

7. fejezet

Turbulencia

A turbulencia olyan áramlás, mely térben is és időben is véletlenszerű, rendezetlen. A sebességtér ilyenkor minden megfigyelési skálán és időben is olyan gyorsan változik, hogy az átlagértékétől való eltérések, a fluktuációk részletei nem ismerhetők meg, célszerű azokat véletlen változóknak tekinteni. A fluktuációk ráadásul nem kicsik, a turbulencia alapvetően nemlineáris jelenség. Ebben a témakörben ezért az alapegyenletek analitikus megoldása reménytelen, ismereteink elsősorban kísérleti megfigyeléseken, numerikus szimulációkon, és dimenziós megfontolásokon alapulnak.

A turbulencia a nagyon gyors áramlások, ill. erősen fűtött közegek jellemzője. A turbulencia feltételének pontosabb megfogalmazását kapjuk a dimenziótlan számok segítségével: áramló homogén közegben a Reynolds-számnak, fűtött közegben pedig a Rayleigh-számnak igen nagyoknak kell lennie:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1, \quad \text{vagy} \quad Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa} \gg 1.$$

A turbulencia ezért azon folyamat végeredményének is tekinthető, melynek során a folyadékot egyre gyorsabban áramoltatjuk, vagy egyre erősebben fűtjük. E folyamatban az egyszerűbb áramlási formák sorra vesznek el stabilitásukat. A rendszer különböző instabilitásokon megy keresztül a turbulencia eléréséig, melyek lehetnek pl. a Kelvin-Helmholtz-instabilitás, a Rayleigh-Bénard-instabilitás, vagy forgatott és fűtött közegben a baroklin instabilitás. A turbulencia tehát egyfajta végállapot, a folyadékmozgás legbonyolultabb állapota, melyhez igen nagy energiabefektetés szükséges, és ezért extrém dimenziótlan számokkal jellemezhető. Ennek ellenére a természetben a turbulencia igen gyakori, így például alapvető szerepet játszik a szennyezések terjedése során, a planetáris határrétegben, vagy az óceáni keveredési rétegben. A környezeti áramlásokat kis skálán, a néhány méteres távolságokon megfigyelve, azok mindig turbulensnek bizonyulnak. Ebben a véletlenszerű folyadékmozgásban mindhárom térbeli irány lényeges szerepet játszik, háromdimenziós turbulenciáról van szó (7.1 ábra). A nagy vízszintes távolságokon viszont, mint láttuk, az áramlások gyakorlatilag kétdimenziósak. A turbulencia jellege alapvetően függ a dimenziószámtól: A háromdimenziós turbulens folyadék "zubog", sok kis örvény figyelhető meg benne. A kétdimenziós viszont ehhez képest simán változik, de véletlenszerűen: nagyméretű örvények jellemzik és a körülöttük megfigyelhető "szálas" szerkezetek (7.12, 7.13 ábra). A turbulencia harmadik fajtája a geosztrofikus turbulencia (7.17 ábra), amely a kétdimenziós eset kiterjesztése olyan áramlásokra, melyekben a forgatás és a görbület (β -hatás) is szerepet játszik. Végsősoron tehát mind a légkör, mind az óceánok nagyskálájú rendezetlen mozgása geosztrofikus turbulencia (1., 2. ábra).

A turbulenciával járó rendezetlen térbeli áramlás erős keveredést okoz, mely felerősíti a közeg viszkozitását, hővezetését és a diffúziós folyamatokat. A nyugvó aljzat felletti határrétegben a ν , κ és D transzportegyütthatók a náluk sok nagyságrenddel nagyobb ν_{turb} , κ_{turb} és D_{turb} turbulens paraméterekkel helyettesíthetők (7.2 ábra), melyek függetlenek a molekuláris értékektől! A fallal párhuzamos sebesség abszolútértéke univerzális magasságfüggést mutat. Ez a Kármán Tódor által leírt logaritmikus sebességprofil minden turbulens határrétegben előfordul (7.3 ábra).

A légköri planetáris határrétegben a legkülönbözőbb vegetációs és domborzati fedettségek mellett pontos mérések bizonyítják érvényességét.

A közeg stabil rétegzettsége a turbulencia kialakulását megnehezíti, hiszen függőleges keveredés csak akkor alakulhat ki, ha az egymás fölötti folyadékrétegek \bar{u} átlagsebessége elegendően különböző. A háromdimenziós turbulencia kialakulásának feltétele rétegzett közegben az, hogy a

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2}$$

Richardson-szám kisebb legyen egy egységnyi kritikus értéknél. Ez a feltétel teljesül a felemelkedő meleg termikekben. Felszállás közben ezért a környező levegő besodródik a termikbe és jól elkeveredik. A termik egyre nagyobb és egyre sűrűbb lesz, s eközben sebessége lassul (7.4 ábra).

A termikekkel rokon jelenség a vulkánból felszálló füst, ill. a gejzírekből vagy a kéményekből kiáramló meleg levegő mozgása. Összefoglaló néven a pontszerű forrásból folyamatosan kiáramló könnyű közeg feláramlása a csóva (plume). Az állandó besodródás miatt a csóva egyre szélesebb, sűrűsége növekszik, sebessége viszont csökken (7.5 ábra). Rétegzett közegben nem emelkedhet tetőzetesen magasra, ugyanis a növekvő sűrűség egyszer eléri az éppen aktuális környező sűrűséget, és az emelkedés megszűnik. Ez magyarázza, hogy a kitörésben feláramló vulkáni hamu és gázok, vagy a kéményfüst gyakran meglepően rövid emelkedés után megáll, s ott vízszintes síkban szétterül (7.6 ábra). A jelenséget mindenképpen figyelembe kell venni a kéményből kiáramló szennyezések káros hatásának megítélésakor.

A τ_0 nyírásnak kitett rétegzett turbulens határrétegben egy új távolság jelenik meg, az

$$L_M = -\frac{\rho_0 c_p u^{*3}}{g\alpha Q}.$$

Monyin–Obukhov-hossz, ahol Q a függőleges hőáram, c_p az állandó nyomáson mért fajhő, és $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$ egy jellegzetes sebesség. L_M értéke mind az óceáni keveredési rétegben, mind a planetáris határrétegben néhányszor 10 m. Ez az a hossz, melyen belül a nyírás hatása jelentős. Az óceáni keveredési réteg teljes vastagsága ezért L_M -mel arányos, s ebből következik, hogy szél-nyírás jelenlétében a rétegvastagság a besodródás miatt időben lassan nő (7.8 ábra). A planetáris határréteg a légköri L_M -nél jóval vastagabb. Felső részét, ahol a nyírás nem játszik szerepet, a termikek feláramlása jellemzi. Ezek homogenizálják a sűrűséget, és hosszan tartó fűtés esetén a teljes határréteg vastagsága időben nő (7.9 ábra).

A határreteken kívül, az energiabetáplálási helytől távol a turbulencia homogén és izotróp. Ilyenkor a turbulencia különböző méretű, elhaló, és állandóan újrakeletkező örvények kölcsönható rendszerének tekinthető. Jellemzésére az $E(k)$ energiaspektrumot használjuk, melynek értéke a k hullámszámú, azaz $l \sim 1/k$ méretű örvények mozgási energiájával arányos. Elegendően nagy Reynolds-számok esetén az energiaspektrum hatványfüggvény alakú:

$$E(k) \sim k^{-m},$$

ahol az m kitevő pozitív.

A háromdimenziós turbulenciában a nagy örvények egyre kisebbekre bomlanak (7.10 ábra). Ennek következtében az energia a nagy, betáplálási mérettől a kis méretek felé áramlik. A folyamatot az $m = 5/3$ Kolmogorov-féle exponens jellemzi (7.11 ábra). Az örvények bomlása egy alsó határ, az l_d disszipációs hossz eléréséig tart, mely az óceánban és a légkörben is néhány mm.

A kétdimenziós turbulenciában az örvényesség megmaradása a bomlást megakadályozza. Ott fordított a helyzet: a kis örvények összeolvadnak és egyre nagyobbakká nőnek (7.14 ábra). Az energia egyre nagyobb méretű struktúráknak adódik át szintén az $m = 5/3$ exponenssel. Ugyanakkor az örvényesség az egyre kisebb méretek irányába áramlik. Az ehhez tartozó spektrum $m = 3$ kitevőjű

(7.15 ábra). Az l_d disszipációs hossz a természetes közegek kétdimenziós turbulenciájában néhány méter.

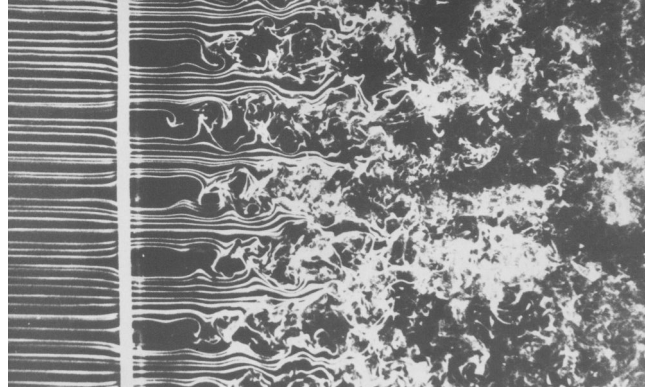
A forgatott sekély közegre jellemző geosztrofikus turbulencia is kétdimenziós jellegű. Az energiabetáplálási mechanizmus legtöbbször a jól ismert baroklin instabilitás, melynek jellegzetes mérete a belső Rossby-sugár (7.16 ábra). Az örvények növekedése a β -effektus miatt azonban csak az

$$L_R = \sqrt{\frac{u'}{\beta}}$$

Rhines-féle hossz eléréséig történik, ahol u' a sebességfluktuációk jellegzetes értéke. Ilyen maximális méretű örvényre lehet példa a Jupiter légkörében a Vörös Folt (7.17 ábra). A további fejlődés során az örvények megnyúlnak, majd Rossby-hullámokat bocsátanak ki, melyekből a szélességi körök mentén áramló zonális övek, jetek jönnek létre. Ez az óriásbolygók légkörében meg is figyelhető (7.17 ábra). Mindez azért nem jelenik meg a földi áramlásokban, mert a Rhines-hossz és a belső Rossby-sugár összemérhető, azaz az energia nagy méretek irányába történő áramlása a Földön nem fejlődhet ki.

7.1 Az átlagolt hidrodinamikai egyenletek

A turbulens áramlásban a sebességtér egy jelentős összetevője állandóan változtatja irányát és nagyságát (7.1 ábra). Mivel e fluktuációkról nem rendelkezhetünk elég információval, célszerű azokat egy átlag körül kialakuló véletlen változóknak tekinteni, és azok tulajdonsága alapján az átlagokra vonatkozó hidrodinamikai egyenleteket felírni.



7.1 ábra: A rögzített rácson átáramló folyadék a rácsmögött turbulenssé válik, mozgásában egyre több véletlen elem figyelhető meg. A rácstól elegendően nagy távolságban a turbulencia statisztikus tulajdonságai függetlenek a rácstól, a turbulencia homogén és izotróp. A képen az áramlás balról jobbra történik [Van Dyke].

Bontsuk fel a folyadékmozgásra jellemző valamely $A(\mathbf{r}, t)$ mennyiséget (mely lehet pl. valamilyen sebességkomponens, a nyomás, a hőmérséklet, stb) ugyanezen mennyiség $\bar{A}(\mathbf{r}, t)$ átlagára és az átlagtól való eltérést jelölő $A'(\mathbf{r}, t)$ fluktuációra. Az átlagot úgy képezzük, hogy $N \gg 1$ mérést végzünk hasonló körülmények mellett, s az adott helyen és pillanatban mért mennyiségek számtani közepét képezzük: $\bar{A}(\mathbf{r}, t) = (1/N) \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{r}, t)$, ahol i az egyes mérések sorszáma. Ez az ún. *sokaságátlag*. A definíció alapján

$$A(\mathbf{r}, t) = \bar{A}(\mathbf{r}, t) + A'(\mathbf{r}, t), \quad (7.1)$$

és a fluktuációk átlaga zérus:

$$\overline{A'(\mathbf{r}, t)} = 0. \quad (7.2)$$

Mivel a differenciálás és a sokságtalag képzése egymással felcserélhető lineáris művelet, az átlagolt egyenletek lineáris tagjai ugyanolyan formában érvényesek, mint az eredeti mennyiséget tartalmazók. Így például:

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad (7.3)$$

azaz az időderivált átlaga azonos az átlag időderiváltjával. Hasonlóan, a $\text{div} \mathbf{v} = 0$ összenyomhatatlansági feltételből azt kapjuk, hogy mind az átlagsebesség, mind a fluktuációk divergencia-mentesek:

$$\text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \text{div} \mathbf{v}' = 0. \quad (7.4)$$

Merőben más a helyzet a nemlineáris kifejezésekben. Tekintsük az A mennyiség teljes időderiváltjának advektív tagját, azaz a

$$(\mathbf{v} \text{grad}) A = \sum_j (v_j + v'_j) \frac{\partial (A + A')}{\partial x_j} \quad (7.5)$$

kifejezést. A vesszős és vesszőtlen tényezők szorzatát tartalmazó tagok átlaga (7.2) alapján zérus, ezért

$$\overline{(\mathbf{v} \text{grad}) A} = (\bar{\mathbf{v}} \text{grad}) \bar{A} + \sum_j \overline{v'_j \frac{\partial A'}{\partial x_j}}. \quad (7.6)$$

Mivel azonban $\text{div} \mathbf{v}' = 0$, az utolsó tag úgy is írható, mint a $\overline{v'_j A'}$ korreláció deriváltja. Az általános szabály az, hogy az advektív derivált átlaga

$$\boxed{\overline{(\mathbf{v} \text{grad}) A} = (\bar{\mathbf{v}} \text{grad}) \bar{A} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A' v'_j}}. \quad (7.7)$$

Az átlagos advektív deriválthoz tehát járulékot ad az $\overline{A' \mathbf{v}'}$ korrelációs vektor divergenciája is.

Fontos következmény adódik ebből a (1.23) Navier–Stokes-egyenlet átlagos alakjára. A sebesség i komponensére vonatkozó egyenletben az $A = v_i$ megfeleltetéssel

$$\overline{(\mathbf{v} \text{grad}) v_i} = (\bar{\mathbf{v}} \text{grad}) \bar{v}_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j}. \quad (7.8)$$

Az i -edik komponens átlagára vonatkozó egyenlet ezért (az egyszerűség kedvéért homogén, nem forgatott közeget tekintünk)

$$\frac{d}{dt} \bar{v}_i = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \right) \equiv \frac{1}{\rho_0} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\sigma}_{ij}, \quad (7.9)$$

ahol a fluktuációkkal korrigált átlagos feszültségtenzor

$$\bar{\sigma}'_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho_0 \overline{v'_i v'_j}. \quad (7.10)$$

Itt $\lambda = \nu \rho_0$ a dinamikai viszkozitás, az első két tag az átlagértékekkel képzett szokásos feszültség, az új,

$$-\rho_0 \overline{v'_i v'_j} \quad (7.11)$$

tag pedig az ún. *Reynolds-féle feszültség*. A fluktuációk jelenléte tehát módosítja a feszültségtenzort, s az új tag *független az anyagi paramétereiktől*. Elsősorban a nemdiagonális $i \neq j$ elemek

a fontosak, mert ezek a nyírás megváltozását jelentik, míg az $i = j$ elemek a nyomáshoz adnak járulékot. A Reynolds-féle tag esetenként lényegesen nagyobb is lehet, mint a nemturbulens járulékok. Érdemes megjegyezni, hogy a $\rho_0 \overline{v'_i v'_j}$ mennyiség úgy is értelmezhető, mint a j irányú $\rho_0 v'_j$ impulzus i irányba haladó $\rho_0 v'_i v'_j$ áramának átlaga (vagy fordítva).

Tekintsük most a hővezetési egyenlet átlagát ($A = T$). Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \bar{T} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{v'_j T'} \right), \quad (7.12)$$

ahol κ a hődiffúziós állandó. A fluktuációk tehát megváltoztatják a hővezetési egyenlet jellegét is: Az átlagos hőmérséklettel kapcsolatos $-\rho_0 c_p \kappa \text{grad} \bar{T}$ hőáram mellett, megjelenik a $\rho_0 c_p \overline{\mathbf{v}' T'}$ turbulens hőáram is (mely arányos a hőmennyiségnek a \mathbf{v}' sebességfluktuáció okozta áramával).

Amennyiben valamilyen koncentráció, pl. az S sótartalom diffúzió révén terjed szét, akkor a hagyományos $-D \text{grad} \mathbf{S}$ diffúziós áramhoz hozzáadódik a $\overline{\mathbf{v}' S'}$ turbulens diffúziós áram is:

$$\frac{d}{dt} \bar{S} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} - \overline{v'_j S'} \right). \quad (7.13)$$

Mindkétfajta turbulens áram nagyságában jóval meghaladhatja a hagyományos áramokat: a turbulencia tehát jelentősen felgyorsíthatja a keveredési folyamatokat.

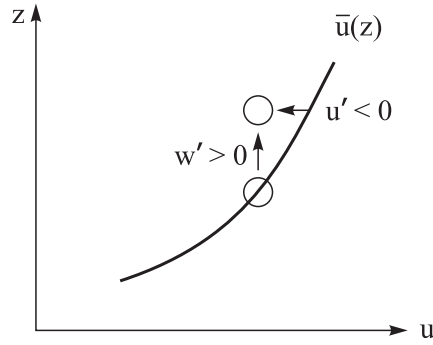
Összefoglalva, a turbulens fluktuációk miatt az advektív derivált nemlinearitásából következően az átlagos térmennyiségekre vonatkozó egyenletekben megjelenik ezen térmennyiségek fluktuációi szorzatának átlagértéke, a korreláció. Ahhoz, hogy az egyenletek egyértelműen megoldhatók legyenek, szükségünk van a korrelációk egyenleteire. Ezek a hidrodinamikai egyenletek beszorzásával átlagolás után egyszerűen megkaphatók, de bennük a háromszoros szorzatok átlagértéke, a hármas korrelációk lépnek fel. Így az egyre magasabb rendű korrelációk végtelen hierarchiáját kapjuk, mely jól mutatja, hogy a turbulencia teljes leírása csak a fluktuációk statisztikájának pontos ismeretében lenne lehetséges. A gyakorlatban kezelhető egyenleteket csak akkor kapunk, ha feltételezhetjük, hogy egy bizonyos rend fölött a korrelációs függvények mind kifejezhetők alacsonyabb rendűekkel. Ha ez igaz, akkor sikerült a hierarchiát egy véges szinten lezárni. Ez az ún. *lezárási* (closure) *probléma*. Az, hogy milyen lezárás alkalmazható, függ attól is, hogy a folyadék mely tartományát vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy a határrétegben már az elsőrendű lezárás (a kétszeres korreláció visszavezetése az átlagértékre) is hasznos közelítést ad.

7.2 A turbulens határréteg

Tekintsünk egy falhoz közeli turbulens áramlást! Legyen a fal az x, y síkban, és tegyük fel, hogy az átlagos áramlás a fallal párhuzamos. Ezért a $v_z \equiv w$ átlagos sebesség eltűnik, a fluktuációk viszont bármilyen irányúak lehetnek, tehát mind $v'_x \equiv u'$, mind $v'_y \equiv v'$, mind $v'_z \equiv w'$ előfordul. Ugyanakkor viszont az átlagsebességek növekednek a faltól távolodva (azaz z növekedésével). Ha egy folyadékelem felfelé mozdul el, vagyis w' fluktuációja pozitív, akkor új helyén vízszintes sebessége az ottani átlagsebességnél kisebb lesz, sűrűdés révén fékezi a folyadékot és így általában negatív előjelű u', v' fluktuációt hoz létre. Hasonlóan, ha lefelé mozdul el, vagyis $w' < 0$, akkor a környező folyadékot gyorsítja, és ott pozitív u', v' fluktuáció alakul ki. Átlagosan tehát a függőleges és a vízszintes irányú sebességfluktuációk *antikorreláltak* a határrétegben, azaz korrelációjuk negatív:

$$\overline{w' u'} < 0, \quad \overline{w' v'} < 0. \quad (7.14)$$

A (7.11) Reynolds-féle feszültség tehát pozitív, a turbulencia növeli a feszültséget, a viszkozitást.



7.2 ábra: A sebességfluktuációk korrelációja negatív a határrétegben. Az $\bar{u}(z)$ átlagos sebességprofil szerint az x irányban áramló közegben a $w' > 0$ függőleges sebességfluktuáció okozta elmozdulás után a folyadékkelem a helyi átlagsebességnél lassabban mozog, a környező folyadékot lassítja és $u' < 0$ negatív vízszintes fluktuációt hoz létre. Az $\overline{w'u'} < 0$ korreláció a feszültséget jelentősen megnöveli. Első közelítésben ez egy $\nu_{turb} \gg \nu$ turbulens viszkozitás bevezetésével vehető figyelembe.

Mivel az antikorrreláció megszűnik, ha az átlagsebesség z irányban homogén, célszerű feltételezni, hogy a Reynolds-feszültségek arányosak a megfelelő átlagsebesség függőleges deriváltjával:

$$-\overline{w'u'} \sim \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad -\overline{w'v'} \sim \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}. \quad (7.15)$$

Izotróp sík lap esetén az arányossági tényező független attól, hogy melyik komponensről van szó, ezért az \mathbf{u} vízszintes síkbeli sebességre, ill. fluktuációira nézve általánosan írható, hogy

$$-\overline{w'\mathbf{u}'} = \nu_{turb} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}, \quad (7.16)$$

ahol a $\nu_{turb} > 0$ arányossági tényező az ún. turbulens viszkozitás (angolul eddy viscosity). A tapasztalat szerint a Reynolds-feszültség ezen kifejezése jó első közelítés. A turbulens viszkozitás *független* a ν molekuláris viszkozitástól. A ν_{turb} mennyiséget az egész áramlás határozza meg, függhet ezért pl. a z magasságtól. Tipikus értéke azonban mindig több nagyságrenddel meghaladja a ν molekuláris viszkozitását. A légkörben $\nu_{turb} = 1 - 10 \text{ m}^2/\text{s}$, az óceánban pedig $\nu_{turb} = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ (a 10^{-5} , ill. 10^{-6} nagyságrendű molekuláris értékekkel szemben, l. 14.1 táblázat).

A (7.16) turbulens viszkozitási közelítéssel a keresztkorrelációkat visszavezettük az átlagsebességek deriváltjaira, és ezzel a határrétegbeli átlagolt Navier–Stokes-egyenletet lezártuk. Ráadásul ez ugyanolyan alakúnak adódott, mint a nem átlagolt egyenlet, csak benne a molekuláris és a turbulens viszkozitás összege lép fel. Az utóbbi nagy értéke miatt ez annak felel meg, hogy az eredeti egyenletben a $\nu \rightarrow \nu_{turb}$ helyettesítést hajtjuk végre, ahogyan azt az Ekman-féle határréteg tárgyalásakor tettük a 4.1 fejezetben.

Alulról melegített közegben, melyben a hőmérséklet felfelé csökken, a fluktuáció miatt kialakuló $w' > 0$ feláramlás a folyadékot hidegebb környezetbe juttatja, melyet ezért felmelegít: $T' > 0$. A $\overline{w'T'}$ korreláció ilyenkor pozitív. Általánosan is írhatjuk a (7.16) közelítés szellemében, hogy

$$-\overline{w'T'} = \kappa_{turb} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (7.17)$$

ahol $\kappa_{turb} \gg \kappa$ a turbulens hődiffúziós együttható (l. 14.1 táblázat).

Hasonlóan, egy adott anyag, pl. sótartalom szempontjából inhomogén közegben

$$-\overline{w'S'} = D_{turb} \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (7.18)$$

ahol $D_{turb} \gg D$ a turbulens diffúziós együttható (a só molekuláris diffúziós állandója pl. vízben $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$). Mivel a turbulens transzport nem az anyagi állandóktól függ, hanem magától az áramlástól, a transzport együtthatók azonos nagyságrendűek. Sokszor jó közelítéssel igaz, hogy $\nu_{turb} = \kappa_{turb} = D_{turb}$.

7.3 A logaritmikus sebességprofil

Megvizsgáljuk, hogy egy fal közvetlen közelében zajló turbulens áramlásra milyen átlagos sebességeloszlás jellemző. Vízszintes síkbeli átlagos áramlást vizsgálunk, melyben az áramlási sebesség \bar{u} nagysága csak a z magasságtól függ. A falhoz elegendően közel, vagyis olyan tartományban, ahol a z magasság sokkal kisebb a határreteg D vastagságánál, a sebességről feltehető, hogy nem függ a határreteg felső peremén érvényes u_∞ sebességtől. Az $\bar{u}(z)$ sebesség, vagy z szerinti deriváltja ekkor csak a z koordinátától, a ν kinematikai viszkozitástól, a ρ_0 sűrűségtől, és a fal felszínén ható τ_0 nyírástól függhet. Mivel a tömeg mértékegységét csak ρ_0 és τ_0 tartalmazza, ezért ez a két mennyiség csak a τ_0/ρ_0 hányados formájában fordulhat elő. E hányados négyzetgyöke sebesség mértékegységű, az

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \quad (7.19)$$

mennyiség az ún. *súrlódási sebesség*. A $\tau_0 = 0,1 \text{ N/m}^2$ tipikus szélnyírási erősségből a levegőben $u^* = 30 \text{ cm/s}$, az óceánban pedig $u^* = 1 \text{ cm/s}$ a súrlódási sebesség.

A határreteg felső peremétől távol az \bar{u} átlagsebesség magasság szerinti deriváltja tehát csak u^* , ν és z függvénye lehet:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = f(u^*, \nu, z), \quad (7.20)$$

ahol f egyelőre tetszőleges függvény.

A fal egészen keskeny kis környezetén kívül a turbulens fluktuációk miatt a molekuláris viszkozitás, mint az előző fejezetben láttuk, nem játszik szerepet. Itt tehát a ν -függés nem léphet fel, a $d\bar{u}/dz$ derivált csak u^* és z függvénye lehet. Ezekből 1/idő dimenziójú mennyiség csakis egyféleképpen képezhető, azaz

$$\frac{d\bar{u}}{dz} \sim \frac{u^*}{z}. \quad (7.21)$$

A dimenziótlan arányossági tényezőt az $1/K$ alakban szokás írni, ahol K a Kármán-féle konstans, melynek értéke a mérések szerint $K = 0,41$. (Kármán Tódor (1881-1963) magyar származású fizikus, a turbulencia kutatója, a repüléstudomány meghatározó alakja.) A fentiekből az átlagos sebesség magasságfüggése

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{K} \ln z + \text{konstans}. \quad (7.22)$$

Ez a *logaritmikus sebességprofil*, mely műszaki problémákban (pl. vízvezetékekben), és természetes közegekben egyaránt kialakul.

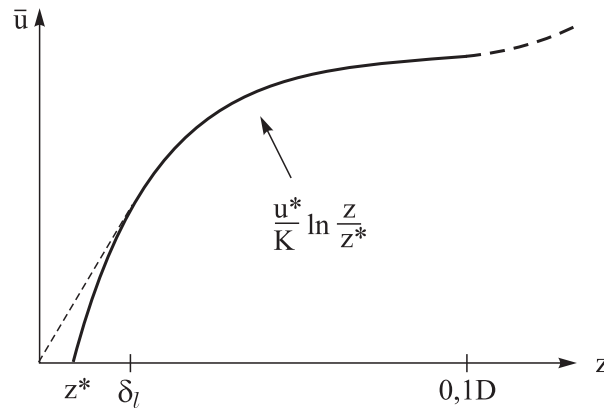
Ugyanakkor a fal közvetlen közelében ν lényeges, hiszen a peremfeltétel szerint ott $\nu \rho_0 d\bar{u}/dz = \tau_0$, melyből

$$\bar{u}(z) = \frac{z\tau_0}{\nu\rho_0}, \quad \text{vagy} \quad \frac{\bar{u}(z)}{u^*} = \frac{zu^*}{\nu}. \quad (7.23)$$

Ez egyben azt is mutatja, hogy a zu^*/ν kombináció dimenziótlan, egyfajta lokális Reynolds-szám, ν/u^* pedig egy hosszúságdimenziójú mennyiség. A fenti lineáris profil általában a $\delta_\nu = 10 \nu/u^*$ távolságig érvényes. A határretegnek ez, a falhoz igen közeli tartománya a *viszkózus alréteg*, δ_ν

pedig az alréteg vastagsága. Ez mind a légkörben, mind az óceánban kb. 1 mm-nek adódik, az alréteg tehát valóban igen keskeny.

Az alrétegen kívül a (7.22) logaritmikus sebességprofil érvényes, mely univerzális abban az értelemben, hogy sem a molekuláris paramétereiktől, sem a határreteg felső peremén érvényes sebességtől nem függ. Ez a tartomány elméletileg a $z \ll D$ távolságokra korlátozódik, de a megfigyelések szerint a határreteg 10 százalékáig is jó közelítéssel érvényben marad. A faltól távolabb a sebességeloszlás már u_∞ -tól is függ, és nem univerzális. A forgatott közegek határretegében itt válik lényegessé az Ekman-spirál elfordulása is.



7.3 ábra: A logaritmikus sebességprofil: a vízszintes átlagsebesség $\bar{u}(z)$ nagyságának magasságfüggése a turbulens határretegben. A δ_ν vastagságú viszkózus alrétegben lineáris a magasságfüggés. A határreteg D vastagságának alsó 10 százalékán túl az univerzális logaritmikus alak érvényét veszti. Durva felület esetén a viszkózus alréteg nem alakulhat ki. z^* ekkor az a szint, ahol a sebesség eltűnik. Értéke a felület érdességét jellemzi.

A határreteget létrehozó fal nem mindig sima. Gyakran előfordul, hogy a felület kidudorodásai összemérhetők vagy nagyobbak a viszkózus alréteg vastagságánál. Jó példa erre a planetáris határreteg, melyben az alsó falat pl. a domborzat vagy a vegetáció jelenti. A felületi szabálytalanságok mögött örvények keletkeznek, melyek a viszkózus alréteget *lerombolják*. Durva felületek esetén ezért a (7.23) lineáris profil egyáltalán nem alakulhat ki, az áramlás még a fal közvetlen közelében sem függ az anyagi paramétereiktől. Ilyenkor a logaritmikus sebességprofil a határreteg alján mindenütt érvényes. Az átlagos sebesség nyilván eltűnik valahol a felületi akadályok között. A (7.22)-ban fellépő konstans éppen azt mutatja meg, hogy ez milyen z^* magasságban történik. A durva felületekre vonatkozó logaritmikus sebességprofil tehát

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{K} \ln \frac{z}{z^*}, \quad \text{ha } z \geq z^*. \quad (7.24)$$

A z^* távolság a felület durvaságára jellemző ún. *érdességi paraméter*. A (7.24) eloszlás a határreteg-meteorológiában alapvető szerepet játszik. A légkör alsó, kb. 100 méteres rétegében érvényességét nagy pontosságú mérések bizonyítják. A z^* érdességi paraméter értéke alacsony bokrok esetén 20 cm, magas fűre 2 cm, alacsony fűre 5 mm, vízfelszín felett pedig kb. 1 mm.

7.4 Turbulencia rétegzett közegekben

A közegek stabil rétegződése a turbulencia kialakulását megnehezíti, hiszen ekkor a spontán hidrodinamikai mozgások kétdimenziósak. A térbeli turbulencia kialakulásához függőleges

keverés szükséges. Ehhez, az eddig vizsgált homogén közegekkel szemben, most munkát kell végezni. A munka a gravitáció ellenében történik annak érdekében, hogy a sűrűbb folyadékot magasabb, a könnyebbet pedig alacsonyabb szintre juttassuk. A potenciális energia növeléséhez szükséges energia csakis a folyadék átlagos mozgási energiájából adódhat. Turbulencia ezért rétegzett (fűtetlen) közegben csak akkor alakulhat ki, ha az egymás feletti folyadékrétegek *különböző* vízszintes sebességgel mozognak, s ez a nyírás elegendően erős.

A pontos feltétel megtalálása érdekében tekintsünk két egymás feletti h vastagságú folyadék-réteget, melyek eltérő vízszintes sebességgel mozognak. Legyen az alsó réteg $\rho_0 + \Delta\rho$, a felső kissé hígabb, ρ_0 sűrűségű. Válasszuk meg koordináta-rendszerünket úgy, hogy a felső réteg $\Delta U/2$, az alsó $-\Delta U/2$ sebességgel mozogjon. Ha a két réteg teljesen elkeveredik, akkor az átlagsebesség nulla lesz, az átlagsűrűség pedig $\rho_0 + \Delta\rho/2$. Az egységnyi vízszintes felület feletti $2h(\rho_0 + \Delta\rho/2)$ tömeg súlypontja h magasságban van, mely $2gh^2(\rho_0 + \Delta\rho/2)$ potenciális energiának felel meg. A kezdeti potenciális energia a $h(\rho_0 + \Delta\rho)$ tömeg $h/2$, ill. a $h\rho_0$ tömeg $3h/2$ magasságban levő súlypontjai miatt $gh^2(2\rho_0 + \Delta\rho/2)$. A potenciális energia tehát növekedett, méghozzá a $gh^2\Delta\rho/2$ értékkel. Ugyanakkor a kezdeti $(\rho_0 + \Delta\rho)h(\Delta U)^2/8$ és $\rho_0h(\Delta U)^2/8$ kinetikus energia zérusra csökkent. A mozgási energia változása a sűrűségkülönbség csekélyisége miatt jó közelítéssel $\rho_0h(\Delta U)^2/4$. A folyamat csak akkor lehetséges, ha a kinetikus energia változása fedezni tudja a helyzeti energiáját, vagyis ha

$$(\Delta U)^2 > 2h \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g. \quad (7.25)$$

Turbulens keveredés a teljes $2h$ vastagságú rétegben tehát akkor történhet, ha a h távolságra eső vízszintes sebességkülönbség négyzete meghaladja a jobboldali értéket. Erősebb rétegződést csak erősebb nyírás képes turbulenssé tenni.

Elegendően kis rétegvastagságok esetén $\Delta U/h$ az $\bar{u}(z)$ átlagsebesség, $\Delta\rho_0/h$ pedig a $\bar{\rho}(z)$ sűrűség magasság szerinti deriváltját adja. A turbulencia feltéte tehát a fentiek szerint megfogalmazható a

$$Ri \equiv \frac{N^2}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2} \quad (7.26)$$

Richardson-szám (L. F. Richardson (1881-1953) angol meteorológus, a turbulencia és az időjáráselőrejelzés első jelentős kutatója) segítségével, ahol N az (5.4) Brunt-Väisälä-frekvencia és $d\bar{u}/dz$ a vízszintes átlagsebesség gradiense. A Richardson-szám tehát

$$Ri = \frac{\text{átlagos helyzeti energianövekmény}}{\text{átlagos mozgási energiavesztés}}. \quad (7.27)$$

A turbulencia rétegzett közegben akkor alakul ki, ha a Ri Richardson-szám kisebb egy Ri_c kritikus értéknél,

$$Ri < Ri_c, \quad (7.28)$$

ahol Ri_c egységnyi nagyságrendű szám. A Richardson-szám lényeges szerepet játszik a sztratifikált turbulencia elméletében. Értéke instabil rétegzettség esetén negatív, hiszen akkor N^2 -et formálisan negatívnak kell tekinteni.

Egy H vastagságú rétegzett közegben, melyre ΔU sebességkülönbség jellemző, a Richardson-szám becsülhető a

$$Ri_0 \equiv \frac{g'H}{(\Delta U)^2} \quad (7.29)$$

globális Richardson számmal (l. (7.25)), ahol $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ a redukált gravitációs gyorsulás. Ez a szám lényegében egy belső Froude-szám négyzetének a reciproka, de ezt a Froude-számot nem az átlagsebességgel, hanem a sebességkülönbségek átlagával kell képezni. A globális Richardson-szám értéke mind az óceáni keveredési rétegben, mind a planetáris határrétegben 1 körüli. E

rétegek általános állapota tehát közel van ahhoz, hogy háromdimenziós turbulencia kialakulhasson bennük.

Megjegyezzük, hogy a $Ri_0 \approx 1$ feltételből a kevert réteg vastagságára

$$H \approx \frac{(\Delta U)^2}{g'} \quad (7.30)$$

adódik. Ez teljes összhangban van a Kelvin–Helmholtz-instabilitás (5.90) kritikus hullámhosszára kapott feltétellel, amennyiben felhasználjuk, hogy az instabilitás kifejlődése után az örvények által megkevert, tehát turbulenssé vált réteg vastagsága jól becsülhető a kritikus hullámhosszal.

7.5 Könnyű közegek turbulens áramlása

A turbulencia kifejlődéséhez nemcsak erős sebességyírás, hanem jelentős felhajtóerő is vezethet. Tipikusan ez a helyzet az alulról erősen fűtött folyadékban. A környezeti áramlásokban tipikus adatokkal láttuk, hogy a Ra Rayleigh-szám igen nagy (10^{16} körüli), a rendszerek messze túl vannak az első konvekciós instabilitáson, mely még szabályos áramlásokra vezetne. Ilyenkor a konvekció szabálytalan, turbulens feláramlásokkal társul. Ezek jellegzetes formája a *termik* (5.44, 5.45 ábra), mely kezdetben kis kiterjedésű, és a környezeténél könnyebb folyadékelem (pl. melegebb levegőcsomag). Miután hirtelen elválik a kiindulási szintről, a termik emelkedése olyan gyors, hogy mozgása során peremén nagy örvények keletkeznek. Ezek a környező sűrűbb közeg egy részét beáramoltatják a termik belsejébe, a nagy örvények belül kisebbeket hoznak létre, és így az egész termik jól kevertté válik. Ez az állandó *besodródás* (entrainment) arra vezet, hogy a termik egyre nagyobb és egyre sűrűbb lesz, vagyis feláramlási sebessége lassul. A mozgás alapvető energiaforrása a sűrűségkülönbségből adódó felhajtóerő.

A termikekkel rokon jelenség a vulkánból felszálló füst, ill. a gejzírekből vagy a kéményekből kiáramló meleg levegő mozgása. Összefoglaló néven ezeket *turbulens csóvának* (plume) nevezzük¹. Ezek a termikekhez hasonlóan, mozgásuk kezdetén igen kis kiterjedésűek, forrásuk pontszerűnek tekinthető, de azokkal ellentétben itt a könnyű anyag utánpótlása állandóan biztosított. A besodródás itt is alapvető szerepet játszik, és ezért minden csóva felfelé szélesedik és ezzel párhuzamosan közege egyre sűrűbbé válik.

A termikek és a plume-ok mozgásának megértésében meglepően hatékonyak az egyszerű dimenziós megfontolások, melyeket a két esetre külön-külön mutatunk be.

7.5.1 Termikek

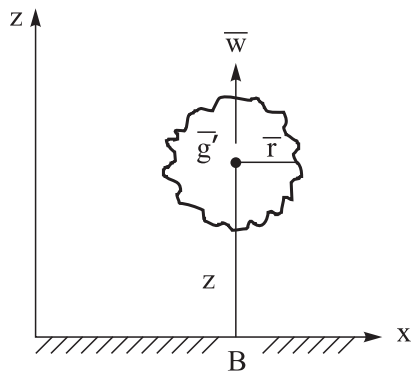
A termik mozgásának alapvető paramétere a kezdeti állapotban érvényesülő felhajtóerő. Kezdetben a ρ_0 környezeti sűrűségnél $\Delta\rho_0$ sűrűséggel hígabb V_0 kiindulási térfogatú folyadékra a B fajlagos felhajtóerő értéke

$$B \equiv g'_0 V_0, \quad (7.31)$$

ahol a g'_0 a kezdeti $g\Delta\rho_0/\rho_0$ redukált gyorsulás. A 0 indexet arra használjuk, hogy megkülönböztessük a kezdeti (a $z = 0$ szinten érvényes) értéket a mozgás során felvettől. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a környezet sűrűsége állandó, a külső közeg nem rétegzett.

Első közelítésben a termiket állandó sűrűségű gömbnek tekintjük, melynek helyzetét középpontja z magasságával jellemezzük. Keressük, hogy a termik átlagos \bar{r} sugara, \bar{w} feláramlási sebessége, és közegének \bar{g}' redukált gyorsulása (vagyis a pillanatnyi sűrűség) hogyan változik a mozgás során (7.4 ábra).

¹Ha a kiáramlás jelentős kezdősebességgel történik, akkor turbulens jet-ről beszélünk



7.4 ábra: Az emelkedő termik legfontosabb paramétereit. Az emelkedési magasság az idő négyzetgyökével nő: $z \sim t^{1/2}$, mert felszállás közben egyre több sűrű anyag kerül a termikbe besodródás révén.

Ezek a mennyiségek a z magasságon kívül csak az egyetlen releváns paramétertől, a B fajlagos felhajtóerőtől függhetnek. (A teljes $\rho_0 B$ felhajtóerő azért nem jelenhet meg bennük, mert a meghatározandó mennyiségek egyike sem hordoz tömeg mértékegységet.) A dimenzióanalízis szellemében feltételezzük, hogy a keresett mennyiség a B és a z hatványait tartalmazza, tehát $B^a z^b$ típusú, legalábbis, ha z nagyobb egy meghatározott értéknél. Mivel B mértékegysége m^4/s^2 , a szorzat mértékegysége $\text{m}^{(4a+b)}\text{s}^{-2a}$. Az \bar{r} átlagos sugár méter egységű, mely csak úgy lehetséges, ha $a = 0, b = 1$, vagyis a pillanatnyi sugár arányos a termik középpontjának a magasságával:

$$\bar{r} \sim z. \quad (7.32)$$

A w emelkedési sebesség m/s egységű, amelynek $a = 1/2, b = -1$ felel meg, azaz

$$\bar{w} \sim \frac{B^{1/2}}{z}. \quad (7.33)$$

Végül hasonlóan kapjuk, hogy a redukált gyorsulás

$$\bar{g}' \sim \frac{B}{z^3}. \quad (7.34)$$

Az eredmény azt fejezi ki, amit a besodródás jelensége alapján vártunk: a termik sugara emelkedése során nő, de közben sűrűségkülönbsége csökken és ezért egyre nehezkesebben emelkedik. A z -függés pontos alakját a dimenzióanalízis mutatja meg. Ezek szerint pl. a sebesség éppen fordítottan arányos a magassággal. Vegyük észre, hogy a pillanatnyi magassággal számolt (7.29) globális Richardson-szám, melyben a vízintes sebességeltérés nagyságrendjét \bar{w} -gal becsüljük, azaz

$$Ri_0 = \frac{\bar{g}'z}{\bar{w}^2} \quad (7.35)$$

független a magasságtól. Ez azt jelenti, hogy ha a Richardson-szám kezdetben a kritikus érték alatt volt, akkor az is marad, azaz a turbulencia feltétele az emelkedés során végig teljesül. Mivel $\bar{w} \sim 1/\bar{r}$, ebből az is következik, hogy a $B = \bar{g}'\bar{r}^3$ fajlagos felhajtóerő is állandó, s ez igazolja utólag, hogy jogos a B mennyiséget magasságtól független paraméternek tekinteni.

A fenti eredményekből az időfüggés is következik. Mivel a z magasságban levő részecske w emelkedési sebessége egyben a z időderiváltja, a hatványmegoldások körében (7.33) csak úgy teljesülhet, ha

$$z \sim \bar{r} \sim \sqrt{t}, \quad \bar{w} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (7.36)$$

Ez azt jelenti, hogy az a magasság, melybe a termik elegendő hosszú idő után eljuthat, az idő négyzetgyökével nő.

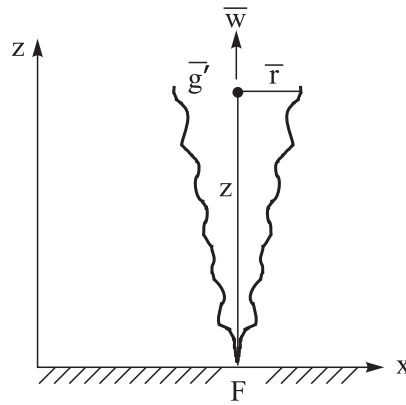
7.5.2 Turbulens csóvák (plume-ok)

Az állandó betáplálás miatt a releváns paraméter most az *időegységre eső* felhajtóerő, vagyis a

$$F \equiv g'_0 Q_0 \quad (7.37)$$

felhajtóerő-fluxus, ahol Q_0 a forrásból időegységenként kiáramló könnyű folyadék térfogata. A külső közeg sűrűségét először ismét térben állandónak gondoljuk.

A forrásból kiáramló folyadék folytonos csóvát alkot, melynek \bar{r} átlagos vastagsága a z magassággal változik. Az \bar{r} sugarú korongon belül feltesszük, hogy a \bar{w} átlagos feláramlási sebesség és a sűrűség is állandó. Az utóbbiból képezzük a \bar{g}' lokális redukált gyorsulást (7.5 ábra).



7.5 ábra: A kisméretű forrásból felszálló turbulens csóva (plume) legfontosabb paramétereit. A besodródás miatt a csóva felfelé vastagodik, a benne mozgó folyadékelemek lassulnak és sűrűsödnek. Homogén környezetben a csóva tetszőleges magasságig eljuthat.

Ezek a mennyiségek a z magasságon kívül csak az F felhajtóerő-fluxus függvényei. Mivel F mértékegysége m^4/s^3 , a dimenzióanalízis \bar{w} és \bar{g}' esetén a termikekétől eltérő eredményre vezet. Azt adja, hogy

$$\bar{r} \sim z, \quad (7.38)$$

$$\bar{w} \sim \frac{F^{1/3}}{z^{1/3}}, \quad (7.39)$$

$$\bar{g}' \sim \frac{F^{2/3}}{z^{5/3}}. \quad (7.40)$$

A besodródás miatt a plumok vastagsága is nő a magassággal, sebességük és redukált gyorsulásuk csökken, de a termikekénél lassabban. A (7.35) globális Richardson-szám most a plum mentén állandó, s ez ekvivalens azzal, hogy $F = \bar{g}' \bar{w} \bar{r}^2$ is állandó. A $Q = w r^2$ térfogati sebesség viszont a besodródás miatt $z^{5/3}$ szerint nő.

A (7.39) összefüggés az egyes változók időfüggésére most azt adja, hogy

$$z \sim \bar{r} \sim t^{3/4}, \quad \bar{w} \sim \frac{1}{t^{1/4}}. \quad (7.41)$$

A plume-ban levő folyadékelemek emelkedési magassága tehát az eltelt idő háromnegyedik hatványával arányos. Ebből érdekes összefüggés következik a csóva alakjára egyenletes erősségű vízszintes szélben. Mivel a részecske x koordinátája ekkor lineárisan függ az időtől, a csóva alakját a

$$z \sim x^{3/4} \quad (7.42)$$

fekvő parabola adja.

Homogén közegben a csóva elvileg tetszőleges magasságokba is eljuthat, hiszen a redukált gyorsulás mindig pozitív, a felhajtóerő sohasem tűnik el egészen. Rétegzett közegben a jelenség alapvetően különböző. Stabil rétegzettség esetén a külső közeg sűrűsége csökken a magassággal, és ezért a besodródás miatt sűrűsödő plume egyszerűen csak eljut egy olyan magasságba, ahol sűrűsége megegyezik a környezetével, azaz, ahol emelkedése *megáll*. Ez drasztikus eltérés a homogén közegbeli viselkedéshez képest, és magyarázza azt, hogy a felszálló füst megáll és adott (sokszor meglehetősen alacsony) szinten terjed szét a légkörben (7.6, 7.7 ábra)



(a)



(b)

7.6 ábra: Stabilan rétegzett közegben a csóva emelkedése a forrás fölött nem sokkal megszűnik, mert a besodródás miatt sűrűsödő anyag gyorsan eléri a felfelé híguló környezet sűrűségét. a) Kéményből felszálló füst szélben [www.badpets.net/Album]. b) A Redoubt vulkán (Alaszka) 1989. december 15-i kitörésének por-, és hamufelhője [volcanoes.usgs.gov/Images/Jpg/Redoubt/dds39_063_small.jpg].

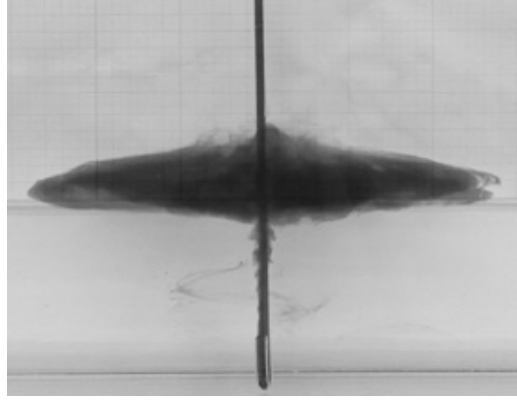
Állandó rétegzettség esetén a h maximális emelkedési magasság könnyen megbecsülhető. Ez a mennyiség az F fluxuson kívül az N Brunt–Väisälä-frekvenciától is függ. A dimenzióanalízis szerint

$$h \sim \frac{F^{1/4}}{N^{3/4}}. \quad (7.43)$$

Figyelemreméltó, hogy az emelkedési magasság igen gyengén függ a fluxustól. Kétszeres magasság eléréséhez az F mennyiséget 16-szorosára kell növelni!

7.6 A turbulens határréteg rétegzett közegben.

A határrétegben a τ_0 nyírási feszültség mindig lényeges szerepet játszik. A hozzá tartozó jellegzetes sebesség a (7.19) súrlódási sebesség. Rétegzett közegben a ΔU sebességkülönbség



7.7 ábra: Egyenletesen rétegzett közegben felszálló turbulens csóva laboratóriumban. A megfestett édesvíz emelkedése néhány cm után megszűnik.

hatására a turbulencia (7.30) szerint a

$$\frac{\rho_0(\Delta U)^2}{g\Delta\rho} \quad (7.44)$$

vastagságú rétegre terjed ki. A határrétegben ΔU jellegzetes értéke a súrlódási sebesség, az $u^*\Delta\rho$ mennyiség pedig értelmezhető a turbulens sűrűségfluktuációk $\overline{w'\rho'}$ függőleges áramaként. A határrétegben a keveredési vastagság jellegzetes értéke ezért az

$$L_M \equiv \frac{\rho_0 u^{*3}}{K g \overline{w'\rho'}}. \quad (7.45)$$

Ez az ún. *Monyin–Obukhov-hossz* (melynek fontosságát A. S. Monyin és A. M. Obukhov szovjet óceanográfusok mutatták ki 1954-ben). Itt a K Kármán-féle konstans történeti okokból jelenik meg. Az L_M mennyiség az a mélység, melyre az u^* nagyságrendű sebességgel jellemzett örvények hatása kiterjed.

Amennyiben a sűrűségfluktuáció a hőmérsékletváltozás következménye, $\overline{w'\rho'} = -\alpha\rho_0\overline{w'T'}$ (α a hőtágulási együttható), a Monyin–Obukhov-féle hossz úgy is írható, mint

$$L_M \equiv -\frac{u^{*3}}{Kg\alpha\overline{w'T'}} = -\frac{\rho_0 c_p u^{*3}}{Kg\alpha Q}. \quad (7.46)$$

Az utolsó egyenlőségben $Q = \rho_0 c_p \overline{w'T'}$ a függőleges turbulens hőáram, c_p az állandó nyomás melletti fajhő. Instabil, azaz felfelé csökkenő hőmérsékletű közegben a hőáram pozitív. A Monyin–Obukhov-hossz tehát stabil rétegzettség mellett pozitív, egyébként negatív előjelű.

A planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben a $c_p/(\sqrt{\rho_0}\alpha)$ paraméterkombináció közel azonos, a Monyin–Obukhov-hossz tehát mind az óceáni, mind a légköri határrétegben azonos nagyságrendű. Tipikus értékük néhányszor tíz méter.

A rétegzettség miatt a sebességprofil valamelyest eltér a logaritmikustól. Az átlagos \bar{u} sebesség deriváltja ekkor ugyanis (7.21) helyett a

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u^*}{z} \phi\left(\frac{z}{L_M}\right) \quad (7.47)$$

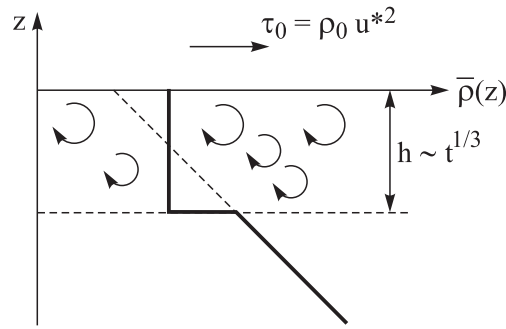
alakban írható, ahol megjelent a probléma z/L_M új dimenziótlan paramétere (ϕ ennek megfelelően egy dimenziótlan függvény). Amennyiben z kicsi, a ϕ függvény sorbafejthető, és vezető rendben

$\phi = (1 + c_1 z/L_M)/K$, ahol c_1 konstans. Integrálás után

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{K} \left(\ln \frac{z}{z^*} + c_1 \frac{z}{L_M} \right). \quad (7.48)$$

Ez a rétegzett határrétegekre jellemző ún. log-lineáris sebességprofil. A rétegzettségéből adódó korrekció ellenkező előjelű stabil és instabil rétegzettség esetén. A tapasztalat szerint c_1 pozitív, mely azt jelenti, hogy instabil rétegzettség $L_M < 0$ esetén a sebesség lassabban változik a logaritmikusnál, mert a függőleges keveredés erősebb, mint a semleges esetben. Ez a tendencia valóban megfigyelhető a planetáris határrétegben.

A Monyin–Obukhov-hossz segítségével meghatározhatjuk azt is, hogyan változik az óceáni keveredési réteg h vastagsága időben. Feltesszük, hogy a folyadék kezdetben stabilan rétegzett, és az N Brunt–Väisälä-frekvencia jellemzi. Az idő múlásával a szélnyírás miatt egyre nagyobb h vastagságú réteg válik jól kevertté, azaz homogén sűrűségűvé (7.8 ábra).



7.8 ábra: Az óceáni keveredési réteg h vastagsága a szélnyírás hatására nő, mert a turbulens örvények által okozott besodródás révén egyre mélyebb szintekig homogenizálódik az eredetileg egyenletesen rétegzett közeg.

A (7.45) Monyin–Obukhov-hosszban w' becsülhető a réteg $dh/dt \equiv \dot{h}$ növekedési sebességével, ϱ' pedig a Brunt–Väisälä-frekvencia alapján (l. (5.5)) $\varrho' = \varrho_0 N^2 h/g$. Feltételezve, hogy h arányos L_M -mel,

$$h \sim \frac{\varrho_0 u^{*3}}{N^2 h \dot{h}}, \quad (7.49)$$

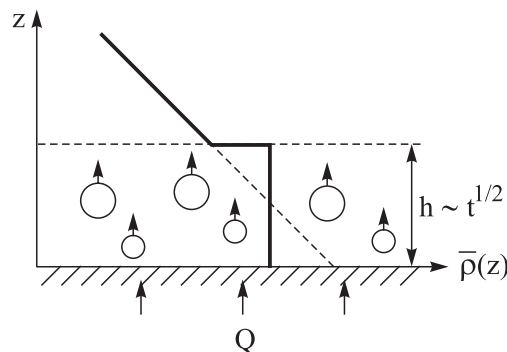
melyből $\dot{h} \sim h^{-2}$. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása az idő köbgyökével arányos, azaz

$$\boxed{h \sim \frac{u^*}{N^{2/3}} t^{1/3}.} \quad (7.50)$$

A keveredési réteg vastagsága az idő egyharmadik hatványával nő, annál gyorsabban, minél nagyobb a sűrűlási sebesség és minél kisebb a Brunt–Väisälä-frekvencia.

A planetáris határrétegnek csak egy *alréteget* definiálja a Monyin–Obukhov-hossz. A $z < |L_M|$ tartományban az ún. *kényszerített* konvekció zajlik, melyben a nyírásnak is jelentős szerepe van. A Monyin–Obukhov-hossznál jóval magasabb rétegekben, ahol $z \gg |L_M|$, a nyírás már elhanyagolható, és a konvekció hasonló jellegű, mint a nem nyírt közegekben, ún. *szabad* konvekció. Ez az a tartomány, melyet a termikek jellemeznek. Ennek megfelelően a planetáris határréteg teljes h vastagsága más módon változik, mint a keveredési rétegé (7.9 ábra).

Ezt abból becsülhetjük meg, hogy Q hőárammal fűtött egységnyi alapterületű közeg t idő alatt Qt hőt vesz fel, mely kifejezhető az ennek következtében kialakuló ΔT hőmérsékletváltozással is: $Qt \sim \varrho_0 c_p h \Delta T$. A hőmérsékletkülönbség $\Delta \varrho_0 = \alpha \varrho_0 \delta T$ sűrűségkülönbségnek felel meg.



7.9 ábra: A földfelszín gyors nappali felmelegedése következtében a turbulens határreteg alulról fűtött közegnek tekinthető. A felszálló termikek hatására egyre mélyebb szintekig homogénizálódik az eredetileg egyenletesen rétegzett közeg. A planetáris határreteg h vastagsága ezért időben nő.

Mivel a kezdeti N Brunt–Väisälä-frekvencia adott, $N^2 \sim g\alpha\Delta T/h$ ahol h a planetáris határreteg vastagsága. Ezek szerint $\Delta T \sim h$, tehát a vastagság négyzete arányos az idővel. Ebből

$$h \sim \left(\frac{\alpha g Q}{\rho_0 c_p N^2} \right)^{1/2} t^{1/2} \sim \frac{(\alpha g \overline{w'T'})^{1/2}}{N} t^{1/2}. \quad (7.51)$$

A teljes planetáris határreteg tehát gyorsabban változik, mint a keveredési réteg. Az időfüggés ugyanolyan típusú, mint az izolált termikek által homogén közegben elért szintmagasságé (l. 7.36). A változási sebesség egyenesen arányos a hőáram négyzetgyökével, és fordítva a Brunt–Väisälä-frekvenciával.

7.7 Homogén, izotróp turbulencia

A falaktól, akadályoktól, hőforrásoktól távol a turbulens fluktuációk a helytől és az iránytól is függetlenek, a turbulencia homogén és izotróp. Ekkor az összes nemdiagonális Reynolds-feszültség és az átlagos turbulens hőáram is zérus: $\overline{v_i v_j} = 0$, ha $i \neq j$, és $\overline{v_i T'} = 0$ minden i -re. A sebesség \mathbf{v}' turbulens fluktuációit a $\overline{\mathbf{v}'^2} = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ szórásnégyzet jellemzi. Ezt célszerű felbontani a különböző hullámszámokból adódó járulékokra, és azt írni, hogy

$$\overline{\mathbf{v}'^2} = \int E(k) dk. \quad (7.52)$$

Mivel \mathbf{v}'^2 a mozgási energiával arányos, az $E(k)$ mennyiség neve az *energiaspektrum*. Az $E(k)\Delta k$ mennyiség jelenti a k és $k + \Delta k$ hullámszámtartományba eső perturbációk átlagos energiáját. Mivel Δk arányosnak vehető k -val, $E(k)$ az $l \sim 1/k$ méretű örvények átlagos kinetikus energiája, osztva az k hullámszámmal. A turbulencia izotróp mivolta abban is tükröződik, hogy az E mennyiség nem függ a hullámszámvektor irányától: az energiaspektrum csak a hullámszám k abszolútértékének függvénye.

Az energiaspektrum központi szerepet játszik a turbulencia jellemzésében. Általános alakja hatványfüggvény:

$$E(k) \sim k^{-m}, \quad (7.53)$$

ahol m pozitív szám. A kitevő konkrét értéke és a hatványalak érvényességi tartománya függ a közeg dimenziójától és attól is, hogy forgatott rendszerről van-e szó. Ezért, mielőtt az energiaspektrumot meghatároznánk, felsorolunk néhány olyan tulajdonságot, mely mindenfajta homogén és izotróp turbulens rendszerre jellemző.

A tapasztalat szerint

- A turbulencia egymásba ágyazott, hosszú életű örvények egymásra épülő rendszere, *hierarchiája*. Az örvények nemlineáris kölcsönhatásuk miatt idővel instabillá válnak, felbomlanak, de helyükön újak képződnek.
- Az *energiabetáplálás makroszkópikus skálán* történik, és valamilyen $l_0 \sim 1/k_0$ méretű örvényeket hoz létre (k_0 az ilyen örvények hullámszáma). Ha pl. a turbulenciát rács kelti, akkor l_0 a rácstávolság (7.1 ábra). Általában l_0 összemérhető a teljes L lineáris mérettel, de annál néhány nagyságrenddel kisebb is lehet. A betáplált energia a viszkozitás miatt disszipálódik, és ezért bizonyos idő után beállhat egy stacionárius állapot, azaz a fluktuáló mennyiségek statisztikai jellemzői, pl. szórásai időfüggetlenné válnak.
- Az $l \sim 1/k$ méretű örvény *karakterisztikus ideje* az örvény

$$\tau_l = l/v' \sim \frac{1}{kv'} \quad (7.54)$$

körülfordulási ideje. Itt v' az örvény két szélé közötti átlagos sebességkülönbség nagysága, azaz a $k \sim 1/l$ hullámhosszhoz tartozó sebességfluktuációk szórása. A v' jellegzetes sebesség tehát az l méret függvénye.

- A viszkozitásból adódó disszipatív *csillapítási idő*, a Navier–Stokes-egyenlet $\nu \Delta \mathbf{v}$ tagjából adódóan minden sebességkomponensre

$$\tau_d = \frac{1}{\nu k^2} \sim \frac{l^2}{\nu}. \quad (7.55)$$

A kétfajta jellegzetes idő hányadosa

$$\frac{\tau_d}{\tau_l} = \frac{lv'}{\nu}, \quad (7.56)$$

mely nem más, mint az l méretű örvény Reynolds-száma a v' sebességfluktuációval képezve. A teljes turbulens folyamat Re Reynolds-számát az energiabetáplálásra jellemző lineáris mérettel definiáljuk, azaz

$$Re \equiv \frac{l_0 v'_0}{\nu}, \quad (7.57)$$

ahol v'_0 az l_0 hullámhosszhoz tartozó sebességfluktuáció. Mivel ez a Reynolds-szám mindig nagy, sok olyan örvény létezik, melyekre $\tau_d \gg \tau_l$.

- Az l_d *disszipációs hossz* az a távolság, ahol a körülfordulási idő és a disszipációs idő azonossá válik:

$$l_d = \frac{\nu}{v'}. \quad (7.58)$$

Az ehhez a távolsághoz tartozó Reynolds-szám egységnyi. Ez a hossz tekinthető a legkisebb örvények méretének. Ezen a skálán igaz, hogy a $\nu \Delta v'$ viszkózus gyorsulás összemérhető a v'^2/l nagyságrendű advektív gyorsulással. A viszkozitás tehát csak az l_d skálán (vagyis a $k_d \sim 1/l_d$ disszipációs hullámszámnál) válik lényegessé. Ennél kisebb távolságokon a mozgási energia hővé alakul, az áramlás lamináris, örvények nincsenek jelen.

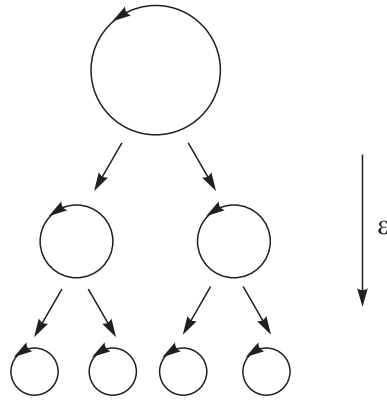
- A $L \gg l \gg l_d$ tartomány belsejében ezért létezik az l örvényméretnek egy széles tartománya, melyben az örvények körbefordulási ideje sokkal kisebb a disszipációs időnél, azaz, melyben az örvények gyakorlatilag ideálisoknak, a folyadék pedig *súrlódásmentesnek* tekinthető. Az ilyen örvényekre az Euler-egyenlet érvényes, és ennek megfelelően a rendszer energiája

megmarad. Az adott l méretű örvények energiája ezért egyszerűen átadódik a más méretű örvényekre. Ennek jellegzetes ideje is a τ_l körülfordulási idő. Ebben a tartományban a mozgási energia különböző méretű örvényeken, veszteség nélkül folyik át. Ez a jelenség az *energiakaszád*, az a hullámszám tartomány pedig, melyben érvényes, az ún. *tehetetlenségi tartomány*.

A felsorolt tulajdonságok, elsősorban az energiakaszád jelensége központi fontosságú a turbulencia megértésében. Az $E(k)$ energiaspektrum alakja a dimenzióra jellemző vonások beépítése után a fentiekből egyszerű megfontolással adódik.

7.7.1 Háromdimenziós turbulencia

A hétköznapi tapasztalat, pl. a csapból gyorsan kiömlő víz megfigyelése is azt sugallja, hogy a térbeli turbulens áramlásokban nagy örvények *kisebbekre* bomlanak (7.10, 7.1 ábra). A pontosabb vizsgálat is alátámasztja, hogy az energia a *nagy örvényekből a kisebbek felé áramlik*.



7.10 ábra: A háromdimenziós turbulenciában a nagy örvények egyre kisebbekre esnek szét. A rajtuk átfolyó ε energiafluxus az l_d disszipációs hosszának megfelelő legkisebb örvényméret eléréséig állandó. Az ábra adott előjelű örvényeket mutat, az ellenkező forgásúak természetesen hasonlóan bomlanak.

Ebben az ún. *direkt* energiakaszádban az energia a kis hullámszámoktól a nagyok felé halad. Mivel azonban a teljes energia megmarad, az időegység alatt átadott energiának, az ún. energiafluxusnak állandónak kell lennie, legalábbis a disszipációs hullámszám $k_d \sim 1/l_d$ eléréséig. Az összenyomhatatlanság miatt tekinthetjük az egységnyi tömegre eső mozgási energia fluxusát is, mert az is állandó. Jelölje ε ezt a fajlagos energiafluxust, melynek mértékegysége m^2/s^3 . Ha az energiabetáplálás a k_0 hullámszámon történik, akkor az annál jóval nagyobb hullámszámokra a turbulencia már homogénnek és izotrópnak tekinthető, és az energia megmarad a k_d disszipációs hullámszám eléréséig. A tehetetlenségi tartomány tehát

$$k_0 \ll k \ll k_d. \quad (7.59)$$

Mivel egy l méretű örvény a sebességfluktuációkból adódó v'^2 energiáját a τ_l körbefordulási idő néhányszorosa alatt adja le, az ε energiafluxus becsülhető mint

$$\varepsilon \sim \frac{v'^2}{l/v'} = \frac{v'^3}{l}. \quad (7.60)$$

A tehetetlenségi tartományban ε állandó, ezért az l méretű örvények sebessége és kiterjedése a

$$v' \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \sim (\varepsilon/k)^{1/3} \quad (7.61)$$

kapcsolatban vannak egymással. A disszipációs hosszt definiáló (7.58) összefüggésbe ezt behelyettesítve $l_d \sim \nu/(\varepsilon l_d)^{1/3}$, s innét

$$l_d \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (7.62)$$

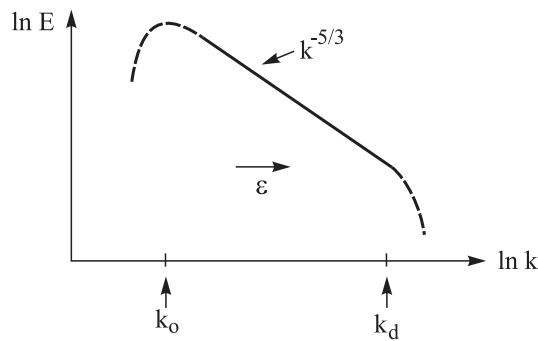
Ez a Kolmogorov-féle hossz, vagy Kolmogorov-mikroskála (A. N. Kolmogorov szovjet matematikus, aki a háromdimenziós turbulencia leírását 1941-ben alkotta meg). Laboratóriumi körülmények között ε értéke $100 \text{ m}^2/\text{s}^3$, s ezzel a disszipációs hossz mind vízben, mind levegőben $0,01 \text{ mm}$ körüli. A légkörben és az óceánban az energiafluxus kisebb (az időskálák nagyobbak), $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^3$, melyhez mm nagyságrendű mikroskála tartozik. Azt látjuk tehát, hogy a disszipáció még makroszkópikus, de nagyon kis távolságokon válik csak lényegessé! Mivel a gerjesztés lineáris mérete legalább 1 m (a környezeti áramlásokban több km is lehet), a (7.59) tehetetlenségi tartomány ennek megfelelően sok nagyságrendet foglal magába.

Az örvények kinetikus energiája (7.61) szerint $v^2 \sim (\varepsilon/k)^{2/3}$, az egységnyi hullámhosszra eső energia pedig v^2/k nagyságrendű. Ennek megfelelően az (7.52)-vel definiált energiaspektrum

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (7.63)$$

Ez a híres *Kolmogorov-spektrum*, melyet a mérések is alátámasztanak² (7.11 ábra). Összehasonlításként érdemes megemlíteni, hogy egy termodinamikai egyensúlyban lévő rendszerben (pl. ideális gázban) a k hullámszámhoz tartozó kinetikus energia k^2 -tel arányos, ezért az $E(k)$ energiaspektrum a hullámszámnak mindenképpen pozitív hatványa. A kapott negatív kitevő azt mutatja, hogy a turbulens áramlás a termikus egyensúlytól igen távol esik.

Az energiaspektrum a betáplálási hullámszám környékén természetesen eltér a fenti hatványalaktól, hiszen ott a turbulencia nem homogén és izotróp. Ugyanígy eltér a $k_d \sim 1/l_d$ Komogorov-hullámszámnál nagyobb tartományban, ahol a disszipáció miatt az energiafluxus már nem állandó.



7.11 ábra: A háromdimenziós turbulencia energiaspektruma. k_0 és $k_d \sim (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ az energiabetáplálási és a disszipációs (Kolmogorov-) hullámszám. A $k^{-5/3}$ hatványviselkedés a $k_0 \ll k \ll k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A tehetetlenségi tartomány hosszát az l_0/l_d hányados jellemzi. A Reynolds-szám (7.57) értékét és az energiafluxus (7.60) kifejezését használva azt kapjuk, hogy

$$\frac{l_0}{l_d} \sim Re^{3/4}. \quad (7.64)$$

²A $-5/3$ -os értéktől alig eltérő kitevővel.

A hossz tehát a Reynolds-szám pozitív hatványával arányos, a tehetetlenségi tartomány tehát a $Re \gg 1$ esetben igen széles (a Reynolds-szám tipikus laboratóriumi értéke 10^6 , környezeti értéke pedig 10^{12}). A disszipációs hossznál kisebb skálán az áramlás egyszerű, ahol újabb örvény már nem keletkezik, ezért az ilyen kis távolságon néhány adat is elég a sebességtér jellemzéséhez. Minden örvény meghatározása újabb adatokat igényel. Ezért $(l_0/l_d)^3$ -nal arányos a turbulencia leírásához szükséges változók száma. A turbulens viselkedés tehát

$$Re^{9/4} \quad (7.65)$$

-nel arányos számú közönséges differenciálegyenlettel írható le, s ez a szám a $Re \rightarrow \infty$ határesetben végtelenhez tart.

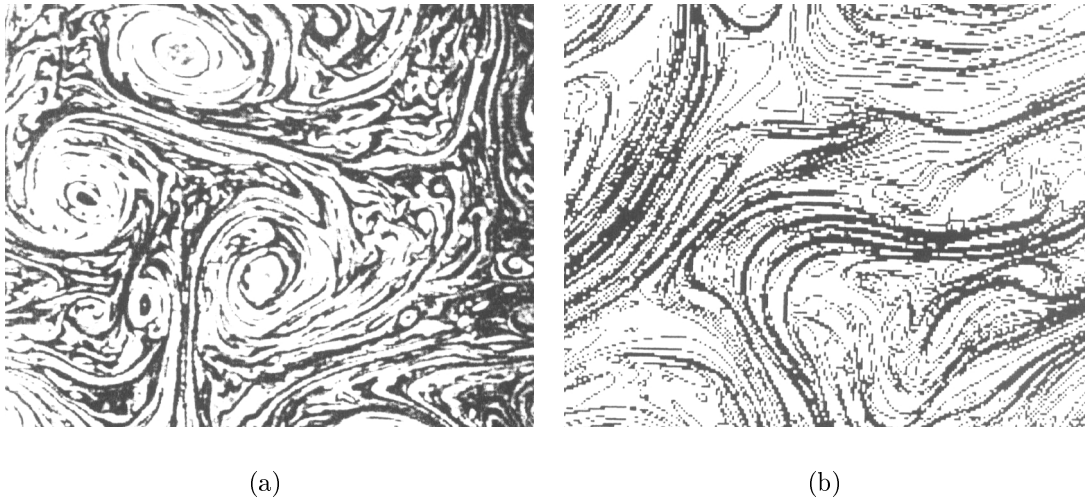
Az örvények körülfordulási ideje tekinthető az adott méretű objektumok *előrejelezhetőségi* idejének is, hiszen néhány körülfordulás után az örvény átadja energiáját és megszűnik. A fentiekből az l hullámhosszhoz tartozó előrejelzési idő

$$\tau_l \sim \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}. \quad (7.66)$$

A nagyobb objektumok hosszabb ideig jelezhetők előre. A légköri $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$ -nel számolva $l = 1\text{m}$ -re 10 s, az 1 km-es skálán pedig 100 s adódik. A planetáris határrétegbeli háromdimenziós turbulencia néhány napra pontos előrejelzése tehát reménytelen. A laboratóriumi érték sokkal rövidebb: az 1 m-es skálán 0,1 s.

7.7.2 Kétdimenziós turbulencia

A kétdimenziós áramlásokban fellépő turbulencia alapvetően különbözik a háromdimenzióstól. Ez jól látható pl. a mozgó szappanhártyában megfigyelt mintázatokban is (7.12 ábra). Ugyanakkor az időjárási helyzetet mutató műholdfelvételek is elsősorban a kétdimenziós turbulencia jellegzetességeit mutatják (7.13 ábra).



7.12 ábra: Kétdimenziós turbulencia áramló szappanhártyában. a) Nagy örvények. b) Az örvények közötti szálas szerkezet [Tabeling].

Az eltérés egyik fontos oka, hogy kétdimenzióban az \mathbf{u} síkbeli sebességvektor $\zeta \equiv \text{rot}_z \mathbf{u}$ örvényessége ideális folyadékban a mozgás során *megmarad*. Ebből következik, hogy az *ensztrófiának* nevezett ζ^2 négyzetes örvényesség is megmarad. A új megmaradási tétel miatt a folyadék



7.13 ábra: A Föld sugaránál jóval kisebb skálán a környezeti áramlások a kétdimenziós turbulencia jellegzetességeit mutatják: nagy örvények a Kanári-szigetek mögött a felhőkben kirajzolódó Kármán-féle örvénysorokban (2000. április 24.). A kép jobb oldalán Afrika nyugati partvonala látható [daac.gsfc.nasa.gov/CAMPAIGN_DOCS/OCDST/vanKarman_vortices.html].

számára mintegy kevesebb lehetőség marad, mozgása korlátozottabb. A kétdimenziós turbulencia ezért szelídebb, mint a háromdimenziós. Ez természetesen nem zárja ki azt, hogy a kétdimenziós turbulencia is erősen véletlenszerű és nemlineáris jelenség.

A teljes ensztrófia megmaradásából következik, hogy a ζ' örvényességfluktuációkból alkotott $\overline{\zeta'^2}$ mennyiség, azaz a fluktuációkból adódó átlagos ensztrófia is megmarad ideális folyadékban. A mozgási energia spektrumához hasonlóan definiálható egy $Z(k)$ ensztrófiaspektrum a

$$\overline{\zeta'^2} = \int Z(k)dk \quad (7.67)$$

összefüggéssel. Itt $Z(k)\Delta k$ jelenti a k és $k + \Delta k$ hullámszámtartományba eső perturbációk átlagos ensztrófiáját. Mivel az örvényesség a sebesség deriváltját tartalmazza, az ensztrófia és az \mathbf{u}^2 kétdimenziós sebességfluktuációk $E(k)$ energiaspektruma között fennál a

$$Z(k) = k^2 E(k) \quad (7.68)$$

kapcsolat.

A két mennyiség együttes megmaradása új helyzetet teremt. Tételezzük fel, hogy a k_0 hullámszámnál betáplált energia két hullámszámtartományba, a $k_1 < k_0$ és a $k_2 > k_0$ hullámszámú örvények környékére tevődik át. Meg szeretnénk tudni, hogy melyik örvény energiája és ensztrófiája nagyobb. A megmaradási feltételekből (azonos Δk -kat választva)

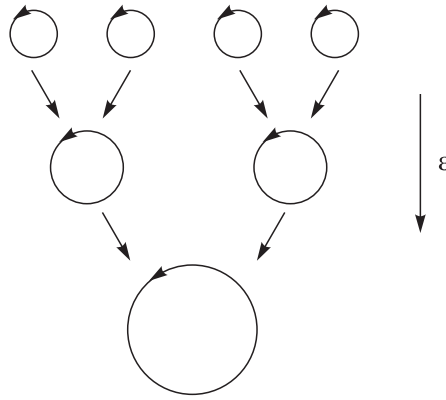
$$E(k_0) = E(k_1) + E(k_2),$$

$$Z(k_0) = k_0^2 E(k_0) = k_1^2 E(k_1) + k_2^2 E(k_2) = Z(k_1) + Z(k_2). \quad (7.69)$$

Ebből

$$E(k_1) = \frac{k_2^2 - k_0^2}{k_0^2 - k_1^2} E(k_2). \quad (7.70)$$

Ha például $k_1 = k_0/2$ és $k_2 = 2k_0$, akkor $E(k_1) = 4E(k_2)$ és $Z(k_1) = Z(k_2)/4$. A $k_1 = k_0/n$ és $k_2 = nk_0$ esetben ($n > 1$) $E(k_1) = n^2E(k_2)$ és $Z(k_1) = Z(k_2)/n^2$. Az energia nagy része tehát a *kisebb* hullámszámok felé, az ensztrófia pedig főleg a *nagyobb* hullámszámok felé adódik át. A kétdimenziós turbulencia alapvető vonása, hogy az örvények nem kisebbekre szakadnak, az energia ezért nem az egyre kisebb örvények felé halad, hanem az örvények spontán módon *összeolvadnak* és ezzel a nagy energiasűrűségű tartományok az egyre nagyobb skálák felé tolódnak. Itt a viszkozitás hatása lényegtelen. Az örvényekben ugyanakkor enyhe a nyírás, a nagy örvények kevés ensztrófiát tartalmaznak. A nyírás az örvények peremén erős, ahol kevés a mozgási energia, és ezek a tartományok az örvények növekedése miatt egyre kisebbekké válnak, miközben ensztrófiájuk nő. Összefoglalva, a *kis örvények nagyobbakká egyesülnek*, míg az örvényesség a köztük levő nyírási tartományra szűkül (7.14 ábra). Ezért jellemző a kétdimenziós turbulenciára a nagy örvények és a köztük levő szálas szerkezetek megjelenése, mely szappanhártya kísérletekben is jól megfigyelhető (7.12b ábra).



7.14 ábra: A kétdimenziós turbulenciában a kis örvények egyre nagyobbakká olvadnak össze. A rajtuk átfolyó ε energiafluxus állandó. Az ábra adott előjelű örvényeket mutat, az ellenkező forgásúak természetesen hasonlóan egyesülnek.

A kétdimenziós turbulenciában *két* tehetetlenségi tartomány alakul ki, az energiabetáplálási hullámszám két oldalán:

$$1/L \ll k \ll k_0, \quad k_0 \ll k \ll k_d. \quad (7.71)$$

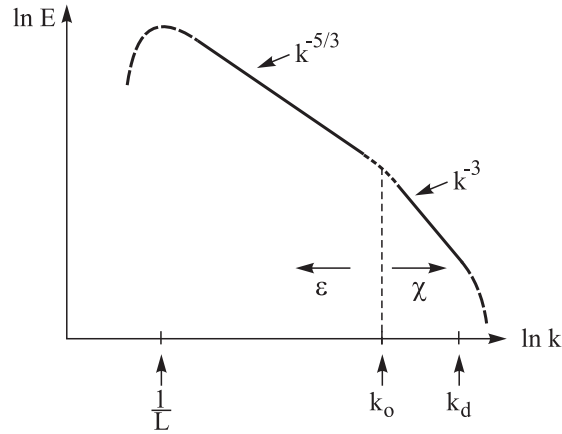
A kisebb hullámszámokhoz tartozóban történik az *inverz energiakaskád*, melynek során az energiafluxus állandó, de az energia most a nagyobb méretek irányába halad. A nagy hullámszámok tartományában az ensztrófia bomlik a nagyobb méretektől a kisebbek irányába, itt egy (direkt) *ensztrófiakaskád* figyelhető meg.

Az inverz energiakaskádhoz tartozó $E(k)$ spektrum ugyanazzal a gondolamenettel határozható meg, mint a háromdimenziós turbulenciában. Ezért (7.63) itt is érvényes, azaz az energiaspektrum kitevője $m = 5/3$, de az inverz energiakaskád a teljes L lineáris méret és az l_0 energiabetáplálási hossz között figyelhető meg (7.15 ábra).

Az ensztrófiakaskád során az ensztrófiaátadás állandó, legalábbis a disszipációs hossz eléréséig, ugyanakkor az energiafluxus elhanyagolható. Jelölje χ az *ensztrófiafluxust*, azaz az időegység alatt átadott ensztrófiát. Laboratóriumi kísérletekben $\chi = 0,1 - 1 \text{ s}^{-3}$, a légkörben pedig $\chi = 10^{-15} \text{ s}^{-3}$.

Mivel az örvényesség karakterisztikus értéke $u'/l \sim 1/\tau_l$, ahol u' a kétdimenziós sebességfluktuációk szórása az l hosszon, és az ensztrófiatartalom a τ_l idő alatt átadódik, írhatjuk, hogy

$$\chi \sim \frac{u'^3}{l^3}. \quad (7.72)$$



7.15 ábra: A kétdimenziós turbulencia energiaspektruma. k_0 és $k_d \sim (\chi/\nu^3)^{1/6}$ az energiabetáplálási, ill. a disszipációs hullámszám. Az energiakaszád $k^{-5/3}$ hatványviselkedése a $1/L \ll k \ll k_0$, az ensztrófiakaszádot jellemző k^{-3} alak pedig a $k_0 \ll k \ll k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A tehetetlenségi tartományban χ állandó, ezért az ensztrófiakaszádban

$$u' \sim \chi^{1/3} l \sim \chi^{1/3} k^{-1}, \quad (7.73)$$

azaz a sebesség egészen másképpen függ a mérettől, mint az energiakaszádban. Az energiaspektrum most is u'^2/k nagyságrendű, melyből

$$E(k) \sim \chi^{2/3} k^{-3}. \quad (7.74)$$

Az ensztrófiakaszádban tehát az energiaspektrum jóval meredekebb, kitevője $m = 3$. Ez az eredmény is jól egyezik a kísérleti tapasztalattal. A két kaszád jelenlétének a felismerése, ill. a spektrumok meghatározása R. Fjortoft norvég meteorológus (1953), ill. R. H. Kraichnan amerikai (1967) és G. K. Batchelor angol (1969) fizikus nevéhez fűződik.

Érdeemes hangsúlyozni, hogy mindkét tehetetlenségi tartomány csak akkor létezik, ha az energiabetáplálás $l_0 \sim 1/k_0$ lineáris mérete jóval kisebb a teljes L hosszánál, és ugyanakkor sokkal nagyobb az l_d disszipációs hosszánál. Attól függően, hogy l_0 értéke mekkora, az egyik vagy másik spektrum elnyomódhat. Ha például l_0 közel esik a teljes L mérethez, akkor az inverz kaszád nem alakul ki.

A (7.58) disszipációs hosszra most (7.61) alapján $l_d \sim \nu/(\chi^{1/3} l_d)$, s ebből

$$l_d \sim \left(\frac{\nu^3}{\chi} \right)^{1/6}. \quad (7.75)$$

Az atmoszférában a disszipációs hossz 1 – 10 m-nek adódik, a laboratóriumban pedig 1 mm-nek.

Mivel az ensztrófiafluxus a betáplálási skála adataival a $\chi \sim u_0'^3/l_0^3$ összefüggésben van, az ensztrófiakaszád tehetetlenségi tartományának hossza

$$\frac{l_0}{l_d} \sim Re^{1/2}. \quad (7.76)$$

A turbulenciában résztvevő szabadági fokok száma $(l_0/l_d)^2$ -vel becsülve

$$\sim Re. \quad (7.77)$$

Az enyhébb Reynolds-szám függés is arra utal, hogy a kétdimenziós turbulencia szelídebb, mint a háromdimenziós.

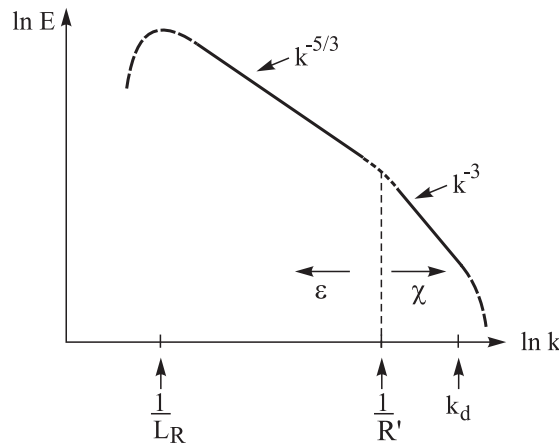
A fentiekből az l hullámszámhoz tartozó előrejelzési idő

$$\tau \sim \chi^{-1/3}, \quad (7.78)$$

mely most független az objektumok hosszától. A laboratóriumi előrejelzési idő 1 s körüli. A légköri ensztrófiafluxus értékét felhasználva néhány napos előrejelzési idő adódik, összhangban a meteorológiai gyakorlattal. A kétdimenziós turbulencia tehát jobban megjósolható, mint a háromdimenziós, és éppen ez a tulajdonság teszi lehetővé a (néhány napra) sikeres időjáráselőrejelzést.

7.7.3 Geosztrofikus turbulencia

A nagyskálájú környezeti áramlásokat a sekélyfolyadék egyenletek (ill. az ebből következő kvázigeosztrofikus egyenlet) jó közelítéssel leírják. Ezekben előfordul ugyan gyenge fel- vagy leáramlás, a dinamika mégis a kétdimenziós viselkedéssel rokon, mert a $q = H(\zeta + f)/h$ potenciális örvényesség megmaradó mennyiség. Turbulens esetben ennek q' fluktuációkból képezhető a $\overline{q'^2}$ potenciális ensztrófia, ill. ennek $Z(k)$ spektruma. A második megmaradó mennyiség jelenléte ugyanazt a megkötést jelenti, mint a kétdimenziós turbulencia esetén. Ezért a környezeti, geosztrofikus turbulenciában is kettős kaszkád lehet jelen: egy inverz energiakaszkád és egy direkt potenciális ensztrófiakaszkád. A megfelelő spektrumok alakjai is ugyanazok: az elsőben $m = 5/3$ az exponens, a másodikban $m = 3$ (7.16 ábra).



7.16 ábra: A geosztrofikus turbulencia energiaspektruma. $k_0 \approx 1/R'$ és $k_d \sim (\chi/\nu^3)^{1/6}$ a baroklin instabilitás energiabetáplálási hullámszáma, ill. a disszipációs hullámszám. Az energiakaszkád $k^{-5/3}$ hatványviselkedése az $1/L_R \ll k \ll 1/R'$ (L_R a Rhines-hossz), az ensztrófiakaszkádot jellemző k^{-3} alak pedig a $1/R' \ll k \ll k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A természetben a geosztrofikus turbulenciát a baroklin instabilitás gerjeszti. Mivel annak jellegzetes hullámhossza az R' belső Rossby sugár, az energiabeviteli távolságskála most $l_0 \sim R'$, vagyis a hullámszám $k_0 \sim 1/R'$. Az ennél kisebb távolságokon az ensztrófiakaszkád zajlik, a nagyobb távolságokon viszont az örvények egyre nagyobbakká történő összeolvadása figyelhető meg.

A görbület, a β -hatás miatt azonban a növekvő örvények nem növekedhetnek a bolygó sugarának eléréséig, hanem a szélességi körök mentén megnyúlnak, és egy kritikus méret elérése után

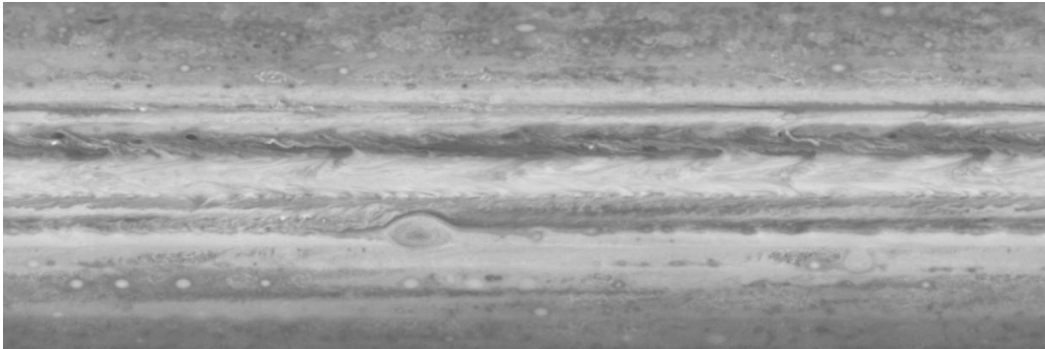
nagy amplitudójú nemlineáris Rossby-hullámokba mennek át. Ez a méret az

$$L_R \equiv \sqrt{\frac{u'}{|\beta|}} \quad (7.79)$$

Rhines-féle skála (1975), ahol $u' \equiv \sqrt{\mathbf{u}'^2}$ a kétdimenziós sebesség szórása³.

Az l méretű örvény $k \sim 1/l$ hullámszámával kialakuló, $|\omega_0| = \beta/k$ frekvenciájú x -irányban haladó, zárt felszínű Rossby-hullám (l. (3.35)) periódusideje $T \sim 1/(l\beta)$. Amennyiben ez sokkal nagyobb az örvény $\tau_l \sim l/u'$ élettartamánál, akkor nincs idő Rossby-hullámok keltésére. Ha viszont $T < \tau_l$, akkor a nagy turbulens örvényekből Rossby-hullámok válnak le. Ennek feltétele $l > L_R$. A Rhines-skála az a legkisebb hullámhossz, mellyel Rossby-hullámok megjelenhetnek. A turbulens energia tehát az L_R -nél nagyobb skálán hullámkeltésre fordítódik, azaz ott az energia kicsatolódik a turbulenciából. Az inverz kaszkád tehát az $1/L_R$ hullámszámnál *megszűnik*.

A geosztrofikus turbulenciára az egészen nagy skálán a szélességi körök mentén elnyúló hullámzónák, jetek jellemzők, melyek vízszintes kiterjedése L_R (7.17 ábra). Ezzel a tulajdonsággal összhangban vannak az óriásbolygók, a Jupiter vagy a Szaturnusz atmoszférájának felső, néhányszor 10 km vastagúnak becsült aktív felső rétegében megfigyelhető zonális jetek. A Jupiter esetében közepes szélességeken a β -paraméter $\beta_J = 2\Omega_J \sin(\pi/4)/R_F = 2 \cdot 10^{-12} \text{ 1/(ms)}$. A $u' = 100 \text{ m/s}$ átlagos sebességszórással $L_{R,J} = 7000 \text{ km}$.



7.17 ábra: A Jupiter légkörében megfigyelhető zonális áramlások és a (Föld-méretű) Nagy Vörös Folt a geosztrofikus turbulencia jellegzetességeit mutatják [antwrp/gsf.nasa.gov/apod/ap010215.html].

Ugyanakkor az örvények egyesülési és növekedési tendenciája a Nagy Vörös Folt (7.17 ábra) magyarázatául is szolgálhat: az úgy tekinthető, mint az összeolvadt örvények végállapota (melyből még éppen nem keletkezett Rossby-hullám). Az óriásbolygók atmoszférája tehát a mindkét kaszkádot tartalmazó geosztrofikus turbulencia természetben előforduló példái.

A földi viszonyok között a Rhines-skála a légkörben 1000, az óceánban pedig 100 km nagyságrendű ($u' = 10$ ill. $0,1 \text{ m/s}$ és $\beta = 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$). A belső Rossby-sugár és dimenziótlan számok segítségével a Rhines-skála a következőképpen fejezhető ki:

$$L_R = R' \sqrt{\frac{Fr'^2}{RoBe}}, \quad (7.80)$$

³Az u' helyett a U átlagsebességgel képzett hasonló távolság fellépet már a zonális áramlásokban kialakuló struktúrák jellemző méreteként (l. 3.7, 3.10, 10.1 fejezet)

ahol Fr' az u' -vel képzett belső Froude-szám, Ro a Rossby-szám, Be pedig a dimenzótlan β paraméter. Mivel a Földön $Fr' \sim Ro \sim Be$, a Rhines-féle hossz óhatatlanul a belső Rossby-sugár nagyságrendjébe esik. Ezért az inverz kaszkád nem tud kifejlődni. A légkörben a belső Rossby-sugár amúgyis összemérhető a Föld sugarával, ráadásul a domborzati viszonyok is erős perturbációs szerepet játszanak, így az óriásbolygókra jellemző zonális áramlások nem figyelhetők meg. A földi körülmények között a geosztrofikus turbulenciát az ensztrófiakaszkád dominálja. A nagy örvények, ciklonok, anticiklonok, óceáni gyűrűk a belső Rossby-sugár gerjesztési skáláján kialakulnak, de összeolvadásukra helyhiány vagy a peremfeltételek miatt a Földön nincs mód.

A geosztrofikus turbulencia (a turbulencia többi fajtájával együtt) ma is igen aktívan kutatott terület. Számos kérdés vár még tisztázásra, mint például a belső hullámokkal és azok megtörésével való kapcsolat, vagy a domborzati egyenetlenségek hatása.