteg határán terjedő belső gravitációs hullámok $\sqrt{g'h}$ sebességénél, belső Froude-száma $Fr' = \sqrt{2}$.

Eddig feltételeztük, hogy a két különböző sűrűségű közeget elválasztó felület a mozgás során élesen definiált marad. A valóságban a gravitációs áramlat elején erős keveredés történik a két közeg között. A gravitációs áramlások elején ezért a hátsó h rétegvastagságnál valamivel magasabb 'fej' alakul ki (5.32b, 5.33 ábra), melynek hossza a rétegvastagságnak csak néhányszorosa. Ennek elején a határfelület még éles és sima, de a jelentős sebességkülönbség miatt instabillá válik. A gyorsan áramló folyadékrétegek között mindig fellépő Kelvin-Helmholtz-instabilitás (l. 5.16 fejezet) miatt a fej felső határán az elválasztó felület begyűrődik, benne jellegzetes örvények alakulnak ki, melyek távolsága és kiterjedése összemérhető a fej vastagságával. Az egész folyamat tehát bonyolultabb annál, hogy a redukált sekélyfolyadék-modell minden részletében helyesen írhasse le.

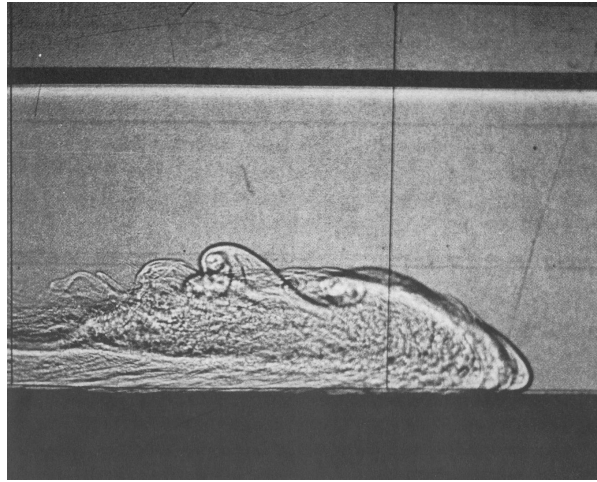
A keveredés és a véges H teljes folyadékmélység figyelembevételével a h vastagságú gravitációs áramlat sebessége írható mint

$$U = \sqrt{g'h} f \left(\frac{h}{H} \right), \quad (5.84)$$

ahol f csak a h/H mélységi arány függvénye. A mérések szerint az f értéke eltűnő mélységi arányra közel van $\sqrt{2}$ -höz, s h/H -val enyhén csökken.

Elegendően kis viszkozitás, vagyis nagy Uh/ν Reynolds-szám mellett az áramlási sebesség nem függ a viszkozitástól. A felületre vonatkozó tapadási peremfeltétel miatt viszont az áramlat

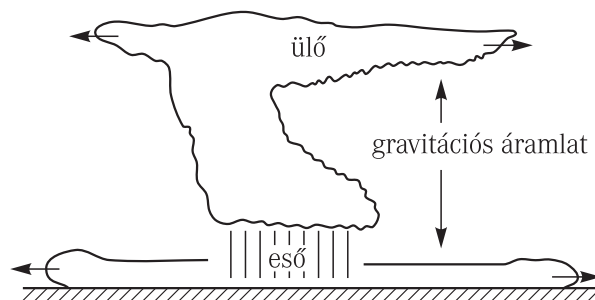
egy alsó határrétegen siklik, s ezért jól megfigyelhető, hogy a fej kissé felemelkedik, a sűrű közeg legelől levő pontja nem az aljzaton, hanem valamivel fölötte helyezkedik el.



5.33 ábra: Laboratóriumban létrehozott gravitációs áramlat feje. A felső fekete sáv a könnyű folyadék felszíne.

A gravitációs áramlatokkal kapcsolatos jelenségek sora igen hosszú. Kezdve az olyan hétköznapi folyamatokkal, mint a hideg levegő szobába történő beáramlása, a bányafolyosókban a metán (bányalég), a tenger felszínén az olajszenyezés szétterjedéséig, számos természeti jelenséggel kapcsolatos.

A légkörben minden lokalizált lehűlés hideg áramlatokat okoz. A jól ismert parti vagy tavi, tengeri szeleken kívül ilyen a nagy zivatarok előszele, a kifutó szél. A zivatarfelhőkben kialakuló eső hideg levegő leáramlását okozza, mely a Föld felszínére kerülve gravitációs áramlat formájában terül szét (5.34 ábra). A hideg szeleket a felkavart por vagy homok teheti láthatóvá (5.35 ábra). Mivel a 6 fokos hőmérsékletkülönbség a hőtágulás miatt (l. 14.1 táblázat) mintegy 2 százalékos sűrűségkülönbségnek felel meg, s az ilyen kifutó áramlás vastagsága kb. 1 km, a front (5.83) sebessége $U = \sqrt{2g'h} = \sqrt{400} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$ (több, mint 70 km/h). Ugyanakkor a zivatarfelhőben feláramló meleg levegő a troposzféra felső határát alkotó tropopauzába ütközik, s annak mentén folyik szét. Mivel itt már kicsapódás történik, ez a gravitációs áramlat jól látható a viharfelhő mozgó üllőjeként (5.34 ábra).



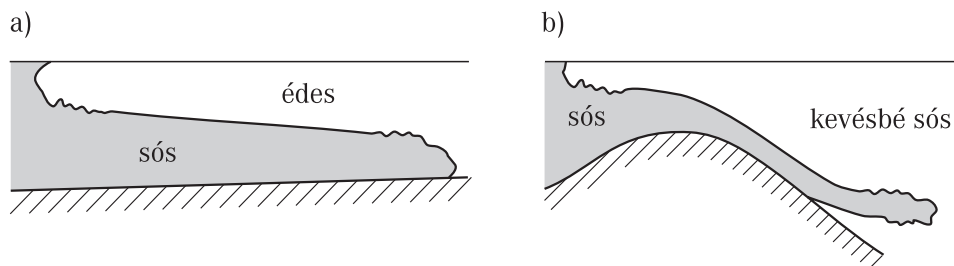
5.34 ábra: A zivatar előszele és a felhő üllőjének mozgása is gravitációs áramlat.

A folyótorkolatok előtti sekély vizekben a dagálllyal érkező sós tengervíz hoz létre alul sós gravitációs áramlatot, mellyel a felszínen kiáramló édesvízű front társul (5.36a ábra). A sós tengerek vize is gravitációs áramlatokon keresztül jut el a hígabb óceánokba. Így pl a Földközi-tenger vize gravitációs áramlatot alkotva jut a Gibraltári-szoroson át az Atlanti-óceán közepes



5.35 ábra: A kifutó szél által felkavart por kirajzolja a gravitációs áramlat hideg levegőjét [www.usgcrp.gov/usgcrp/images/duststorm.jpg; www.damtp.cam.ac.uk/user/fdl/people/jes14/].

vízrétegeibe (5.36b ábra), míg a felszínen az óceáni víz áramlik a tenger felé. Ha ez az áramlás eléggé erős, undulált bore-t hoz létre maga előtt, melynek nemlineáris gravitációs hullámai megfigyelhetők (l. 5.31 ábra). A tengerekben kialakuló gravitációs áramlatok tipikus sebessége m/s körüli.



5.36 ábra: Gravitációs áramlatok tengerben. a) A dagály érkezésekor sós víz áramlik a torkolati területek alsó rétegeiben és ez felső édesvízi gravitációs áramlatot is indít. b) A különböző sókoncentrációjú tengerek vízcseréje is gravitációs áramlatok formájában zajlik szorosokon keresztül. A felszínen könnyebb tengervíz folytonosan rétegzett, ezért a gravitációs áramlat csak saját sűrűségének eléréséig süllyed.

Gravitációs áramlat a lavina is, melyben a levegővel keveredett hó jelenti a mozgó közeget. Kevésbé nyilvánvaló, de gravitációs áramlatnak tekinthető számos kőomlás, földcsuszamlás, a visszahulló vulkáni hamu mozgása, vagy a lávafolyás is. Bár az eredeti közegek nem folyadékok, ha valamilyen erős kezdeti hatás (pl. földrengés) miatt mozgásba lendülnek, a mozgás során fölhígulnak, *fluidizálódnak*. A mozgó kődarabok egyre erősebben ütköznek egymással, s emiatt egyre távolabbra kerülnek, a rendszer egyre hígabb lesz. Lávafolyás közben pedig a magas hőmérséklet miatt gázok szabadulnak fel a talajból, s ez lazítja a mozgó közeget. Természetesen ilyenkor a közeg sűrűsége mellett a levegő elhanyagolható, s ezért $g' \approx g$. Ez már 10m-es közegvastagság esetén is $U = 10$ m/s-os sebességre vezet.

5.15 Belső szolitonok

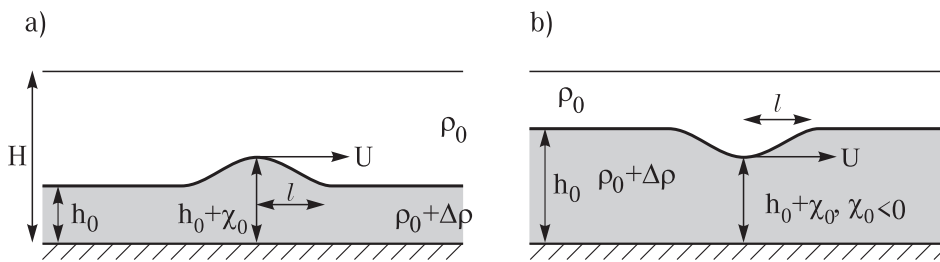
Két különböző sűrűségű réteg határfelületén kialakulhatnak kidudorodások vagy behorpadások, melyek alakjukat megtartva a sekély folyadék dinamikának megfelelő c_1 belső hullám sebességénél

gyorsabban terjednek, s a sebesség *függ* a kidudorodás nagyságától¹¹.

Elhanyagolható külső felszíni változások esetén a H_1 és H_2 átlagos vastagságú rétegek határán a pozitív x irányban haladó, χ_0 amplitudójú belső szoliton (5.37 ábra) sebessége

$$U = c_1 \left(1 + \frac{\chi_0}{2} \frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right), \quad (5.85)$$

ahol c_1 a sekély folyadékbeli belső hullám (5.66) sebessége. Az elmélet szerint az χ_0 amplitudónak mindkét rétegvastagságnál jóval kisebbnek kell lennie. Vegyük észre, hogy a sűrűségkülönbség csak a c_1 belső hullám sebességen keresztül jelenik meg. A szolitonok mindig gyorsabbak a lineáris hullámoknál: $U > c_1$. A fenti képlet így azt mutatja, hogy vastag alsó réteg, $H_2 > H_1$ esetén az amplitudónak negatívnak kell lennie. Ilyenkor tehát a szoliton a réteghatár *lefelé* történő elmozdulásával jár (5.37b ábra). A belső szoliton mindig a keskenyebb réteg lokális megvastagodása.



5.37 ábra: A belső szoliton az elválasztó felület kidudorodásával jár. Ez felfelé történik, ha az alsó réteg keskenyebb a felsőnél (a), és lefelé, ha az alsó réteg vastagabb (b).

A szoliton l félszélessége is amplitudófüggő az

$$l^2 = \frac{4}{3} \frac{H_1^2 H_2^2}{\chi_0 (H_1 - H_2)} \quad (5.86)$$

összefüggés szerint¹². A szoliton $2l$ 'hullámhossza' általában nagyobb a rétegvastagságoknál. A folyadék sebessége csak a szoliton kiterjedésének megfelelő tartományban tér el lényegesen zérustól. Ott egy rétegen belül azonos irányú, de a két rétegben ellentett előjelű¹³¹⁴.

A nagyon keskeny alsó réteg, $h_0 \equiv H_2 \ll H$, határesetében, mely a redukált sekélyfolyadékmodell analogonja, (5.85), (5.86)-ból

$$U = c_1 \left(1 + \frac{\chi_0}{2h_0} \right), \quad (5.87)$$

¹¹Hasonlóan a külső felszíni szolitonokhoz, l. 2.10 fejezet.

¹²Az egyforma rétegvastagságot jelentő $H_1 = H_2 = H/2$ esetben szoliton a fenti képletek szerint nem létezik az eddig használt Boussinesq-közelítésben, ahol mindent csak a sűrűségkülönbségben vezető rendig határozunk meg. A részletes elemzés szerint ilyenkor a c_1 -hez adódó korrekció a sűrűségkülönbséggel arányos, l^2 pedig ennek reciprokával. $(U - c_1)$ és l tehát véges, szoliton létezik, de jóval lassabb és szélesebb, mint az eltérő rétegvastagsághoz tartozók.

¹³A χ belső felszíni alak kielégíti a (9.17) KdV-egyenletet a $c_0 \rightarrow c_1, 3c_0/(2H) \rightarrow 3c_1(H_1 - H_2)/(2H_1 H_2), c_0 H^2/6 \rightarrow c_1 H_1 H_2/6$ helyettesítéssel. A szoliton-megoldás: $\chi(x, t) = \chi_0 / \text{ch}^2 [(x - Ut)/l]$, a sebességek $u_1 = -c_1 \chi / H_1$ és $u_2 = c_1 \chi / H_2$, a felszíni alak pedig $\eta = -\chi \Delta \rho / \rho_0$.

¹⁴Az egyforma rétegvastagságot jelentő $H_1 = H_2 = H/2$ esetben szoliton a fenti képletek szerint nem létezik az eddig használt Boussinesq-közelítésben, ahol mindent csak a sűrűségkülönbségben vezető rendig határozunk meg. A részletes elemzés szerint ilyenkor a c_1 -hez adódó korrekció a sűrűségkülönbséggel arányos, l^2 pedig ennek reciprokával. $(U - c_1)$ és l tehát véges, szoliton létezik, de jóval lassabb és szélesebb, mint az eltérő rétegvastagsághoz tartozók.

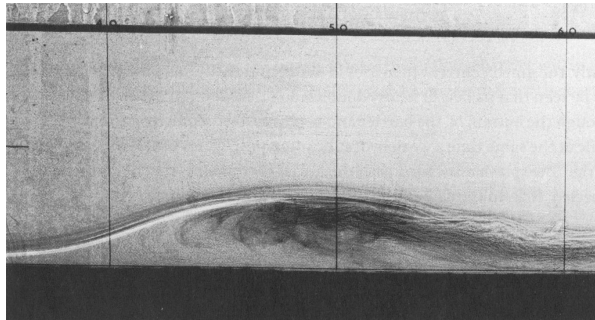
$$l^2 = \frac{4}{3} \frac{h_0^3}{\chi_0} \frac{H}{h_0}. \quad (5.88)$$

A terjedési sebesség ugyanúgy függ az alsó réteg vastagságától, mint szabad felszíni társáé a teljes mélységtől, de most a belső hullámok $c_1 = \sqrt{g'h_0}$ sebességével arányos (l. 2.10 fejezet).

A légkörben a hideg áramlások hegyekről való visszaverődése vezethet belső szolitonokhoz. A tengeri belső szolitonokat domborzati egyenetlenségek és az árapály hatás gerjeszthetik a termoklin zónában. Amplitudójuk néhányszor 10 m is lehet, sebességük m/s nagyságrendű, hosszuk a több 10 km-t is elérheti.

Érdemes röviden összehasonlítani az eddig tárgyalt nemlineáris jelenségeket a kis amplitudójú belső hullámokkal. A legszembetűnőbb különbség, hogy míg a lineáris hullámban a sebességtér periodikus, s ezért azt nem kíséri anyagáram csak energiaáram, addig *a nemlineáris hullámok jelentős folyadékmozdulással járnak*. Ez fejeződik ki abban, hogy U átlagsebességük véges, sőt nagyobb a belső hullámok terjedési sebességénél (szuperkritikusak, belső Froude-számuk 1-nél nagyobb). A belső bore és a gravitációs áramlatok esetén kiterjedt tartományokban zajlik az anyagmozgás, a belső szoliton által okozott viszont a szoliton $2l$ méretére korlátozódik.

A vizsgált nemlineáris jelenségek egymáshoz is kapcsolódhatnak. Ha a nemlineáris effektusok lényegesebbek a diszperzióból adódóknál, akkor gravitációs áramlat vagy bore alakul ki. A gravitációs áramlat maga is létrehozhat belső bore-t abban a közegben, melybe behatol. Ha bármelyikük akadálynak ütközik, energiájuk csökken, s a nemlineáris és diszperziós hatás összemérhetővé válhat. Ha így van, a visszaverődött hullám belső szoliton alakjában mozog a két eltérő sűrűségű közeg határán. Laboratóriumban is könnyen lehet belső szoliton kelteni gravitációs áramlat fallal történő ütköztetése révén (5.38 ábra).



5.38 ábra: Belső szoliton laboratóriumban egy gravitációs áramlat falon történő visszaverődése után alakul ki.

5.16 Kelvin–Helmholtz-(KH)-instabilitás

5.16.1 Szemléletes kép

Tekintsünk két kissé eltérő sűrűségű, egymás felett elhelyezkedő vastag folyadékréteget, melyek egymáshoz képest ΔU relatív sebességgel áramolnak a vízszintes síkban. Legyen az alsó közeg sűrűbb és tegyük fel, hogy kiinduláskor az elválasztó felületük sík. Vizsgáljuk meg, hogy a felület kis deformáció után a kezdeti állapota felé indul vissza, vagy éppen távolodik tőle, vagyis a sík elválasztó felület stabil-e. Az, hogy a kimozdított felület milyen irányban mozdul el, függhet a deformáció hullámhosszától. Ha csak egyetlen hullámhossz is létezik, melyre távolodás történik, akkor a felület már instabil.

Mivel $\Delta \rho$ véges (ha kicsi is), a ΔU relatív sebesség megszűnésekor instabilitás nem léphet fel, hiszen a sztratifikáció stabil. Véges sebességkülönbség esetén csak valamilyen λ_c kritikus hul-

lámhosszú, vagy annál rövidebb zavarok válhatnak instabillá, s λ_c -nek ΔU csökkenésével egyre kisebbnek kell lennie. Amíg a folyadékréteg H vastagsága sokkal nagyobb a kritikus hullámhossznál, a probléma legfontosabb hosszúságjellegű paramétere λ_c . Az instabilitás szempontjából nyilván lényeges a g' redukált gyorsulás is. A ΔU , g' és λ_c mennyiségekből csak egy dimenziótlanszám alkotható, az

$$\frac{(\Delta U)^2}{g' \lambda_c} \quad (5.89)$$

kritikus hullámhosszal képzett belső Froude-szám. Ezt egységnyinek tételezve azt kapjuk, hogy λ_c arányos $(\Delta U)^2/g'$ -vel.

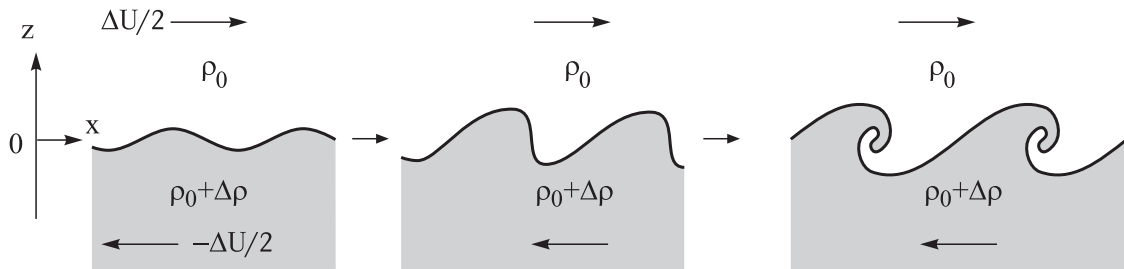
Az instabilitás tehát olyan λ hullámhosszú zavarokra áll fenn, melyek rövidebbek a kritikus hullámhossznál, tehát amelyekre

$$\lambda < \lambda_c \equiv C \frac{(\Delta U)^2}{g'}. \quad (5.90)$$

Itt C egy dimenziótlanszám, mely enyhén függhet a H vastagságtól az $Fr' = \Delta U / \sqrt{g'H}$ hagyományos belső Froude-számon keresztül. Mély közegben, amikor $Fr' \rightarrow 0$, a C konstans π -nek adódik (l. következő alfejezet). A kritikus hullámhossz a légkörre jellemző 10 m/s-os sebességkülönbséggel és tízszeres redukcióval $\lambda_c = 300$ m, éppúgy, mint $\Delta U = 1$ m/s sebességkülönbség és a tengerben gyakori ezerszeres redukció esetén.

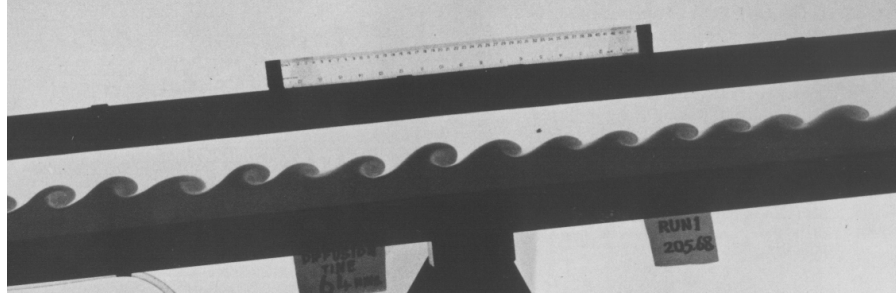
Véges sebességkülönbség esetén tehát mindig létezik olyan elegendően rövid hullámhosszú perturbáció, melyre nézve a sima felület instabil. Első leírójukról ezt a jelenséget Kelvin-Helmholtz-instabilitásnak nevezzük. A különböző vízszintes áramlásokat elválasztó felületek tehát nem maradnak simák. Vegyük észre, hogy ez azonos sűrűségű ($g' = 0$) rétegekre méginkább igaz, ott ugyanis semmilyen hullámhosszú perturbáció sem stabil. A sűrűségkülönbség tehát valamelyest stabilizálja a helyzetet, de csak nagy hullámhosszakra.

Az instabillá vált felület először valamilyen $\lambda < \lambda_c$ hullámhosszal egyre nagyobb amplitudójú kitérést mutat, de előbb-utóbb elhagyjuk a lineáris viselkedés tartományát, s a felületi alak már nem írható le szinuszfüggvénnyel. A tapasztalat szerint a határfelület begyűrődik, és a megtörő felszíni hullámokhoz (pl. tengerhullámokhoz) hasonló alakot rajzol ki meglepő szabályossággal. A folyamatot a sematikus 5.39 ábra szemlélteti. A nemlineáris hullám amplitudója összemérhető a hullámhosszal, s a végállapotban egy λ -val arányos vastagságú réteg válik kevert sűrűségűvé.



5.39 ábra: A két folyadékot elválasztó felület időfejlődése a relatív sebességkülönbség hatására kialakuló Kelvin-Helmholtz-instabilitás következtében. A megfigyelt periodicitás a λ_c kritikus hullámhossz nagyságrendjébe esik.

Az instabilitás két, kezdetben vízszintesen elhelyezkedő egymásra rétegzett folyadékréteg tartályának megdöntésével laboratóriumban is jól tanulmányozható (5.40 ábra). Ha az elválasztó felület a kicsapódási zónában van, akkor a Kelvin-Helmholtz-mintázat felhőképekben is kirajzolódik (5.41 ábra), s az ún. hullámfelhők (billow clouds) kialakulásához vezet.



5.40 ábra: Kelvin–Helmholtz-instabilitás létrehozható egy kétrétegű folyadékot tartalmazó edény megdöntésével [Van Dyke].



5.41 ábra: Kelvin–Helmholtz-felhők két egymáshoz képest mozgó légréteg határán [www.atmos.washington.edu/atlas/IMG.32.jpg].

5.16.2 Lineáris stabilitásvizsgálat

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindkét folyadékréteg nagyon vastag, s legyen az elválasztófelület a $z = 0$ sík. Válasszuk az alsó, $\varrho_0 + \Delta\varrho$ sűrűségű közeget negatív irányban mozgóknak. Átlagsebessége legyen $-U \equiv -\Delta U/2 < 0$. A felette elhelyezkedő ϱ_0 sűrűségű folyadék mozogjon az $U \equiv \Delta U/2$ átlagsebességgel a pozitív irányba. Ez azt jelenti, előírjuk, hogy a vízszintes sebességkomponens nagy negatív (pozitív) z értékekre $-U$ -hoz (U -hoz) tartson. Tegyük fel, hogy a kialakuló áramlás az y irányban eltolásinvariáns. Jelölje az elválasztó felület pillanatnyi alakját a $\chi(x, t)$ függvény.

Bevezetjük a hidrosztatikus nyomáselosztástól való eltérést megadó p' nyomásingadozást. A teljes nyomás tehát írható mint

$$p = p_0 - \varrho_0 g z + p' \quad \text{ha } z > \chi, \quad (5.91)$$

és

$$p = p_0 - \varrho_0 g \chi - (\varrho_0 + \Delta\varrho)g(z - \chi) + p' = p_0 + \Delta\varrho g \chi - (\varrho_0 + \Delta\varrho)g z + p' \quad (5.92)$$

egyébként. Az Euler-egyenlet az alsó közegben

$$\frac{du_2}{dt} = -g' \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (5.93)$$

ahol g' az (5.6) redukált gravitációs gyorsulás. A felső folyadékrétegre ugyanez az egyenlet a felületi alak deriváltja nélkül érvényes (g' formálisan eltűnik). Az áramlás az (x, z) síkban összenyomhatatlan, ezért mindkét közegben létezik egy $\psi_i(x, z, t)$ áramlási függvény, mellyel $u_i =$

$-\partial\psi_i/\partial z$ és $w_i = \partial\psi_i/\partial x$, $i = 1, 2$. Feltehetjük, hogy az áramlás örvénymentes is, hiszen mindkét közeg homogén, s így y irányú forgatónyomaték nem hat a folyadékelemekre. Ezért ψ_i -nek ki kell elégítenie a Laplace-egyenletet, hiszen az örvényesség y komponense $\partial u_i/\partial z - \partial w_i/\partial x = 0$. Így

$$\Delta\psi_i = 0 \quad i = 1, 2. \quad (5.94)$$

Tekintsük most mindkét közegben a háttérsebességtől való eltérést leíró ψ'_i áramlási függvényeket, melyekre

$$\psi_1 = -Uz + \psi'_1, \quad \psi_2 = Uz + \psi'_2. \quad (5.95)$$

Kis eltérések esetén mind ψ'_1 -et, mind ψ'_2 -t az $\exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_z z)$ alakban keresve, a Laplace-egyenlet a $k_x^2 + k_z^2 = 0$ megszorítást jelenti. Mivel x irányban hullámalakot tételezünk fel, k_x -et valósnak (sőt pozitívnak) választjuk, de ekkor

$$k_z = \pm ik_x \quad (5.96)$$

imaginárius. Ez a függőleges irányban exponenciális változást jelent a k_x lecsengési rátával. A végtelenbe tartó megoldás kizárásával a felső közegben a negatív, az alsóban a pozitív előjelet tartjuk meg:

$$\psi'_1 = \psi_{10} e^{i\omega_0 t - ik_x x - k_x z}, \quad \psi'_2 = \psi_{20} e^{i\omega_0 t - ik_x x + k_x z}. \quad (5.97)$$

A sebességtér tehát exponenciális gyorsasággal tart a homogén áramláshoz.

A diszperziós reláció az elválasztó felületre vonatkozó határfeltételekből adódik. A függőleges áramlási sebesség a határ mindkét oldalán úgy írható, mint az elválasztó felület teljes deriváltja: $w_1 = \partial\chi/\partial t + u_1\partial\chi/\partial x$, és $w_2 = \partial\chi/\partial t + u_2\partial\chi/\partial x$. Az $u_1 = U$, $u_2 = -U$ sebességű homogén áramlás körül linearizálva:

$$w_1 = \frac{\partial\chi}{\partial t} + U\frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad \text{ill.} \quad w_2 = \frac{\partial\chi}{\partial t} - U\frac{\partial\chi}{\partial x}. \quad (5.98)$$

A feláramlási sebességek tehát eltérnek a felület két oldalán, hiszen a háttéráramlás is ad járulékot ott, ahol a felület nem vízszintes. A megoldást a $\chi(x, t) = \chi_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban keresve és a függőleges sebességet az áramlási függvénnyel $w_i = \partial\psi'_i/\partial x$ szerint kifejezve (5.98)-ból a

$$-k_x\psi_{10} = (\omega_0 - Uk_x)\chi_0 \quad \text{ill.} \quad -k_x\psi_{20} = (\omega_0 + Uk_x)\chi_0 \quad (5.99)$$

összefüggést kapjuk.

A $\partial p'/\partial x$ vízszintes nyomásgradiens folytonosságából a felületen (5.93) alapján fenn kell állnia a

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + g' \frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (5.100)$$

megszorításnak. Ennek linearizált változata a ψ'_i áramlási függvényekkel:

$$-\frac{\partial^2\psi'_2}{\partial t\partial z} + U\frac{\partial^2\psi'_2}{\partial x\partial z} + g' \frac{\partial\chi}{\partial x} = -\frac{\partial^2\psi'_1}{\partial t\partial z} - U\frac{\partial^2\psi'_1}{\partial x\partial z}. \quad (5.101)$$

A ψ'_i -kre vonatkozó (5.97) alakok behelyettesítésével:

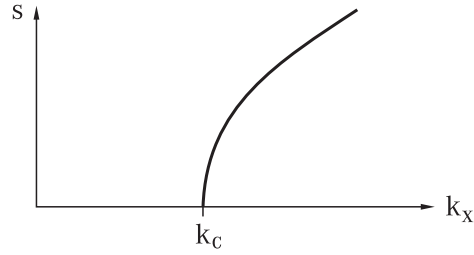
$$-(\omega_0 + Uk_x)k_x\psi_{20} - g'k_x\chi_0 = (\omega_0 - Uk_x)k_x\psi_{10}. \quad (5.102)$$

(5.99) alapján az

$$(\omega_0 + Uk_x)^2 + (\omega_0 - Uk_x)^2 - g'k_x = 0 \quad (5.103)$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ebből

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{g'}{2}k_x - U^2k_x^2}. \quad (5.104)$$



5.42 ábra: A k_x hullámszámú perturbáció instabilitási exponense a Kelvin–Helmholtz-instabilitásban. A k_c kritikuskál kisebb hullámszámú perturbációk stabilak, instabilitási exponensük nem értelmezett.

Amikor mindkét közeg nyugalomban van, azaz $U = 0$, a frekvencia valós: $\omega_0 = \pm\sqrt{(g'/2)k_x}$ ¹⁵. Véges U áramlási sebességekre a frekvencia sohasem valós minden hullámszámra. A

$$k_c = \frac{g'}{2U^2} \quad (5.105)$$

hullámszámnál nagyobbak esetén

$$\omega_0 = \pm is. \quad (5.106)$$

Az

$$s = \sqrt{U^2 k_x^2 - g' k_x / 2} = \sqrt{g' k_x (k_x / k_c - 1) / 2} \quad (5.107)$$

mennyiség neve *instabilitási exponens*, mert a $k_x > k_c$ tartományban az $\exp(i\omega_0 t) = \exp(\mp st)$ faktorok közül a pozitív előjelű exponenciálisan növekvő időfüggést ír le (l. 5.42 ábra). A kritikus hullámhossz $\lambda_c = 2\pi/k_c = \pi(\Delta U)^2/g' = 4\pi U^2/g'$. Az (5.90)-ben fellépő együttható tehát $C = \pi$.

Csakis a k_c -nél kisebb hullámszámú, azaz a λ_c -nél nagyobb hullámhosszú perturbációk stabilak.

Az instabilitási exponens a kétszeres kritikus hullámszám, $k_x = 2k_c$ esetén $s = g'/(\sqrt{2}U)$, mely arányos $\Delta U/\lambda_c$ -vel. A harmonikus hullámalak gyorsan megszűnik, hiszen az amplitúdója annyi idő alatt, amíg a két rétegben levő részecskék a kritikus hullámszámnak megfelelő távolságra kerülnek, már e -szeresére nő.

5.17 Termikus konvekció

Az eddig tárgyalt jelenségekben a hőmérséklet passzív szerepet játszott, mintegy a sűrűséggel vándorolt megmaradó mennyiségként. A kisskálájú jelenségekben azonban a hővezetés jelentős. A hőmérsékletre vonatkozó egyenlet a

$$\frac{dT''}{dt} = \kappa \Delta T'' \quad (5.108)$$

hődiffúziós egyenlet. Itt T'' a T_0 referenciahőmérséklettől való eltérés. Ezzel megjelent egy új paraméter, a κ hődiffúziós állandó, mely új dimenziótlan szám(ok)kal is együttjár. Homogén anyagi összetételű közegben a $\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ állapotegyenlet értelmében (α a hőtágulási együttható)

$$\varrho'' = -\alpha \varrho_0 T''. \quad (5.109)$$

¹⁵Ez a két mély folyadékréteg határán kialakuló belső hullám diszperziós relációja. A hullám, szemben a sekély rétegek között kialakuló társával diszperzív.

A hővezetési egyenlet ekkor tehát a (5.12) sűrűségegyenlet általánosítását jelenti. Mivel a hővezetés alapvető eltérést jelent az ideális folyadék leírásától, melyben csak adiabatikus folyamatok létezhetnek, a hővezetés mindig disszipációval, viszkozitással párosul.

Az egyik legfontosabb új jelenség a konvekció, az alulról történő egyenletes melegítés hatására kialakuló áramlás. Az áramlás jellegzetes vízszintes síkbeli lineáris mérete ekkor mindig összemérhető a folyadék H mélységével. Az (5.108) egyenlet szerint a jellegzetes U sebességet a hődiffúzió szabja meg. Abból a tényből, hogy a $(\mathbf{vgrad})T$ és a $\kappa\Delta T$ tagok összemérhetők, a sebesség nagyságrendje $U = \kappa/H$. A sebesség tehát nem szabad paraméter, mint eddig, mert most az áramlást a hővezetés váltja ki. A konvekciót jellemző legfontosabb dimenziótlan szám a Rayleigh-szám

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T H^3}{\nu\kappa}, \quad (5.110)$$

ahol ΔT a T'' eltérés jellegzetes értéke, pl. a folyadék alja és teteje közötti hőmérsékletkülönbség. Ez a szám nem más, mint a $g\alpha\Delta T$ felhajtóerő viszonya a $\nu U/H^2 = \nu\kappa/H^3$ viszkózus erőhöz:

$$Ra = \frac{\text{felhajtóerő}}{\text{viszkózus erő}}. \quad (5.111)$$

Áramlás nyilván akkor indul be, ha a felhajtóerő, azaz a hőmérsékletkülönbség elég nagy, vagyis, ha Ra nagyobb egy Ra_c kritikus értéknél. Az áramlás nélküli állapot tehát

$$Ra > Ra_c. \quad (5.112)$$

esetén instabil.

A Rayleigh-szám definíciójában a ΔT hőmérsékletkülönbség akkor pozitív, ha a kívülről előírt hőmérséklet az edény alján nagyobb mint a tetején. A hőmérséklet felfelé csökken az áramlásmentes állapotban is, az ehhez tartozó $\bar{\rho}(z)$ sűrűség pedig *növekszik* a magassággal. Vegyük észre, hogy az ilyen sztratifikáció hővezetés nélkül instabil, a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete negatív! A hődiffúzió képes *stabilizálni* olyan rétegzettséget is, mely anélkül már régen felbomlana. Ez a stabilizálódás azonban nem terjedhet minden határon túl, és a kritikus Rayleigh-szám éppen azt fejezi ki, hogy a felhajtóerő mikor győzi le a hődiffúzió stanilizáló hatását.

A kritikus Rayleigh-szám értéke függ a geometriai elrendezéstől és a peremfeltételektől. Vízszintes síklapokkal lezárt tartomány esetén $Ra_c = 1708$. A kritikus Rayleigh-számnál a λ_c kritikus hullámhossz válik instabillá, melynek tipikus értéke

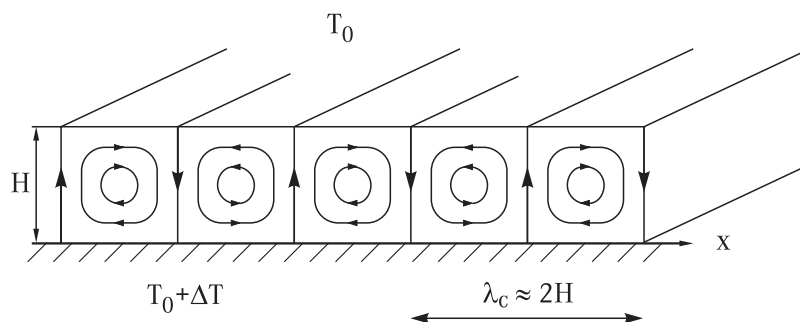
$$\lambda_c \approx 2H, \quad (5.113)$$

azaz a félhullámhossz egyezik meg a folyadékmélységgel.

A közvetlenül az Ra_c fölött kialakuló új stabil állapot egy időtől független, de térben valamilyen periodicitást mutató stacionárius áramlás. Az áramlás cellás szerkezetű, melynek periodicitását az instabillá vált kritikus hullámhossz határozza meg. Amennyiben az elrendezés egy irányban eltolásinvariáns, az áramlás szemben forgó hengerek kialakulására vezet (5.43 ábra), melyek között felváltva fel- és leszálló áramlási zónák helyezkednek el. Kevésbé szabályos peremek esetén általában hatszöges áramlási cellák alakulnak ki, melyekben pl. középen történik feláramlás, a hatszög oldalai mentén pedig leáramlás.

A kritikus Rayleigh-szám néhányszorosának megfelelő fűtés esetén egyre bonyolultabb és már időfüggő áramlások jönnek létre, melyek karakterisztikus mérete eltérhet a λ_c hullámhossztól. A feláramlás tipikus sebessége abból becsülhető meg, hogy az $\alpha g\Delta T$ felhajtóerőt a $\nu W/H^2$ viszkózus erő lényegében kompenzálja, melyből:

$$W = \frac{\alpha g\Delta T H^2}{\nu}. \quad (5.114)$$



5.43 ábra: Stacionárius konvekciós áramlás. Közvetlenül a kritikus hőmérséklet-különbség (kritikus Rayleigh-szám) elérése után szabályos, hengeres áramlási cellák alakulnak ki, ha a geometria y irányban eltolásinvariáns.

A WH/κ dimenziótlán feláramlási sebesség tehát a Rayleigh-számmal arányos. A feláramlás sokkal gyorsabb, mint a hődiffúzió jellegzetes κ/H sebessége, a konvekció tehát jóval hatékonyabb transzportfolyamat, mint a hővezetés.

Nagyon nagy Rayleigh-számok mellett az áramlás a peremfeltételtől is függetlenül szabálytalaná, turbulenssé válik. Ilyenkor a viszkozitás már nem meghatározó paraméter. A feláramlás átlagos sebességét a folyadék rétegen átfolyó hőáram határozza meg.

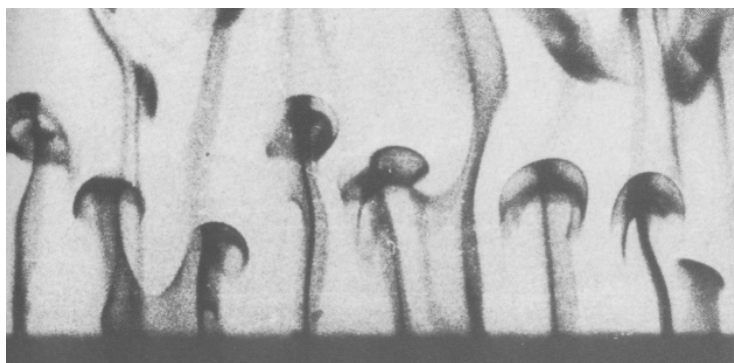
A légköri és óceáni tipikus értékekkel számolt Rayleigh-számok jóval nagyobbak Ra_c -nél. Mivel $\kappa_{viz} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, $\kappa_{lev} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (l. 14.1 táblázat) és a H rétegvastagság a harmadik hatványon jelenik meg, Ra értéke meghaladja a 10^{15} értéket. Mindössze egy fok különbséggel számolva, a planetáris határrétegben ($H = 1 \text{ km}$) $Ra = 10^{17}$, az óceáni keveredési rétegben ($H = 100 \text{ m}$) pedig¹⁶ $Ra = 10^{16}$. Az Ra_c értéknél kialakuló első instabilitást azért nem tárgyaljuk részletesebben, mert környezeti áramlásokban jelentősége csekély.

A természetes közegek tipikus konvekciója a szabályostól erősen eltér, hiszen a Rayleigh-szám sok nagyságrenddel meghaladja a kritikusat. A jellegzetes folyamat a *termikek* kialakulása, melyek laboratóriumban is jól tanulmányozhatók (5.44 ábra). A felmelegedett folyadékcsomagok véletlenszerűen szakadnak el az alsó peremtől (5.45a ábra). Az egész áramlás a szabályos hatszöges áramlás térben és időben is szabálytalaná vált esetének tekinthető. A felszálló meleg közeg peremén örvényesség keletkezik, ezért a termikek sebességtere hasonlít egy felfelé mozgó örvénygyűrűjéhez (5.45b ábra), hőmérsékleteloszlásuk pedig gombaszerű (5.45c ábra). Az áramlás a peremen erősen turbulenssé válik. A kicsapódási szintet elérve a légköri termikek alakja kirajzolódik a gomolyfelhők képében. A termikek mellett leszálló mozgás történik, s rendezetlen, turbulens áramlási rendszer alakul ki.

A légköri termikek alakja a kicsapódási szint elérése után a gomolyfelhők képében rajzolódik ki. A termikek által dominált turbulens keveredés vezet a planetáris határréteg jó keveredéséhez (l. 7.5, 7.6 fejezet). A termikek legerősebb változata a nagy zivatarfelhők kialakulásához vezető gyors konvekciós feláramlás, melyet a vízpára kicsapódásakor felszabaduló hő még gyorsít is. Az ilyen termikek szélessége 10 km is lehet, feláramlási sebességük néhány m/s, s feljuthatnak a troposzféra tetejéig.

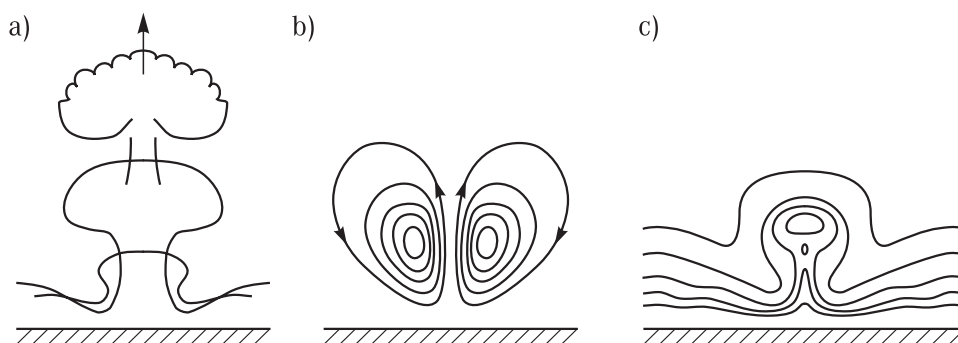
A természetes vizek konvekcióját általában az éjjeli vagy az őszi-téli felszíni hűtés váltja ki. Az édesvízi tavakban őszi kialakuló turbulens konvekció a víz hőmérsékletének homogénizálásához vezet. A 4 fokos hőmérséklet elérése után már csak a felszín hűl tovább, mert

¹⁶A nagyon nagy Rayleigh-szám ellenére a légkörben időnként mégis megfigyelhető hengeres áramlás. Stabilizálódásában ezért konvekción kívüli tényezőknek (pl. a szélnek) is szerepet kell játszania. A reggeli órákban a gyorsan melegedő talaj az alsó légréteget fűti, s a sík felszín fölött valóban kialakulhat az 5.43 ábrán mutatotthoz hasonló jellegű áramlás. A felszálló övekben a levegő elérheti a kicsapódási szintet, mely párhuzamos felhősávok megjelenésére vezet.



5.44 ábra: Meleg termikek felszállása alulról melegített közegben.

a víz 4 fokon a legsűrűbb. A rétegződés stabil, mert 4 fok alatt a hőtágulási együttható már negatív. Ez az anomális viselkedés az oka annak, hogy a tavak nem fagynak be teljes mélységükben, s annak is, hogy a tavaszi felszíni melegedés képes konvekciót beindítani ($\alpha, \Delta T < 0$, de $Ra > 0$). A tengerek felszínén télen a sós víz $-1,7$ fokos is lehet, a 100 m körüli mélységben viszont $+(1-2)$ fok, s ez turbulens konvekcióhoz vezet. A sarkok közeli tengereken a levegő és a víz közötti hőmérsékletkülönbség igen erős felfelé irányuló hőáramot vált ki, mellyel 10 cm/s körüli feláramlás társul.



5.45 ábra: Termik szerkezete. a) A felszállás három fázisa (a vonal a hideg-meleg határfelületet mutatja). b) Áramvonalak az (x, z) síkmetszeten. c) Izotermák az (x, z) síkmetszeten.

A konvekció fontos szerepet játszik a Föld mintegy 3000 km mélységig terjedő köpenyében. A köpeny szilárd anyaga igen hosszú időskálán folyadékként viselkedik. E folyadék természetesen igen erősen sűrűdő: viszkozitási együtthatója $\nu = 10^{17}$ m²/s-mal becsülhető¹⁷. A hőtágulási és a hővezetési együttható a nem fémes szilárd anyagokénak megfelelő $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ 1/fok és $\kappa = 10^{-6}$ m²/s. A Rayleigh-szám $H = 3000$ km-es vastagsággal és 2000 fok hőmérsékletkülönbséggel számolva $Ra \approx 10^8$. Ez mutatja, hogy a konvekció a földköpenyben is turbulens. A felszálló termikek mozgatják a kéreg litoszféralemezeit. E lemezek átlagos sebessége, éppúgy mint a termikek felszállási sebessége néhány cm évente. Ezzel a sebességgel egy 3000 km sugarú kör bejárásához több százmillió év szükséges. A konvekcióban résztvevő anyagok tehát csak 20–30-szor fordulhattak körül a kéregben a Föld egész élettörténete során.

¹⁷A Föld forgása és a nagy méretek ellenére a köpeny áramlásában a Coriolis-hatás nem lényeges, mert a sebesség igen kicsi.