

Környezeti áramlások

Tél Tamás

ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

KÉZIRAT

Megjegyzések, javaslatok, ábrákkal kapcsolatos észrevételek, stb.
a tel@general.elte.hu címre küldendő.

2003. július

Contents

Bevezetés	ix
I Alapismeretek	1
1 Forgatott homogén közegek áramlása	3
1.1 A Rossby-szám	4
1.2 A Coriolis-hatás	6
1.3 A Rossby-szám kicsinységének jelentése	8
1.4 A hidrodinamikai mozgásegyenlet	9
1.5 A dimenziótlan alak	11
1.6 Dinamikai nyomás	13
1.7 Gyorsan forgatott folyadék	14
1.7.1 Oszlopos áramlás, a Taylor–Proudman-tétel	14
1.7.2 A geosztrofikus egyensúly	16
1.8 A kvázigeosztrofikus közelítés	20
1.9 Tehetetlenségi körmozgás	21
1.10 Tehetetlenségi hullámok	22
1.10.1 Síkhullám megoldás	22
1.10.2 Fázis-, és csoportsebesség	25
2 A sekélység hatása	29
2.1 A forgatott sekély folyadék egyenletei	31
2.2 A dimenziótlan egyenlet	34
2.3 A potenciális örvényesség megmaradása	35
2.4 Gyorsan forgatott sekély folyadék: a geosztrofikus egyensúly	37
2.5 Kvázigeosztrofikus mozgás: a Rossby-hullám	39
2.5.1 Szemléletes kép	39
2.5.2 Lineáris elmélet	41
2.6 Szabad felszínű Rossby-hullámok	43
2.7 A kvázigeosztrofikus egyenlet	46
2.8 Tehetetlenségi gravitációs (Poincaré-) hullámok	47
2.9 Kelvin-hullámok	49
2.10 Nemlineáris felszíni hullámok, szolitonok	52

3	A görbület hatása	57
3.1	Földrajzi koordináták, a lokális rendszer	59
3.2	Az f_0 -sík közelítés	61
3.3	A β -sík közelítés	62
3.4	A Sverdrup-összefüggés	64
3.5	Planetáris hullámok	65
3.6	Az általános légköri zónális áramlásai	67
3.7	Rossby-hullámok zónális áramlásban	68
3.8	A domborzat hatása zónális áramlásokra	69
3.8.1	Geosztrofikus közelítés	69
3.8.2	Nemgeosztrofikus eset	70
3.8.3	Alkalmazások	72
3.9	Domborzati egyenetlenségek által gerjesztett Rossby-hullámok	73
3.9.1	Szemléletes kép	73
3.9.2	Lineáris elmélet	74
3.10	Partra merőleges áramlások, nyugati peremáramlatok	75
3.11	A kvázigeosztrofikus egyenlet a β -síkon	77
4	A viszkozitás hatása	79
4.1	Az Ekman-szám	81
4.2	Az Ekman-féle határréteg	82
4.2.1	Szemléletes kép	82
4.2.2	A gyorsan forgatott határeset	83
4.2.3	Peremfeltételek	85
4.3	Az alsó határréteg	86
4.3.1	A sebességeloszlás	86
4.3.2	Az Ekman-pumpálás	87
4.3.3	A felpörgetési idő	88
4.4	A felső határréteg	89
4.4.1	A sebességeloszlás	89
4.4.2	Az Ekman-transzport, fel- és leáramlások	91
4.4.3	Ekman-pumpálás, nyírás okozta örvényességváltozás	93
4.5	A sekélyfolyadék egyenletek szélnyírással	95
4.6	A szélhajtotta óceán	96
4.6.1	Általános megfontolások	96
4.6.2	Egyszerű óceánmodell	97
5	Rétegzett közegek áramlása	101
5.1	Folyadékok rétegzettsége	103
5.2	A Brunt–Väisälä-frekvencia	105
5.3	A hidrodinamikai egyenletek kis sűrűség-ingadozás esetén, a Boussinesq-közelítés	107
5.4	A hidrodinamikai egyenletek függőleges rétegzettség esetén	108
5.5	A dimenziótlan alak, a belső Froude-szám	109

5.6	Analógia a forgatott folyadékkal	110
5.7	Belső hullámok	111
5.7.1	Síkhullám megoldások	111
5.7.2	Fázis és csoportsebesség	112
5.7.3	A törési törvény, elhajlás, inverzió	114
5.8	Hegy mögötti hullámok (lee waves)	118
5.8.1	Szemléletes magyarázat	118
5.8.2	Lineáris elmélet	120
5.9	Belső hullámok sekély folyadékban, normálmódusok	121
5.10	Kétrétegű közegek	123
5.10.1	Kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika	123
5.10.2	Belső hullámok két közeg határán	124
5.10.3	Megjegyzések	126
5.11	A redukált sekélyfolyadék-modell	127
5.12	Szuperkritikus áramlások	128
5.13	A hidraulikus ugrás és a torlópólya (bore) jellemzése	130
5.14	Gravitációs áramlatok	133
5.15	Belső szolitonok	135
5.16	Kelvin–Helmholtz-(KH)-instabilitás	137
5.16.1	Szemléletes kép	137
5.16.2	Lineáris stabilitásvizsgálat	139
5.17	Termikus konvekció	141
6	A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadékokra	145
6.1	A forgatott kétrétegű sekély folyadék egyenletei	147
6.2	A folytonos rétegzettségű forgatott sekély folyadék egyenletei	149
6.3	Hullámok forgatott kétrétegű sekély folyadékban	150
6.4	Hullámok állandó függőleges rétegzettségű forgatott, sekély folyadékban	153
6.5	Geosztrofikus egyensúly kétrétegű sekély folyadékban	157
6.6	Frontok forgatott rendszerekben, a Margules-összefüggés	159
6.7	A geosztrofikus egyensúly beállása	162
6.8	Geosztrofikus egyensúly folytonos rétegzettségű folyadékban	164
6.8.1	A termikus áramlás	165
6.8.2	A Golf-áramlat gyűrűinek forgása	167
6.9	Rossby-hullámok kétrétegű közegekben: szemléletes kép	168
6.10	A kvázigeosztrofikus egyenlet kétrétegű közegekben	169
6.11	Lineáris Rossby-hullámok kétrétegű közegekben	170
6.12	A baroklin instabilitás: szemléletes kép	171
6.13	A baroklin instabilitás kétrétegű közegekben	174
6.14	A baroklin instabilitás kísérleti kimutatása	177

7	Turbulencia	181
7.1	Az átlagolt hidrodinamikai egyenletek	183
7.2	A turbulens határréteg	185
7.3	A logaritmus sebességprofil	187
7.4	Turbulencia rétegzett közegekben	188
7.5	Könnyű közegek turbulens áramlása	190
7.5.1	Termikék	190
7.5.2	Turbulens csóvák (plume-ok)	192
7.6	A turbulens határréteg rétegzett közegben.	193
7.7	Homogén, izotróp turbulencia	196
7.7.1	Háromdimenziós turbulencia	198
7.7.2	Kétdimenziós turbulencia	200
7.7.3	Geosztrofikus turbulencia	204
II	Kiegészítő olvasmányok	207
8	Forgatott homogén közegek áramlása	209
8.1	Az örvényvektor egyenlete	209
8.2	A cirkuláció változása	210
9	A sekélység hatása	213
9.1	Kvázigeosztrofikus dinamika a sekélyfolyadék egyenletekből	213
9.2	Hullámok döntött aljzatú sekély folyadékban	214
9.3	Szolitonok és a KdV-egyenlet	215
10	A görbület hatása	221
10.1	Nyugati peremáramlatok a kvázigeosztrofikus egyenletből	221
10.2	Egyenlítői dinamika	222
10.2.1	Az egyenlítői β -sík és Rossby-sugár	222
10.2.2	Egyenlítői Kelvin-hullámok	222
10.2.3	Egyenlítői Poincaré- és Rossby-hullámok	223
10.3	Gömbi hidrodinamika	226
10.3.1	Gyorsulások gömbi koordinátákban	226
10.3.2	Hidrodinamika a forgó Földön	228
11	A viszkozitás hatása	229
11.1	Ekman-transzport az alsó határrétegben	229
11.2	A Stommel-modell	230
11.3	A viszkózus folyadék kvázigeosztrofikus egyenlete	232
11.4	A viszkozitás hatása a Rossby-hullámokra	233
11.5	Viharhullámok	234

12 Rétegzett közegek áramlása	237
12.1 Állóhullámok, tólagások (seiche)	237
12.2 Kettős diffúziós konvekció	239
12.2.1 Általános megfontolások	239
12.2.2 A kettős diffúziós konvekció egyenletei	244
12.3 A potenciális sűrűség és potenciális hőmérséklet	244
13 A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadéokra	251
13.1 Partmenti feláramlások	251
13.2 A kvázigeosztrofikus egyenlet folytonos függőleges rétegzettségű közegben	253
13.3 Rossby-hullámok folytonos rétegzettség esetén	256
13.4 A baroklin instabilitás folytonos rétegzettségű közegben	259
III Függelék	263
14 Összefoglalás	265
14.1 A természetes közegek anyagi paraméterei	265
14.2 A mozgásegyenletek	266
14.3 Dimenziótlán számok	270
14.4 Közelítések	271
14.5 Hullámtípusok	272
14.6 Jellegzetes távolságok	274
14.7 Irodalom	275

Bevezetés

Környezeti áramlás természetes közegeink, a levegő és a víz bármilyen, nagy anyagmennyiséget érintő mozgása. E jelenségekkel az emberi léptéknél jóval nagyobb, kilométeres vagy annál hosszabb távolságkála társul, mely gyakran akár a több 1000 km-t is elérheti, azaz összemérhetővé válhat a Föld sugarával. A környezeti áramlásokkal kapcsolatos térbeli struktúrák jól megfigyelhetők műholdfelvételeken. Példaként egy ciklon örvénylő felhőrendszerét, ill. a Golf-áramlatot és gyűrűit láthatjuk az 1., 2. ábrákon.

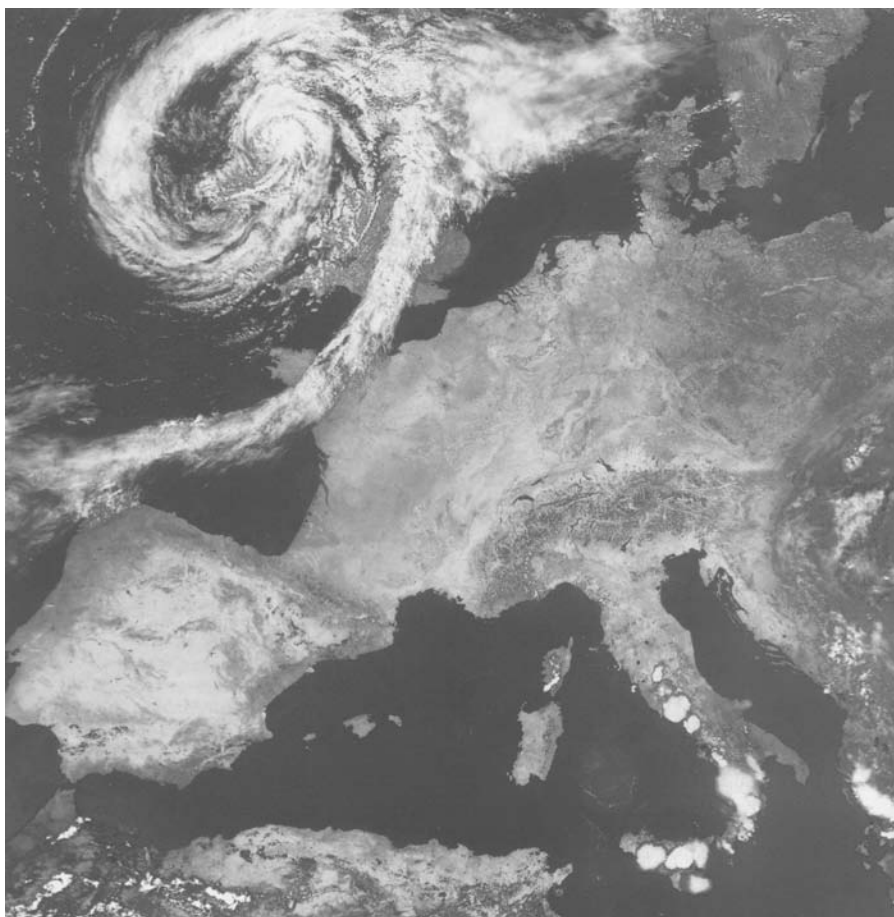
Az áramlásokhoz tartozó időskála még bőven emberi léptékű: óra, esetleg nap nagyságrendű. Ebből adódik az egész jelenségkör egyik érdekessége: általunk jól megfigyelhető és érzékelhető időbeli változásokkal jár, annak ellenére, hogy az áramlás térbeli viszonyairól, a nagy méretek miatt nem lehet közvetlen tapasztalatunk. Nem kétséges, hogy a környezeti áramlások is a hidrodinamika témaköréhez tartoznak, csak más távolság- és időskálán, mint a szokásos, laboratóriumi hidrodinamika jelenségei, melyek kiterjedése méter nagyságrendű, és időben néhány másodperc, illetve perc alatt zajlanak le.

Történetileg a légkör és az óceánok dinamikájának vizsgálata két külön tudomány, mai nevükön a dinamikus meteorológia és a fizikai óceanográfia keretében kezdődött meg a XX. század elején. A 30-as, 50-es években már alapvető jelentőségű felismerések születtek. Ezekhez feltűnően nagy számú skandináv tudós járult hozzá, részben a sarkkutató expedíciók eredményei által vezérelve. A korai eredmények azonban jelentőségük ellenére nem kerültek be a fizikusi köztudatba. A 60-as években kezdődött meg annak a felismerése, hogy a dinamikus meteorológia és a fizikai óceanográfia hidrodinamikai része között igen erős az átfedés. Ez annak tulajdonítható, hogy számos fontos jelenség független az áramló közeg anyagi összetételétől. A légkör és a vizek áramlását, és ezek közös vonásait leíró tudomány a geofizikai folyadékdinamika (GFD) nevet kapta, melyre az utóbbi időben egyre gyakrabban alkalmazzák a környezeti áramlások fizikája elnevezést is. A leírt jelenségek univerzálisak, azaz más környezetben is előfordulhatnak, így pl. más bolygók légkörében vagy a Föld magjában.

A hagyományos laboratóriumi hidrodinamikával szemben a környezeti hidrodinamika legfontosabbak új vonásai:

- *forgó rendszerhez kötött, ezért a dinamikai leírásban a tehetetlenségi erők, elsősorban az eltérítő erő, a Coriolis-erő jelenléte alapvető,*
- *rétegzett rendszer, melyben az egyes, közel vízszintes rétegek különböző sűrűségűek,*
- *sekélyfolyadék rendszer, melynek mélysége sokkal kisebb vízszintes méreténél (hiszen a légkör legfontosabb alsó rétege, a troposzféra, és az óceánok átlagos vastagsága csak néhány km),*
- *gömbi rendszer, melyben a nagyskálájú jelenségek szempontjából a Föld görbülete nem hanyagolható el.*

A környezeti áramlások fent említett vonásai számos olyan jelenségre vezetnek, melyek a hagyományos hidrodinamikában elképzelhetetlenek. Ilyen például az a tény, hogy az áramlások nem

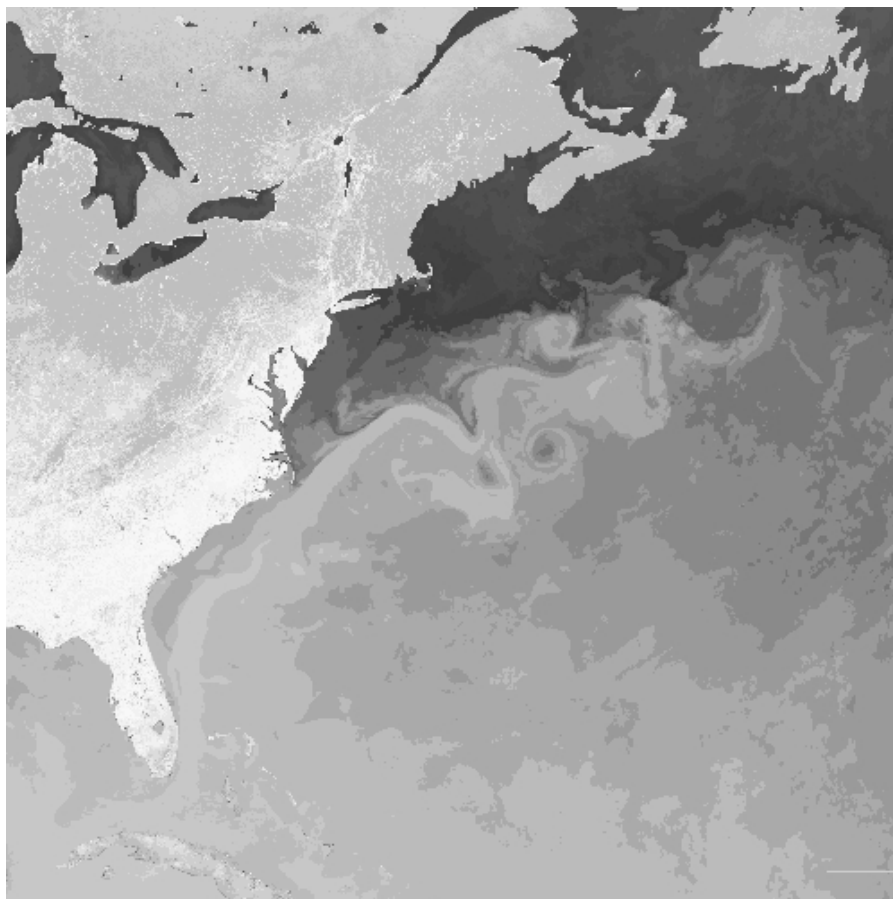


1 ábra: Nagyskálájú környezeti áramlás a légkörben. Űrhajófelvétel egy Nagy-Britannia feletti ciklon felhőrendszeréről, melyben a légtömegek az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban forognak [European Space Agency, Ahrens].

a nyomáskülönbség irányába, hanem arra közel merőlegesen zajlanak. Néhány nap periódusidejű és több országnyi kiterjedésű hullámok is kialakulhatnak, melyek a légkörben időjárásunk elsődleges alakítói. A felszín közelében a sebességvektor nemcsak nő, hanem el is fordul a magassággal. Az óceáni víztömegek nem a szél irányába, hanem arra merőlegesen mozdulnak el. A sűrűségkülönbség következtében kívülről láthatatlan belső hullámok alakulnak ki, és a frontokban jelentős sebességugrás figyelhető meg a frontvonallal párhuzamosan is! Szinte minden nagy jelenségkör kapcsán előbb-utóbb nemlineáris hatásokkal találkozunk (külső és belső szolitonok, torlópulver, hidraulikus ugrás). Ezekkel instabilitások társulnak, melyek mind a turbulencia felé vezetnek, s nagy skálán a kétdimenziós turbulencia jellegzetességeit mutatják, melyben az örvények egyre nagyobbakká olvadnak össze.

A környezeti áramlások iránti érdeklődés nemzetközi szinten állandóan erősödik. Ez nemcsak annak tulajdonítható, hogy egyre erősebb a társadalmi igény a környezeti problémák kezelésére, hanem annak is, hogy egy új tudományág, a nemlineáris dinamika jelentős szerepet játszhat a jelenségek megértésében. Példaként csak a szennyezések terjedése során előforduló fonalas, önhasonló mintázatokat említjük, melyek a kaotikus rendszerek fraktál tulajdonságai által válnak magyarázhatóvá. Ebben az új szemléletben a környezeti áramlások vizsgálata a hidrodinamika és a dinamikai rendszerek fizikájának együttes alkalmazását jelenti.

Ezen összetett jelenségkör leírása óhatatlanul közelítésekben alapszik. Így van ez annak ellenére, hogy a hidrodinamikai egyenletek egzaktul ismertek, hiszen nemlinearitásuk miatt általános



2 ábra: Nagyskálájú környezeti áramlás az óceánban. Műholdfelvétel a Golf-áramlatról. Miután elhagyja az amerikai kontinenst, az áramlat kígyózó (meanderező) alakzatot vesz fel, melyről mintegy 100 km átmérőjű, s több évig is jól azonosítható gyűrűk szakadnak le. Közülük az áramlástól délre szakadók a környezetüknél hidegebbek és pozitív forgásúak (ciklonálisak), az északiak pedig melegek és negatív forgásúak (anticiklonálisak) [rs.gso.uri.edu/amy/eastcoast_june84.gif].

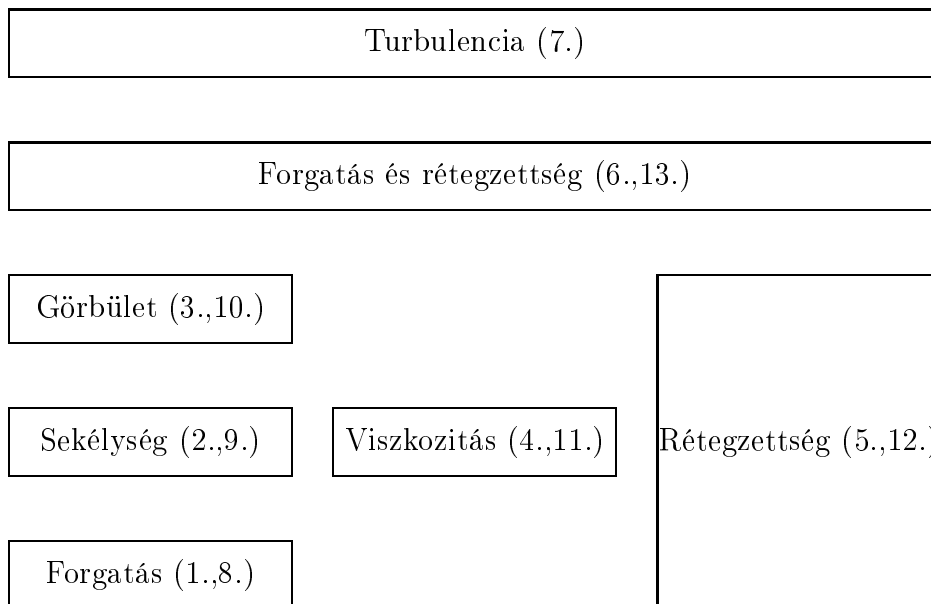
megoldásuk reménytelen. A környezeti áramlások fizikája így jó példa egy komplex probléma természettudományos megközelítésére, mely megfigyelésen, a számadatok ismeretén, egyszerűsített elméleti leíráson, modellalkotáson, a modell érvényességi körének meghatározásán, majd a tapasztalathoz igazodó finomításán alapul.

Hogyan olvassuk a jegyzetet?

A jegyzet többféleképpen olvasható. Azok számára, akik gyors kvalitatív áttekintést szeretnének kapni a jelenségköréről, az első hét nagy fejezet dőlt betűvel szedett bevezető oldalain ismeretterjesztő szinten foglaljuk össze az tudnivalókat, a jegyzet képanyagára támaszkodva. A fő szöveg feltételez elemi hidrodinamikai ismereteket (sebességtér, nyomás, örvényesség, a Navier–Stokes-egyenlet, vízhullámok, stb), a kísérleti fizika, ill. a tanár szakos hallgatók elméleti fizika tárgyának szintjén. Minden összefüggés levezetését megadjuk, a lehető legegyszerűbb matematikai eszközökkel. Az "Alapismeretek" című első rész a környezeti áramlásokkal kapcsolatos legfontosabb, s a hagyományos hidrodinamika szempontjából legmeglepőbb jelenségek megértéséhez szükséges elméleti háttérrel adja. A jegyzet egészében mindenütt bemutatunk számadatokkal alátámasztott konkrét környezeti példákat. A második rész a fő szöveg gondolatmenetét kiegészítő témákat dolgoz fel, és matematikailag valamivel bonyolultabb levezetéseket is tartalmaz. Olvasható az első résszel

párhuzamosan, vagy az után is. A harmadik rész összefoglaló táblázatokkal segíti a tanultak rendszerezését.

Az anyag a különböző hatások egymásraépülését mutatja be (l. 3 ábra). Először a forgatás okozta új vonásokat vizsgáljuk homogén folyadékokban. Eztán rátérünk arra, hogy a sekélység, ill. a Föld görbülete hogyan befolyásolja a forgatott közeg mozgását. Az általában gyenge, de nem teljesen alhanyagolható viszkozitás mindezeket a hatásokat egységesen értelmezhető rendszerbe fogja. A rétegzettség következményeit először forgatás nélkül tekintjük át, ezért ez a rész az előzőek ismerete nélkül is olvasható. Az ezután következő anyagrészt egyaránt tekinthető a rétegzett rendszerek forgatása vagy a forgatott rendszerek rétegződése következtében létrejövő jelenségek bemutatásának. E két hatás a környezeti áramlásokban összemérhető. A 7. fejezet a különböző típusú turbulens áramlások kvalitatív áttekintését adja.



3 ábra: Az egyes fejezetek anyagának egymásraépülése

Alapvető kérdés, hogy lehetséges-e a természetszerűen nagyskálájú környezeti áramlások kísérleti modellezése laboratóriumban. A hidrodinamikai hasonlóság törvénye szerint ennek szükséges feltétele az, hogy az egyes hatásokat jellemző dimenziótlan számok azonosak legyenek a valóságos és a laboratóriumi áramlásban. A jegyzet minden fejezete egy-egy dimenziótlan szám, ill. a velük kapcsolatos jelenségek köré épül. Kimutatjuk, hogy e számok valóságos értékei forgókádák és sűrűséggrétegzett közegek (legegyszerűbben sós víz) használatával laboratóriumban is megvalósíthatók: a környezeti áramlások hűen modellezhetők emberi méreteken.

Az ELTE Fizikai Tanszékcsoportja Horváth Viktor, Jánosi Imre, Szabó Gábor, és a szerző javaslatára 1998 őszén létrehozta a Kármán Környezeti Áramlások Laboratóriumot hallgatói mérések és a témával kapcsolatos kísérleti kutatás beindítására. A jegyzet egyik célja, hogy a Laboratóriumban bemutatandó jelenségekkel kapcsolatos elméleti háttérrel megadja. A kísérleteket mutató képanyag nagy része a Kármán Laboratóriumban készült.

Köszönetnyilvánítás:

A szerző köszönetét fejezi ki a Kármán Laboratóriumot kialakító kollégáinak az ottani közös kísérleti munkáért. Külön köszönet illeti Jánosi Imrét lényeglátó megjegyzéseiért és sokoldalú segítségéért. Palla László és Szabó Gábor, valamint Czifrik Xénia, Dolowschiák Márk, Király

Andrea, Szathmári Bajkó Ildikó és Vörös Zoltán építő javaslataikkal nagyban hozzájárultak a jegyzet érthetőségének javításához. A vonalas ábrák rajzolása Barabás István munkája. A képek letöltését, szkennelését és szerkesztését Hunyadi Viktória végezte. Köszönjük Horváth Ákosnak és Józsa Jánosnak, hogy rendelkezésünkre bocsátották felvételeiket, adataikat.

I. rész

Alapismeretek

1. fejezet

Forgatott homogén közegek áramlása

A légköri és óceáni áramlatokban megfigyelhető jellegzetes, nagyméretű örvénylő mozgások (1. 1., 2. ábra) létezése elsősorban a közeg forgatottságának következménye. A forgatott rendszerben zajló áramlások új vonásai azzal kapcsolatosak, hogy a valódi erőkhöz kívül ilyenkor lényeges szerepet játszanak a tehetetlenségi erők is. A centrifugális erő csak a helytől függ, s hozzáadható a tömegvonzási erőhöz; együtt biztosítják a forgatott rendszer adott helyén érvényes gravitációs gyorsulást. A Coriolis-erő merőben más típusú, mert sebességfüggő. Eltérítő hatású: az óramutató járásával ellentétes, pozitív forgatás esetén mindig a sebességtől jobbra mutat, arra merőlegesen (1.1 ábra). A két tehetetlenségi erő közül tehát a Coriolis-hatás a lényegesebb, s meglepő jelenségekre vezet (1.2 ábra). A vízszintes síkban zajló, kezdetben sugaras áramlást a Coriolis-erő eltéríti és ezzel körköröséget alakít ki benne (1.3 ábra): cirkuláció tehát születhet vagy eltűnhet a forgatott folyadékban. Ez az elsődleges oka a légköri és óceáni örvénylő mozgások létrejöttének.

A Coriolis-erő fontosságát az ún. Rossby-szám méri, mely megadja a Coriolis-erő súlyát a hidrodinamikai mozgást okozó eredő erőhöz képest. Az olyan homogén közegbeli áramlásnak, amely egy függőleges tengely körül állandó Ω szögsebességgel forgatott edény (1.4. ábra) teljes L méretet kitölti és vízszintes átlagsebessége U , a Rossby-száma

$$Ro = \frac{U}{2|\Omega|L}.$$

A Földre gondolva, edényünket egyelőre az Északi-sarkra ($\Omega > 0$) vagy a Déli-sarkra ($\Omega < 0$) képzeljük; a Föld görbületét most még nem vesszük figyelembe. A Coriolis-erő akkor jelentős, ha a Rossby-szám kicsi. Az egynél kisebb Rossby-szám nemcsak a forgatás fontosságára utal, hanem arra is, hogy az áramlás örvényessége gyenge a forgatási szögsebességhez képest. Az azonos Rossby-számú, peremtől távoli áramlások hasonlóan viselkednek, akármekkora is sebességük, kiterjedésük, és forgatásuk gyorsasága külön-külön. A Rossby-szám függetlensége a sűrűségtől arra utal, hogy a forgatás szerepe egyaránt fontos mind vízben, mind levegőben.

Nagyléptékű környezeti áramlások adataival és a Föld naponkénti 1 fordulatnyi szögsebességével a Rossby-szám 0,1 körüli vagy annál kisebb értéknek adódik. Az ilyen áramlásokban tehát a Coriolis-erő dominál, az a hatás, mely hétköznapi életünkben olyan csekély, hogy (a Foucault-inga eltérülése kivételével) nem is veszünk róla tudomást. Ugyanakkor a viszkozitás hatása elenyésző, a közeg a peremek (domborzat, hegyek, partvonalak) körüli keskeny sávok kivételével ideális, súrlódásmentes folyadéknak tekinthető.

A Rossby-szám kicsinysége miatt a nagyskálájú környezeti áramlások megértésében érdemes úgy eljárni, hogy először a szélsőséges esetet, az igen gyorsan forgatott közeg viselkedését értjük meg. Ilyenkor kialakulhat egy, az együttforgó rendszerben időfüggetlen, stacionárius áramlás. Ebben a nyomási erő, mely a nyomás térbeli változásával, gradiensevel arányos, pontosan kiegyenlíti a Coriolis-erőt. Ezt az egyensúlyt nevezzük geosztrofikusnak, a Föld forgásából származónak

(akkor is, ha laboratóriumi forgatott kísérletben áll be), s a kialakuló áramlást geosztrofikus áramlásnak.

Mivel a Coriolis-erő merőleges a sebességre és egy egyenesbe esik a nyomásgradienssel, az áramlás sebessége merőleges a nyomás változásának irányára (1.8 ábra). Éles ellentétben hétköznapi tapasztalatunkkal, miszerint az áramlások arra haladnak, ahol kisebb a nyomás, a geosztrofikus áramlás a nyomásváltozásra merőleges: állandó nyomású felületek, izobárok mentén történik. Pozitív forgatási irány esetén az áramlás irányába nézve, jobb oldalra esik a magasabb nyomás. Ez az orientációs szabály nem más, mint a szelek irányára vonatkozó régi meteorológiai megfigyelés: a bárikus széltörvény. Ha az északi félgömbön háttal állunk a szélnek, akkor az alacsony nyomású légtömegek tőlünk balra helyezkednek el (1.9 ábra).

Körkörös, közepén minimummal rendelkező nyomáseloszlás esetén, az áramlás pozitív körjárással (1.10 ábra) folyja körül az alacsony nyomású központot. Ez megfelel egy ciklonban tapasztalható mozgásnak, mely pozitív Ω esetén az óramutató járásával ellentétes, negatív Ω esetén azzal megegyező. Nagy nyomású hely körül fordított, anticiklonális áramlás alakul ki. A ciklonok és anticiklonok tehát első közelítésben geosztrofikus egyensúlyban levő áramlások. (Egy nagyon gyorsan forgó bolygón akár időben változatlanok is lehetnének. A földi szögsebességből adódó 0.1 körüli Rossby-szám azonban elég nagy ahhoz, hogy ne zárja ki a középpontok lassú mozgását és a ciklonok és anticiklonok keletkezését vagy kihalását.) A gyenge viszkozitás következtében kialakuló összeáramlást (5.fejezet) is figyelembe véve megkapjuk a ciklon és anticiklonok jellegzetes spirális áramlási képét (1.11,1.12 ábra).

A gyors forgatás másik fontos következménye az, hogy az áramlást kétdimenzióssá teszi. A Coriolis-erő mindig a vízszintes síkban hat, s ezért a vele egyensúlyba került nyomási erővel együtt ebben a síkban alakítja ki az áramlást. Akármilyen mély is a folyadék, geosztrofikus egyensúlyban az egymás alatti vízszintes rétegek azonosan mozognak, az áramlás oszlopos szerkezetű. A nyomás magasságfüggése ezért a hidrosztatikai egyensúly törvényét követi.

Az oszlopos szerkezet kialakulása több egyszerű kísérlettel is demonstrálható. A gyorsan forgatott folyadékba juttatott festék rövid idő alatt függőleges felületek mentén oszlik szét (1.5 ábra). Az edény aljához rögzített korongot az áramlás megkerüli, a felette levő folyadékoszlop mintegy hozzáragad a koronghoz (1.6 ábra), de nem a viszkozitás, hanem a gyors forgatás következtében. Analóg jelenségek a természetben is megfigyelhetők: a parttól távoli tengeráramlatok helyenként több km mélységig azonosan mozognak, a légköri mozgások közel kétdimenziósak (1.7 ábra).

A forgatott folyadék kis zavarait az ún. tehetetlenségi hullámok továbbítják, melyek frekvenciája legfeljebb a forgatási frekvencia kétszerese lehet, és függ a terjedés irányának a vízszintessel bezárt szögétől. Ez a hullám nem hangszerű, hanem diszperzív, azaz benne a különböző hullámhosszú összetevők más és más sebességgel terjednek. Ennek következtében a lokalizált hullámalakok mindig szétfolynak (1.17 ábra). A tehetetlenségi hullám olyan erősen diszperzív (1.15 ábra), hogy az energia a fázissebességre merőlegesen terjed (1.18-1.20 ábra).

Forgatott közegek bármely pontja körül kialakulhat olyan (nem geosztrofikus) részecskemozgás, mely pontosan körpályát követ, a forgatási iránnyal ellentétesen, és éppen a forgatási periódusidő felének megfelelő periódussal (1.13 ábra). Ez az ún. tehetetlenségi körmozgás időnként megfigyelhető a tengeri víztömegek mozgásában is (1.14 ábra). Ugyanakkor ez az alapja a tehetetlenségi hullámoknak is. Függőleges terjedés esetén, amikor a hullám frekvenciája a forgatási frekvencia kétszerese, a részecskék tehetetlenségi körmozgást végeznek a hullám sebességterében, ferde terjedéskor pedig a fázissebességre merőleges síkban (1.16 ábra).

1.1 A Rossby-szám

Bevezetésként definiáljuk az egyenletesen forgatott homogén folyadéokra jellemző legfontosabb paramétereket, és azokból levezetünk egy jellemző dimenziótlan mennyiséget, a Rossby-számot.

(C-G. Rossby (1898-1957) svéd meteorológus, a geofizikai folyadékdinamika egyik megalapozója, a forgatással kapcsolatos sok jelenség első leírója.)

Tekintsünk egy homogén folyadékot, melyet időben állandó Ω forgási szögsebességgel forgatunk a függőleges tengely körül. A szögsebesség előjele pozitív, ha a forgatás az óramutató járásával ellentétes irányú. A Föld forgása az északi-féltékről nézve tehát pozitív szögsebességű. Legyen L az áramlás lineáris mérete a vízszintes síkban, és U az áramlás jellegzetes vízszintes sebességének nagysága az együttforgó rendszerben. Ezekből a paraméterekből közvetlenül alkothatunk két idő jellegű mennyiséget. A t_f forgatási idő arányos a forgási szögsebesség reciprokával:

$$t_f = \frac{1}{|\Omega|} \quad (1.1)$$

(a 2π -t arányossági tényezőt nem írjuk ki, mert dimenziós megfontolásról van szó). Az áramlás t_h hidrodinamikai idejét úgy becsüljük, mint

$$t_h = \frac{L}{U}. \quad (1.2)$$

Ha ez sokkal kisebb a forgási időnél, akkor az áramlást nyilván nem befolyásolja a forgás. Ilyenkor a forgás nagyon gyenge, és hatása sokkal hosszabb időskálán mutatkozik csak meg mint a hidrodinamikai idő. Ha viszont hosszabb az áramlás ideje, mint a forgási idő, akkor a forgatás szerepe lényeges az áramlásban.

A Rossby-szám a forgási és a hidrodinamikai idő t_f/t_h arányát adja meg. Szokásos definíciója¹

$$Ro \equiv \frac{U}{2|\Omega|L}. \quad (1.3)$$

Ha a Rossby-szám sokkal kisebb, mint 1, akkor a forgatás hatása dominál.

A Föld forgásának a szögsebessége $\Omega_F = 2\pi/\text{nap}$, a bolygónkon zajló áramlásokra nézve univerzális állandó:

$$\Omega_F = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/s}. \quad (1.4)$$

Ez nagyon alacsony frekvenciának felel meg. Hagyományos, nem forgatott laboratóriumi kísérletekben, ahol a lineáris méret m , a sebesség m/s nagyságrendű, a Rossby-szám 10^4 körüli, azaz ilyenkor a Föld forgásának hatása jogosan hanyagolható el².

Merőben más a helyzet nagy skálájú földi áramlásokban. Elsőként tekintsünk egy ciklont (1 ábra). A ciklonok több országnyi kiterjedésűek, tehát méretük vehető $L = 1000 \text{ km}$ -nek. Bennük az áramlás sebessége $U = 10 \text{ m/s}$ körüli (ez 36 km/óra sebességű szelet jelent). Ezekkel a paraméterekkel a Rossby-szám $Ro = U/(2\Omega_F L) = 0,07$.

Egy óceáni példa a Golf-áramlat leszakadó örvényeinek mozgása (2 ábra), melyek mintegy $L = 100 \text{ km}$ átmérőjűek, s bennük a kerületi sebesség $U = 1,3 \text{ m/s} = 5 \text{ km/h}$ (ugyanannyi, mint magának a Golf-áramlatnak a sebessége, mely a Duna áramlási sebességével megegyező). Ezzel $Ro = 0,09$. Az egész óceáni medencékre kiterjedő áramlások jóval lassabbak és egyben nagyobb kiterjedésűek. Jellegzetes adataik $U = 0,1 - 0,01 \text{ m/s}$, $L = 4000 \text{ km}$, ezért a hozzájuk tartozó Rossby-szám két-három nagyságrenddel kisebb.

¹A nevezőbeli 2-es faktort dinamikai megfontolások (l. (1.9)) indokolják.

²Ezért nem a Föld forgása az elsődleges meghatározója a háztartási vízfolyókban megfigyelhető forgásirányának (csak akkor lenne az, ha minden más hatást, pl. a peremekét egy erre a célra tervezett kísérletben gondosan kiküszöbölnénk).

Számos más példa is azt mutatja, hogy a *nagy skálájú környezeti áramlásokban a Rossby-szám egynél határozottan kisebb*, azaz azokban a forgatás hatása jelentős. Érdeemes megjegyezni, hogy olyan esetekben, amikor L összemérhető a Föld $R_F = 6370$ km sugarával, mint a ciklon példájában, a Rossby-szám kicsinysége egyszerűen azt jelenti, hogy az áramlás sebessége sokkal kisebb, mint az Egyenlítő menti $R_F \Omega_F = 1670$ km/h kerületi sebesség³

Érdeemes röviden megbecsülni az atmoszférával rendelkező bolygók jellegzetes áramlásainak Rossby-számait. A Vénusz sugara összemérhető a Földével ($R_V = 6050$ km), forgása viszont igen lassú: periódusideje 243 nap, azaz frekvenciája $\Omega_V = 3 \cdot 10^{-7}$ 1/s. $U = 10$ m/s felszíni szélesebességgel számolva az $L = 1000$ km-es skálán $Ro = 16$. A Vénusz áramlásaiban tehát a forgás nem játszik lényeges szerepet. A Mars sugara a földinek mintegy fele ($R_M = 3400$ km), forgásideje alig fél órával hosszabb egy napnál: $\Omega_M = 7 \cdot 10^{-5}$ 1/s. A tipikus szélesebesség itt is $U = 10$ m/s, mellyel az $L = 1000$ km-es skálán $Ro = 0,07$. A Jupiter sugara több, mint 10-szerese a Földének, keringési ideje viszont alig 10 óra: $\Omega_J = 2 \cdot 10^{-4}$ 1/s. Az áramlások jellegzetes lineáris mérete ezért egy nagyságrenddel nagyobbak, $L = 10000$ km-nek vehető, de a sebességek is nagyobbak, $U = 100$ m/s. Így összességében a Rossby-szám a Föld légkörére jellemzőnél valamivel kisebb, $Ro = 0,024$. A többi óriásbolygón az áramlások még gyorsabbak, sugaruk kisebb, de forgásidejük körülbelül ugyanakkora, ezért Rossby-számaik valamivel nagyobbak.

Végül megadjuk a Rossby-szám egy másik jelentését is. Ez az örvényesség fogalmával kapcsolatos. Egy áramlást a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességeloszlással jellemzünk, azaz megadjuk a sebességet minden \mathbf{r} pontban és t pillanatban. Ehhez egy $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ örvénytér is tartozik. Az $\boldsymbol{\omega}$ örvényesség nem más, mint a sebességtér rotációja ($\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$). Az örvényvektor dimenziója U/L , tehát ez a mennyiség éppúgy frekvencia egységeiben mérendő, mint a forgás szögsebessége. Átlaga becsülhető U/L -ként, s ezért írhatjuk, hogy

$$Ro = \frac{\text{átlagos örvényesség}}{2 |\Omega|}. \quad (1.5)$$

A Rossby-szám tehát az átlagos örvényesség és a forgási szögsebesség viszonyát is megadja.

1.2 A Coriolis-hatás

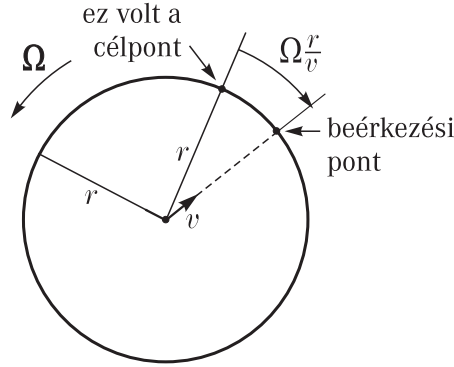
A forgatott rendszerben mozgó testek külső erőhatás nélkül is görbült pályán mozognak, hiszen a rendszer "elfordul" alattuk. Az *együttforgó* megfigyelő számára ez úgy értelmezhető, hogy a valódi erőkhöz kívül hatnia kell egy látszólagos, vagy tehetetlenségi erőnek is. A szabad mozgás pályájának görbületét okozó eltérítő erőt első leírójától Coriolis-erőnek nevezzük. A *pozitív* irányban forgó rendszerben az eltérülés *jobbra* történik. A test lemarad a koordináta-rendszer pontjaihoz képest, annál jobban, minél nagyobb az Ω forgatási szögsebesség (1.1 ábra).

A Coriolis-erő nagyságát legegyszerűbben egy Ω szögsebességgel forgatott r sugarú korong középpontjából v sebességgel elindított golyó mozgása alapján határozhatjuk meg. Elhanyagolható surlódás esetén a golyó $t = r/v$ idő alatt éri el a korong peremét, de nem abban abban a pontban, ahova elindulásakor vártuk volna, a korongon egyenesvonalú egyenletes mozgást feltételezve. Az eltérülés a korong t idő alatti Ωt szögelfordulásából adódik, mely a kerület mentén $r\Omega t$ távolságnak felel meg. Az eltérülés tehát arányos a szögsebességgel. Ez értelmezhető úgy is, mint egy gyorsulás következtében létrejövő elmozdulás. Egyenletes gyorsulást feltételezve, a kerületi gyorsulás $a_C t^2/2$ alakban írható, ahol a_C az eltérítő Coriolis-erő által okozott gyorsulás. Ebből

$$a_C = 2\Omega r/t = 2\Omega v. \quad (1.6)$$

³Kisskálájú környezeti jelenségben a Rossby-szám lehet nagy is. Ilyen pl. egy tornádó áramlása, ahol az átmérő esetenként néhány 100 méter, s $U = 40$ m/s-al számolva, a Rossby-szám 2000-nél is nagyobbak adódik.

A gyorsulás tehát arányos a sebességgel is, a Coriolis-erő csak mozgó testekre hat, értéke független a helytől.



1.1 ábra: Az Ω pozitív szögsebességgel forgatott r sugarú korongon v sebességgel sugárirányba meglökött golyó eltérése a Coriolis-erő következményeként értelmezhető. A peremen észlelt ívhosszeltérés a célponthoz képest $r\Omega r/v$, mert az álló koordinátarendszerbeli pálya (szaggatott vonal) $\Omega r/v$ szöggel fordult el a korongról nézve. Ezt ugyanennyi idő alatt egy $a_C = 2\Omega v$ nagyságú állandó kerületi gyorsulás, a Coriolis-gyorsulás hozná létre, mely a pillanatnyi sebesség irányától jobbra mutat.

A Coriolis-erő a mozgás sebességének abszolútértékét *nem* változtatja, *merőleges* a sebesség irányára, és nyilván merőleges a forgástengelyre is. Vektoriális írásmódban a \mathbf{v} sebességgel mozgó test Coriolis-gyorsulása

$$\mathbf{a}_C = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \quad (1.7)$$

Az $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebességvektor a forgástengely irányába mutat. A negatív előjel fejezi ki azt, hogy a gyorsulás a pillanatnyi sebességtől jobbra mutat pozitív forgatási szögsebesség esetén. Ha a forgástengely a z -tengely, s az x és y irányú sebességkomponenseket u -val, ill. v -vel jelöljük, akkor a Coriolis-gyorsulás komponensei

$$\mathbf{a}_C = (2\Omega v, -2\Omega u, 0). \quad (1.8)$$

Az x tengely irányú gyorsulás tehát a sebesség y -komponensével, az y irányú pedig az x komponens ellentettjével arányos.

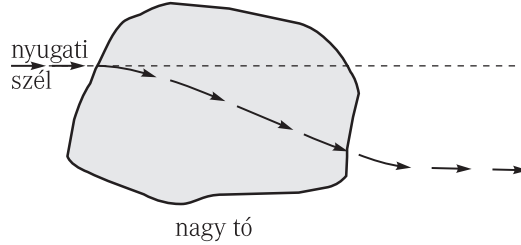
Az eddigiek alapján azt mondhatjuk, hogy a Rossby-szám az a_h hidrodinamikai gyorsulás és az a_C Coriolis-gyorsulás hányadosa. Az előbbi ugyanis az áramlási sebesség időbeli változása, s becsülhető mint U/t_h , mely a hidrodinamikai idő (1.2) kifejezése alapján $a_h = U^2/L$. Az a_h/a_C arány tehát a Rossby-szám:

$$Ro = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{Coriolis-gyorsulás}}. \quad (1.9)$$

Az U sebességgel nyugatra haladó test az L hosszúságú kelet-nyugati elmozdulás során δL távolsággal térül az Egyenlítő felé. Amennyiben az eltérés kicsi, a mozgás ideje $t = L/U$, és $\delta L = a_C t^2/2 = \Omega_F L^2/U$. A relatív eltérés tehát

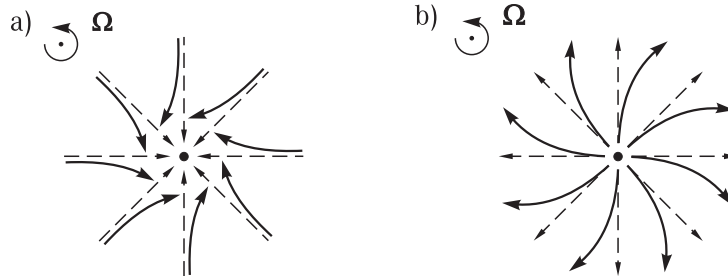
$$\frac{\delta L}{L} = \frac{\Omega_F L}{U} = \frac{1}{2Ro}. \quad (1.10)$$

A néhány km-es távolságokon, szokásos szélességgel az eltérés elhanyagolhatóan kicsi. A síkvidéki nagy tavak felett azonban az eltérés már jól megfigyelhető ($U = 10 \text{ m/s}$, $L = 2 \cdot 10^4 \text{ m}$ mellett $\delta L/L = 0,14$, l. 1.2 ábra). Még nagyobb skálán a Coriolis-erőnek tulajdonítható a mérsékelt égövben uralkodó nyugati szélirány is (l. 3.6 fejezet).



1.2 ábra: A nyugatról érkező szél az északi féltekén déli irányba fordul a síkvidéki tavakon történő áthaladásakor. A tó felett felgyorsuló áramlást a Coriolis-erő jobbra téríti el, amíg a túloldalra nem ér, ahol a felszíni surlódás ismét lelassítja.

A forgatott rendszerek egyik érdekes és fontos hidrodinamikai tulajdonsága, hogy bármilyen függőleges áramlás örvényességet hoz létre. Ha például valamely leáramlás egy adott szinten összefolyást okoz, mely kezdetben a középpont felé irányul, akkor a Coriolis-gyorsulás minden folyadékrezecskét eltérít. Így az eredetileg radiális áramlásban az erre az irányra merőleges mozgás, forgás, cirkuláció is megjelenik. A kezdetben örvénymentes áramlás *örvényessé* válik (1.3 ábra). Ez a folyamat fontos szerepet játszik a hurrikánok, másnéven trópusi ciklonok kialakulásában. A felszínen felmelegedett levegő gyors konvekciós feláramlása az északi féltekén mindig pozitív, a délin mindig negatív örvényességgel társul.



1.3 ábra: A le-, vagy feláramlás következtében adott szinten történő szétterülő áramlás nem maradhat sugárirányú a folyadékrezecskékre ható Coriolis-erő miatt. Pozitív forgásirány mellett összeáramlás pozitív cirkulációt vagy örvényességet hoz létre (a), szétáramlás pedig negatívát (b). A szaggatott vonalak a kezdeti (vagy a forgatás nélküli) áramlást mutatják.

1.3 A Rossby-szám kicsinységének jelentése

Kis Rossby-szám esetén gyorsan forgatott rendszerről van szó. A

$$Ro \ll 1 \tag{1.11}$$

feltétel azt jelenti, hogy az (1.1) forgási idő sokkal rövidebb az áramlás globális viselkedését jelentő (1.2) hidrodinamikai időnél, vagyis

$$|\Omega| \gg \frac{U}{L}. \tag{1.12}$$

Első hallásra ellentmondásnak tűnhet, hogy bár a Föld lassan forog, hidrodinamikája mégis egy gyorsan forgatott rendszeré. Laboratóriumban kis Rossby-számot biztosíthatunk, ha például egy $L = 1$ méteres edényt, melyben az áramlás sebessége $U = 1$ cm/s, percenként 1 fordulattal forgatunk. Ekkor $2|\Omega| = 0,2$ 1/s, s ezért $Ro = 0,05$. Ez a szögsebesség több mint ezerszer gyorsabb a Föld szögsebességénél. A látszólagos ellentmondás abban rejlik, hogy nem a laboratóriumi és a földi szögsebességet kell közvetlenül összehasonlítanunk, hiszen az áramlások egyéb adatai is mások. A dinamikai szempontból érvényes összehasonlításban a szögsebességet az adott rendszerbeli áramlás karakterisztikus frekvenciájához, U/L -hez viszonyítjuk. Tehát hiába kicsi az Ω_F számértéke (sokkal kisebb a hang frekvenciájánál), mégis sokkal nagyobb a környezeti áramlások jellegzetes frekvenciájánál.

A Bevezetésben említett tulajdonság, miszerint a földi környezeti áramlások időskálái emberi léptékűek, a távolságskálák viszont a méternél jóval hosszabbak, következik a Rossby-szám kicsinységéből és az $U = 5 - 50$ km/h tipikus áramlási sebességéből. Mivel $1/(2\Omega_F)$ körülbelül 2 óra, $Ro = 0,1$ esetén $L/U = 20$ óra, melyhez $L = 100 - 1000$ km tartozik.

A Rossby-szám örvényességgel kapcsolatos (1.5) jelentése alapján, Ro kicsinysége azt jelenti, hogy az áramlás örvényessége sokkal kisebb, mint a Föld forgási szögsebessége. Az örvényesség komponensei közül a forgástengellyel párhuzamos $\zeta \approx U/L = 2|\Omega|Ro$ vetület a legfontosabb. Gyorsan forgatott folyadékban tehát fennáll, hogy

$$|\zeta| \ll |2\Omega|. \quad (1.13)$$

E jelentés szerint tehát a gyengén örvényes áramlások tartoznak a kis Rossby-számú áramlások köré.

A Rossby-szám kicsinysége egyben az

$$a_C \gg \frac{U^2}{L} \quad (1.14)$$

feltételt adja. Ilyenkor tehát a Coriolis-gyorsulás jóval nagyobb az áramlási sebesség időbeli változásánál. A kis Rossby-szám határeset tehát időben *lassan* változó áramlásokat jelent. Körkörös áramlásokban, melyek sugara L nagyságrendű, U^2/L egyben a folyadékreszkek centrifugális gyorsulása, s a fentiek szerint az is kicsi.

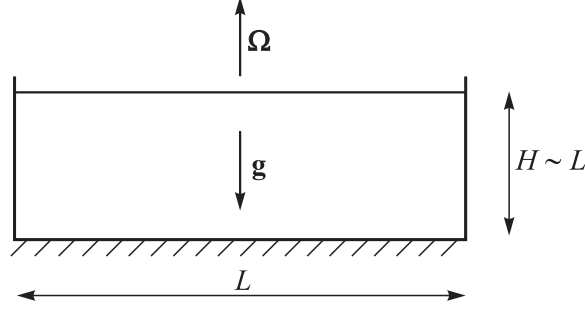
A Rossby-szám kicsinysége tehát egyszerre jelenti a forgatás gyorsaságát a hidrodinamikai időskálán, az örvényesség gyengeségét a forgatás szögsebességéhez viszonyítva, és azt, hogy a Coriolis-gyorsuláshoz képest a hidrodinamikai és a centrifugális gyorsulás elhanyagolható.

1.4 A hidrodinamikai mozgásegyenlet

A kvalitatív kép után rátérünk a mozgásegyenlet levezetésére állandó szögsebességgel forgatott rendszerben, melyben a Föld görbületét egyelőre nem vesszük figyelembe. Tekintsünk egy homogén, izotróp folyadékkal töltött vízszintes aljú edényt, melyet Ω állandó szögsebességgel forgatunk egy függőleges tengely körül (1.4. ábra). A Földre gondolva, képzeljük edényünket egyelőre az Északi-, ($\Omega > 0$) vagy a Déli-sarkra ($\Omega < 0$).

A hidrodinamikai mozgásegyenlet, a Navier–Stokes-egyenlet, úgy kapható meg, hogy a folyadékreszecskékre fölírjuk Newton törvényét. Célszerű a forgó rendszerhez rögzített leírást használnunk, mert a földi áramlások esetén a megfigyelő óhatatlanul együtt forog a közeggel. Legyen \mathbf{v} a sebességeloszlás ebben a leírásban. A folyadékreszecske együttforgó rendszerbeli $d\mathbf{v}/dt$ gyorsulásának és ρ sűrűségének szorzata az erősűrűségek (egységnyi térfogatra ható erők) eredőjével egyezik meg, amely az inerciarendszerbeli \mathbf{f} erősűrűségeken kívül tartalmazza a \mathbf{f}_t tehetetlenségi erősűrűséget is

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_t. \quad (1.15)$$



1.4 ábra: Folyadék függőleges tengely körül forgatott edényben. A H átlagos mélység összemérhető a vízszintes L mérettel.

Az inerciarendszerbeli \mathbf{f} erő a \mathbf{f}_{gr} gravitációs erő térfogati sűrűségből és a felületi erőkből adódik. Ezek a p nyomásból származó $\mathbf{f}_p = -\text{grad}p$ nyomási erő, és az $\mathbf{f}_v = \lambda\Delta\mathbf{v} + \bar{\lambda}\text{grad div}\mathbf{v}$ viszkózus erő. Viszkózus fékezés az egymás fölötti folyadékrétegek közötti sebességkülönbség, azaz a sebességinhomogenitások miatt lép fel. Itt λ a dinamikai viszkozitás, $\bar{\lambda}$ a második belső surlódási együttható, és $\Delta = \text{div grad}$ a Laplace-operátor. Összesen

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{gr} - \text{grad}p + \lambda\Delta\mathbf{v} + \bar{\lambda}\text{grad div}\mathbf{v}. \quad (1.16)$$

Az \mathbf{f}_t tehetetlenségi erő az $\mathbf{f}_C = \rho\mathbf{a}_C$ Coriolis-erő és a \mathbf{f}_{cf} centrifugális erő összege. A Föld forgásának időbeli lassulása vagy a Nap körüli pálya görbületéből adódó gyorsulás olyan kicsi, hogy az azokból adódó tehetetlenségi erők elhanyagolhatók. A (1.7) Coriolis-gyorsulást felhasználva a tehetetlenségi erők eredője

$$\mathbf{f}_t = -\rho 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{f}_{cf}. \quad (1.17)$$

A gravitációs és a centrifugális erősűrűség alakjaira külön-külön nincs szükségünk, hiszen a hidrodinamikai egyenletben az összegük szerepel, mely az egységnyi térfogatú folyadékelem súlya:

$$\mathbf{f}_{gr} + \mathbf{f}_{cf} = \rho\mathbf{g}, \quad (1.18)$$

ahol \mathbf{g} a helyi gravitációs gyorsulás.

A teljes mozgásegyenlet tehát

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \text{grad}p + \rho\mathbf{g} + \lambda\Delta\mathbf{v} + \bar{\lambda}\text{grad div}\mathbf{v}. \quad (1.19)$$

Mivel a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességet az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ hely és a t idő térmennyiségének tekintjük, a folyadékelem teljes gyorsulása a helyi és az advekción gyorsulás összege:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})\mathbf{v} \equiv \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + u\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + w\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}.} \quad (1.20)$$

A háromdimenziós sebességre a továbbiakban a $\mathbf{v} \equiv (u, v, w)$ jelölést használjuk. Amikor a vízszintes síkbeli komponensekről beszélünk csak, akkor az $\mathbf{u} \equiv (u, v)$ jelölést alkalmazzuk. A fenti (1.19,1.20) összefüggések jelentik a forgatott rendszerekben érvényes Navier–Stokes-egyenletet.

A légköri és a vízi jelenségek hasonlósága nyilvánvalóvá válik, ha elfogadjuk, hogy legtöbbször leírható az *összenyomhatatlan* folyadék közelítésben. Ez mindaddig helyes, amíg az áramlás sebessége sokkal kisebb, mint a hangsebesség (mely levegőben 1200 km/óra és vízben mintegy négyszer akkora, l. 14.1 táblázat). Mivel a legerősebb szélvihar is csak néhány száz km/óra sebességű, a feltétel rendszerint jó közelítéssel teljesül, és ezért a továbbiakban mindig összenyomhatatlan

közégeket vizsgálunk. Így természetesen bizonyos folyamatokat nem tudunk leírni, mint pl. a csapadékképződést⁴.

Összenyomhatatlan, homogén közegben a sűrűség térben és időben konstans, $\rho \equiv \rho_0$. Az anyagmegmaradást kifejező

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.21)$$

kontinuitási egyenletből látszik, hogy ekkor a sebességtérnek divergenciamentesnek kell lennie:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.22)$$

Összenyomhatatlan közegben ezért a második belső súrlódási együtthatóval kapcsolatos viszkozitási erő eltűnik. A ρ =állandó feltétel egyben a termodinamikai állapotegyenlet szerepét játssza.

Mivel \mathbf{g} a Föld felszínén vagy a forgatott edényben mérhető gravitációs gyorsulás, kijelöli a lokális függőleges irányt. Koordinátarendszerünk z tengelyét mindig függőlegesnek, \mathbf{g} -vel ellentétes irányúnak választjuk⁵. Ez egyben megegyezik a $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebesség vektor irányával. Az összenyomhatatlan közegre vonatkozó alapegyenletünk tehát a (1.19) Navier–Stokes-egyenlet sűrűséggel való osztása után

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p - g\mathbf{n} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (1.23)$$

Itt megjelent a $\nu = \lambda/\rho_0$ kinematikai viszkozitás, ami jó közelítéssel állandó. Az \mathbf{n} függőleges (z) irányú egységvektor megadja mind a forgási szögsebesség, mind a gravitációs gyorsulás irányát. Álló határfelületen a sebességvektornak el kell tűnnie, mozgó fal esetén a fal sebességét kell felvennie⁶. Ezzel és a nyomásra vonatkozó peremfeltétellel a forgó rendszerbeli $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ és $p(\mathbf{r}, t)$ sebesség-, ill. nyomáseloszlás adott kezdőfeltételből egyértelműen megkapható. Az (1.22), (1.23) egyenlet közvetlenül a sebességre vonatkozik. A nyomás tehát nem dinamikai változó abban az értelemben, hogy időfüggését külön egyenlet szabályozná. A nyomásnak önkonzisztensen kell változnia úgy, hogy a (1.23) egyenlet minden pillanatban fennálljon. A nyomás jellegzetes értékét is tehát az áramlási paraméterek szabják meg.

1.5 A dimenziótlan alak

Ahhoz, hogy meg tudjuk becsülni, melyik tag, mikor jelentős, érdemes az (1.23) egyenletet dimenziótlan alakba átírni. Mérjük a távolságot az L jellemző lineáris kiterjedés egységében, a

⁴Használni fogjuk azonban azt az egyszerű megfigyelést, hogy a felszálló légáramlatok felhőképződésre vezetnek, hiszen ekkor nagy nedvességtartalmú levegő kerül alacsonyabb hőmérsékletű környezetbe, ahol kicsapódik. A felhők egyben a légköri áramlások nyomjelzőinek is tekinthetők, s hasonló szerepet játszhat a tengeri ill. tavi mozgásokban a planktontartalom.

⁵A 1.4 ábra kísérleti elrendezésében ez, a kialakuló parabolaprofil miatt azt jelentené, hogy a lokális z tengelyt mindenütt a parabolára merőlegesen irányítjuk. A helyfüggés akkor hanyagolható el, ha az edény peremén fellépő $L\Omega^2/2$ centrifugális gyorsulás jóval kisebb g -nél, azaz $\Omega \ll (g/L)^{1/2}$, amit a továbbiakban felteszünk. A (1.3) és (1.27) definíciókkal ez annak felel meg, hogy $Ro \gg Fr$.

⁶A viszkozitás tag elhanyagolásával kapott Euler-egyenletben mindez a felületre merőleges komponensekre érvényes.

sebességet a U karakterisztikus vízszintes sebesség egységében, ekkor az időegység értelemszerűen $t_h = L/U$. A nyomás kialakulásában a Coriolis-erő nyilvánvalóan fontos, ezért mértékegységét $2\rho_0|\Omega|LU$ -nak választjuk. Látni fogjuk, hogy ezzel azt fejezzük ki, hogy a nyomási erő és a Coriolis-erő összemérhetőek⁷. A csillaggal jelölt dimenziótlan mennyiségek tehát így függnek össze az eredeti dimenziós mennyiségekkel:

$$\mathbf{r} = L\mathbf{r}^*, \quad \mathbf{v} = U\mathbf{v}^*, \quad t = \frac{L}{U}t^*, \quad p = 2\rho_0|\Omega|LU p^*. \quad (1.24)$$

A (1.23) egyenletbe ezt behelyettesítve

$$\frac{U}{L/U} \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = -2\Omega U \mathbf{n} \times \mathbf{v}^* - \frac{2\rho_0|\Omega|LU}{\rho_0 L} \text{grad}^* p^* - g \mathbf{n} + \frac{\nu U}{L^2} \Delta^* \mathbf{v}^*. \quad (1.25)$$

Itt felhasználtuk, hogy a gradiens és a Laplace-operátor képzése egy, ill. kétszeres térbeli deriválással jár, ami dimenziósan L , ill. L^2 -tel való osztás. A csillaggal jelölt operációk a dimenziótlan térbeli változókra vonatkoznak. Az egész egyenletet U^2/L -lel osztva

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = -\frac{2\Omega L}{U} \mathbf{n} \times \mathbf{v}^* - \frac{2|\Omega|L}{U} \text{grad}^* p^* - \frac{gL}{U^2} \mathbf{n} + \frac{\nu}{UL} \Delta^* \mathbf{v}^*. \quad (1.26)$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal minden tagja előtt megjelent egy dimenziótlan szám. Az első két tag előtt a (1.3) Rossby-szám reciproka áll. A harmadik és negyedik tag előtt pedig az

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (1.27)$$

Froude-szám⁸ és az

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.28)$$

Reynolds-szám jelenik meg. A csillagokat ezután elhagyjuk, mert a dimenziótlan számok egyértelműen mutatják, hogy a dimenziótlan egyenletről van szó. A dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet tehát

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{Ro} (\pm \mathbf{n} \times \mathbf{v} + \text{grad} p) - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}.} \quad (1.29)$$

Mivel a Rossby-szám csak a szögsebesség abszolútértékét tartalmazza, megjelent a vektorszorzatban egy \pm tényező. A felső előjel tartozik a pozitív forgásirányú esethez. A (1.24) megfeleltetéstől a (1.29) egyenlet levezetéséig tartó műveletsort röviden úgy fogalmazzuk meg, hogy az

$$\mathbf{r} \rightarrow L\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \rightarrow U\mathbf{v}, \quad t \rightarrow \frac{L}{U}t, \quad p \rightarrow 2\rho_0|\Omega|LU p \quad (1.30)$$

áthelyettesítés a dimenziótlan (1.29) Navier–Stokes-egyenletre vezet.

A dimenziótlan számok az egyes tagok súlyát határozzák meg a mozgásegyenletben, mivel a dimenziótlan gyorsulások általában egységnyi nagyságrendűek. Két áramlást akkor tekinthetünk hasonlóknak, ha geometriájuk hasonló (tehát pl. azonos formájú akadály van bennük) és, ha *minden* dimenziótlan számuk, tehát Ro , Fr és Re azonos. Ilyenkor ugyanis a peremek egyszerű transzformációval egymásba vihetők, ezért a dimenziótlan peremfeltételek azonosak, s a

⁷Ez a választás nem tartható a forgatás kikapcsolásakor, amikor $\rho_0 U^2$ a természetes egység.

⁸Bár a dimenzióanalízis megengedné, hogy az $U^2/(gL)$ mennyiséget tekintsük a gravitációs hatásra jellemző karakterisztikus számnak, az (1.27) választás a hagyományos.

dimenziótlan mozgásegyenletek is megegyeznek. A megoldások ekkor csak arányossági tényezőkben térhetnek el egymástól. Ez a feltétel szabja meg tehát azt is, hogy nagyskálájú környezeti áramlások mikor modellezhetőek hűen laboratóriumi kísérletekkel.

A levezetés azt sugallja, hogy mindegyik szám gyorsulások hányadosaként is előáll. A Rossby-szám kapcsán ezt már láttuk is (1.9)-ben. Hasonlóan, a Froude-szám négyzete az $a_h = U^2/L$ hidrodinamikai és a g gravitációs gyorsulás aránya:

$$Fr^2 = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{gravitációs gyorsulás}}, \quad (1.31)$$

a Reynolds-szám pedig a hidrodinamikai gyorsulásnak a $\nu U/L^2$ viszkózus gyorsuláshoz való viszonyát adja,

$$Re = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{viszkózus gyorsulás}}. \quad (1.32)$$

A mellékelt táblázatban feltüntetjük e három paraméter értéket egy ciklon és a Golf-áramlat gyűrűinek tipikus példáján (a kinematikai viszkozitást az $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, ill. $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ értékkel számoltuk, l. 14.1 táblázat)

	Ro	Re	Fr	L (km)	U (m/s)
Ciklon	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$6,6 \cdot 10^{11}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	1000	10
Golf	$9,0 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{11}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	100	1,3

1.1 táblázat: A ciklon és a Golf-áramlat gyűrűinek jellemzői dimenziótlan számai, hossz-, és sebességadatai.

A legegyszerűbb hidrodinamikai esetet akkor kapnánk, ha mind a három szám értéke nagyon nagy lenne, hiszen ez a nem forgatott ($Ro = \infty$), ideális ($Re = \infty$) és súlytalan ($Fr = \infty$) folyadék egyenletét jelentené. A dimenziótlan számok végeessége tehát annak mértékét fejezi ki, hogy mennyire térünk el ettől a homogén áramlástól.

A táblázat azt mutatja, hogy a Reynolds-szám igen nagy, tehát a súrlódás szempontjából közel vagyunk az ideális esethez: a viszkozitás a peremektől távol ezért jogosan hanyagolható el. A Rossby-szám kicsinysége, amint már szó volt róla, a forgatás fontosságára utal. Ugyanakkor a Froude-szám is kicsi, tehát messze vagyunk a súlytalan folyadék esetétől. Vegyük észre azonban, hogy a súly csak a függőleges irányú mozgást befolyásolja, melyre egyáltalán nincs hatással a Coriolis-erő. A vízszintes síkban történő áramlás szempontjából ezért a nyomáson kívül a Coriolis-hatás a legjelentősebb, s mindkettő $1/Ro$ -val arányos.

1.6 Dinamikai nyomás

Mivel a Froude-szám csak konstanssal szorzódik az (1.29) Navier-Stokes-egyenletben, a vele arányos tag könnyen kiküszöbölhető. A súly miatt akkor is helyfüggő a nyomáseloszlás, ha nincs áramlás. A $\mathbf{v} \equiv 0$ nyugalmi állapothoz az (1.23) egyenlet szerint egy $p_0(z)$ hidrosztatikai nyomás tartozik, melyre

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g. \quad (1.33)$$

Ennek megoldása $p_0(z) = p_0 - \rho_0 g z$, ahol p_0 a helytől független konstans. Áramlás jelenlétében ezért célszerű a teljes p nyomást a hidrosztatikai eloszlás és egy új tag összegére bontani, s azt írni, hogy

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(z) + p'(\mathbf{r}, t). \quad (1.34)$$

Mivel az áramlást a p' nyomás-eltérés okozza, ezt a mennyiséget dinamikai nyomásnak nevezzük. Ezzel a nyomási erő okozta gyorsulás

$$-\frac{1}{\rho_0}\text{grad}p = g\mathbf{n} - \frac{1}{\rho_0}\text{grad}p', \quad (1.35)$$

vagyis a dinamikai nyomás gradiensének első két komponense ugyanaz, mint a teljes nyomásé, a függőleges komponensben pedig éppen a gravitációs erő köztük a különbség. A dinamikai nyomással kifejezett Navier-Stokes-egyenletben a g gravitációs gyorsulás tehát nem jelenik meg:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0}\text{grad}p' + \nu\Delta\mathbf{v}. \quad (1.36)$$

A komponensekben történő felíráshoz használjuk a Coriolis-gyorsulás (1.8) alakját:

$$\frac{du}{dt} = +2\Omega v - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\Delta u, \quad (1.37)$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\Delta v, \quad (1.38)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\Delta w. \quad (1.39)$$

A (1.30) szerinti dimenziótlan alak

$$Ro \frac{du}{dt} = \left(\pm v - \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{Ro}{Re} \Delta u, \quad (1.40)$$

$$Ro \frac{dv}{dt} = \left(\mp u - \frac{\partial p'}{\partial y} \right) + \frac{Ro}{Re} \Delta v, \quad (1.41)$$

$$Ro \frac{dw}{dt} = \left(-\frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \frac{Ro}{Re} \Delta w. \quad (1.42)$$

Innét látszik, hogy az (1.30)-ban használt $2\rho_0|\Omega|UL$ valójában a dinamikai nyomás jellemző nagysága, s nem a $p_0(z)$ hidrosztatikai nyomásé. Az utóbbi nagysága $\rho_0 gH \approx \rho_0 gL$. A dinamikai nyomás mérőszáma $2\rho_0|\Omega|UL = \rho_0 gLFr^2/Ro$, vagyis a dinamikai és a hidrosztatikai nyomás viszonya Fr^2/Ro , ami Fr kicsinysége miatt kicsi⁹. Az (1.40)-(1.42) egyenletekből az következik, hogy elhanyagolható viszkozitás esetén a folyadék *belsejében* zajló mozgások szempontjából a Rossby-szám az egyetlen dimenziótlan szám.

1.7 Gyorsan forgatott folyadék

1.7.1 Oszlopos áramlás, a Taylor–Proudman-tétel

Gyors forgatás esetén az (1.40)-(1.42) egyenletekben a Rossby-számtól független tagok dominálnak. Lassú mozgásokat, azaz a dimenziótlan gyorsulások egységnyi nagyságrendjét feltételezve a bal oldal kicsi. A $Ro \ll 1$ esetben ekkor a zárójelben levő tagoknak el kell tűnniük:

$$\pm v - \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1.43)$$

⁹A dinamikai nyomás tipikus értéke a földi légkörben néhány hektopascal (hPa), az óceánban néhány ezer hPa. 1 hPa = 100 N/m² = 100 kg/(m s²) ≡ 1 mbar. A felszíni légnyomás 1000 hPa körüli.

$$\mp u - \frac{\partial p'}{\partial y} = 0, \quad (1.44)$$

$$-\frac{\partial p'}{\partial z} = 0. \quad (1.45)$$

A (1.43), (1.44) egyenletek z szerinti deriváltjából a dinamikai nyomás (1.45) szerinti magasságfüggetlensége miatt azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.} \quad (1.46)$$

Ez az ún. Taylor–Proudman-tétel, amely azt mondja ki, hogy a vízszintes sebességkomponesek nem függenek a magasságtól, az egymás fölötti folyadékrétegek között nincs nyírás, e rétegek vízszintes irányban azonosan mozognak, az áramlás *oszlopos* szerkezetű. A teljes összenyomhatatlansági feltétellel, (1.22)-vel ez azt jelenti, hogy

$$\boxed{\partial^2 w / \partial z^2 = 0,} \quad (1.47)$$

azaz a függőleges sebesség csak lineárisan függhet a z koordinátától.

Ha még azt is kihasználjuk, hogy a forgatási szögsebesség *nem* függ a helytől, akkor a (1.43) egyenlet y szerinti, a (1.44) x szerinti deriváltját véve, majd kivonva őket egymásból, azt kapjuk, hogy az áramlás $\text{div} \mathbf{u}$ síkbeli divergenciája eltűnik:

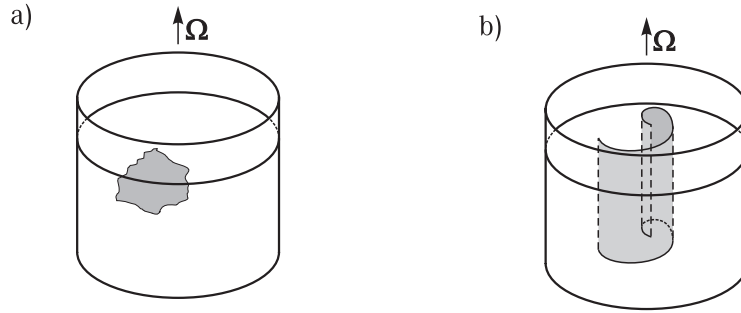
$$\boxed{\text{div} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.} \quad (1.48)$$

A vízszintes síkbeli áramlás összenyomhatatlan, és a függőleges sebesség nem függhet a z koordinátától.

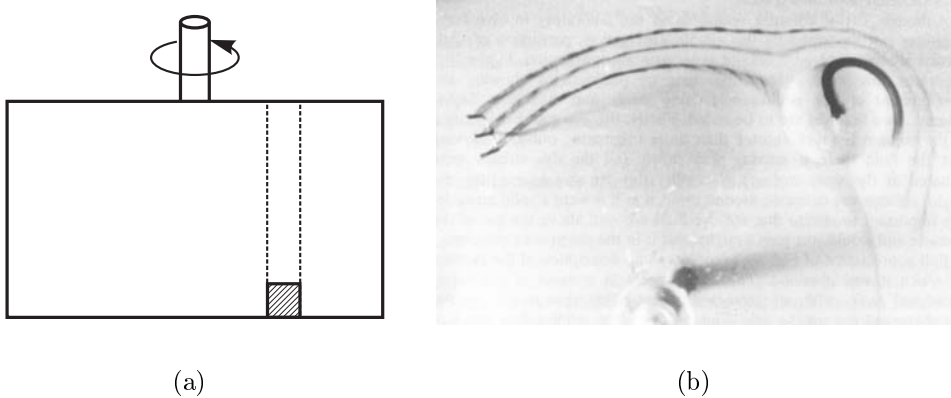
Ha valamelyik perem miatt $w \equiv 0$, azaz nincs függőleges mozgás, az áramlás *kétdimenziós*. Ez a Taylor–Proudman-tétel erősebb változata. Érdeemes hangsúlyozni, hogy a tétel sűrűlódó folyadékokra is igaz, amennyiben a Reynolds-szám nem túlságosan kicsi. Az erős forgatás szinkronizáltan mozgó vízszintes rétegekbe kényszeríti a folyadékot, hiszen a vízszintes síkban ható Coriolis-erő dominál. Az (1.45) egyenlet azt fejezi ki, hogy a nyomás magasságfüggése hidrosztatikus. Az egymás fölötti rétegek tehát áramlásdinamikai szempontból nem különböztethetők meg.

Már véges, de kicsi Rossby-számok esetén is világosan látszik az oszlopos áramlás kialakulásának tendenciája. Ha forgatott folyadékba injekciós tüvel felülről festéket fecskendezünk, a kezdetben szabálytalan festékfelhő a relatív sebesség miatt kialakuló áramlás következtében elmozdul, s rövid idő után már függőleges síkba rendeződő görbült felületek (Taylor-függönyök) mentén helyezkedik el (1.5.a,b ábra).

Az oszlopos szerkezet egy másik bizonyítéka Taylor kísérlete (G.I. Taylor (1886-1975) angol fizikus, a modern hidrodinamika egyik megalapozója). Ha egy forgatott edény aljára korongot helyezünk és áramlást hozunk létre a korong körül, azt tapasztaljuk, hogy a korong feletti egész vízoszlop együtt áll a koronggal (1.6, 1.7 ábra). Ez elképzelhetetlen dolog a hétköznapi életben: a korong mintegy magához csatolja az egész fölötte levő vízoszlopot. A jelenség magyarázatát a tétel adja: ha ugyanis az áramlás nem függ a függőleges iránytól és az edény alján elkerüli a korongot, akkor minden más magasságban is el kell kerülnie azt a hengert, amelynek alapja a korong. E kísérletekkel összhangban, megfigyelések mutatják, hogy a parttól távoli lassú tengeraláramlatok helyenként több km mélységig azonosan mozognak, és a légköri mozgások nagy skálán gyakorlatilag kétdimenziós (1.7 ábra).



1.5 ábra: A Taylor–Proudman-tétel kísérleti bizonyítéka. a) Gyorsan forgatott edénybeli folyadékba festéket juttatunk. b) Függőleges festékfüggönyök alakulnak ki.



1.6 ábra: A Taylor-kísérlet. a) Az elrendezés: forgatott edény alján kis korongot helyezünk (a pontozott vonal a korong felett elhelyezkedő folyadékoszloppot jelöli). b) Az együttforgó rendszerben felülről megfigyelt áramlás: a lassan jobbra mozgó festécsíkok kívülről megkerülik a korong alapú hengert (jobbra fent). A henger belsejéből induló csepp, ha keveset is, de elmozdul, mely a $Ro = 0$ esettől való óhatatlan eltérésre utal

1.7.2 A geosztrofikus egyensúly

A gyorsan forgatott határesetben lehetőség nyílik egy sajátos időfüggetlen, stacionárius áramlás kialakulására. Amennyiben a nyomáseloszlás időtől független, a (1.43)-(1.45) egyenletekből következik, hogy a

$$v = v_g \equiv \pm \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad u = u_g \equiv \mp \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad w = w_g \equiv 0 \quad (1.49)$$

sebességeloszlás is stacionárius. Az ilyen áramlást *geosztrofikusnak*, azaz a Föld forgása által meghatározottnak hívjuk. A tapasztalat szerint ez természetes közegeink nagyskálájú mozgásaira jellemző áramlási típus.

A fenti egyenlet azt mutatja, hogy a vízszintes nyomásgradiens ellensúlyozza a Coriolis-erőt: $\pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g = -\text{grad} p'$. Tehát a nagyon gyorsan forgatott áramlásokban létezik olyan egyensúly, melyben a nyomásgradiensből származó erő kompenzálja a Coriolis-erőt, amint az 1.8 ábra szemlélteti. Ez óhatatlanul azt jelenti, hogy a folyadék áramlik, hiszen különben eltűnne a Coriolis-erő.

A geosztrofikus áramlás olyan vízszintes síkbeli áramlás, melynek \mathbf{u}_g sebessége *merőleges* a



1.7 ábra: A kétdimenziós áramlások sajátos vonása, hogy az akadályok mögött örvények keletkeznek, s ezek általában felváltva szakadnak le: létrejön az ún. Kármán-féle örvénysor. A képen a Kaliforniai félszigettől nyugatra található Guadalupe-sziget magas hegyei mögött a felhőrétegben kirajzolódott Kármán-féle örvénysor (1999. augusztus 20.) látszik, mely a légköri áramlások kétdimenziós jellegét bizonyítja [daac.gsfc.nasa.gov/ CAMPAIGN_DOCS/OCDST/vanKarman_vortices.html].

vízszintes nyomásgradiensre:

$$\mathbf{u}_g \text{grad} p' = 0. \quad (1.50)$$

Az áramlás tehát nem arra folyik, amerre a nyomás hajtaná, hanem arra *merőlegesen*. Ez teljesen ellentétes hétköznapi tapasztalatunkkal, mert egy csőben például a nyomásgradiens irányába folyik a víz. A geosztrofikus áramlás gyorsaságát a vízszintes nyomásgradiens egyértelműen meghatározza. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a nyomást a folyadék felszíni alakja, ill. rétegzett folyadékokban a sűrűségeloszlás szabja meg. A sebesség iránya a nyomási erőre mindig merőleges, pozitív (negatív) forgatási irány esetén \mathbf{u}_g ezen erő vektorától jobbra (balra) mutat. Az áramlás jobb (bal) oldalán található tehát a magasabb nyomás. Mivel az elmozdulás merőleges a nyomási erőre, a munka zérus, s ezért az áramlás a forgó rendszerben külön energiabefektetés nélkül is fennmarad (de felhasználhatja a forgatáshoz szükséges energiát).

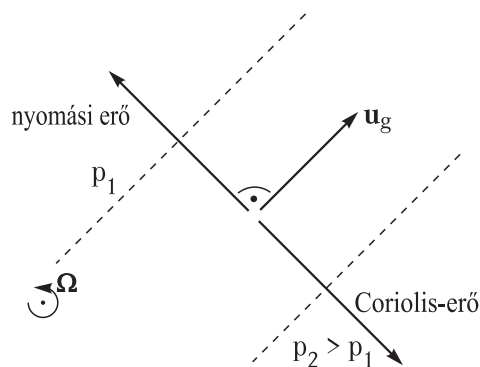
Dimenziós alakban $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_g = -\text{grad} p' / \rho_0$, amiből $\mathbf{u}_g = (\mathbf{n} \times \text{grad} p') / (2\Omega \rho_0)$, avagy

$$u_g \equiv -\frac{1}{2\Omega \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad v_g \equiv \frac{1}{2\Omega \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (1.51)$$

tehát a nyomásgradiens és $2\Omega \rho_0$ viszonya szabja meg az áramlás erősségét.

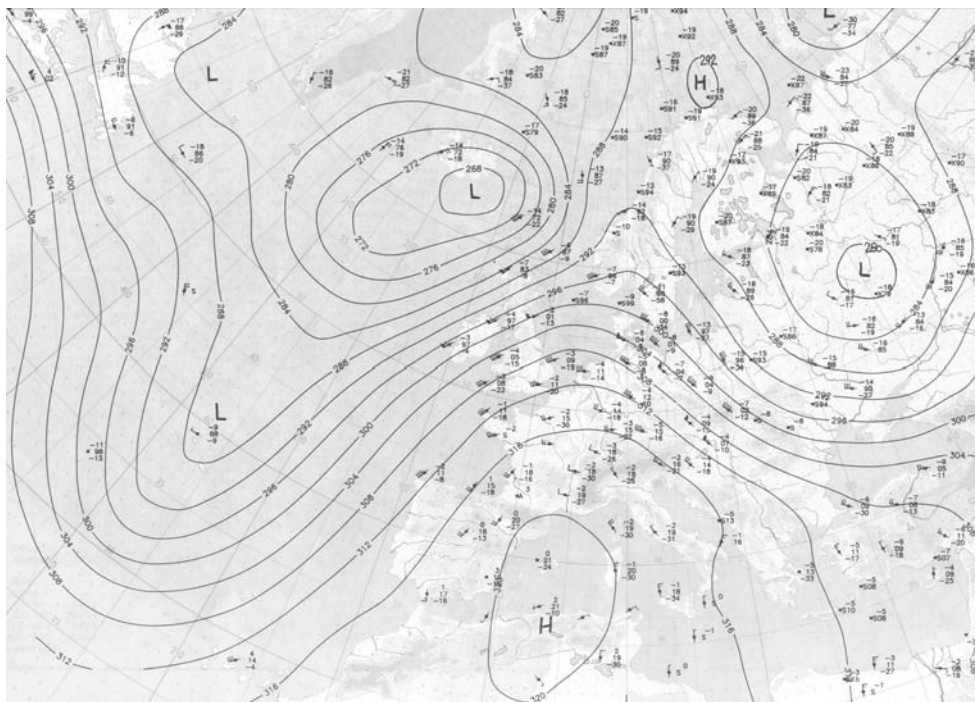
Ezek szerint, ha két, $\delta r = 100$ km távolságban futó izobárt tekintünk, melyek között a nyomáskülönbség $\delta p = 2 \text{ hPa} = 200 \text{ N/m}^2$, akkor a levegő $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ sűrűségével és Ω_F -el számolva azt kapjuk, hogy $|\mathbf{u}_g| = \delta p / (2\Omega_F \rho_0 \delta r) = 11 \text{ m/s} \approx 40 \text{ km/h}$. Ez a valódi ciklonbéli szélsősebességek nagyságrendje.

A meteorológiában mintegy 150 éve ismert a bárikus széltörvény (melyet C. Buys-Ballot (1817-1890) holland meteorológus írt le először), amely szerint az északi féltekén a szél irányának



1.8 ábra: Erőviszonyok geosztrofikus egyensúlyban: a $-2\rho_0\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_g$ Coriolis-erő a $-\text{grad}p'$ nyomási erővel ellentétesen egyenlő. Rájuk merőleges a kialakuló kétdimenziós geosztrofikus áramlás \mathbf{u}_g sebességvektora. A magasabb nyomás pozitív forgatás esetén a sebességvektor *jobb* oldalára esik.

vektorától a magasabb nyomás mindig jobbra esik, a déli féltekén pedig fordítva. Ez összhangban van a geosztrofikus szabállyal, de annál többet is jelent: a geosztrofikus áramlástól való eltérés a valódi szelek esetében sohasem annyira erős, hogy az orientációs viszonyok felborulhatnának. A geosztrofikus feltétel a légköri mozgásokra a magasabb légrétegekben nagyon jól teljesül. A meteorológiai térképek szélességvektorai valóban az izobárokkal párhuzamosak (1.9 ábra).



A későbbiekben gyakran fogjuk használni, hogy bármilyen síkban összenyomhatatlan $\mathbf{u}(x, y, t)$ sebességű áramláshoz tartozik egy $\psi(x, y, t)$ áramlási függvény, melyre

$$\boxed{u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}} \quad (1.52)$$

hiszen ekkor $\text{div}\mathbf{u} = 0$. Az áramvonalak a ψ áramlási függvény szintvonalainak felelnek meg.

A fentiekből következik, hogy a geosztrofikus áramlási függvény a nyomással arányos:

$$\psi = \frac{1}{2\Omega\rho_0}p'. \quad (1.53)$$

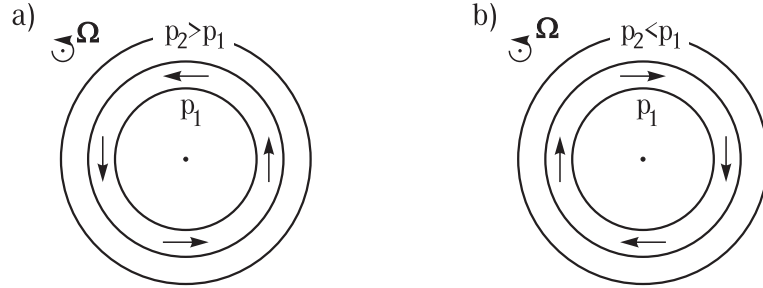
Az áramvonalak tehát az állandó nyomású görbék, az izobárok.

Az örvényvektor a függőleges irányba mutat, megegyezik z irányú komponensével, melyet ζ -val jelölünk. Ez a komponens tehát $\zeta \equiv \boldsymbol{\omega}_z \equiv (\text{rot}\mathbf{v}_g)_z = \partial v_g/\partial x - \partial u_g/\partial y$, és érvényes, hogy

$$\zeta = \frac{1}{2\Omega\rho_0}\Delta p'. \quad (1.54)$$

A kialakuló örvényességet a dinamikai nyomás második deriváltja határozza meg.

Minden nyomáseloszláshoz tartozik egy geosztrofikus áramlás. Nézzük meg, hogy ez milyen típusú kör alakú izobárok esetén, ha a középpontban alacsonyabb a nyomás, mint kívül (1.10a ábra). Az izobárok mentén körkörös áramlás alakul ki. Az ilyen radiális nyomáseloszlás ciklációs áramlásra vezet, mely körül folyja az alacsony nyomású helyet, méghozzá (1.51) szerint $\Omega > 0$ esetén az óramutató járásával ellentétes irányában. Vegyük észre, hogy ez egy pozitív körüljárású, az északi félteke ciklonjaihoz hasonló áramlás.

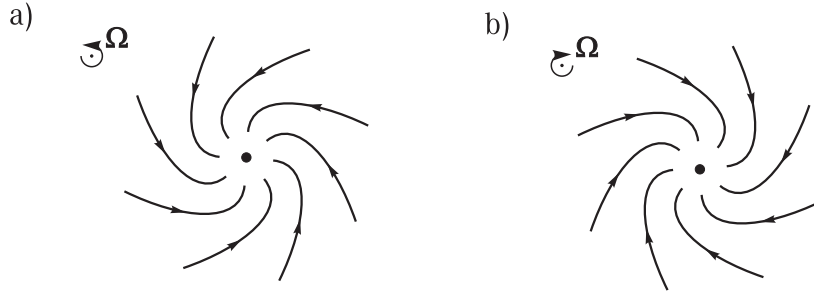


1.10 ábra: Forgásszimmetrikus $p(r)$ nyomáseloszlás hatására kialakuló geosztrofikus áramlás alacsony (a) és magas (b) nyomású központ körül. Az áramlás körkörös, nagysága $u_g(r) = 1/(2\Omega\rho_0)dp(r)/dr$. Nyomásminimum körül az áramlás ciklonális.

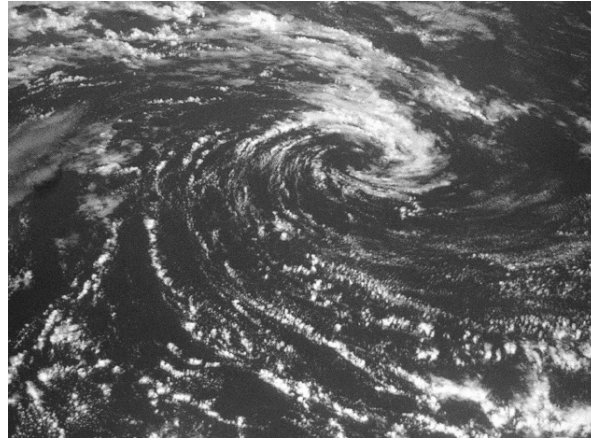
Általában ciklonálisnak (anticiklonálisnak) az alacsony (magas) nyomású központ körül kialakuló körkörös áramlást nevezzük. Az áramlások forgási iránya függ a forgatási szögsebesség előjelétől. Negatív Ω esetén, s ezért a déli félgömbön a ciklonális áramlás az óramutató járásával megegyező, azaz negatív irányú. Ugyanilyen irányú viszont az Északi félgömb anticiklonális áramlása (1.10b ábra).

A későbbiekben (4.3.2 fejezet) látni fogjuk, hogy a ciklonális mozgáshoz lassú feláramlás tartozik. Ez a felszín közelében a központ felé mutató sebességkomponens megjelenésével jár. A folyadékrészek tehát nem körpályán, hanem enyhén tekeredő spirálison mozognak (1.11 ábra).

A mérsékeltövi ciklonokra jellemző spirálkarokat az alacsonyszintű felhőzet rajzolja ki, amint az az 1. ábrán is megfigyelhető. A jó idővel járó anticiklonok ritka felhőzetében csak kivételes alkalmakkor figyelhető meg a spirális mintázat (1.12 ábra).



1.11 ábra: A valódi ciklonális áramlások jellegzetes részecskepályái. A gyenge viszkozitás következtében kialakuló lassú beáramlás miatt pozitív forgásirány (északi félteke) esetén (a) jobbra, negatív esetén (déli félteke) (b) balra tekeredő spirálok mentén történik az áramlás.



1.12 ábra: Anticiklon úrfelvétele az északi féltekén. A spirálszerkezet azonos a déli félteke ciklonjaiéval [www.lpi.usra.edu/images/sclo/sclo_S27.gif].

1.8 A kvázigeosztrofikus közelítés

A geosztrofikus egyensúly elméleti létezése megmagyarázza, hogy miért hosszú életűek a ciklonok és anticiklonok a Földön. Az erősen forgatott határesetben nem is változhatnak időben. A valódi ciklonok lassan mozognak és deformálódnak, mert időskálájukat a geosztrofikus áramlástól való, Rossby-szám rendű csekély eltérés határozza meg.

Általában, a geosztrofikus áramlás szolgál kiindulásul minden lassú, nagyskálájú környezeti áramlási problémában. Először megértjük a geosztrofikus határesetet, s utána hozzávesszük az időben lassan változó korrekciókat. A geosztrofikus áramlást tekinthetjük a nyomásgradiens egyértelmű kifejezésének (l.(1.51)), azaz a teljes hidrodinamikai egyenlet úgy írható, mint

$$\frac{du}{dt} = +2\Omega(v - v_g) + \nu\Delta u \quad (1.55)$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega(u - u_g) + \nu\Delta v \quad (1.56)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\Delta w. \quad (1.57)$$

Amennyiben feltehető, hogy a geosztrofikus eredménytől való $u - u_g$, $v - v_g$, $\partial p'/\partial z$ eltérés kicsi, ezt az egyenletrendszeret nevezzük a forgatott folyadék hidrodinamikája *kvázigeosztrofikus* közelítésének. Megadja, hogy mik az első korrekciók a geosztrofikus határesethez képest és egyben

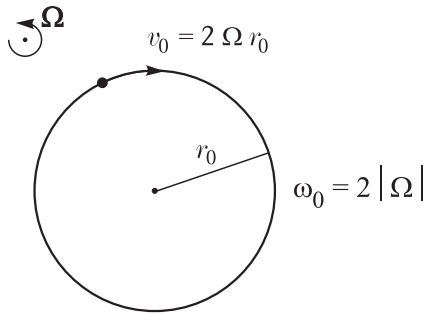
már megenged időfüggő dinamikát is. Ez nemlineáris egyenlet, s ezért egzakt kijelentések csak speciális esetekben tehetők a kvázigeosztrofikus viselkedésről. Az (1.30) dimenziótlanítással a jobb oldal mindenütt $1/Ro$ -val szorozódik, míg a bal oldal egységnyi. Ezért a dimenziótlanított sebesség geosztrofikustól való eltérésének szintén Ro rendűnek kell lennie. Általánosan elfogadott kép, hogy a kvázigeosztrofikus közelítésben a Rossby-számot megtartjuk, mint kis számot, de csak első rendben, s ez már meglepően jó leírását eredményezi a környezeti áramlásoknak. A kvázigeosztrofikus egyenlet vizsgálata lesz a későbbiekben egyik fő célunk.

1.9 Tehetetlenségi körmozgás

A Coriolis-erő jelenlétének egy érdekes következménye az ún. tehetetlenségi körmozgás. Tekintsünk egy meglökött pontszerű testet, melyre csak a Coriolis-erő hat, ugyanúgy, mint az (1.37), (1.38) hidrodinamikai egyenletben állandó nyomás és elhanyagolható viszkozitás esetén. Mivel a Coriolis-erő merőleges a sebességre, a test körpályán mozog (hasonlóan a konstans mágneses térben mozgó töltött részecskéhez). Az r_0 sugarú körpályán tartáshoz szükséges $r_0\omega_0^2$ gyorsulást egyedül a $2|\Omega|r_0\omega_0$ Coriolis-gyorsulás biztosíthatja (l. 1.13 ábra). Ezért a mozgás ω_0 körfrekvenciája éppen a forgatási szögsebesség kétszerese lesz:

$$\boxed{\omega_0 = 2|\Omega|}, \quad (1.58)$$

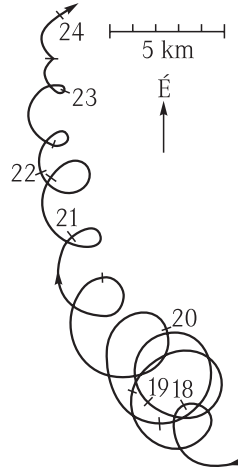
függetlenül a körpálya középpontjától és a kerületi sebességtől. Az ilyen tehetetlenségi körmozgás periódusideje tehát a forgatási periódusidő fele. A mozgás iránya ellentétes a forgatásával: mindig anticiklonális körüljárású. Az 1 km sugarú körön tehetetlenségi mozgást végző test kerületi sebessége Földön 10 cm/s nagyságrendű.



1.13 ábra: Tehetetlenségi körmozgás a forgatott rendszer bármely pontja körül kialakulhat, ha a testre csak a Coriolis-erő hat. A körbefordulás ideje fele a forgatási periódusidőnek, iránya pozitív Ω esetén negatív, a pálya sugarától és a középpont helyétől függetlenül.

A tehetetlenségi mozgáshoz természetesen hozzáadódhat egy egyenletes elmozdulás. Térben és időben közel állandó hidrodinamikai nyomásgradiens esetén az óceáni víztömegek viselkedésében valóban megfigyelhető egy spirális előrehaladás. Ez a tehetetlenségi mozgás következménye, és periódusa fél nap körüli (l. 1.14 ábra). A jelenség teljes kvantitatív megértéséhez a Föld felszínén ható Coriolis-erő helyfüggését is figyelembe kell majd vennünk (l. 3.3 fejezet).

A tehetetlenségi körmozgásban a nyomásgradiens elhanyagolható a Coriolis-erő mellett. Ezért az ilyen mozgás nem tekinthető sem geosztrofikusnak, sem ahhoz közelinek. A centrifugális erő ugyanis megegyezik a Coriolis-erővel, s a mozgás frekvenciája is összemérhető a forgatásával. Az ilyen mozgás ezért egységnyi Rossby-számmal jellemezhető.



1.14 ábra: Tengeri folyadéktömeg mozgása közel állandó nyomás esetén, amikor a mozgás egy lassú északra irányuló áramlás és a tehetetlenségi körmozgás eredője. A mozgás a Balti-tengerben zajlik, a vonalak melletti számok egész napokat jelentenek. Egy napra körülbelül két körfordulás esik.

1.10 Tehetlenségi hullámok

1.10.1 Síkhullám megoldás

A forgatott folyadék kollektív viselkedésében a tehetlenségi mozgás megfelelője egy speciális hullámfajta, a tehetlenségi hullám. Mint minden lineáris hullámban azt vizsgáljuk, milyen áramlás alakul ki, ha a folyadékot *kissé* kimozdítjuk valamelyik egyszerű áramlási állapotából. Jelen esetben ez a $\mathbf{v} = 0$ nyugalmi állapot. Mivel ekkor az áramlás gyenge, az advektív gyorsulások másodrendűen kicsik, elhanyagolhatók, s az (1.20) teljes deriváltak jó közelítéssel helyettesíthetők az időbeli parciális deriváltakkal. A (1.37)- (1.39) Navier–Stokes-egyenletek ebben a közelítésben *lineárisak*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +2\Omega v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\Omega u - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v, \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w. \quad (1.61)$$

Mivel ez egy *állandó együtthatós, homogén* lineáris differenciálegyenlet-rendszer, a peremektől távoli viselkedés exponenciális függvénnyel írható le.

Síkhullámot akkor kapunk, ha minden hidrodinamikai változó térben is és időben is periodikus, azaz ha a

$$\phi \equiv \omega_0 t - k_x x - k_y y - k_z z \quad (1.62)$$

fázis periodikus függvénye. Itt $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ a tetszőleges hullámszámvektora és $\omega_0(\mathbf{k})$ a hullám frekvenciája. Az exponenciális megoldás csak akkor periodikus, ha a fenti kombináció szinusztát vagy koszinusztát tartalmazza, vagyis, ha $\exp(i\phi)$ -vel arányos. A komplex írásmódot használva, a megoldást a

$$(\mathbf{v}, p'/\rho_0) = (u_0, v_0, w_0, P_0) e^{(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y - ik_z z)} \quad (1.63)$$

alakban keressük, ahol az amplitudók mind konstansok. Ezt a hidrodinamikai egyenletekbe helyettesítve azt találjuk, hogy minden tag arányos az $\exp(i\phi)$ faktorial, mellyel egyszerűsíthetünk.

Így egy homogén lineáris algebrai egyenletrendszerhez jutunk. Ennek nemtriviális megoldása adja a frekvencia hullámszámfüggését, az $\omega_0(\mathbf{k})$ *diszperziós relációt*¹⁰.

A megoldást az egyszerűség kedvéért az y irányban eltolásinvariánsnak tételezzük fel ($k_y = 0$). Az (1.59)- (1.61) és (1.22) egyenletekből, egyelőre a viszkozitást elhanyagolva, a keresett homogén lineáris egyenletrendszer, az ún polarizációs egyenletek:

$$i\omega_0 u_0 = 2\Omega v_0 + ik_x P_0, \quad (1.64)$$

$$i\omega_0 v_0 = -2\Omega u_0, \quad (1.65)$$

$$i\omega_0 w_0 = +ik_z P_0, \quad (1.66)$$

$$k_x u_0 + k_z w_0 = 0. \quad (1.67)$$

Nemtriviális megoldás csak akkor létezik, ha az egyenletrendszer determinánsa eltűnik. Ennek feltétele megkapható az együtthatók kiküszöbölésével is. Az (1.67)- (1.66) egyenletekből: $P_0 = -\omega_0 u_0 k_x / k_z^2$. Ezt (1.64)-be helyettesítve

$$iu_0 \frac{k^2}{k_z^2} \omega_0 = 2\Omega v_0, \quad (1.68)$$

ahol $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ a hullámszámvektor hossza. Az (1.65) egyenlet átrendezve viszont

$$v_0 \omega_0 = i2\Omega u_0. \quad (1.69)$$

E két utóbbi egyenlet egyszerre csak úgy teljesülhet nemzérus együtthatókkal, ha

$$\omega_0 = \pm 2\Omega \frac{k_z}{k} = \pm 2\Omega \sin \theta. \quad (1.70)$$

Ez a tehetetlenségi hullámok diszperziós relációja, ahol θ a \mathbf{k} hullámszámvektornak a vízszintes egyenessel bezárt szöge¹¹. A diszperziós reláció a \mathbf{k} vektornak csak az irányától függ. A θ szög $k_z < 0$ esetén maga is negatív. A \pm előjel azt fejezi ki, hogy minden hullámszámvektorhoz tartozik egy vele azonos és ellentétes irányban haladó hullám is. A $\sin \theta$ tényező mutatja, hogy a hullám frekvenciája felülről korlátos: nem lehet nagyobb a 2Ω értéknél (1.15a ábra). Ilyen hullámok tehát csak forgatott rendszerben fordulhatnak elő.

A polarizációs egyenletekből a sebességeloszlás alakjára is következtethetünk. A (1.67) szerint az eloszlás olyan, hogy csak a \mathbf{k} hullámszámvektorra merőleges síkban van áramlás: a hullám transzverzális. A diszperziós relációt felhasználva, mind (1.68), mind (1.69) azt jelenti, hogy

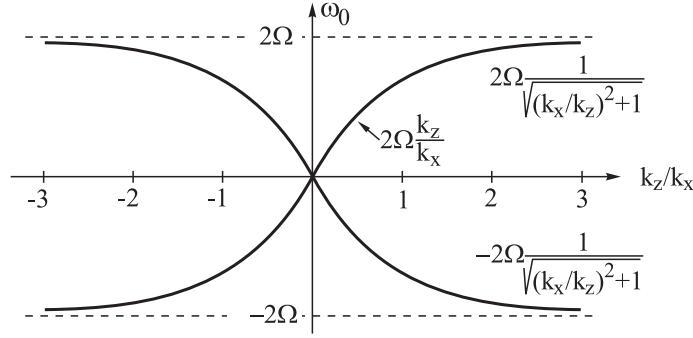
$$v_0 = i \frac{2\Omega}{\omega_0} u_0. \quad (1.71)$$

A két vízszintes sebességkomponens komplex amplitudója tehát ellentétes fázisú. A valós részeket véve a hely-, és időfüggés

$$u = -w \frac{k_z}{k_x} = -v_0 \frac{\omega_0}{2\Omega} \cos(\omega_0 t - k_x x - k_z z), \quad v = v_0 \sin(\omega_0 t - k_x x - k_z z) \quad (1.72)$$

¹⁰Ha ω_0 képzetesnek adódik, hullámmegoldás nem létezik. Amennyiben a megoldás időben növekvő, akkor kis zavarok exponenciálisan felerősödnek, az eredeti áramlási állapot instabil.

¹¹Az összefüggés y irányban is terjedő hullámokra is érvényes, ha θ a hullámszámvektornak a vízszintes síkkal bezárt szögét jelöli.

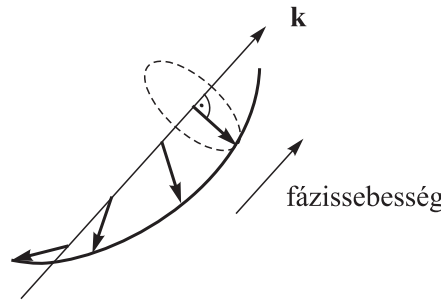


1.15 ábra: A tehetetlenségi hullámok $\omega_0(k_z)$ diszperziós relációja (k_x rögzített). $|2\Omega|$ -nél nagyobb frekvenciájú hullámok nem létezhetnek.

alakú. A fenti egyenletek azt fejezik ki, hogy a teljes sebességvektor abszolútértéke a v_0 állandó. A terjedési irányra merőleges síkban a sebességvektor $2\pi/\omega_0$ periódussal forog: a hullám cirkulárisan polarizált.

Ezek alapján a diszperziós reláció szemléletes jelentést nyer. Mivel a sebesség a \mathbf{k} -ra merőleges síkba esik, a Coriolis-hatást az $\boldsymbol{\Omega}$ vektor \mathbf{k} -ra eső vetülete, azaz $\Omega \sin \theta$ határozza meg. Az ennek megfelelő tehetetlenségi körmozgás frekvenciája (1.70). A vízszintes terjedés ($\theta = 0$) határesetében a hullámzás megszűnik, $\omega_0 \rightarrow 0$. Ez összhangban van a Taylor–Proudman-tétellel (ilyenkor a $Ro \equiv |\omega_0/(2\Omega)| = |\sin \theta|$ Rossby-szám kicsi), hiszen $k_z \rightarrow 0$ -ra az áramlás függetlenné válik z -től és stacionárius állapot alakul ki.

Mivel a folyadékelemek tehetetlenségi mozgást végeznek, a sebességvektor időbeli elfordulása adott helyen anticiklonális, ω_0 előjelétől függetlenül. A fenti összefüggésekből az is látszik, hogy a sebességvektorok egy adott pillanatban *térben* is anticiklonálisan fordulnak el, ha a hullám terjedési irányával ellentétesen mozgunk a z tengely mentén (1.16 ábra). A pillanatnyi sebességek térbeli elfordulása a magassággal megfigyelhető mind a légköri mind az óceáni mozgások tehetetlenségi hullámokból eredő komponenseiben, a néhány km-es skálán. Pontos értelmezésükben majd a rétegzettség is jelentős szerepet játszik (6.4 fejezet).



1.16 ábra: A sebességvektorok térbeli elrendeződése tehetetlenségi hullámban. Egy adott helyen a sebességvektor végpontja körpályán (szaggatott vonal) mozog.

Megjegyezzük, hogy a viszkózus tag megtartása az $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i\nu k^2$ helyettesítésnek felel meg az (1.64)-(1.67) egyenletrendszerben. A belső súrlódást is figyelembe véve tehát a diszperziós reláció

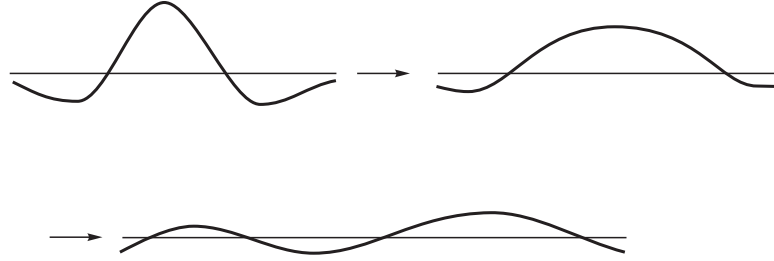
$$\omega_0 = \pm 2\Omega \sin \theta + i\nu k^2. \quad (1.73)$$

Az imaginárius rész időben exponenciális csillapodást ír le az $\exp(-\nu k^2 t)$ szabály szerint. A csillapodás ilyen formájú megjelenése más hullámokra is jellemző: a csillapodás erőssége a kis számértékű kinematikai viszkozitással arányos. Ebből a példából levonhatjuk azt az általános

következtetést, hogy a hosszú hullámok (kis k) csillapodása a leglassúbb. Bármilyen rendszerben kialakuló hullámról van is szó, keltése után elegendően hosszú idő (tipikusan a $t_{relax} = L^2/\nu$ relaxációs idő, ahol L a lineáris méret) eltelte után már csak a legnagyobb (L -lel összemérhető) hullámhosszú hullámok figyelhetők meg, mert a többiek kihaltak.

1.10.2 Fázis-, és csoportsebesség

A tehetetlenségi hullámok jól példázzák azt az állítást, hogy a környezeti áramlások hullámai *diszperzívek*, terjedési sebességük függ a hullámszámtól. Az ilyen hullámok ezért alapvetően különböznek hangszerű, nem diszperzív társaiktól. A hullámcsomagok, melyek szinuszhullámok lineárkombinációi, nem tartják meg alakjukat, hiszen minden összetevőjük más sebességgel mozog.



1.17 ábra: A diszperzió következménye: a különböző hullámhosszú komponensek különböző sebességgel terjednek, s ezért minden lokalizált kezdeti alak szétfolyik. Az ábrán három, egymást követő időpontbeli hullámalak sematikus képe látható. Ez a tulajdonság bármilyen diszperzív hullámra jellemző.

Egy szinuszhullám terjedési sebessége (fázissebessége) a frekvencia és az adott iránynak megfelelő hullámszámkomponens hányadosa. A tehetetlenségi hullámok x és z irányu terjedési sebessége tehát elhanyagolható viszkozitás esetén

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = \pm 2\Omega \frac{k_z}{k_x k}, \quad c_z = \frac{\omega_0}{k_z} = \pm 2\Omega \frac{1}{k}, \quad (1.74)$$

mely erősen függ a hullámszámkomponensektől.

Adott közeg több, közel azonos hullámszámú és frekvenciájú szinuszhullámából álló csomagban a különböző hullámok modulálják egymást. Az interferenciájuk eredményeként kialakuló modulált hullám a fázissebességtől eltérő sebességgel halad. A hullámcsomag, s annak energiája is a modulált hullám sebességével terjed (egyetlen szinuszhullám energiája térben állandó). Két azonos irányban haladó síkhullám, melyek frekvenciája és hullámszáma a $d\omega_0$, ill., dk mértékben kissé eltér, olyan modulált hullámot alkot, mely a $d\omega_0/dk$ sebességgel halad. Ez a sebesség az ún. csoportsebesség. Általában a \mathbf{c}^* csoportsebesség-vektor a frekvencia hullámszám szerinti gradiense.

$$\mathbf{c}^* = \left(\frac{\partial \omega_0(\mathbf{k})}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega_0(\mathbf{k})}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega_0(\mathbf{k})}{\partial k_z} \right). \quad (1.75)$$

A csoportsebesség vektora a hullámszámvektorral tetszőleges szöget is bezárhat.

Az (x, z) síkban terjedő tehetetlenségi hullámokban

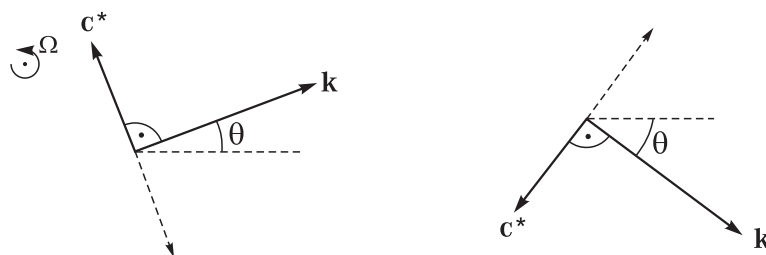
$$c_x^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_x} = \mp 2\Omega \frac{k_x k_z}{k^3}, \quad c_z^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_z} = \pm 2\Omega \frac{k_x^2}{k^3}. \quad (1.76)$$

A csoportsebesség nagysága tehát $2|\Omega \cos \theta|/k$. Mivel a függőleges terjedés $k_x = 0$ egzakt tehetetlenségi körmozgással jár, mely magától is fennmarad, az ilyen irányú hullámmal energia nem halad, a csoportsebesség eltűnik.

Innét látszik, hogy a csoportsebesség vektora merőleges a fázissebességre,

$$\mathbf{c}^* \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (1.77)$$

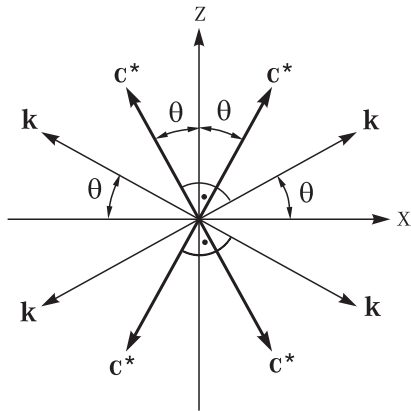
azaz az energia mindig \mathbf{k} -ra merőlegesen terjed. Ha a hullámok hangszerű társaiktól való eltérését a hullámszám és csoportsebesség által bezárt szög nagyságával jellemezzük, akkor a tehetetlenségi hullámok a lehető legdiszperzívebb hullámok közé tartoznak. Az, hogy a csoportsebesség vektor \mathbf{k} -tól jobbra vagy balra mutat, a frekvencia előjelétől és a hullámszámvektor irányától (a fázissebesség irányától) függ. A pozitív frekvenciájú hullám csoportsebessége pl. pozitív forgatási szögsebesség esetén a \mathbf{k} vektortól balra mutat, ha a hullámszámvektor az első szögnyedbe esik (1.18 ábra).



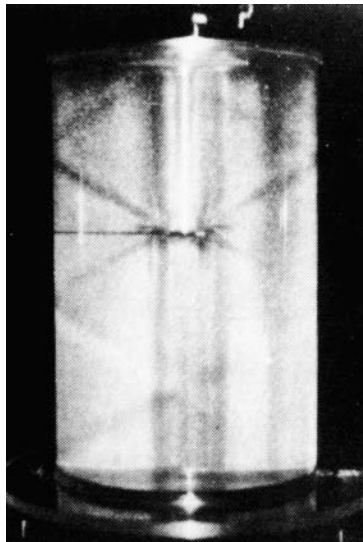
1.18 ábra: Tehetlenségi hullámok \mathbf{c}^* csoportsebességének és \mathbf{k} hullámszámvektorának viszonya pozitív forgatási szögsebesség mellett. A szaggatott vonal a negatív frekvenciához (fázissebességhez) tartozó csoportsebességet mutatja.

Ha tehetlenségi hullámokat valamilyen kis méretű test kis amplitudójú, ω ($0 < \omega < 2|\Omega|$) frekvenciájú mozgásával gerjesztünk, akkor azok $\theta = \pm \arcsin(\omega/2\Omega)$ szög alatt haladnak az x tengelyhez képest. A csoportsebességvektorok ugyanekkora szögeket zárnak be a függőlegessel, s az energiaterjedés jellegzetes X alakzatot rajzol ki (1.19, 1.20 ábra). A közeg izotróp jellege ellenére a tehetlenségi hullám terjedése *anizotróp*. Ez a tulajdonság is mutatja, hogy a tehetlenségi hullámok mennyire eltérnek a hangszerűektől, hiszen az utóbbiak ugyanilyen keltés mellett a függőleges sík minden irányába haladhatnak. A gerjesztő szögsebesség növelésekor a terjedési irány egyre meredekebb, a megfigyelhető X alakzat egyre laposabb, s $\omega_0 = 2|\Omega|$ -ra eltűnik.

A tehetlenségi hullámok viszonylag gyorsak, frekvenciájuk Ω -val arányos. Ez azt mutatja, hogy tehetlenségi hullámokkal véges k_z mellett még a gyors forgatás határesetében sem juthatunk közel a geosztrofikus állapothoz. Az (1.23) egyenletnek tehát létezhetnek olyan megoldásai, melyekben kis Rossby-számok esetén a dimenziótlan hidrodinamikai gyorsulás $1/Ro$ rendű. Ezek nem felelnek meg a kvázigeosztrofikus leírásnak, melyben a leglassúbb időbeli változások követése a cél. Látni fogjuk, hogy a kvázigeosztrofikus közelítésben a tehetlenségi hullámok és hasonlóan gyors társaik kiátlagolódnak.



1.19 ábra: Pontszerű, $|\omega| < 2|\Omega|$ frekvenciájú forrásból induló tehetetlenségi hullámok és csoportsebességeik lehetséges irányai.



1.20 ábra: Kisméretű korong ω frekvenciájú mozgásával gerjesztett tehetetlenségi hullámok $|\Omega| > \omega$ szögsebességgel forgatott tartályban. Jól megfigyelhető a törésmutató változása egy X alakú tartományban, mely az energia terjedési irányoknak, azaz a csoportsebesség vektor lehetséges elhelyezkedéseinek felel meg. Nagyobb gerjesztési frekvencia esetén az X alak laposabb [Tritton].

2. fejezet

A sekélység hatása

Űrhajóból nézve a légkör kesekny hártjának tűnik a Föld felszínén (2.1 ábra). Az óceán átlagos $H = 4$ km-es mélysége vagy a légkör legaktívabb alsó részének, a troposzférának $H = 10$ km-es átlagos vastagsága sokkal kisebb, mint a bennük kialakuló áramlások vízszintes síkbeli L szélessége, mely több ezer km is lehet. A H/L méretarány kicsinysége (2.2. ábra) azt eredményezi, hogy függőleges irányban csak nagyon lassú mozgások jöhetnek létre. Az áramlás közel kétdimenziós és oszlopos szerkezetű (2.3 ábra). Ennek következtében a nyomás magasságtól való függése a hidrosztatika törvényei szerint alakul tetszőleges forgatási sebesség mellett. Ezért a nyomás helyettesíthető a folyadékfelszín alakjával, s a domborzat alakja is egyszerűen vehető figyelembe.

A szabad felszíni mozgásokkal járó forgatott surlódásmentes folyadékban a Rossby-számon kívül megjelenik az

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

Froude-szám is mint fontos dimenziótlan paraméter (itt g a gravitációs gyorsulás). Két áramlás akkor hasonló, ha geometriailag hasonló domborzat és peremek mellett Ro és Fr számaik azonosak. A Froude-szám értéke nagyskálájú környezeti áramlásokban 0,1 vagy annál kisebb, s ez az érték laboratóriumban is könnyen megvalósítható.

A surlódásmentes sekély folyadék dinamikája egy alapvető fontosságú megmaradási tétellel párosul. A

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{h} H$$

potenciális örvényesség bármely folyadékreszecske mozgása során időben állandó. Itt Ω a forgatási szögsebesség, ζ az áramlás helyi örvényességének függőleges komponense, h pedig a teljes folyadékmélység ugyanazon a helyen. A potenciális örvényesség megmaradása azt fejezi ki, hogy a mélyebb folyadék rétegben az elkeskenyedő oszlopok forgása gyorsabb lesz az impulzusnyomaték megmaradása következtében (2.4 ábra). A megmaradási tétel jelentősége abból adódik, hogy megszorítást jelent a lehetséges mozgásokra, s számos kvalitatív következtetés levonására nyújt lehetőséget.

Gyors forgatás esetén a ζ örvényesség elhanyagolható: a geosztrofikus áramlásnak sekély folyadékban állandó h mélységi szintek mentén kell történnie. Ez egyben azt is jelenti, hogy az áramlás a felszíni alak szintvonalait követi, vagyis a felület lejtési irányára merőleges (2.5 ábra). A szabad felszíni anticiklonális áramlásnak kidudorodás, a ciklonálisnak pedig behorpadás felel meg (2.6 ábra). A 100 kilométerenkénti néhány méteres vízszintkülönbséghez óránként néhány kilométeres geosztrofikus sebesség tartozik. Valóban ilyen mértékű felszíni lejtés és ekkora sebesség jellemzi a Golf-áramlatot. Az áramlat, az arról leszakadt gyűrűk (2. ábra) és a nagy óceáni medencék felszíni köráramlásai (2.7 ábra) is közel geosztrofikus egyensúlyban lévő áramlások.

Lassú időfejlődésű kvázigeosztrofikus mozgás létrejöhet, ha a folyadékaljzat (domborzat) enyhén lejt valamelyik irányban (2.8 ábra). Ilyenkor ζ nem hanyagolható el teljesen a forgatási szögsebesség mellett, hanem ugyanolyan (kis) nagyságrendű mint a h mélység lejtés miatti változása. Ha egy adott részecskékből álló folyadék-vonalat a vízszintes síkban meggörbítünk (2.9 ábra), akkor a sekélyebb rétegbe kerülő részek körül negatív többlet-örvényességnek kell kialakulnia, és fordítva. Az örvényesség változás olyan, hogy mindig ugyanabba az irányba sodorja a folyadékvonalat. Létrejön tehát egy hullám, mely a folyadékoszlopok lassú oszcillációjának felel meg, és a változó mélység miatt periodikusan változó örvényességet hoz létre. Ezt nevezzük topografikus Rossby-hullámnak (2.10 ábra). Benne az energia terjedés iránya tetszőleges szöget is bezárhat a hullám terjedési irányával (2.11 ábra).

A Rossby-hullámok a forgatott közegek leglassúbb periodikus mozgásai. Topografikus Rossby-hullámok kialakulnak óceánok enyhe lejtésű partvonalai mentén. Az északi féltekén a sekélyebb közeg a hullám haladási irányától jobbra esik. Tipikus hullámhosszuk 100 km, periódusuk néhány nap és sebességük néhány km/h. A dinamikai hasonlóságot kihasználva, jól tanulmányozhatók laboratóriumban is kúpos aljú forgatott edényben (2.15, 2.16 ábrák). Ugyanilyen jellegű hullámok jönnek létre a Föld görbülete miatt is. Ezek a planetáris Rossby-hullámok alapvető szerepet játszanak a légköri folyamatokban és az időjárás alakításában (l. 3.5 fejezet).

A forgatott sekélyfolyadék hidrodinamikában megjelenik egy, a felszíni mozgásokkal kapcsolatos fontos, jellegzetes hosszúság, az

$$R = \frac{\sqrt{gH}}{2|\Omega|}$$

Rossby-sugár. Ez egyben a Rossby- és Froude-számok hányadosa szorozva a lineáris mérettel. Fontossága abból adódik, hogy független a sebességtől. Az óceánok és a troposzféra átlagos mélységével és a Föld forgási szögsebességével számolva R ezer km nagyságrendű. (A rétegezettség ezt a számértéket még csökkenti majd.) A Rossby-sugár az a távolság, ahol a gravitációs és a Coriolis-hatás összemérhetővé válik, és egyben a légköri és óceáni örvények tipikus mérete. Rossby-hullámokban a felszíni mozgás szerepe a Rossby-sugárnál nagyobb hullámhosszakra válik lényegessé (2.12 ábra).

A Rossby-hullámoknál jóval gyorsabb hullámok is kialakulhatnak. A tehetetlenségi gravitációs, más néven Poincaré-hullámokban a felszíni hullámozás és az előző fejezetben megismert tehetetlenségi mozgás együtt jelenik meg (2.18 ábra). Ezért frekvenciájuk nem süllyedhet a forgatási szögsebesség kétszerese alá (2.17 ábra). Az R -nél jóval rövidebb hullámhosszokon a forgatás hatása már nem érvényesül. Az ilyen, viszonylag rövid hullámok a nem forgatott sekély folyadék $c_0 = \sqrt{gH}$ sebességével haladnak.

Peremek, partvonalak mentén haladnak a Kelvin-hullámok. Sebességük $c_0 = \sqrt{gH}$, de amplitudójuk a peremre merőleges irányban csökken, és a lecsengési távolság éppen a Rossby-sugár (2.19 ábra). A partvonal, amelyhez kötődnek, az északi féltekén haladási irányuktól jobbra esik. Ez a tulajdonságuk azzal függ össze, hogy a Coriolis-erő által eltérített folyadék-részecskék a part mentén halmozódnak fel. A Kelvin-hullámok egész medencéket képesek körbejárni (2.20 ábra). Erős szelek és az árapály jelenség gyakran kelt part menti Kelvin-hullámokat. Az északi irányba történő amplitudócsökkenés jól megfigyelhető a Dover-i szorosban, ahol a francia partokon jóval nagyobb az árapály-ingadozás mint az angol oldalon. A tipikusan fél nap periódusidejű árapály-hullám sokszor Kelvin-hullámokhoz hasonló formában jelenik meg a tengeri medencékben és a nyílt óceánon is (2.21, 2.22 ábrák).

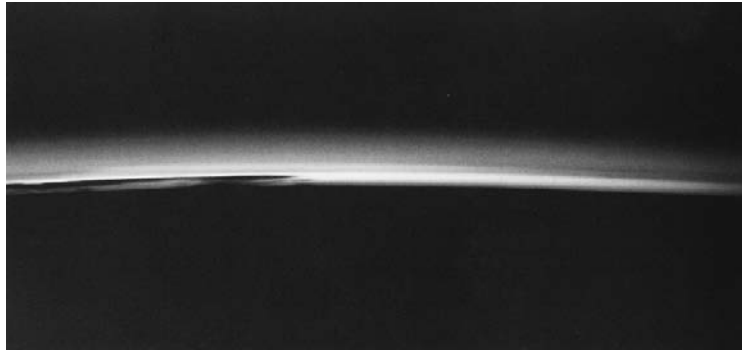
Erős és hirtelen gerjesztések hatására gyakran nemlineáris felszíni hullámok, ún. szoliton hullámok alakulnak ki. Érdekeségük, hogy részecskeszerű tulajdonsággal rendelkeznek, mert ütközés után visszanyerik eredeti lokalizált alakjukat (l. 2.23, 2.24, 9.3 ábrák). A szolitonok olyan véges amplitudójú hullámcsomagok, melyek sebessége és kiterjedése - éles ellentétben a lineáris hullámokkal - függ az amplitudótól. A szoliton mindig felszíni kidudorodással jár. Tetszőleges kezdeti alakból egy nagyság szerint rendezett szolitonvonulat alakul ki, melyet egy, a szolitonoknál lassabb,

kis amplitudójú hullámsor követ (9.4 ábra). Kezdeti felületi behorpadásból szoliton nem fejlődhet ki, csak egy kis amplitudójú hullámsor (9.5 ábra). A földrengéshullámok, tsunamik, a part menti egyre sekélyedő közegben lokalizált szolitonként viselkednek, miközben amplitudójuk nő, s a partvonal előtt több 10 m-es magasságot is elérhet. A szárazföldre jutva a szokásos tengerhullámokhoz hasonlóan (9.2 ábra) megtörnek, pusztító energiákat szabadítanak fel.

A sekély közeg felszínén megfigyelhető másik nemlineáris jelenség a mozgó folyadéklépcsővel járó torlókullám (bore) (2.25, 2.26a ábra). A nem mozgó helyzetű folyadéklépcső a hidraulikus ugrás, mely gyors áramlások hirtelen lelassulásával társul (2.26b ábra).

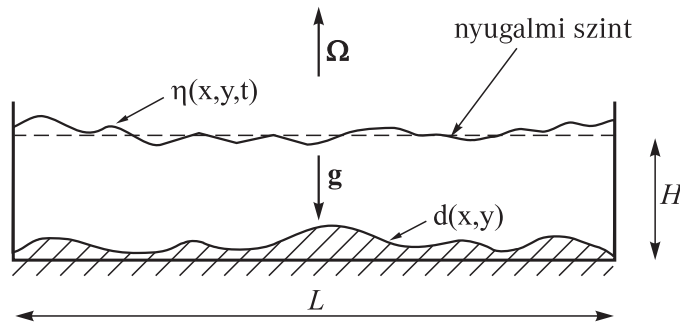
2.1 A forgatott sekély folyadék egyenletei

A földi légkör és víztakaró keskeny hártya bolygónk felszínén (2.1 ábra).



2.1 ábra: Az űrrepülőgépről jól látszik, hogy a felkelő Nap által megvilágított légkör milyen keskeny a Föld sugarához képest. A sötét sáv, az ionoszféra, kb. 500 km-ig terjed. A légkör alsó 50 km-e a képen fehérnek látszik. Ennek legalsó része, a teljes levegőtömeg mintegy 80 százalékát tartalmazó troposzféra átlagosan 10 km vastag [sdcd.gsfc.nasa.gov/SCB/Highlights/FY2000/gfx/atmos_comp_cap1right_jpg].

Vizsgáljuk meg ezért, milyen következményekkel jár, ha az áramlás L jellegzetes vízszintes kiterjedése sokkal nagyobb, mint a folyadék H átlagos mélysége, azaz ha az $\varepsilon \equiv H/L$ méretarány 1-nél lényegesen kisebb $H \ll L$.



2.2 ábra: A forgatott, sekély homogén folyadék, és a fejezetben használt jelölések: a felület nyugalmi szinthez viszonyított alakját az $\eta(x, y, t)$ függvény, az aljátétét a $d(x, y)$ írja le. A folyadék átlagos H mélysége sokkal kisebb az L vízszintes kiterjedésnél. A teljes $h = H + \eta - d$ folyadékmélység új dinamikai változó.

A sekélyfolyadék közelítéssel tárgyalni tudjuk azt is, ha az edény alja nem teljesen vízszintes, mely a valódi áramlások alatti domborzat egyenetlenségének felel meg. Figyelembe vesszük a fo-

lyadék szabad felszínének egyenletlenségeit is. A felszín nyugalmi folyadékszinthez mért magassági koordinátáját a t pillanatban az $\eta(x, y, t)$ függvény adja meg. A H átlagos mélységi szinttől mérjük a domborzat $d(x, y)$ alakját, melyről feltesszük, hogy időben nem változik (2.2 ábra). A folyadék adott helyhez tartozó pillanatnyi

$$h(x, y, t) \equiv H + \eta(x, y, t) - d(x, y) \quad (2.1)$$

mélysége fontos szerepet játszik a továbbiakban. Egyelőre semmilyen megszorítást nem teszünk a felszín és a domborzat alakjára, csak azt tételezzük fel, hogy a folyadék ellepi a domborzatot: $h > 0$. Az egyszerűség kedvéért a folyadék *viszkozitását elhanyagoljuk*, ideális folyadék közelítésben dolgozunk. A viszkozitással kapcsolatos jelenségekre majd az 4. fejezetben térünk vissza.

Az első fontos lépés a W jellegzetes függőleges áramlási sebesség becslése a kontinuitási egyenlet alapján. A vízszintes sebességkomponenseknek a vízszintes koordináták szerinti deriváltjai U/L rendűek. A függőleges sebességnek a z koordináta szerinti deriváltjával, mely W/H rendű, együttesen 0-t kell adniuk. Ebből azt kapjuk, hogy

$$W \approx U \frac{H}{L} \equiv U\varepsilon \ll U, \quad (2.2)$$

tehát függőleges irányban csak nagyon lassú mozgások történhetnek. A sekély folyadék mozgása mindig *közel* kétdimenziós, függetlenül attól, hogy forogott-e vagy sem.

Az (1.23) hidrodinamikai egyenlet függőleges sebességre vonatkozó komponensében a w időderiváltja ezért közelítőleg $W/(L/U) = U^2 H/L^2$, ami ε -szor kisebb, mint a vízszintes gyorsulás U^2/L becslése. A függőleges irányú mozgásból adódó hidrodinamikai gyorsulás tehát elhanyagolható. Sekély folyadékokban ezért az (1.23) egyenlet függőleges komponensében ezért a jobb oldalon levő nyomási erőnek és a súlynak kompenzálnia kell egymást, tehát

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (2.3)$$

A sekély folyadék a nyomás magasságfüggése szempontjából hidrosztatikai egyensúlyban van mozgása közben is.

Ebből

$$p(x, y, z, t) = \rho_0 g(\eta(x, y, t) + H - z) + p_0. \quad (2.4)$$

A külső felszínen feltesszük, hogy a p_0 nyomás állandó (a p_0 ingadozásából adódó hatások a tapasztalat szerint környezeti áramlásokban nem jelentősek¹). Szabad felszín esetén az álló folyadék hidrosztatikai nyomásától való eltérést, a

$$p' = \rho_0 g \eta \quad (2.5)$$

járulékot tekintjük dinamikai nyomásnak. Nyomáskülönbség tehát a felszíni egyenletlenség miatt alakulhat ki, a folyadékmozgás felszíni alakváltozással jár.

Az u és v vízszintes sebességkomponensekre vonatkozó hidrodinamikai egyenletben a nyomási tagok z -től függetlenek. Ez azt jelenti, hogy ha kezdetben nem volt z -függés a sebességekben,

¹A vizek felszínén a légköri nyomásingadozás hPa nagyságrendű, de számottevő áramlás beindításához 1000 hPa nagyságú nyomásváltozásra lenne szükség.

akkor később sem lesz. A továbbiakban feltesszük, hogy a kezdeti u és v sebességek nem függenek a magasságtól². Ekkor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,} \quad (2.6)$$

azaz az áramlás oszlopos szerkezetű.

A sekély folyadék feltétel tehát két olyan tulajdonságot is biztosít minden forgatási sebességre, melyet mély folyadékban csak az erősen forgatott határesetben tapasztalhattunk: a függőleges iránybeli hidrosztatikát és az oszlopos szerkezetet. Az áramlás egzakt síkbelisége ($w = 0$, $\text{div} \mathbf{u} = 0$) azonban a folyadék sekélységéből nem következik.

A két vízszintes sebességkomponens időfejlődését ekkor (1.23) alapján a

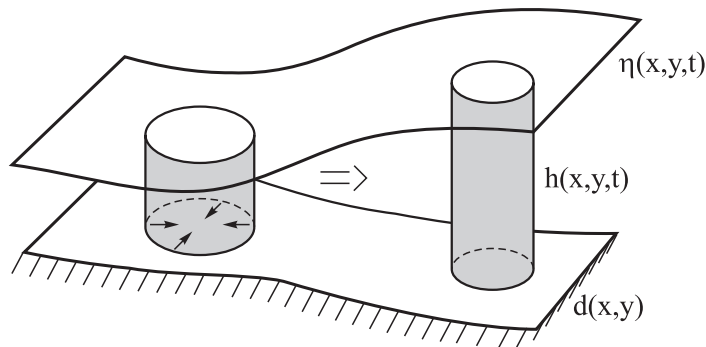
$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - g \text{grad} \eta} \quad (2.7)$$

egyenlet írja le, ahol a d/dt teljes időderivált most a $\partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ síkbeli teljes időderiváltat jelenti, és u , v független z -től. A mély folyadék esetéhez képest másik fontos eltérés, hogy a nyomásderiváltak helyett most a felszín alakját leíró függvény deriváltjai jelennek meg. Mivel azonban a felszín formája ismeretlen, szükségünk van még egy η -ra vonatkozó egyenletre. Ez az anyagmegmaradásból következik.

A teljes háromdimenziós áramlás összenyomhatatlan, de mivel fel-, és leáramlások indulhatnak meg, a vízszintes síkbeli \mathbf{u} sebesség divergenciája általában nem nulla. Az (1.22) divergenciamentességi feltétel következtében

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \equiv -\text{div} \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Természetesen, ha egy henger alakú tartomány vízszintes irányban radiálisan kifelé áramlik, akkor a henger szélesebb lesz és ezért függőleges irányban összehúzódik. Fordítva, ha beáramlás történik, akkor a henger megnyúlik (2.3 ábra). Mivel a divergencia z -től független, a w sebesség legfeljebb csak lineárisan függhet a magasságtól.



2.3 ábra: A sekély folyadék áramlása oszlopokban történik: mélyebb folyadékban az anyagmegmaradás miatt az oszlopok keskenyebbek lesznek.

A síkbeli áramlás szempontjából tehát forrásként vagy nyelőként jelentkezik az, hogy a teljes folyadékoszlop h magassága, ill. A alapterülete változik. A divergencia definíciója alapján az (x, y) síkbeli áramlás forráserőssége a vízszintes \mathbf{u} sebességvektor divergenciája. Minél nagyobb

²Mert például a mozgás nyugalmi állapotból indul.

a divergencia, annál gyorsabban változik időben a vízoszlop A területe: $\operatorname{div}\mathbf{u} = (1/A)dA/dt$. A divergencia az alapterület relatív növekedési arányát jelenti.

Állandó sűrűség esetén az anyagmegmaradás a folyadékgyűrű térfogatának állandóságával egyenértékű, vagyis a $d(hA)/dt = 0$, amiből $A dh/dt = -h dA/dt$. Így

$$\frac{dh}{dt} = -h \operatorname{div}\mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Az áramlás síkbeli divergenciája tehát egyben a magasság relatív megnyúlási arányának ellentettje. A folyadékmélység pozitív síkbeli divergencia esetén csökken. Sekély folyadékban a folyadékoszlopok $(1/h)dh/dt$ relatív megnyúlási aránya $-\operatorname{div}\mathbf{u}$, vagyis a (2.8) egyenlettel összevetve $\partial w/\partial z$. deriváltja.

A teljes időderiváltat kiírva és a $\operatorname{div}(h\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\operatorname{grad})h + h\operatorname{div}\mathbf{u}$ azonosságot felhasználva, (2.9)-ből a

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0} \quad (2.10)$$

ekvivalens alakhoz jutunk. Ez nem más, mint a (1.21) kontinuitási egyenlet összenyomhatatlan sekély folyadékban, hiszen $h(x, y)$ arányos a teljes folyadékgyűrű (x, y) pontja körüli egységnyi felülethez tartozó tömeggel, azaz a kétdimenziós sűrűséggel.

A sekélyfolyadék hidrodinamika teljes egyenletrendszeré tehát:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = +2\Omega v - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -2\Omega u - g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (2.13)$$

Fontos megjegyezni, hogy η és h nem függetlenek, mert közöttük egy adott függvény, a domborzat d alakja teremt (2.1) szerint kapcsolatot. Ez az egyenletrendszer egyenértékű az (1.22)-(1.23) rendszerrel az $\varepsilon \ll 1$ határesetben³. Mivel nagyskálájú áramlásokban ε tipikusan 10^{-2} vagy kisebb, az ε méretarányban elsőrendű korrekciókkal általában már nem érdemes foglalkoznunk (kivétekléppen l. 9.3 fejezet).

A későbbiekben többször használjuk majd az ún. *merev lap* közelítést, mely azt jelenti, hogy a felszíni alakváltozás elhanyagolható a teljes folyadékmélységhez képest: $\eta \equiv 0$, azaz $h = H - d$. Ez a zárt felszíni eset a laboratóriumban a folyadék vízszintes lappal való letakarásával biztosítható. Az eltűnő felszíningadozás azonban nem jelenti azt, hogy dinamikai nyomásgradiens nincs jelen, hiszen a lap jelentős erővel hathat a folyadéokra. Ekkor a p' dinamikai nyomás önálló változó, a (2.5) egyenlet nem érvényes és $-\operatorname{grad}\eta$ helyett (2.7)-ben $-\operatorname{grad}p'/\rho_0$ írandó⁴.

2.2 A dimenziótlan egyenlet

Az egyenletek dimenziótlanításához (1.30)-on kívül az

$$\eta \rightarrow H\eta \quad (2.14)$$

³Elhanyagolható viszkozitás esetén.

⁴A jelölésváltást elkerülendő szokás a $p' \equiv \rho_0 g \eta$ kifejezéssel definiált η függvényt használni (melynek azonban ekkor semmi köze sincs a felszíni alakhoz).

megfeleltetést használhatjuk, s hasonlóan járunk el a h és d mennyiségekkel is. Így

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mp \frac{1}{Ro} \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \text{grad}\eta,} \quad (2.15)$$

$$h = 1 + \eta - d, \quad (2.16)$$

és (2.13) alakja változatlan. Itt megjelent a sekély folyadék elméletben érvényes

$$\boxed{Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}} \quad (2.17)$$

Froude-szám. A továbbiakban kizárólag ebben az értelemben beszélünk a Froude-számról, tehát az L -et tartalmazó (1.27) alakot többé nem használjuk. A (2.17) Froude-szám az áramlás jellegzetes vízszintes sebességének és a sekély folyadékbeli gravitációs hullámok $c_0 = \sqrt{gH}$ terjedési sebességének (l. 2.8 fejezet) viszonya:

$$Fr = \frac{\text{áramlási sebesség}}{\text{gravitációs hullámok sebessége}} = \frac{U}{c_0}. \quad (2.18)$$

A szám négyzete a $\rho_0 U^2$ nyomás és a $\rho_0 g H$ fenéknomás hányadosát adja meg. A környezeti áramlások Froude-számát mindkét értelmezésben kicsinek várjuk. A 1.1 táblázatában az új Froude-számra a ciklon esetén ($H = 10$ km) 10-szer, a Golf-gyűrűk estén ($H = 4$ km) 5-ször nagyobb értékeket kapunk. Vegyük észre, hogy így a ciklonra vonatkozó Rossby-számot Fr alulról megközelíti.

A sekélyfolyadék hidrodinamikában tehát a szabad felszínnel kapcsolatos mozgásokban óhatatlanul fellép a Froude-szám is. Két forgatott sekély folyadék ideális áramlása akkor hasonló, ha geometriai értelemben hasonló domborzattal és peremekkel rendelkeznek, és mind Rossby-, mind Froude-számuk azonos. Laboratóriumban, 10 cm mélységű folyadékban 1–10 cm/s erősségű áramlásokhoz 0,01–0,1 nagyságú Froude-szám tartozik. A természetben előforduló értékek tehát könnyen megvalósíthatóak.

2.3 A potenciális örvényesség megmaradása

A sekély folyadék egyenletrendszernek érdekes tulajdonsága, hogy egy új megmaradási tételt hordoz, mely az örvényességgel kapcsolatos. Képezzük a (2.11) egyenlet y szerinti, majd a (2.12) egyenlet x szerinti deriváltját, s vonjuk ki ezeket egymásból. Így az örvényvektor $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ függőleges komponensének időderiváltja:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(\zeta + 2\Omega) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\zeta + 2\Omega) \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.19)$$

Ez, Ω állandósága miatt a $\zeta_T \equiv \zeta + 2\Omega$ teljes örvényességre vonatkozó egyenletnek is tekinthető. Az összefüggés sekély folyadéokra fogalmazza meg azt, amit korábban kvalitatíven tárgyaltunk (l. (1.3) ábra): bármely fel- vagy leáramlás, vagyis nullától eltérő $\text{div}\mathbf{u}$ forgatott rendszerben mindig örvényességet hoz létre.

Felhasználva a folyadékmélységre vonatkozó (2.9) egyenletet, azt kapjuk, hogy⁵.

$$\frac{d\zeta_T}{dt} = \frac{\zeta_T}{h} \frac{dh}{dt}, \quad (2.20)$$

⁵Az egyenlet akkor is érvényben marad, ha Ω helyfüggő!

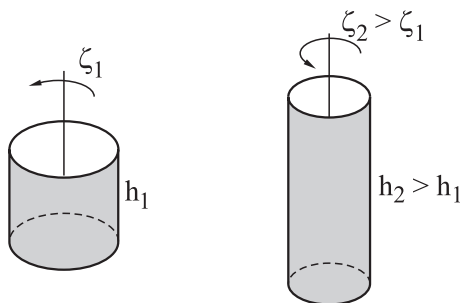
mely szerint a teljes örvényesség változását a mélység változása határozza meg. A fenti összefüggés úgy is írható, hogy a

$$q \equiv \frac{\zeta_T}{h} H \equiv \frac{\zeta + 2\Omega}{h} H \quad (2.21)$$

mennyiség, az ún. *potenciális örvényesség*⁶ megmaradó mennyiség:

$$\frac{dq}{dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (2.22)$$

A teljes örvényesség és az aktuális mélység hányadosának tehát állandónak kell maradnia a pályavonal mentén haladva. Ez erős megszorítás, mert azt jelenti, hogy pl. mélyebb folyadékrétegbe kerülve megnő a teljes örvényesség (2.4. ábra).



2.4 ábra: A potenciális örvényesség megmaradásának jelentése: mélyebb folyadékban az oszlopok forgása felgyorsul, összhangban az impulzusnyomaték megmaradásával.

A potenciális örvényesség megmaradásának mechanikai magyarázata az impulzusnyomaték megmaradása, a tömegmegmaradással kiegészítve. Tekintsünk egy r sugarú, h magasságú hengert. A tömegmegmaradás állandó sűrűség mellett azt jelenti, hogy a henger térfogata, tehát $r^2 h$ állandó. Az ω szögsebességgel forgó henger tehetetlenségi nyomatéka r^2 -tel arányos, impulzusnyomatéka pedig $r^2 \omega$ -val. Az impulzusnyomaték tétele tehát egy hengeres alakzatra az $\omega/h =$ állandó feltételt írja elő.

A potenciális örvényesség elnevezés arra utal, hogy a folyadékréteg vastagodása esetén fel szabadul az az örvényesség, mely sekélyebb folyadékrétegben felhalmozódott. A potenciális örvényesség központi jelentőségű fogalom a környezeti áramlások megértésében.

Végezetül érdemes megadni a potenciális örvényesség dimenziótlan alakját. Mivel ζ egysége U/L , a potenciális örvényességet is U/L egységekben mérjük, s így

$$q = \frac{\zeta \pm 1/Ro}{h}. \quad (2.23)$$

Kis Rossby-számú áramlásokban tehát a számlálóban fellépő relatív örvényesség legfőljebb kis korrekciókat jelenthet a forgatási szögsebességből adódó vezető taghoz.

⁶A potenciális örvényességet gyakran a konstans H tényező nélkül definiálják.

2.4 Gyorsan forgatott sekély folyadék: a geosztrofikus egyensúly

Vizsgáljuk meg a gyors forgatás hatását sekély folyadékban, azaz tekintsük a kis Rossby-szám határesetet. Ekkor már nem feltevés az, hogy az áramlás sebessége nem függ a függőleges iránytól, mert az a Taylor-Proudman-tétel következménye.

A geosztrofikus áramlás feltétele nyilvánvalóan most is az, hogy a Coriolis-erő és a nyomási erő kompenzálják egymást. Ehhez a felületi alakváltozásból adódó járuléknak is $1/Ro$ rendűnek kell lennie (2.15)-ban, azaz a Froude-szám nem lehet független a Rossby-számtól.

Az \mathbf{u}_g geosztrofikus áramlást most a szabad felszín alakja határozza meg. A dimenziós (2.11) és (2.12) egyenletekből

$$\boxed{v_g = \frac{g}{2\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad u_g = -\frac{g}{2\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial y},} \quad (2.24)$$

következik. A sekély folyadékban kialakuló geosztrofikus áramlásra tehát ugyanazok az összefüggések érvényesek, mint mély közegben, csak most a dinamikai nyomást a szabad felszíni alak határozza meg (2.5) szerint. A geosztrofikus áramlás ezért merőleges a szabad felszín gradiensére, a felület *szintvonalait* követi. Pozitív Ω esetén, az áramlási iránytól *jobbra* található a magasabb felszín.

A (2.24) geosztrofikus áramlás divergenciája eltűnik, az áramlás kétdimenziós. Ebből tudjuk, hogy létezik egy (1.52)-nek eleget tevő áramlási függvény. (2.24) éppen annak felel meg, hogy

$$\boxed{\psi = \frac{g}{2\Omega} \eta.} \quad (2.25)$$

Az áramlási függvény tehát arányos magával a felszíni alakkal.

A (2.13) kontinuitási egyenletből időfüggetlen esetre ugyanakkor az következik, hogy

$$u_g \frac{\partial h}{\partial x} + v_g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2.26)$$

azaz a geosztrofikus sebesség merőleges a mélységi szintvonalakra, a h =állandó görbékre is. Ez $d \neq \text{konst}$ esetén csak úgy lehetséges, ha a kialakuló felszíni forma arányos a domborzattal:

$$\eta = C d, \quad (2.27)$$

ahol C egy 1-nél jóval kisebb állandó. Ekkor tehát az is igaz, hogy az áramlás a domborzat szintvonalait követi.

A geosztrofikus határesetben a ζ relatív örvényesség a potenciális örvényesség (2.21) kifejezésében elhanyagolható a forgatási szögsebesség mellett (l. (2.23)), azaz

$$q = \frac{2\Omega}{h} H. \quad (2.28)$$

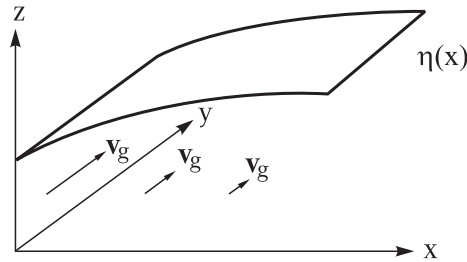
Ezért (2.22) szerint időfüggetlen esetben fenn kell állnia az

$$u_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\Omega}{h} \right) + v_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2\Omega}{h} \right) = 0 \quad (2.29)$$

feltételnek. Mivel Ω állandó, ez ismét azt jelenti, hogy az áramlás a h mélység gradiensére merőleges. A dinamikai egyenlet és a belőle következő megmaradási tétel azonos feltételre vezet. A

folyadékoszlopok tehát *csak azonos vízmélységű tartományokban* mozoghatnak, hiszen különben potenciális örvényességük nem lehetne állandó. Ezzel a Taylor-kísérlet újabb magyarázatát kapjuk a sekély folyadék elmélet keretében: a korong peremén a vízmélység ugrásszerűen változik, melyen a külső áramlás nem hatolhat át.

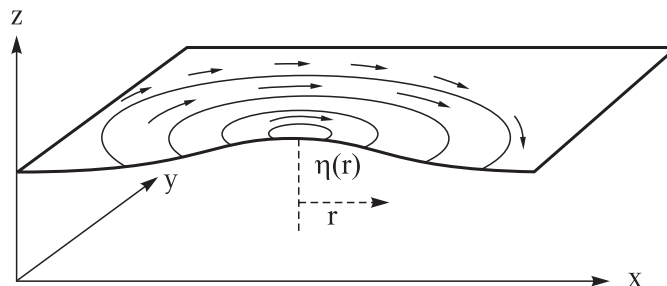
A geosztrofikus sebességeloszlás és felszíni alak tetszőleges lehet, de köztük a (2.24) kapcsolatnak kell fennállnia. Formájukat a rendszer előtörténete vagy egyéb nem geosztrofikus folyamatok határozzák meg. Érdekes néhány példában megvizsgálni, hogy konkrét felszíni alakokhoz milyen geosztrofikus áramlások tartoznak.



2.5 ábra: Az x irányban növekvő $\eta(x)$ felszíni alak következtében kialakuló $v_g = (g/2\Omega)d\eta(x)/dx$ nagyságú, pozitív y irányú geosztrofikus áramlás.

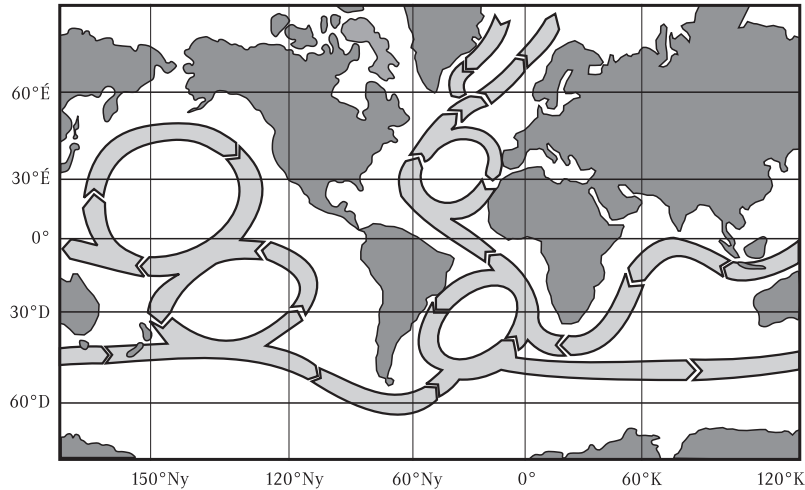
Tegyük fel, hogy a felszíni alak csak x -től függ, s adott $\eta(x)$ függvény szerint változik (2.5 ábra). A (2.24) összefüggés szerint a geosztrofikus áramlás y irányú lesz, s akkor mutat a pozitív y irányba, ha a felszín emelkedik x növekvő értékeire. A Föld szögsebességével számolva, $v_g = 1\text{m/s}$ -os áramlás kialakulásához $d\eta/dx = 10^{-5}$ nagyságú gradiensre van szükség, tehát 100 km-enként 1 méternyi emelkedésre. A Golf-áramlat esetében ilyen felszínemelkedés valóban megfigyelhető. Modellünk ott felel meg az áramlatnak, ahol az még az Észak-amerikai partvonalal párhuzamosan halad. Az áramlat szélessége 50 – 100 km, s ezen a távolságon az átlagos tengersizint a műholdas mérések szerint ténylegesen emelkedik egy méternyit. A Golf-áramlat tehát első közelítésben geosztrofikus egyensúlyban levőnek tekinthető.

Második példaként tekintsünk egy lokális felszíni kidudorodást, melyet az $\eta(r)$ forgásszimmetrikus függvény ír le (l. 2.6 ábra). A sebesség nagysága csak a radiális koordinátától, r -től függ: körkörös áramlás jön létre. Pozitív Ω esetén egy negatív előjelű köráram alakul ki, mely anticiklonális áramlásnak felel meg. Ez a geometria jellemzi a Golf-áramlattól északra leváló (meleg) gyűrűket. A tőle délre kerülők ciklonális jellegűek, közepükön felszíni behorpadással.



2.6 ábra: A forgásszimmetrikus $\eta(r)$, r -rel csökkenő felszíni alak $g/(2\Omega)|d\eta(r)/dr|$ nagyságú, negatív körülférésű, anticiklonális geosztrofikus áramlást tart fenn.

Az óceáni medencékben mindkét féltéken létezik egy-egy hatalmas körkörös áramlás, melyek kialakulásában az uralkodó szeleknek nagy szerepe van. Mindegyik medence belsejében egy-két méterrel magasabb az átlagos vízszint, mint a szélén. Első közelítésben mind a négy nagy köráram (angolul gyre) geosztrofikus egyensúlyban van (2.7 ábra).



2.7 ábra: Az óceáni áramlások felszíni rendszere az Atlanti-, és a Csendes-óceán medencéjében mindkét féltekén kialakít egy-egy nagy (anticiklonális) köráramot, melyek közel geosztrofikus egyensúlyban vannak (mindegyik belsejében a vízfelszín magasabb mint a szélén, a körüljárás anticiklonális). Az Észak-Atlanti-kör nyugati ívét a Golf-áramlat alkotja.

2.5 Kvázigeosztrofikus mozgás: a Rossby-hullám

2.5.1 Szemléletes kép

Megvizsgáljuk, mi történik, hogyha kissé eltávolodunk a geosztrofikus határesetről, mely időfüggetlen áramlásokat ír le. Megengedjük, hogy a Rossby-szám kicsi legyen, de véges, és feltesszük, hogy a dimenziótlan hidrodinamikai gyorsulások egységnyiek. A potenciális örvényesség megmaradása nyilván érvényben van⁷, tehát igaz, hogy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + 2\Omega}{h} H \right) = 0. \quad (2.30)$$

A potenciális örvényesség az áramlás során állandó, de ζ most nem hanyagolható el Ω mellett, ámbar igaz, hogy $|\zeta| \ll |\Omega|$.

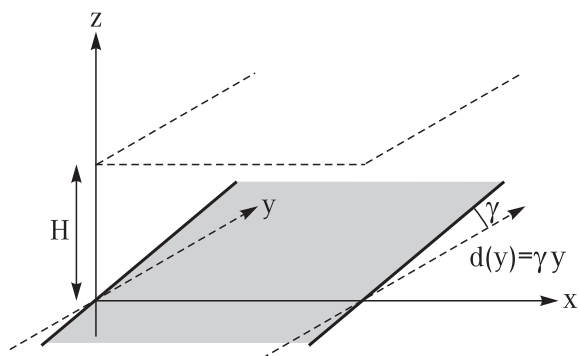
Az egyszerűség kedvéért egyelőre tegyük fel, hogy a felszín vízszintes, $\eta = 0$ (alkalmazzuk a merev lap közelítést). A teljes mélység ekkor $h = H - d$. A domborzatról tegyük fel, hogy kissé lejt, méghozzá úgy, hogy az y irányban emelkedik (2.8 ábra).

Képzeljük el, hogy a folyadékban egy, az x -tengellyel párhuzamos egyenes vonaldarab olyan részecskékből áll, melyek ζ relatív örvényessége éppen 0. A vonalat egy helyen a vízszintes síkban enyhén meghajlítjuk a növekvő y -értékek irányába. Itt kisebb lesz a görbe alatti folyadékmélység, mint ahonnan kimozdítottuk⁸. Ha csökken a teljes mélység, akkor a q potenciális örvényesség csak úgy maradhat meg pozitív Ω mellett, ha a ζ relatív örvényesség is csökken: a folyadék forogni kezd, ζ negatívvá válik (2.9a. ábra). A negatív örvényesség negatív körüljárású áramlást indít, mely a görbületet odébbtolja, méghozzá balra. Ez a zavar végighalad a vonal mentén: hullámszerű mozgás alakul ki.

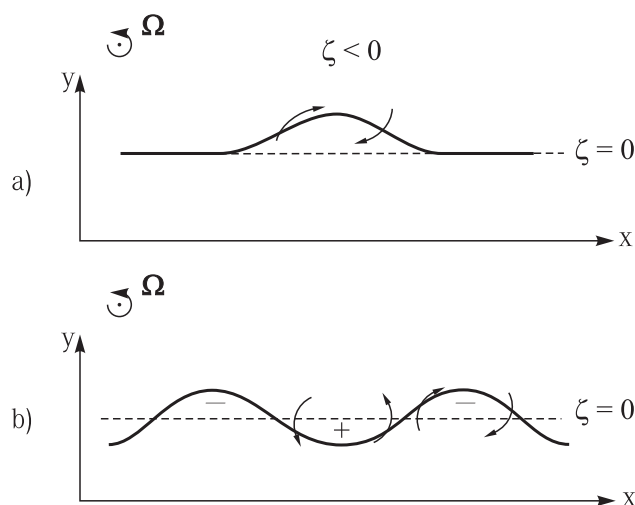
Ugyanezt a gondolatmenetet egy szinuszfüggvényszerű kezdeti deformációra alkalmazva, az y -tengely mentén lefelé történő kitüremkedés körül pozitív irányú körkörös áramlás jön létre, de az alakzatot az is a negatív x irányba mozgatja (2.9b. ábra). Miközben az egész hullám ebbe az

⁷A 9.1 fejezetben megmutatjuk, hogy $Ro \ll 1$ esetén a megmaradási törvény egyenértékű az egész sekélyfolyadék egyenletrendszerrel.

⁸Geosztrofikus egyensúlyban ez nem lenne megengedett.



2.8 ábra: Rossby-hullámok kialakulásához szükséges döntött aljzat.



2.9 ábra: A Rossby-hullámok kialakulási mechanizmusa az (x, y) síkban pozitív forgatási irány esetén. a) Az eredetileg vízszintes, zérus örvényességű folyadékvonalon kialakított kis y irányú kitéremkedés a potenciális örvényesség megmaradása következtében negatív köráramlást hoz létre, mely a púpot balra tolja. b) Egy hullámalak felváltva hoz létre negatív és pozitív örvényességet a hullám maximális, ill. minimális kitérésének megfelelően, s mindkét hatás a negatív x irányba történő elmozduláshoz vezet.

irányba halad, az egyes (x, y) pontokhoz tartozó folyadékoszlopok az y irányban oszcillálnak, s ezzel magasságuk és alapterületük is változik. A hullám terjedési sebessége sokkal nagyobb, mint az áramlási sebesség, mely a Taylor-oszlopok gyenge y irányú mozgásából adódik. A különböző örvényességű helyek tolják előre maguk között azt a vonalat, mely egész mozgása során állandó potenciális örvényességű marad.

Az ilyen hullámokat első leírójukról *Rossby-hullámoknak* nevezzük. Mivel domborzati lejtés nélkül nem jelenhetnek meg, a *topografikus* jelzővel látjuk el őket. Új típusú hullámokról van szó, melyek csak forgatott folyadékban létezhetnek. A geosztrofikus egyensúlytól való kis eltérésnek felelnek meg, ezért a Rossby-hullámok a forgatott közegbeli leglassúbb hullámok. A bemutatott gondolatmenet azt illusztrálja, hogy Rossby-hullámok bármilyen monoton változó domborzat esetén kialakulnak, amplitudójuk nem feltétlenül kicsi, azaz ezek a hullámok nemlineárisak is lehetnek.

Érdekes elgondolkodnunk azon, hogy miért kitüntetett a negatív x irányba haladás. Ennek oka az, hogy a forgatott rendszerben zajló jelenségek nem invariánsak az időtükrözésre. A pozitív forgás adott lejtés mellett kitüntet egy (x, y) síkbeli irányt: a hullámok úgy terjednek, hogy

a sekélyebb közeg a haladási iránytól jobbra esik. Természetesen megváltoztatott forgásirány esetén a hullámok az ellenkező irányba haladnának. Az idő és a forgatás előjelét egyszerre kell megváltoztatnunk ahhoz (hasonlóan a mágneses térben mozgó töltött részecske esetéhez), hogy invarianciát találjunk.

2.5.2 Lineáris elmélet

A Rossby-hullám kvalitatív tulajdonságai leírásához tegyük fel, hogy a domborzat egyenletesen lejtős,

$$d(y) = \gamma y \quad (2.31)$$

az $y = 0$ vonal valamely $y_{max} = L$ szélességű környezetében. A γ meredekségről feltesszük, hogy kicsi, azaz a mélységváltozás elhanyagolható a teljes mélységhez képest az egész vizsgált tartományban: $d(y) \ll H$, melyből $\gamma y_{max} = \gamma L \ll H$. Ennek feltétele az, hogy a

$$\boxed{Be \equiv \gamma \frac{L}{H}} \quad (2.32)$$

dimenziótlan topográfiai paraméter egynél jóval kisebb. Ez azt követeli meg, hogy a γ gradiens még az $\varepsilon = H/L$ mélységi aránynál is kisebb legyen. A $q = (\zeta + 2\Omega)/(1 - d/H)$ potenciális örvényesség ezért jó közelítéssel írható mint:

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{1 - \gamma y/H} \approx \left(2\Omega + \zeta + \frac{2\Omega\gamma}{H}y\right). \quad (2.33)$$

Itt feltettük, hogy $\gamma y/H \leq Be$ legfeljebb ugyanolyan nagyságrendű, mint $\zeta/(2\Omega)$ (az utóbbi átlaga a Rossby-szám), s ezért szorzatukat elhanyagoltuk. A potenciális örvényesség első tagja, 2Ω , definíció szerint konstans, a megmaradási tétel ezért a két utolsó tagra jelent megszorítást:

$$\frac{d(\zeta + 2\Omega\gamma y/H)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + v \frac{2\Omega\gamma}{H} = 0. \quad (2.34)$$

Kis amplitúdójú mozgást vizsgálva, ζ advektív deriváltja másodrendűen kicsi, ezért elhanyagolható, és így a

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{2\Omega\gamma}{H} = 0 \quad (2.35)$$

lineáris egyenletet kapjuk.

A kialakuló áramlást az $\mathbf{u} = (u_0, v_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$ exponenciális alakban keressük, ahol ω_0 a hullám frekvenciája, \mathbf{k} a hullámszám vektora. Feltesszük, hogy \mathbf{u} vezető rendben divergenciamentes. Ez azért jogos, mert a potenciális örvényesség megmaradását a (2.35) egyenlet Ro rendig helyesen veszi figyelembe, az egyenlet pontosabb a geosztrofikus közelítésnél, s ezért az áramlást magát már közel összenyomhatatlannak tekinthetjük a vízszintes síkban (mint a geosztrofikus áramlást). Ezért $u_0 = -v_0 k_y/k_x$, s az örvényesség

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -i(k_x v_0 - k_y u_0) e^{i(\omega_0 t - k_x x - k_y y)} = -i v_0 \frac{k^2}{k_x} e^{i(\omega_0 t - k_x x - k_y y)}, \quad (2.36)$$

ahol $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$. Ezt a (2.35) egyenletbe helyettesítve algebrai egyenletet kapunk, melyből

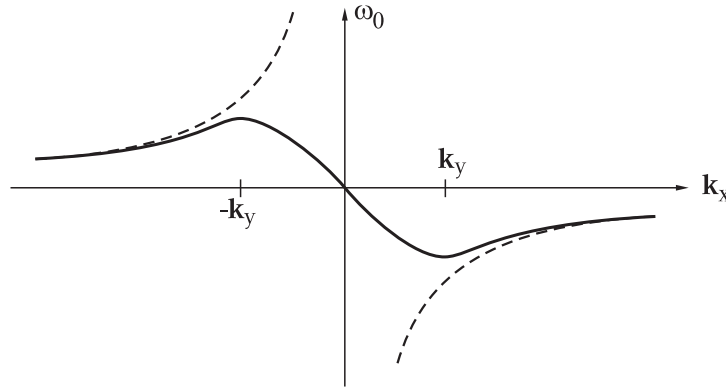
$$\boxed{\omega_0 = -\frac{2\Omega\gamma k_x}{H k^2}} \quad (2.37)$$

Ez a topografikus Rossby-hullám diszperziós relációja⁹ (2.10. ábra). Érdekes tulajdonság, hogy adott \mathbf{k} -hoz *egyetlen* frekvencia tartozik, tehát nem létezhet egyszerre egy \mathbf{k} irányába és egy vele ellentétesen haladó hullám. A Rossby-hullámok nem képezhetnek állóhullámokat.

A Rossby-hullám forgatott rendszerben is csak akkor alakul ki, ha a domborzat lejtős. Az $1/L$ egységekben mért hullámszámmal a dimenziótlán diszperziós reláció:

$$\frac{\omega_0}{2\Omega} = -Be \frac{k_x}{k^2}, \quad (2.38)$$

ahol Be a (2.32) topográfiai paraméter. Eszerint a Rossby-hullám lényegesen hosszabb időskálán változik, mint a forgatás periódusa. E hullám kvázigeosztrofikus jelenség, melyben a $Ro \equiv |\omega_0/(2\Omega)|$ Rossby-szám mindig kicsi, ugyanolyan rendű, mint a Be topográfiai paraméter.



2.10 ábra: A zárt felszínű (topografikus) Rossby-hullám diszperziós relációja a k_x hullámszámkomponens függvényében, rögzített k_y mellett. A szaggatott görbe az x irányban haladó Rossby-hullám ($k_y = 0$) diszperziós relációja.

A Rossby-hullám x , ill. y irányú terjedési sebessége

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = -\frac{2\Omega\gamma}{Hk^2}, \quad c_y = \frac{\omega_0}{k_y} = -\frac{2\Omega\gamma k_x}{Hk_y k^2}. \quad (2.39)$$

Az x irányú sebesség $\Omega\gamma > 0$ -ra mindig negatív, a hullám a negatív x irányba halad.

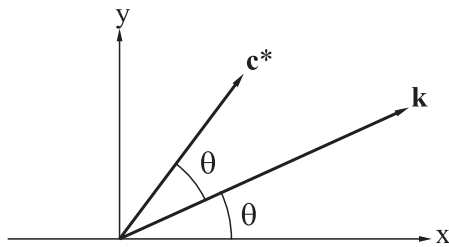
Példaként tekintsünk egy déli irányban enyhén mélyülő tengerpartot, mely 100 km-en 100 m-t süllyed, tehát $\gamma = 10^{-3}$, és az átlagos mélység $H = 50$ m. A 100km hullámhosszú, parttal párhuzamos hullám ($k_x = 2\pi \cdot 10^{-5} 1/m, k_y = 0$) frekvenciája $\omega_0 = -4,6 \cdot 10^{-5} 1/s$, tehát periódusideje 1,6 nap, terjedési sebessége $c_x = -0,7 \text{m/s} = -2,6 \text{km/h}$. A hullám lassúságára jellemző, hogy terjedési sebessége jóval kisebb az ugyanebben a közegben terjedő víz hullámok $c_0 = \sqrt{gH} = 22 \text{m/s}$ sebességénél.

Mivel a fázissebesség függ a hullámszámtól, a Rossby-hullám is erősen diszperzív. A csoportsebesség:

$$c_x^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_x} = \frac{2\Omega\gamma}{H} \frac{k_x^2 - k_y^2}{k^4}, \quad c_y^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_y} = \frac{2\Omega\gamma}{H} \frac{2k_x k_y}{k^4}. \quad (2.40)$$

Ez azt jelenti, hogy a csoportsebesség kétszer akkora szöget zár be a vízszintes tengellyel, mint a \mathbf{k} vektor (2.11. ábra). Ha figyelembe vesszük, hogy a hullám pozitív $\Omega\gamma$ esetén a $-\mathbf{k}$ irányba halad, az energiaáramlás viszont a csoportsebesség irányába történik, akkor látjuk, hogy bármilyen szögben terjedhet energia.

⁹Mindkét irányban lejtő aljzat esetén a számlálóban a különböző irányú gradiensek hullámszámkomponensekkel súlyozott kifejezése jelenik meg.



2.11 ábra: A zárt felszínű Rossby-hullámok \mathbf{c}^* csoportsebességének iránya a \mathbf{k} hullámszámvektorhoz képest.

2.6 Szabad felszínű Rossby-hullámok

Most megengedjük, hogy a felszín szabad legyen, η változhasson térben és időben, és vizsgáljuk, hogy ez mennyiben módosítja a topografikus Rossby-hullám tulajdonságait. A teljes mélység

$$h = H(1 + \eta/H - \gamma y/H). \quad (2.41)$$

Feltéve ismét, hogy az 1 után álló dimenziótlán tagok mind Rossby-szám nagyságrendűek, a potenciális örvényesség

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{(1 + \eta/H - \gamma y/H)} \approx \left(2\Omega + \zeta - \frac{2\Omega\eta}{H} + \frac{2\Omega\gamma}{H}y \right). \quad (2.42)$$

Kis amplitúdójú hullám esetén a másodrendű advektív derivált elhanyagolható, és a (2.22) megmaradási törvény szerint

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta - \frac{2\Omega}{H}\eta \right) + v \frac{2\Omega\gamma}{H} = 0. \quad (2.43)$$

Mivel mindkét tag kicsi, v és ζ kifejezéséhez használhatjuk a geosztrofikus határesetből ismert összefüggést, miszerint a felszíni alak arányos az áramlási függvénnyel: $\psi = \eta g / (2\Omega)$ (l. (2.25)). Ezzel $v = \partial\psi/\partial x$ és $\zeta = \Delta\psi$. Így azt kapjuk, hogy az áramlási függvénynek ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta\psi - \frac{(2\Omega)^2}{gH}\psi \right) + \frac{2\Omega\gamma}{H} \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0. \quad (2.44)$$

egyenletet. A $\psi = \psi_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$ alakú megoldásból leolvasható, hogy¹⁰

$$\omega_0 = -\frac{2\Omega\gamma}{H} \frac{k_x}{k^2 + R^{-2}}. \quad (2.45)$$

Itt

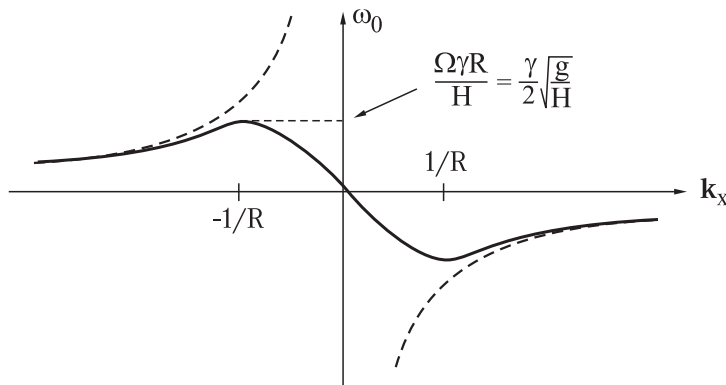
$$R \equiv \frac{(gH)^{1/2}}{2|\Omega|} = \frac{c_0}{2|\Omega|} \quad (2.46)$$

az ún. Rossby-féle sugár, a szabad felszínnel kapcsolatos új hosszúság jellegű mennyiség. A Rossby-sugár reciprokát Rossby-hullámszámnak nevezik.

A diszperziós reláció a R -nél rövidebb hullámhosszakra úgy viselkedik, mint a zárt felszínű esetben (2.12. ábra). Eltérés a hosszú hullámhosszknál (kis hullámszám) mutatkozik, ahol a

¹⁰Mindkét irányban lejtő aljzat esetén a számlálóban a különböző irányú gradiensek hullámszámkomponensekkel súlyozott kifejezése jelenik meg.

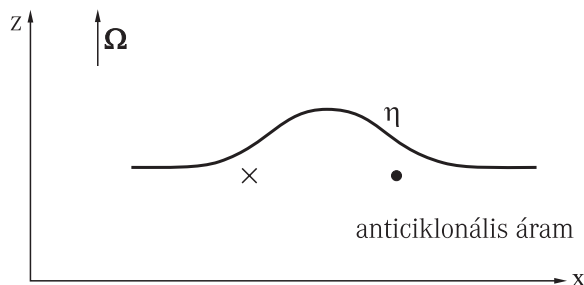
felszíni változásból adódó járulékok dominál. A szabad felszín hatása tehát csak az olyan hosszú hullámokban figyelhető meg, melyek hullámszáma R^{-1} -nél kisebb. Más szavakkal, a rövid hullámokban nagyon csekély a felszíni ingadozás, rájuk a merev lap közelítés jogos¹¹. Ez a helyzet az előző fejezet példájában is, ahol a $H = 50\text{m}$ átlagos mélységgel a Rossby-sugár $R = 160\text{km}$ -nek adódik, és $R^{-1} \ll k_x$.



2.12 ábra: Az x irányban haladó ($k_y = 0$) szabad felszínű Rossby-hullám diszperziós relációja a k_x hullámszámkomponens függvényében. A szaggatott görbe a zárt felszínű Rossby-hullám diszperziós relációja.

A mozgó szabad felszín a Rossby-hullámokat lassítja: $|\omega_0|$ bármilyen k_x, k_y értékre kisebb, mint $|\Omega\gamma|R/H$. Rossby-hullámok tehát legfeljebb csak ilyen frekvenciával gerjeszthetők. Új vonás, hogy a Rossby-sugár megjelenése végessé teszi a hullám ω_0 frekvenciáját, még x irányú terjedéskor is. Ezért a legnagyobb elérhető fázissebesség is véges, $-2\Omega\gamma R^2/H$. Ezt a nagyon hosszú hullámok ($k_x \rightarrow 0$) valósítják meg, melyek már nem is diszperzívek: az origó körül a diszperziós reláció lineáris a hullámszámban (2.12. ábra). A csoportsebesség a diszperziós reláció szélsőértékei között, azaz $k_x < R^{-1}$ -re (l. 2.12. ábra) negatív. Egyébként pozitív, vagyis ellentétes irányba mutat, mint a fázissebesség.

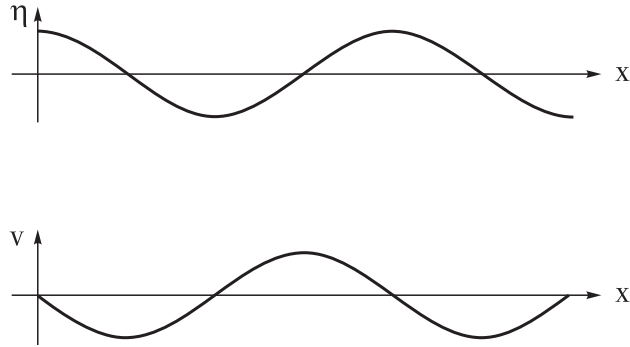
A hullám terjedési iránya kvalitatívan megérthető a kis hullámszámú esetben is (2.13. ábra). Tegyük fel, hogy kialakult egy kidudorodás a felszínen. Ez, mint láttuk, anticiklonikus áramlást indít el. A dudorodás jobb oldalán tehát negatív y irányba haladó mozgás alakul ki, de ezzel a folyadékoszlopok mélyebb folyadékba kerülnek, ahol a ζ örvényesség a megmaradási tétel miatt nő, s ez a pozitív örvényesség-növekmény a negatív x irányba tolja a kidudorodást.



2.13 ábra: A Rossby-hullámok kialakulási mechanizmusa a felszín kidudorodása miatt ($\Omega > 0$) a lapra merőleges (y) irányban sekélyedő folyadékban: a potenciális örvényesség megmaradása következtében anticiklonális örvénylés jön létre, mely a csökkenő x értékek irányába tolja a kidudorodást.

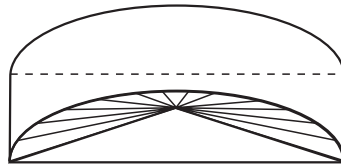
¹¹Ezért ez a közelítés formálisan az $R \rightarrow \infty$ határesetnek felel meg.

Mivel a hidrodinamikát vezető rendben az áramlási függvénnyel jellemezzük, melyből a geosztrofikus szabályok szerint számolhatjuk ki a változókat, a ψ függvény arányos a felszíni alakkal, deriváltjai pedig a sebességkomponensekkel. Ezért a felszíni alak és a sebesség negyed fázisnyi eltérésben vannak (2.14 ábra). A hullámbeli folyadékrészek mozgása vezető rendben a terjedési irányra *merőleges* rezgés a vízszintes síkban. A Rossby-hullámok jelenléte az óceáni és légköri mozgásokban ezen tulajdonságok alapján mutatható ki.



2.14 ábra: A felszíni alak és sebességeloszlás egy x irányban terjedő szabad felszínű Rossby-hullámban. (A zárt felszínű esetben η szerepét a p' dinamikai nyomás veszi át, és a Rossby-sugár formálisan végtelen.)

A Rossby-hullámok kísérletileg jól tanulmányozhatók egy olyan hengeres edényben, melynek az alja kúpos (2.15. ábra). Egy cikkelyt kiválasztva, a geometria közelítőleg ugyanaz, mint amit az elméleti leírásban feltételeztünk. Ha az aljzat a tengely felé emelkedik, és a forgatás pozitív irányú, akkor az együtt forgó megfigyelő (pl. videokamera) balra vonuló Rossby-hullámokat lát, s a fent leírt tulajdonságok kísérletileg is ellenőrizhetők (2.16. ábra). Később látni fogjuk, hogy ilyen berendezéssel a Föld görbületéből adódóan keletkező planetáris Rossby-hullámok is jól modellezhetők, melyek a nagy léptékű és lassú légköri és tengeri mozgások meghatározó elemei.



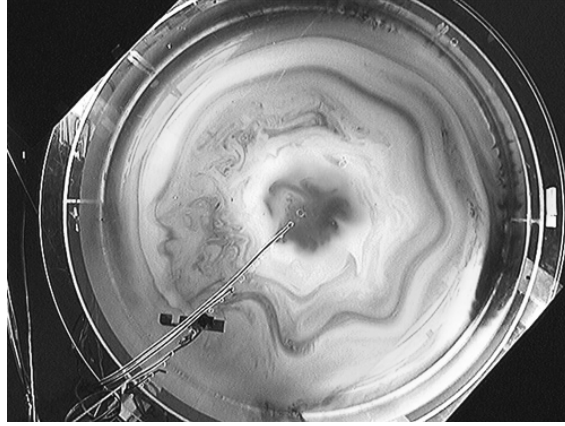
2.15 ábra: A Rossby-hullámok laboratóriumi vizsgálatához kúpos aljzatú hengert használunk.

Mivel a Rossby-sugár a későbbiekben is alapvető szerepet játszik, érdemes röviden összefoglalni tulajdonságait. Ez az a lineáris méret, ahol a Coriolis-hatás összemérhető a nehézségi gyorsulásból adódóval, s ezért minden jelentős felszínváltozással kapcsolatos jelenségben megjelenik. A Föld forgási szögsebességével és néhány km-es H vastagsággal számolva (mely mind az óceánban mind a légkörben jogos) R néhány ezer km-nek adódik. Ez a nagyskálájú légköri és óceáni mozgásokra jellemző távolság homogén közegekben.

Vegyük észre, hogy a dimenziótlan (L egységekben mért) Rossby-sugár az (1.3) Rossby-szám és a (2.17) Froude-szám hányadosa:

$$\frac{R}{L} = \frac{Ro}{Fr}. \quad (2.47)$$

Ez az arány a gravitációs és a forgatásból adódó hatások viszonyát adja meg. Egység körüli értéke a kétféle hatás összemérhetőségét jelenti, mely alapvető fontosságú a kvázigeosztrofikus közelítésben.



2.16 ábra: A Rossby-hullám felülről megfigyelt áramlási képe. A pozitív irányban forgó edényben a hullámot a kép bal alsó részén elhelyezett akadály kelti. A hullám az együttforgó megfigyelő szempontjából az óramutató járásának megfelelő (negatív) irányba halad.

2.7 A kvázigeosztrofikus egyenlet

Tekintsünk most egy tetszőleges $d(x, y)$ domborzatot, melynek maximuma az átlagos H mélységhez képest feltevés szerint kicsi. A felszíni η egyenetlenségek kicsinységét is feltételezve, a potenciális örvényesség

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{(1 + \eta/H - d/H)} \approx \left(2\Omega + \zeta - \frac{2\Omega\eta}{H} + \frac{2\Omega d}{H} \right). \quad (2.48)$$

Mivel a felszíni alak vezető rendben arányos az áramlási függvénnyel ($\psi = \eta g / (2\Omega)$), a megmaradási törvény a fenti q -ra a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - R^{-2} \psi + 2\Omega \frac{d}{H} \right) = 0 \quad (2.49)$$

alakot ölti. Ez az áramlási függvényre vontakozó *nemlineáris* parciális egyenlet, a súrlódásmentes sekély folyadék kvázigeosztrofikus egyenlete. Ez a lehető legegyszerűbb típusú hidrodinamikai egyenlet, hiszen egyetlen skalárfüggvényre vonatkozik. Az az érdekes helyzet állt elő, hogy a gyorsan forgatott sekély folyadék lassú viselkedését enyhe domborzati egyenetlenségek mellett egy olyan egyenlet írja le, mely egyszerűbb a teljes sekély folyadék dinamikánál (három csatolt parciális differenciálegyenlet). Síma aljzat, $d = 0$ esetén egyetlen paraméterként a Rossby-sugarat tartalmazza. A zárt felszíni eset (merev lap közelítés) az $R \rightarrow \infty$ limesznek felel meg.

A topografikus Rossby-hullám a fenti kvázigeosztrofikus egyenlet megoldása egyenletesen változó domborzatra. Annak ellenére, hogy az előző fejezetben lineáris közelítésben vezettük le a $\psi = \psi_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$ alakú megoldás létezését a (2.45) diszperziós relációval, behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez az exponenciális hullámalak a *teljes nemlineáris egyenletnek* is megoldása. Ez mutatja, hogy Rossby-hullámok a legkülönbözőbb körülmények között is előfordulhatnak. A nagy amplitudójú, nemlineáris Rossby-hullámokra természetesen már nem érvényes a szuperpozíció elve, összegük már nem megoldás.

A nagyságrendi viszonyok és a közelítés érvényességi körének felderítése érdekében megadjuk a dimenziótlantott alakot is. Kihasználva, hogy az áramlási függvény mértékegysége UL , azt

kapjuk, hogy

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - \left(\frac{Fr}{Ro} \right)^2 \psi + \frac{d}{Ro} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Itt a domborzatot H egységekben mérjük, és $Fr/Ro = L/R$ a dimenziótlan Rossby-hullámszám. A levezetésben kihasználtuk, hogy a Froude-szám legfeljebb Rossby-szám rendű, tehát $Fr/Ro \leq 1$. Az utolsó tagból leolvasható, hogy a dimenziótlan domborzati alaknak Ro rendűnek kell lennie a kvázigeosztrofikus közelítésben, hogy d/Ro is egységnyi lehessen. Az, hogy az egyenlet ekkor a Rossby-számtól független, az eljárás konzisztenciáját mutatja. A szabad felszín hatása akkor jelentős, ha Fr/Ro egységnyi. Az $Fr/Ro \ll 1$ eset megengedett, s csekély felszíningadozásnak felel meg. Két kvázigeosztrofikus áramlás akkor hasonló, ha bennük a d/Ro dimenziótlan domborzat azonos, s a Froude- és Rossby-számok hányadosa is azonos (ilyenkor dimenziótlan Rossby-sugaruk, R/L is megegyezik).

Az y irányban egyenletesen lejtő domborzat, $d = \gamma y$ esetén a dimenziótlan kvázigeosztrofikus egyenlet

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - \left(\frac{Fr}{Ro} \right)^2 \psi \right) + \frac{Be}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.51)$$

Ebben az osztályban két kvázigeosztrofikus áramlás akkor hasonló, ha mind a Froude-szám, mind a Be topografikus paraméter Rossby-számhoz viszonyított értéke azonos (s mindkét hányados legfeljebb egységnyi).

A kvázigeosztrofikus egyenlet egyszerűsége ellenére rendelkezik turbulens megoldásokkal is. A benne megjelenő Rossby-sugár mint új karakterisztikus hosszúság szabja meg a kialakuló turbulens örvények tipikus méretét. Az egyenlet ezért alkalmas a forgatott közegekben kialakuló geosztrofikus turbulencia leírására is, mely a légkör és az óceánok legbonyultabb mozgástípusa. Első levezetőjéről (2.49)-t Charney-egyenletnek is nevezik (J. G. Charney (1917-1981) amerikai meteorológus; 1950-ben egyenlete számítógépes megoldásával kezdődhetett meg a numerikus meteorológiai előrejelzés, melyhez Neumann János is nagyban hozzájárult).

2.8 Tehetlenségi gravitációs (Poincaré-) hullámok

A (2.11)-(2.13) sekélyfolyadék egyenlet vízszintes aljzat, $d = 0$ esetén gyors lineáris hullámokat is leír. Ezek a tehetlenségi-gravitációs hullámok, melyeket Poincaré-hullámoknak is neveznek.

A linearizált egyenletekben az advektív gyorsulási tag nem jelenik meg, és a (2.13) egyenletben a $h = H + \eta$ tényező H -val helyettesítő:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +2\Omega v - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\Omega u - g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.54)$$

Az $(\mathbf{u}, \eta) = (u_0, v_0, \eta_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$ feltevéssel \mathbf{k} hullámszámú síkhullámmegoldást keresve a

$$i\omega_0 u_0 = 2\Omega v_0 + ik_x g \eta_0, \quad (2.55)$$

$$i\omega_0 v_0 = -2\Omega u_0 + ik_y g \eta_0, \quad (2.56)$$

$$i\omega_0\eta_0 = H(ik_x u_0 + ik_y v_0) \quad (2.57)$$

polarizációs egyenletre jutunk. Ebből a nemtriviális megoldás feltétele¹²

$$\omega_0^2 = 4\Omega^2 + gHk^2. \quad (2.58)$$

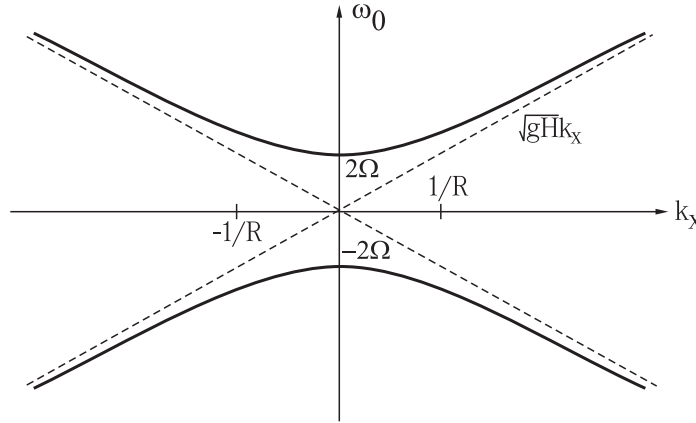
A tehetetlenségi gravitációs hullámok diszperziós relációja tehát

$$\omega_0 = \pm(4\Omega^2 + gHk^2)^{1/2} = \pm 2\Omega \left(1 + (Rk)^2\right)^{1/2}, \quad (2.59)$$

ahol $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ a hullámszámvektor hossza, R pedig a (2.46) Rossby-sugár. $\Omega = 0$ -ra a hagyományos hidrodinamikából jól ismert sekély vízi gravitációs hullámokat kapjuk, melyekhez konstans

$$c_0 = \sqrt{gH} \quad (2.60)$$

fázissebesség tartozik. A $gH \rightarrow 0$ esetben a diszperziós reláció a tehetetlenségi hullámokénak felel meg (l. (1.70) ha $k_x = 0$), melyben a részecskék a tehetetlenségi körmozgást követik. Véges gH mellett a tehetetlenségi mozgás hozzáadódik a gravitációs hullámzúshoz, s ezzel egy minimális frekvencia jelenik meg: a rezgések csak gyorsabbak lehetnek 2Ω -nál (2.17 ábra). A sekélyvízi hullámoktól való eltérés a Rossby-sugárnál nagyobb hullámhosszakra válik jelentőssé. Más szóval a rövid hullámhosszú mozgások olyan gyorsak, hogy nem érzékelik a forgatás jelenlétét. Ez ismét mutatja, hogy R az a távolság, ahol a forgatás és a gravitáció hatása összemérhető. A hullám csoportsebessége általában nem egyezik meg a fázissebességével, de mivel ω_0 a hullámszám abszolútértékét tartalmazza, \mathbf{c}^* párhuzamos \mathbf{k} -val.

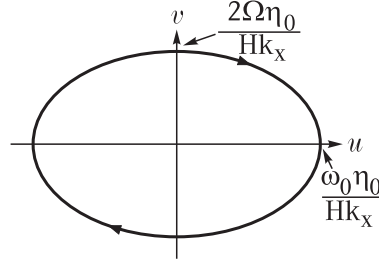


2.17 ábra: A tehetetlenségi-gravitációs (Poincaré-) hullám és a Kelvin-hullám (szaggatott vonal) diszperziós relációja a hullámszám k_x komponensének függvényében ($k_y = 0$).

A (2.55)-(2.57) egyenletekből a hullám összetevőinek viselkedése is leolvasható. Az egyszerűség kedvéért x irányban haladó síkhullámot vizsgálva ($k_y = 0$), (2.56)-ból $v_0 = i2\Omega u_0/\omega_0$.

¹²Ez az összefüggés következik a (2.52)-(2.54)-ből a felületi alakra kapott zárt egyenletből is. A fenti összefüggéseket rendre x , y és t szerint deriválva és a vegyes második deriváltakat kiküszöbölve kapjuk, hogy $\partial^2\eta/\partial^2t - gH\Delta\eta + H2\Omega\zeta = 0$. A (2.21) potenciális örvényesség megmaradása miatt $(\zeta + 2\Omega)/(H + \eta) = 2\Omega/H$, hiszen a nyugalmi állapothoz nem tartozik sem sebesség, sem felületi elmozdulás. Ezzel egy konstans erejéig $\zeta = \eta 2\Omega/H$, s a felületi alak egyenlete $\partial^2\eta/\partial^2t - gH\Delta\eta + (2\Omega)^2\eta = 0$. Ez ekvivalens a kvantummechanikából ismert $\partial^2\Psi/\partial^2t - c^2\Delta\Psi + (m_0c^2/\hbar)^2\Psi = 0$ Klein-Gordon-egyenlettel, mely a zérus spinű, m_0 nyugalmi tömegű szabad részecskék relativisztikus állapotegyenlete. Ezért nem meglepő, hogy a (2.58) összefüggés egyenértékű az $E^2 = (m_0c^2)^2 + c^2(k\hbar)^2$ relativisztikus energiakifejezéssel. A megfeleltetés a két probléma között: $E/\hbar \leftrightarrow \omega_0$, $c^2 \leftrightarrow gH$, $2\Omega \leftrightarrow m_0c^2/\hbar$.

A két sebességkomponens tehát negyed fázisnyi eltérésben van, nagyságuk nem azonos, a haladási irányba mutató sebesség mindig nagyobb. A sebességvektor végpontja egy ellipszis mentén mozog a vízszintes síkban, pozitív Ω mellett negatív irányban (2.18 ábra). A nagy tavak és óceánok felső vízrétegeinek oszcillációiban megfigyelhető a vízszintes síkbeli sebességvektor időbeli elfordulása, anticiklonális körüljárással. Ez bizonyítja a tehetetlenségi hullámok jelenlétét. Periódusuk rendszerint közel van a tehetetlenségi mozgáshoz.



2.18 ábra: A sebességvektor mozgása tehetetlenségi-gravitációs hullámban. A mozgás ellipszispályán történik, mely a hullám haladási irányában (jelen esetben az x tengely) nyújtott. A körüljárás anticiklonális. Rövid hullámokra ($k_x \rightarrow \infty$) az ellipszis az u tengely mentén elhelyezkedő egyenes szakasszá nyúlik, a hullámra semmilyen hatása sincs a forgatásnak. Nagy hullámhosszakra viszont ($k_x \rightarrow 0$) az ellipszis a tehetetlenségi mozgásra jellemző körbe megy át.

Tehetlenségi-gravitációs hullámok léteznek lejtős domborzat, $d = \gamma y$ esetén is. Ekkor a (2.59) diszperziós reláció módosul, és γ is ad járulékot. Ezzel együtt megjelennek a rendszerben a lassú Rossby-hullámok is (9.2 fejezet).

A tehetlenségi-gravitációs hullámokra a potenciális örvényesség megmaradása már nem egyenértékű a teljes sekélyfolyadék egyenlettel. Most ugyanis a síkbeli divergencia egységnyi rendű is lehet, ezért az áramlási függvény használata nem jogos: három független dinamikai változónk van (u, v, η), melyeket egyetlen skalár egyenlet, (2.22) nem helyettesíthet. A $Ro \equiv |\omega_0 / (2\Omega)|$ Rossby-szám csak nagyobb lehet 1-nél. Fordítva, a kvázigeosztrofikus közelítésben nem jelenhetnek meg a kétdimenziós áramlástól való jelentős eltérések, s ezért a tehetlenségi-gravitációs hullámok sem. A közelítésnek megfelelő $Ro \ll 1$ esetben ezen hullámok frekvenciája olyan nagy, hogy a Rossby-hullámok időskáláján már nem követhető. A kvázigeosztrofikus közelítés tehát *kiszűri* a gyors mozgásokat, s csak a lassú időfejlődést írja le.

2.9 Kelvin-hullámok

A Kelvin-hullámok forgatott folyadékok *határán* haladó zavarok, perem menti mozgások, melyek az óceánokban parti hullámvonulatként fordulnak elő. A partra merőlegesen nem történik áramlás¹³. Ha a falat az x tengelynek tekintjük, és az állandó mélységű folyadék a felső félsíkot tölti ki, akkor $v = 0$. A (2.52)-(2.54) linearizált sekélyfolyadék egyenletekben $(u, \eta) = (u_0, \eta_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$, $y > 0$ alakú megoldást keresve, (2.55)-(2.57)-ből az

$$i\omega_0 u_0 = ik_x g \eta_0, \quad (2.61)$$

$$2\Omega u_0 = ik_y g \eta_0, \quad (2.62)$$

$$i\omega_0 \eta_0 = ik_x H u_0 \quad (2.63)$$

¹³Ezt a peremfeltételt az ellipszis alakú részecskepályák miatt Poincaré-hullámokkal nem lehet kielégíteni.

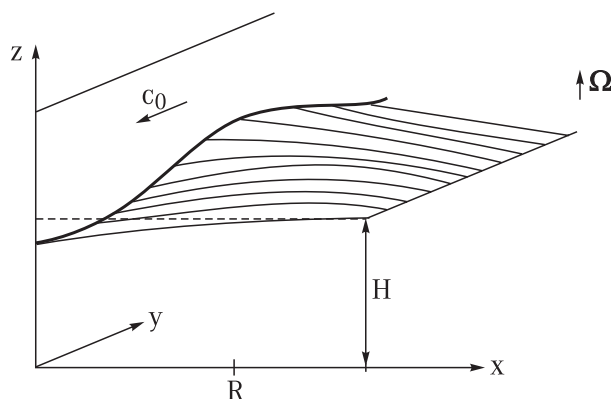
feltételt kapjuk. Az első és utolsó egyenletből

$$\omega_0 = \pm \sqrt{gH} k_x, \quad (2.64)$$

tehát a hullám x irányban a $c_0 = \sqrt{gH}$ fázissebességgel halad, diszperziómentesen, éppúgy mint a sekély, nem forgatott folyadékbeli víz hullámok. Az első két egyenlet hányadosából viszont

$$k_y = \frac{\pm 2\Omega}{i\sqrt{gH}} = \frac{\pm 1}{iR}, \quad (2.65)$$

ahol R a Rossby-sugár. Ez y irányban exponenciális változásnak felel meg, tehát az amplitúdó az y koordinátával nő vagy csökken.



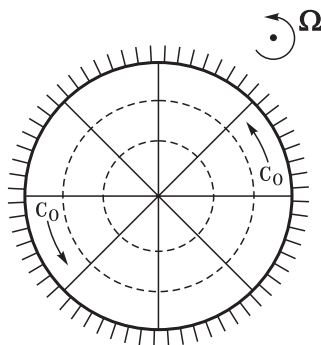
2.19 ábra: Kelvin-hullám egy y tengellyel párhuzamos partvonal mentén pozitív forgatás esetén. A hullám c_0 sebességgel halad, s amplitúdója a falra merőlegesen a Rossby-sugárnyi távolságon csökken e -ad részére.

Mivel az örökké növekvő eset nem valósulhat meg, pozitív Ω mellett a $+$, negatív mellett a $-$ előjelű megoldást kell választanunk. A hullám tehát az y irányban *csillapodik*, amplitúdója az $\exp(-y/R)$ szabály szerint Rossby-sugárnyi távolságon csökken e -ad részére. Hasonlóan vizsgálhatjuk az y tengellyel párhuzamos fal hatását a pozitív x térfélen elhelyezkedő folyadék mozgására. Azt találjuk, hogy ekkor nincs x irányú mozgás, pozitív forgatás esetén a hullámamplitúdó ismét a Rossby-hullámszámmal csökken exponenciálisan, de most az x irányban, a hullám c_0 sebességgel halad a negatív y értékek felé (2.19 ábra).

Általánosan az mondható, hogy a hullám úgy halad, hogy pozitív (negatív) forgatási irány esetén a fal a jobb (bal) oldalán helyezkedik el. A part menti nagyobb amplitúdó szemléletesen úgy érthető, hogy a Coriolis-erő jobbra (balra) térít, s az ennek megfelelő oldalon halmozza fel a folyadékot. Az ilyen hullámot első leírójától Kelvin-hullámnak nevezzük. (W. Thomson, Lord Kelvin (1824-1907) termodinamikai kutatásai mellett huzzájárult alapvető hidrodinamikai jelenségek megértéséhez, felismerte a Coriolis-erő fontosságát, s az árapály-hullám első leírását adta.)

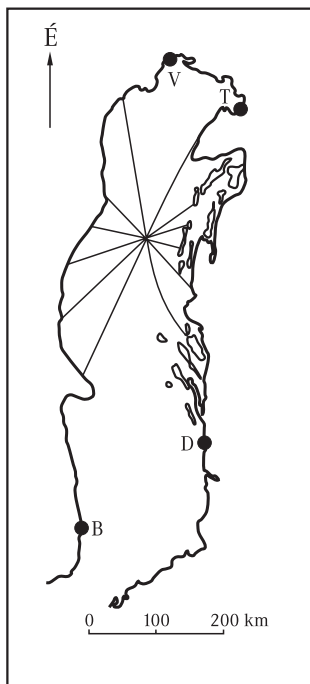
Erős szelek és az árapály gyakran keltenek a partok mentén Kelvin-hullámokat, ahol az átlagos mélység már csak néhányszor 10 m. Itt a Rossby-sugár 100 km körüli, s a hullám haladási sebessége néhányszor 10 m/s. Az északi irányba történő amplitúdócsökkenés jól megfigyelhető a Dover-i szorosban, ahol a francia partokon az árapály maximum néhol kétszer akkora mint az angol oldalon.

A fenti orientációs szabályból következik, hogy zárt medence peremei mentén a Kelvin-hullámok körbe haladhatnak. Pozitív forgatás esetén haladásuk az óramutató járásával ellentétes, azaz *ciklonális* jellegű (2.20 ábra). Az r sugarú medencét $2\pi r/\sqrt{gH}$ idő alatt járja körül



2.20 ábra: Kelvin-hullám haladása egy kör alakú medencében pozitív forgatás esetén (felülnézet). A folytonos vonalak az azonos fázisú helyeket kötik össze, a szaggatottak pedig az azonos amplitúdómaximumokat. Az amplitúdó a medence közepén a legkisebb, s a perem felé növekszik.

a Kelvin-hullám. Ha a sugár éppen a (2.46) Rossby-sugárral egyezik meg, $r = R$, akkor az idő $\pi/|\Omega|$, vagyis a forgatási idő fele. Ez a Rossby-sugárnak egy újabb érdekes tulajdonsága, s részben ennek tulajdonítható, hogy a Kelvin-hullámok szorosan kapcsolódnak az árapályhullámokhoz.



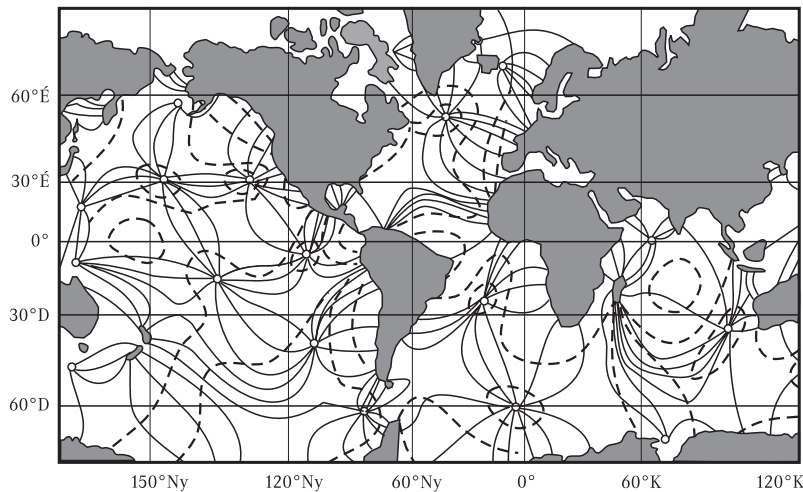
2.21 ábra: Az árapályhullám haladása az Adriai-tenger északi medencéjében. A vonalak a dagály óránkénti helyzetét jelzik, a körüljárás ciklonális (pozitív). A medence közelítőleg egy 130 km széles, 400 km hosszú téglalap. Az átlagos Rossby-sugár 250 km, összemérhető a lineáris mérettel. A V pont Velencét jelzi.

A Hold tömegvonzása által okozott legfontosabb árapályhullám kétszer halad át a földön, hiszen dagály a Hold felé eső és az azzal ellentétes oldalon is keletkezik. Kontinensek hiányában ez a hullám nyugatról keletre vonulna végig az óceánokon¹⁴. Mivel a kontinensek a haladási irányra lényegében merőlegesen fekszenek, a tényleges árapályhullám, a tengerjárás sokkal bonyolultabb.

¹⁴A légkörben valóban kialakul egy ilyen irányban mozgó nyomáshullám, melyet az árapály hatás kelt, átlagosan néhány hPa-os amplitúdóval.

Ennek megértéséhez célszerű a félnapos periódussal ismétlődő dagályérkezést gerjesztésnek tekinteni, melyhez az áramlást a geometria és a forgatott rendszert jellemző sekélyfolyadék egyenletek együttesen határozzák meg. Mivel a Rossby-sugár nagyságrendű lineáris méretű medencékben a Kelvin-hullám körbefutási ideje éppen fél nap körüli, nem meglepő, hogy a valódi árapály-hullámok mozgását mutató képek (l. 2.21 ábra) hasonlóak a 2.20 ábra sematikus rajzához. A hullámok az ún. amfidromikus pont körül haladnak, ahol a tengerszint gyakorlatilag nem változik.

A nyílt óceánon a Rossby-sugár ezer km nagyságrendű, egy ilyen sugarú kör a legtöbb medence jelentős részét lefedi. A medencékben kialakul egy-két amfidromikus pont (2.22 ábra), s ezek körül haladnak az árapályhullámok, méghozzá általában ciklonális körüljárással.



2.22 ábra: A félnap periódusú árapályhullám mozgása a Világóceánon. A vonalak a dagály óránkénti helyzetét jelzik (a szaggattot vonalak azonos amplitudómaximumokhoz tartoznak). Keletre haladás csak a Csendes-óceán legnagyobb, déli medencéjében figyelhető meg, mindenütt másutt körkörös mozgások jellemzik a tengerjárást.

2.10 Nemlineáris felszíni hullámok, szolitonok

Erős gerjesztés hatására olyan felszíni hullámok alakulnak ki, melyek amplitudója nem hanyagolható el a teljes folyadékmélységhez képest. Az advektív derivált nemlineáris tagja ekkor lényeges szerepet játszik, s a jelenség már nem írható le lineáris egyenletekkel. Ennek következtében az ilyen nemlineáris hullámokra nem igaz a szuperpozíció elve: két hullám összege nem megoldás.

A nemlineáris hullámok jellegzetes példái a *szolitonok*. Ezek a lineáris eset hullámcsomagjaihoz hasonló lokalizált megoldások, felszíni kidudorodások. Ha több szoliton szemben halad egymással, akkor azok kölcsönhatásba lépnek, alakjuk megváltozik, de miután elváltak és elegendően eltávolodtak, ismét *viszanyerik eredeti formájukat és sebességüket*. E tulajdonságuk az elemi részecskék szórási folyamatokban való részvételére emlékeztet, s a szolitonok nevében ezért jelenik meg a részecskékre jellemző "on" végződés.

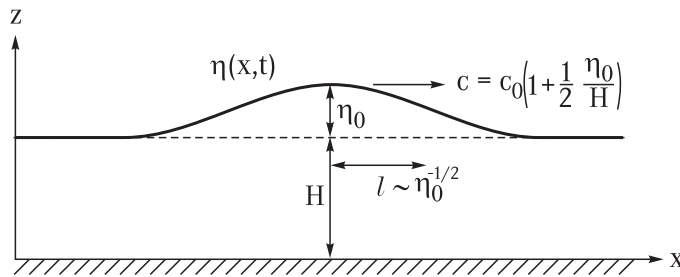
A szolitonok magyarázatához túl kell lépni a sekélyfolyadék-dinamikán, a hidrosztatikus közelítésen, s figyelembe kell venni az ahhoz adódó első korrekciókat. A létrejövő lineáris hullámok már gyengén diszperzívek, ezért a kis amplitudójú mozgásokból képzett hullámcsomagok szétfolynak. Véges perturbációk esetén azonban az Euler-egyenlet nemlinearitását is figyelembe kell venni, s ez éppen a szétfolyás megakadályozását eredményezi. A részletes elméleti leírás

helyett, itt csak a szolitonok legfontosabb paramétereit adjuk meg (további tulajdonságokat mutat be a 9.3 fejezet).

Nem forgatott sekély folyadékban az x tengely mentén terjedő szoliton egy felszíni kidudorodás (2.23 ábra), melynek η_0 amplitúdója véges, de kicsi a teljes vízmélységhez képest $\eta_0 \ll H$. A szoliton terjedési sebessége

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\eta_0}{2H} \right) \approx \sqrt{g(H + \eta_0)}, \quad (2.66)$$

ahol c_0 a lineáris hullámok \sqrt{gH} sebessége. A (2.66) összefüggés szerint a terjedési sebesség a maximális felszíni kidudorodás alatti teljes $h = H + \eta_0$ vízmélységhez tartozó lineáris hullámok sebessége. A szolitonok tehát *gyorsabbak* az átlagos H folyadékmélységű közegben terjedő lineáris hullámoknál, sebességnövekményük arányos amplitúdójukkal.



2.23 ábra: Szolitonok jellemző alakja és paramétereit. A szoliton nem szinuszhullám, a felületváltozás mindenütt kiemelkedés, η sehol nem vált előjelet.

A szoliton félszélessége (hullámhossza)

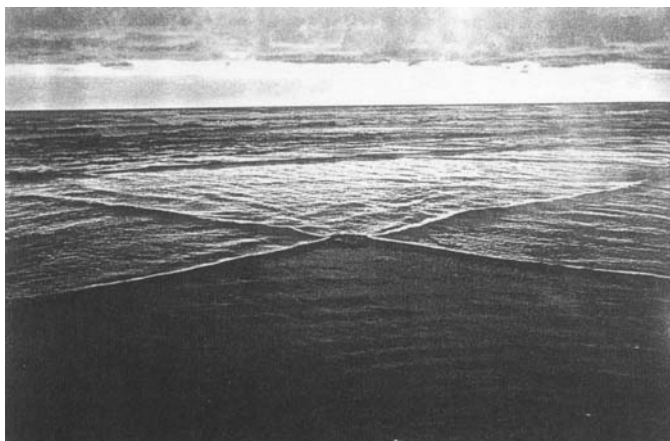
$$l = \sqrt{\frac{4H^3}{3\eta_0}}. \quad (2.67)$$

Az l/H dimenziótlan félszélesség az η_0/H dimenziótlan amplitúdó $-1/2$ -edik hatványa. A szoliton jóval szélesebb a folyadék mélységénél. A nagyobb amplitúdójú szoliton keskenyebb, de gyorsabban halad, mint kisebb társa.

Ezek a tulajdonságok alapvetően különböznek a lineáris hullámoktól, melyekben sem a sebesség, sem a hullámhossz nem függ az amplitúdótól. (A szoliton-tulajdonság a hang esetén azt jelentené, hogy a hang magassága függne erősségétől !)

A szolitonok áthaladás utáni alakvisszanyerése jól látszik akkor is, ha az (x, y) síkon mozgó kétdimenziós szolitonok találkoznak. Ilyen esetben a szoliton lehet egy egyenes menti kidudorodáshullám, mely erre az egyenesre merőlegesen mozog. Két ferdén találkozó szoliton áthalad egymáson, s közben X alakot rajzol ki. Ez megfigyelhető tengerparti vizekben (2.24 ábra), de sekély tó-, és folyópartok mentén is.

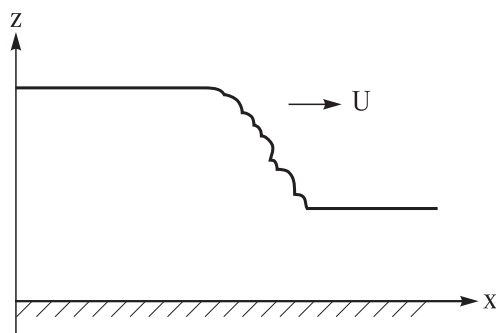
A természetben előforduló víz hullámok közül a földrengés vagy vulkánkitörés keltette tsunamik a legnagyobb energiájúak. Általában legfeljebb néhány m magas hullámok alakulnak ki, melyek a nyílt tengeren néhány 100 km hullámhosszúak. Ezek tehát jogosan tekinthetők kis amplitúdójú $c_0 = \sqrt{gH}$ sebességű hullámoknak. A mély vízben terjedési sebességük kb. 700 km/h, azaz egy nap alatt egész óceáni medencéket átszelnek. A sekély tengerparti vizekbe érve azonban lelassulnak, amplitúdójuk megnő, ezzel a hullám nemlineárisává válik, és szétfolyását a szoliton tulajdonság megakadályozza. Végül az egész sekély vizekben, ahol magassága már több tíz métert is elérhet, a hullám megtörik, s energiája felszabadul.



2.24 ábra: Két, eltérő irányban haladó szoliton találkozása tengerpart előtt [Ablowitz].

Forgatott közegekben is kialakulhatnak szolitonok, melyek a nemlineáris Rossby-hullámok lokalizált változatai. A Jupiter Vörös Foltjának egyik lehetséges magyarázata, hogy az nem más, mint egy hosszú életű Rossby-szoliton, egy nagy lokalizált örvényesség-csomag.

Végül megemlítjük, hogy számos más nemlineáris hullám is létezik. Közülük az egyik leggyakoribb a *torlóhullám* (bore), mely akkor alakul ki, ha egy folyadékrétegen nagy tömegű folyadék kerül szét, ugrásszerű szintváltozással (2.25 ábra).



2.25 ábra: Torlóhullám (bore) mozgása.

A tenger napi árhulláma vezet felszíni bore kialakulására széles, lapos folyótorkolatokban. A megérkező dagályhullám néhány dm-es vízlépcsőt okoz, mely turbulens habzással megindul a folyón fölfelé (2.26a ábra), a normális vízállásnak megfelelő gravitációs hullámok terjedési sebességénél gyorsabban. Valamivel kisebb skálán, minden, átbukással megtört hullám mozgó vízlépcsőt, bore-t hoz létre. A torlóhullám álló formája a hidraulikus ugrás (2.26b ábra).

Ezekkel itt tovább nem foglalkozunk, mert rétegzett közegbeli (belső) megjelenéseiket a 5.13 fejezet tárgyalja. Annak eredményeiből a felszíni változatok speciális esetként adódnak.



(a)



(b)

2.26 ábra: a) A dagály által keltett torlópulást a Severn folyón (Anglia) [Van Dyke] b) Gát-szakadás következtében kialakuló hidraulikus ugrás (melyet a megmaradt gát részben takar). Tarpa, 2001 február [Országos Vízügyi Főigazgatóság].

3. fejezet

A görbület hatása

A több száz vagy ezer km kiterjedésű környezeti áramlások a Föld felszíne körüli gömbhøjban zajlanak. Az ilyen geometriájú rendszerben a sekélység és az annak következtében mindig gyenge függőleges irányú áramlások azzal a következménnyel járnak, hogy függőleges irányban a Coriolis-erő nem lehet jelentős. Ezért a Föld bármely pontja körül a forgási szögsebesség vektorának az ott érvényes vízszintes síkra vett vetülete csak elhanyagolhatóan kicsi járulékot ad a teljes Coriolis-erőhöz, s ezért a hidrodinamikai mozgásegyenlet szempontjából csakis a függőleges szögsebesség komponens számít. Ha edényünket tetszőleges földrajzi koordinátájú pontokhoz illesztjük (l. 3.1, 3.2 ábra), akkor a benne érvényes dinamikát a függőleges tengely körül forgatott sekély folyadéokra érvényes egyenletek írják le, csak $2\Omega_F$ helyett mindenütt az

$$f \equiv 2\Omega_F \sin \varphi$$

mennyiséget, az ún. Coriolis-paramétert, vagy másnéven planetáris örvényességet kell használnunk. Itt Ω_F a Föld forgási szögsebessége, φ pedig az edény középpontjának szélességi koordinátája (l. 3.1 ábra). Az f paraméter az Északi-sarkon a legnagyobb ($2\Omega_F$), az Egyenlítő felé csökken, ott előjelet vált, s a Déli-sarkon a legkisebb ($-2\Omega_F$).

Ha a vizsgált tartomány L vízszintes kiterjedése, azaz az edény mérete kicsi a Föld R_F sugarához képest, akkor a Coriolis-paraméter helyfüggése elhanyagolható, s elegendő az edény középpontjában kiértékelni. Korábbi eredményeink mind érvényben maradnak a

$$2\Omega \rightarrow f_0 = 2\Omega_F \sin \varphi_0$$

helyettesítéssel, ahol f_0 a planetáris örvényesség az edény φ_0 koordinátájú origójának megfelelő szélességen. Ennek értelmében a Rossby-szám és a Rossby-sugár

$$Ro = \frac{U}{|f_0|L} \quad \text{és} \quad R = \frac{\sqrt{gH}}{|f_0|}.$$

Az f_0 paraméter szélességfüggésének megfelelően a geosztrofikus áramlások erőssége az Egyenlítő felé haladva fokozatosan nő ugyanakkora kiváltó ok, pl. felszíni egyenetlenség mellett. Az ugyanakkora sebességhez és síkbeli kiterjedéshez tartozó Rossby-szám egynél lényegesen nagyobb válik az Egyenlítő közelében. Ott tehát mindenképpen értelmét veszti a geosztrofikus egyensúly, hiszen az f planetáris örvényességből adódó Coriolis-erő eltűnik. Ennek fontos következménye, hogy ciklonok és anticiklonok az Egyenlítői övben nem létezhetnek, s ilyen légköri képződmények ott tényleg nem is figyelhetők meg.

Az f_0 paraméter szélességfüggésének egy másik jól megfigyelhető következménye a tehetetlenségi körmozgás $\omega_0 = f_0$ frekvenciája, mely a sarkoktól eltekintve fél napnál hosszabb periódusidőnek felel meg. A 1.14 ábra esetében a periódusidő 14 óra, f_0 helyi értékével pontos összhangban.

Amennyiben a vizsgált tartomány méretét több száz km-esre kívánjuk kiterjeszteni, mely sok jelenség szempontjából elkerülhetetlen, akkor a planetáris örvényesség helyfüggésének legalábbis legfontosabb, lineáris részét meg kell tartanunk. Ilyenkor tehát a

$$2\Omega \rightarrow f_0 + \beta y$$

helyettesítést kell alkalmazni. Itt a β -paraméter a planetáris örvényesség változási gyorsasága a sarok felé történő elmozdulás következtében. Tipikus értéke közepes szélességeken km-enként 10^{-8} 1/s.

A β -paraméter fontosságát a

$$Be \equiv \frac{\beta L}{|f_0|}$$

dimenziótlan szám méri. Nagysága a közepes szélességeken az 1000 km-es skálán 0,1 körüli, azaz összemérhető a Rossby-számmal. Két áramlás akkor lehet hasonló, ha jellegzetes számaik között a Be dimenziótlan β -paraméter is azonos.

A β -paraméter jelenléte új jelenségeket eredményez a

$$q = \frac{f_0 + \beta y + \zeta}{h}$$

potenciális örvényesség megmaradásával kapcsolatosan.

Már a geosztrifikus határesetben, amikor ζ elhanyagolható f_0 mellett, új vonás, hogy az áramlás nem az állandó folyadékmélységű ($h = \text{konstans}$) vonalak, hanem az $(f_0 + \beta y)/h$ mennyiség kontúrvonalai mentén történik. Ha a folyadék sekélyebb tartományba kerül, akkor planetáris örvényességének is csökkenie kell, ami a mozgás észak-déli irányú elkanyarodásához vezet. Ezzel a gondolatmenettel érthető meg az áramlások irányváltoztatása domborzati akadályok fölött a geosztrifikus közelítésben (3.6 ábra). Ugyanebből a megmaradásból következik az is, hogy ha a folyadékelem föláramló tartományba kerül, ahol h nő, akkor planetáris örvényességének is nőnie kell, tehát az északi féltekén északi irányba, általánosan a közelebbi sarok irányába el kell mozdulnia. Hasonlóan, leáramláshoz az Egyenlítő felé irányuló elmozdulás tartozik. Ez az ún. Sverdrup-féle összefüggés fontos szerepet játszik az óceáni áramlások leírásában.

Kvázigeosztrifikus mozgás esetén a ζ örvényesség nem hanyagolható el a planetáriséhoz képest, bár annál jóval kisebb. Fennáll a lehetősége annak, hogy a planetáris örvényesség helyfüggésből adódó βy járulékát a ζ örvényesség mindig kompenzálja, s Rossby-hullámok alakulnak ki. Terjedési sebességük arányos az adott szélességen érvényes β -paraméterrel. A β -hatás ugyanazt a szerepet játssza, mint a domborzati lejtés az állandó forgatási szögsebességű esetben, de a valóságos légköri Rossby-hullámok kialakulásában jóval fontosabb a szerepe. Ezeket a Rossby-hullámokat planetáris hullámoknak szokás nevezni, ugyanis gyakran néhány hullámhosszal körbefogják a Földet. Jól megfigyelhetők meteorológiai térképeken mint a ciklonok és anticiklonok között kanyargó hullámozás (3.3, 3.4 ábra), s rendelkeznek azzal a fontos tulajdonsággal, hogy akármelyik szélességi kör mentén is haladnak, azt ugyanannyi idő alatt kerülik meg. A planetáris-hullámok nagy méretűk és lassú (≈ 10 m/s sebességű) mozgásuk miatt a mérsékeltövi időjárási rendszerek elsődleges meghatározói.

A földi légkör a szélességi körök mentén fújó, ún. zonális szelek szempontjából három különböző övezetre oszlik (3.5 ábra). A mérsékelt égövet a nyugati szelek uralják. Itt előfordulhat, hogy a planetáris Rossby-hullámok nyugatra mozgását az onnét jövő háttéráramlás éppen kompenzálja. Ekkor a földi megfigyelő stacionárius Rossby-hullámokat észlel, valamilyen kritikus λ_c hullámhosszal, melynek tipikus értéke több 1000 km.

A zonális áramlások irányváltoztatását a potenciális örvényesség megmaradása erősen korlátozza. A nyugatról érkező zonális áramlat vízszintes aljzat fölött például nem kanyarodhat el semmilyen irányba, mert az ellentmondana a megmaradási tételnek. Ez a megszorítás keletről érkező áramlásra nem érvényes (3.7 ábra). Ugyanez az erős aszimmetria megmutatkozik a

domborzattal való kölcsönhatásban is. A nyugatról érkező áramlás bármilyen, rá merőlegesen futó domborzati akadályon áthaladva kanyargó mozgásúvá, meanderezővé válik (3.8a,b ábra). Keletről érkező társa viszont már az akadály előtt kissé irányt változtat, s át tud haladni úgy az akadályon, hogy mögötte mozgása ismét szélességi kör menti, azaz meanderezéstől mentes (3.9a,b ábra). A Keletre irányuló áramlásoknak ez a meanderező jellege jól megfigyelhető a Golf-áramlatban, amint a Haterras-foknál elhagyja az amerikai kontinenst (2. ábra), vagy a magaslégtérben állandóan jelenlevő, s igen erős nyugati szeleket hordozó orkáncsatorna, a jetstream példáján (3.10 ábra).

Mindezekből következik, hogy a nyugati szél erős Rossby-hullámokat kelt észak-déli irányú hegyvonulatok fölött és mögött (3.11 ábra). A mérsékeltövi időjárás szempontjából legfontosabb Rossby-hullám gerjesztő hegységek a Sziklás-hegység, az Andok és a Himalája. A gerjesztett hullámok amplitúdója annál nagyobb, minél közelebb van a hegyvonulat hullámhossza a stacionárius Rossby-hullámok kritikus λ_c hullámhosszához. A kritikus hullámhosszon rezonancia következik be (3.12 ábra), s a háttéráramlás energiájának nagy része átmeleg a gerjesztett Rossby-hullámokéba.

A β -hatás magyarázza azt is, hogy erős peremáramlatok mindig az óceáni medencék nyugati partvonalai mentén alakulnak ki. A β -hatás és a kvázigeosztrofikus jelleg következtében a folyadék amíg csak lehet, szélességi körök mentén halad, s utána hirtelen egy véges vastagságú sávban kanyarodik el (egy keletről érkező áramlás ezt megteheti), miközben megőrzi teljes örvényességét, s áramlási sebessége jelentősen megnő. Ennek a sávnak a vastagsága néhányszor 10 km-nek adódik, összehangban a Golf-áramlat szélességével (3.13 ábra).

A parttól elfelé futó áramlás szempontjából a perem akadályként jelenik meg, s az áramlás meanderező lesz (3.14 ábra). Összességében egy óceáni medence Egyenlítőhöz közeli peremén sima elkanyarodást várunk, a sarok felé futó peremáramlat kialakulását, mely a partvonalától elválva erős meanderezésbe kezd (3.15 ábra).

A β -hatás az Egyenlítő közvetlen közelében is érvényesül. Léteznek a Kelvin-, Poincaré-, és Rossby-hullámok megfelelői, sőt ezek egész diszkrét spektruma jelenik meg (10.1 ábra). Az ilyen egyenlítői hullámok, visszaverődésük és egymásba alakulásuk fontos szerepet játszik az El Nino-jelenségkörben.

3.1 Földrajzi koordináták, a lokális rendszer

A nagyskálájú környezeti áramlások teljesebb megértése érdekében a sekély folyadék közelítést egy gömbhéjra kell kiterjesztenünk.

A Föld felszínén a hagyományos földrajzi koordinátákat használjuk (3.1 ábra). A szélességet, azaz az Egyenlítővel bezárt szöveget φ -vel jelöljük. A $\varphi = \pi/2$ ill., $\varphi = -\pi/2$ értékek az Északi-, ill. Déli-sarknak felelnek meg. A földrajzi hosszúság, azaz a Föld tengelye körüli elforgatás szöge λ . Ez megegyezés szerint Greenwich-nél veszi fel 0 értékét ($\lambda = \pm\pi$ a dátumválasztó vonal). A szögek jelölése tehát eltér attól, amit gömbi koordinátarendszerekben szokás használni.

A Föld, gömbnek tekintett felszínén definiálhatunk távolságot jelentő koordinátákat is. Hagyományosan

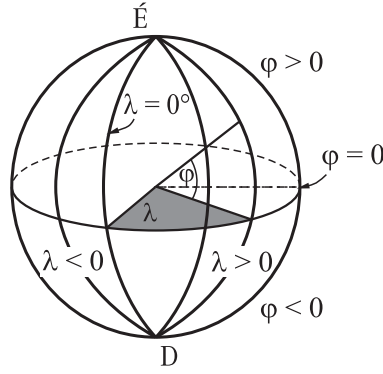
$$x \equiv (R_F \cos \varphi) \lambda \quad (3.1)$$

jelöli a kelet-nyugati,

$$y \equiv R_F |\varphi| \quad (3.2)$$

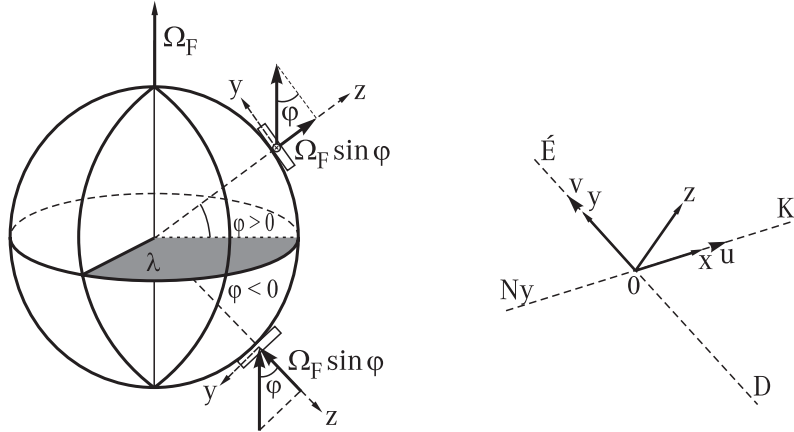
pedig az észak-déli irányban mért helykoordinátákat, ahol R_F a Föld sugara.

Tekintsünk a Föld sugarához képest kicsiny $L \ll R_F$ vízszintes méretű folyadékréteget. Bármely (φ_0, λ_0) földrajzi hely körül felvehetünk egy jobbsodrású derékszögű koordinátarendszert, melynek (x, y) síkja az érintősíkban fekszik, y -tengelye a közelebbi pólus irányába mutat, és a z koordináta a helyi függőleges irányban nő. Az (x, y, z) koordináták az $(x_0 \equiv (R_F \cos \varphi_0) \lambda_0, y_0 \equiv R_F |\varphi_0|, z_0)$ helyzetű origótól mérik a távolságot. Ebben a lokális rendszerben írjuk le az $L \ll R_F$



3.1 ábra: A földrajzi koordináták. φ a szélességet, λ a hosszúságot jelöli.

vízszintes kiterjedésű és $H \ll L$ mélységű sekély folyadék áramlásait (3.2 ábra). Ezzel összhangban, az $\mathbf{u} = (u, v, w)$ sebesség u komponense a szélességi körökkel párhuzamos (az északi féltéken keletre, a délin nyugatra nő), v pedig az észak-déli irányú áramlás sebessége (mely akkor pozitív, ha a közelebbi sarok felé mutat) a Föld érintősíkjában. A függőleges irányú sebesség w .



3.2 ábra: A lokális rendszer és a forgási szögsebességvektor komponensei a két féltéken

Új vonás az, hogy a Föld forgási szögsebességvektorának a lokális rendszerben nemcsak z , hanem y irányú komponense is van (3.2) :

$$\boldsymbol{\Omega}_F = (\Omega_x \equiv 0, \Omega_y \equiv \pm \Omega_F \cos \varphi, \Omega_z \equiv \Omega_F \sin \varphi). \quad (3.3)$$

Itt Ω_F a Föld forgási szögsebességének (1.4)-vel megadott nagysága. Az Ω_y -ban fellépő negatív előjel a déli féltékenre vonatkozik, ahol a forgási szögsebesség vízszintes komponense az Egyenlítő felé, azaz negatív y irányba mutat. A $-2\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{v}$ Coriolis-gyorsulás komponensei ezért $(-2\Omega_y w + 2\Omega_z v, -2\Omega_z u, 2\Omega_y u)$. Mély folyadékrétegben az Ω_y -nal arányos új tagok jelentősek lennének, s ezért ott olyan típusú mozgás is kialakulhat, mely nem lehetséges egy függőleges tengely körül forgatott edényben. Érdekes módon azonban a $H \ll L$ sekélyfolyadék közelítésben nem ez a helyzet. Ekkor ugyanis a tipikus W függőleges sebesség legfeljebb $UH/L \ll U$, s ezért az x irányú Coriolis-gyorsulásban az Ω_y -nal arányos tag sokkal kisebb az Ω_z -vel arányosnál, ill. a nyomási erőből adódónál. A Coriolis-gyorsulás függőleges (z) komponense $2\Omega_y u$, mely $\Omega_F U$ nagyságrendű. Ez a p' dinamikai nyomásból származó $(1/\rho_0)\partial p'/\partial z$ gyorsuláshoz képest kicsi, hiszen az utóbbi nagyságrendje (1.24) szerint $\Omega_F UL/H \gg \Omega_F U$. Az Ω_y -nal arányos tagok tehát mindenütt elhanyagolhatók, s a forgási szögsebességvektornak csak az Ω_z függőleges komponense játszik szerepet!

A lokális rendszerbeli sekélyfolyadék egyenletek tehát *ekvivalensek* a függőleges tengely körül forgatott edénybeli sekélyfolyadék egyenletekkel, ha 2Ω helyett mindenütt az

$$f \equiv 2\Omega_z = 2\Omega_F \sin \varphi \quad (3.4)$$

mennyiséget, az ún. *Coriolis-paramétert* írjuk. Edényünket most már nemcsak a sarkokra képzelhetjük, hanem tetszőleges földrajzi koordinátájú pontba is (l. 3.2 ábra).

A sekélyfolyadék egyenletek a lokális rendszerben

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - g\text{grad}\eta, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (3.6)$$

alakúak, ahol $x = (R_F \cos \varphi_0)(\lambda - \lambda_0)$ és $y = \pm R_F(\varphi - \varphi_0)$. A negatív előjel továbbra is a déli félgömbre vonatkozik. A (3.4) Coriolis-paraméter

$$f = 2\Omega_F \sin(\varphi_0 \pm y/R_F). \quad (3.7)$$

Mivel f a folyadék örvényességével a teljes örvényességet adja, f -et szokás *planetáris örvénységnek* is nevezni. A planetáris örvényesség függ az y koordinátától. Ez olyan forgatásnak felel meg, melynek erőssége annál nagyobb, minél közelebb vagyunk valamelyik sarokhoz. Úgy is szokás mondani, hogy a Föld felszínén kialakuló áramlások differenciális rotációnak vannak kitéve. Ezt a tulajdonságot laboratóriumban lehetetlen közvetlenül megvalósítani, mert nem tudunk úgy forgatni egy edényt, hogy a szögsebesség helyfüggő legyen.

3.2 Az f_0 -sík közelítés

Az L lineáris méret kicsinysége a Föld sugarához képest azt követeli meg, hogy a Coriolis-paramétert azon a φ_0 referencia szélességen értékeljük ki, mely a koordináta-rendszer origójának, ill. x tengelyének felel meg. Ez az

$$f \equiv f_0 = 2\Omega_F \sin \varphi_0 = \text{állandó} \quad (3.8)$$

választásnak felel meg. A planetáris örvényesség ebben az ún. f_0 -sík közelítésben az egész vizsgált tartományban állandó. Más tartományhoz természetesen más φ_0 , s így más f_0 tartozik. Az Északi-sarkon $f_0 = 2\Omega_F$, az alacsonyabb szélességek felé haladva csökken, az Egyenlítőnél f_0 előjelet vált, s egyre negatívabb értékeken keresztül jut el a Déli-sarkhoz tartozó $f_0 = -2\Omega_F$ -hoz.

Adott f_0 -síkon, korábbi eredményeink a

$$2\Omega \rightarrow f_0 = 2\Omega_F \sin \varphi_0 \quad (3.9)$$

helyettesítéssel érvényesek. A Rossby-szám definíciója mostantól

$$Ro = \frac{U}{|f_0|L}, \quad (3.10)$$

azaz a földrajzi szélességnek megfelelő Coriolis-paraméterrel számoljuk. Ez közepes szélességeken legfeljebb kétszerese a sarkinak. A 45 fokos szélességen pl. (Magyarország a 46 és 48 fokos

szélességi körök között fekszik) $f_0 = \sqrt{2}\Omega_F = 1,03 \cdot 10^{-4}$ 1/s. Ennek megfelelően a 1.1 táblázat Rossby-szám értékei a (3.10) definíció szerint mintegy 1,4-szer nagyobbak. Az Egyenlítő felé közeledve Ro értéke minden határon túl nő, ezért a $Ro \ll 1$ feltétel ott sohasem teljesülhet, a geosztrofikus és kvázigeosztrofikus közelítés ott nem alkalmazható.

Geosztrofikus egyensúlyi áramlásra

$$u_g = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Ugyanakkora felszíni vagy nyomásbeli különbség tehát erősebb geosztrofikus áramlásokat hoz létre alacsonyabb szélességeken mint magasabbakon. Ez a tendencia azonban csak addig figyelhető meg, amíg a Rossby-szám egynél kisebbnek tekinthető. Az Egyenlítő közvetlen közelében nyilvánvalóan nem ez a helyzet, ott nem alakulhat ki geosztrofikus egyensúly, hiszen $f_0 \rightarrow 0$, a Coriolis-erő eltűnik, s így nem képes a nyomási erő egyensúlyozására. Ennek fontos következménye, hogy az Egyenlítő környékén nem létezhetnek ciklonális és anticiklonális áramlások, teljes egyezésben a tapasztalattal.

A tehetetlenségi körmozgás periódusideje

$$T = \frac{2\pi}{|f_0|} = \frac{\pi}{\Omega_F \sin |\varphi_0|} = \frac{1/2 \text{ nap}}{\sin |\varphi_0|} \quad (3.12)$$

(mely az adott szélességen a Foucault-inga körülfordulási idejének a fele). A 1.14 ábra a Balti-tengerben mutatja a tehetetlenségi körmozgást, melynek periódusideje mintegy 14 óra. Ez megfelel a (3.12) összefüggésnek, figyelembe véve hogy a szélesség 58 fok.

A Rossby-sugár az f_0 -közelítésben

$$R = \frac{\sqrt{gH}}{|f_0|}. \quad (3.13)$$

Értéke az Egyenlítő felé közeledve nő, azaz a szabad felszín hatása ott egyre kevésbé érvényesül. Közepes szélességeken a fenti képlettel számolt légköri Rossby-sugár 3200 km, az óceáni 2000 km. A tehetetlenségi-gravitációs hullámok diszperziós relációja

$$\omega_0^2 = f_0^2 + gHk_x^2 = f_0^2(1 + (Rk_x)^2), \quad (3.14)$$

a topografikus Rossby-hullámoké pedig

$$\omega_0 = -\frac{f_0\gamma}{H} \frac{k_x}{k^2 + R^{-2}}. \quad (3.15)$$

3.3 A β -sík közelítés

A β -sík közelítés az f_0 -sík közelítés kiterjesztése, mely figyelembe veszi a Coriolis-paraméternek a Föld görbületéből adódó legfontosabb helyfüggő járulékát. Ez számos új jelenség leírását teszi lehetővé. Rossby nevéhez fűződik annak felismerése is, hogy a lokális rendszerbeli egyenletek érvényben maradnak akkor is, ha a Coriolis-paraméterben figyelembe vesszük a vezető rendű, lineáris helyfüggést, azaz ha f -et úgy írjuk, mint

$$f = f(y) \equiv f_0 + \beta y. \quad (3.16)$$

Itt $f_0 \equiv f(y_0)$ a Coriolis-paraméter a lokális rendszer origójában, és

$$\beta = \pm \frac{1}{R_F} \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \pm \frac{2\Omega_F}{R_F} \cos \varphi_0 = \text{állandó} \quad (3.17)$$

a Coriolis-paraméter y szerinti deriváltja ugyanott. Az északi térfélen a β -paraméter pozitív, a délin viszont negatív, az Egyenlítőn áthaladva hirtelen előjelet vált. Ez a közelítés azt jelenti, hogy figyelembe vesszük a Föld görbületét, de nem a koordinátarendszer meggörbítésével.

A lineáris tagnál akkor szabad megállnunk, ha $y/R_F \ll 1$. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált tartomány L lineáris mérete kicsi a Föld sugarához képest, tehát konzisztens a lokális rendszer használatával. Az Egyenlítő közvetlen környezetét kivéve ez azt is jelenti, hogy $\beta L \ll f_0$. Konkrét példaként tekintsük a 45-ös szélességet, ahol $f_0 \approx 10^{-4}$ 1/s, és $\beta = 1,6 \cdot 10^{-11}$ 1/(m s). A kiterjedésnek $L = y_{max} = 500$ km-t véve, βL csak 8 százaléka f_0 -nak. A β -sík közelítés tehát a közepes szélességeken mintegy 1000km átmérőjű tartományokra érvényes. Fontos hangsúlyozni, hogy a sarkok közelében a lineáris közelítés nem jogos, hiszen $\pi/2$ -nél a szinuszfüggvény négyzetesen változik. Ugyanakkor azonban az Egyenlítő körül alkalmazható a β -sík közelítés (1. 10.2 fejezet).

A β paraméter fontosságának egy lehetséges dimenziótlan mérőszáma a

$$Be = \frac{\beta L}{f_0} = \frac{L}{R_F} \text{ctg}|\varphi_0| \quad (3.18)$$

kifejezés. Megadja, hogy a teljes lineáris méretben hányszorosa a Coriolis-paraméter változása az origóbeli Coriolis-paraméternek:

$$Be = \frac{\text{a Coriolis-paraméter változása}}{\text{Coriolis-paraméter}}. \quad (3.19)$$

A Be dimenziótlan β -paraméter (3.18) alakjából leolvasható, hogy értéke a Föld sugarához képest kis kiterjedésű tartományokban, a sarkoktól távol kicsi: $Be \ll 1$.

A lokális sekélyfolyadék rendszer a β -sík közelítésben tehát leírható korábbi egyenleteinkkel, ha azokban a

$$2\Omega \rightarrow f = f(y) \equiv f_0 + \beta y \quad (3.20)$$

helyettesítést elvégezzük. A forgatás szögsebessége lineárisan helyfüggővé válik a Föld felszínén érzékelhető differenciális rotáció miatt. Figyelnünk kell azonban arra, hogy az olyan eredmények, melyekben kihasználtuk Ω állandóságát, nem maradnak érvényben.

A (3.5) sekélyfolyadék egyenletek dimenziótlan alakja

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mp \frac{1}{Ro} (1 + Be y) \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \text{grad}\eta, \quad (3.21)$$

ahol a Rossby-számot (3.10), a Froude-számot pedig (1.27) adja. Itt tehát megjelenik a dimenziótlan β -paraméter új karakterisztikus számként. Két áramlás a β -síkon akkor hasonló, ha mindhárom dimenziótlan számuk, Ro , Fr és Be is azonos.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a potenciális örvényesség megmaradása a (9.1)-(9.3) sekélyfolyadék egyenletben is érvényes a (3.16) helyfüggő forgatási szögsebesség mellett: a

$$q = \frac{\zeta + f(y)}{h} H \quad (3.22)$$

mennyiség állandó a folyadékrészek súrlódásmentes mozgása során (l. (2.22)). Fontos új tulajdonság, hogy most már a ζ örvényességnek nem kell feltétlenül megváltoznia mélyebb folyadékrészbe kerüléskor, hiszen a számláló növekedhet $f(y)$ -non keresztül, azaz az északra történő elmozdulás miatt is.

A gyorsan forgatott esetben, amikor ζ sokkal kisebb mint $f(y)$, stacionárius áramlás alakulhat ki, tehát $\partial/\partial t = 0$. Ekkor fenn kell állnia, hogy

$$u_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(y)}{h} \right) + v_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(y)}{h} \right) = 0. \quad (3.23)$$

Ez a (2.29) feltétel általánosítása a β -síkra. A geosztrofikus áramlás az $f(y)/h$ mennyiség színtvonalai mentén halad.

A felszíni alakkal kifejezve a geosztrofikus áramlási sebesség (2.24) általánosításaként:

$$u_g = -\frac{g}{f(y)} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{f(y)} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.24)$$

Forgásszimmetrikus kidudorodás vagy behorpadás esetén a sebesség nagysága nem állandó, hanem az Egyenlítő felé eső részeken gyorsabb.

3.4 A Sverdrup-összefüggés

A geosztrofikus áramlás oszlopos szerkezetű, hiszen a sebességkomponensek függetlenek a z koordinátától. Ugyanakkor azonban *nem kétdimenziós* az erős forgatás ellenére sem: létrejön egy függőleges irányú w_g sebességű áramlás is. A (3.24) egyenlet szerint fennáll ugyanis, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x} (f(y)u_g) + \frac{\partial}{\partial y} (f(y)v_g) = 0, \quad (3.25)$$

melyből a háromdimenziós divergenciamentesség, azaz $\text{div} \mathbf{u}_g = -\partial w_g / \partial z$ miatt

$$u_g \frac{\partial f(y)}{\partial x} + v_g \frac{\partial f(y)}{\partial y} = f(y) \frac{\partial w_g}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Mivel f nem függ x -től, y szerinti deriváltja viszont β ,

$$\beta v_g = f(y) \frac{\partial w_g}{\partial z}, \quad (3.27)$$

vagy

$$\text{div} \mathbf{u}_g = -\frac{\beta v_g}{f(y)}. \quad (3.28)$$

Ez az ún. Sverdrup-féle összefüggés (H.U. Sverdrup, 1888-1957, norvég oceanográfus, a lassú óceáni mozgások első leírója), mely azt mondja ki, hogy a β -hatás miatt a geosztrofikus egyensúlyban gyenge fel- vagy leáramlások alakulnak ki. A folyadékoszlopok függőleges megnyúlási rátája, $\partial w_g / \partial z$, az észak-déli sebességgel arányos, de független a kelet-nyugatitól. A sekélyfolyadék tulajdonság szerint nem függ a z koordinátától sem. Leáramlás esetén $w_g < 0$, $\partial w_g / \partial z < 0$, s a síkbeli geosztrofikus sebesség mindig az Egyenlítő felé irányul ($v_g < 0$), hiszen $f(y)/\beta$ mindkét féltekén pozitív.

Ugyanez következik a potenciális örvényesség megmaradásának (3.23) alakjából is. Az eredmény szemléletes magyarázata a megmaradási tétel fényében az, hogy ha egy folyadékoszlop magassága változik, akkor planetáris örvényességének is változnia kell, de mivel abban a folyadék ζ örvényessége most nem lényeges, az oszlopnak észak-déli irányban el kell mozdulnia.

A Sverdrup-összefüggésben szereplő fel-le áramlások gyengék, így (3.27) jó közelítéssel írható mint

$$\boxed{\beta v_g = f_0 \frac{\partial w_g}{\partial z}}. \quad (3.29)$$

A $\partial w_g / \partial z$ megnyúlási ráta nagyságrendje U/L (ugyanakkora mint $\text{div} \mathbf{u}_g$ -é), így (3.29) dimenziótlan kifejezése

$$\frac{\partial w_g}{\partial z} = Be v_g, \quad (3.30)$$

ahol Be a (3.18) dimenziótlan β -paraméter. Láttuk, hogy a β -sík közelítés érvényességi feltétele az, hogy $Be \ll 1$, ezért a dimenziótlan megnyúlási ráta sokkal kisebb mint a geosztrofikus sebesség.

3.5 Planetáris hullámok

Konstans H folyadékmélység és elhanyagolható felszíni mozgás esetén a (3.22) potenciális örvényesség

$$q = f_0 + \zeta + \beta y, \quad (3.31)$$

azaz ugyanolyan alakú kifejezés, mint az y irányban enyhén döntött aljú forgatott edénybeli (2.33). Ez azt mutatja, hogy Rossby-hullámok konstans mélység mellett is kialakulhatnak *kizárólag* a differenciális rotáció, vagyis a β -hatás következtében. A természetben előforduló legfontosabb Rossby-hullámok esetén ténylegesen ez a helyzet. Tulajdonságaik azonban leképezhetők a forgatott edénybeliekére a

$$\frac{2\Omega\gamma}{H} \leftrightarrow \beta \quad (3.32)$$

megfeleltetéssel. Ez a reláció teszi lehetővé a környezeti áramlásokban megfigyelt Rossby-hullámok laboratóriumi modellezését (2.16 ábra).

Ha a β -hatással lejtős aljzat párosul, mely a sarok felé γ meredekséggel emelkedik, akkor a potenciális örvényesség

$$\frac{\zeta + f_0 + \beta y}{H - \gamma y} H \approx (f_0 + \zeta + \beta y) \left(1 + \frac{\gamma}{H} y\right) \approx f_0 + \zeta + \left(\beta + f_0 \frac{\gamma}{H}\right) y. \quad (3.33)$$

Ilyen esetben a dimenziótlan béta paraméter általános alakja:

$$\boxed{Be \equiv \beta \frac{L}{f_0} + \gamma \frac{L}{H}}. \quad (3.34)$$

A hidrodinamikai hasonlóság feltétele a Be paraméter azonos értéke. Az áramlás jellege tehát független attól, hogy kizárólag lejtős aljzat, vagy β -hatás, vagy mindkettő jelenlétében alakul ki. Mivel a Földön nem található nagyskálájú, egyenletesen emelkedő domborzat, a valóságos áramlásokban γ elhanyagolható¹.

A légkörben kialakuló Rossby-hullámok a leghosszabb és egyben leglassúbb légköri hullámok. Gyakorlati fontosságuk abból adódik, hogy alapvetően ezek határozzák meg az időjárás alakulását. Mivel hullámhosszuk sokszor összemérhető a Föld sugarával, azaz néhány hullámhosszal

¹Laboratóriumi kísérletekben viszont a $\gamma L/H$ kombinációt tekintjük dimenziótlan β -paraméternek.

körbefogják a Földet, *planetáris* hullámoknak is nevezik őket. Diszperziós relációjuk

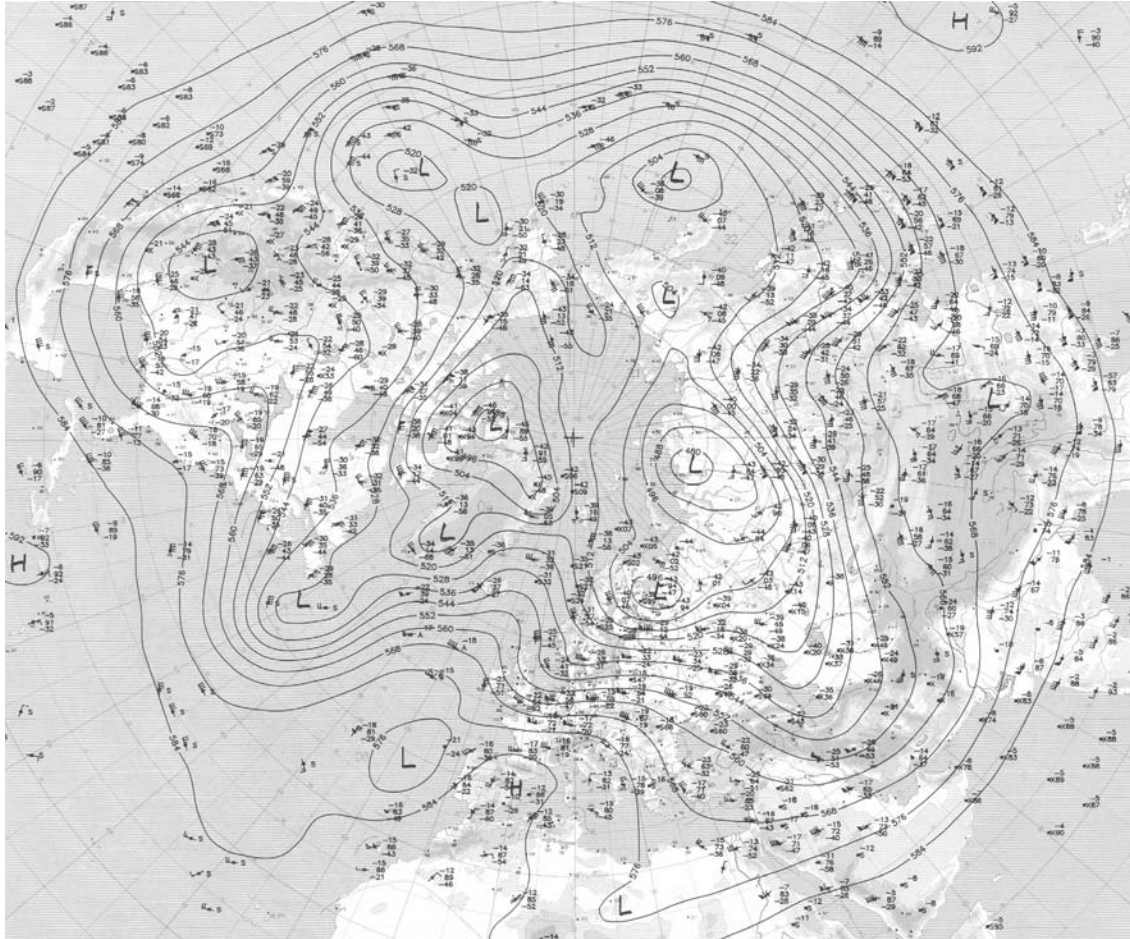
$$\omega_0 = -\beta \frac{k_x}{k^2 + R^{-2}} = \mp \frac{2\Omega_F}{R_F} \cos \phi_0 \frac{k_x}{k^2 + R^{-2}}, \quad (3.35)$$

ahol R a (3.13) szerinti Rossby-sugár. A hullámok x -irányú sebessége

$$c_x = -\beta \frac{1}{k^2 + R^{-2}}. \quad (3.36)$$

Mivel $c_x/\beta < 0$, a planetáris hullámok álló közegben *mindkét féltéken nyugatra* haladnak (a déli félgömbön a nyugatra haladás növekvő x értékeknek felel meg, de ott β is negatív). Ez a kitüntetett irány ismét az időtükrözési szimmetria sérülésének következménye.

A planetáris hullámok szinte minden meteorológiai térképen megfigyelhetők, mint a ciklonok és anticiklonok között kanyargó áramlások (3.3 ábra). Ezek természetesen általában nem szinuszfüggvénnyel megadható hullámok, hanem az itt leírtaknál bonyolultabb, nemlineáris változatok, melyek nagy kiterjedésük miatt esetleg már a β -sík közelítés érvényességi körén is kívül esnek.



3.3 ábra: Planetáris hullámok meteorológiai térképen. A vonalak olyan azonos magasságú pontokat kötnek össze, melyekben a nyomás 500 hPa, átlagos magasságuk 5 km. Jól megfigyelhető a ciklonok (L) és anticiklonok (H) között kanyargó görbesereg, mely egy planetáris Rossby-hullámnak felel meg [European Meteorological Bulletin, 1998. február 16., 12 óra, Deutscher Wetterdienst.]

A $k_x = 1/(1000 \text{ km})$ hullámszámú planetáris hullám sebessége a 45 fokos szélességi körön $|c_x| = 16 \text{ m/s} \approx 60 \text{ km/h}$. Periódusideje 4,5 nap. Mivel a hullámszám négyzete kb. tízszer nagyobb a légköri R^{-2} -nél, a becslésben a Rossby-sugarat el lehet hanyagolni. A szélességi kör kerülete mintegy 30000 km, azt a hullám kb. 20 nap alatt kerüli meg.

A kelet-nyugati irányban mozgó ($k_y = 0$) planetáris hullámok érdekes tulajdonsága, hogy az Egyenlítő felé közeledve c_x sebességük nő, de éppen olyan mértékben, mint a középvonalukhoz tartozó szélességi kör kerülete. Az adott k_x hullámszámú planetáris hullámok a Földet *azonos* idő alatt kerülik meg. Ez az idő a $|\beta| = 2\Omega_F \cos \varphi_0 / R_F$ összefüggés felhasználásával

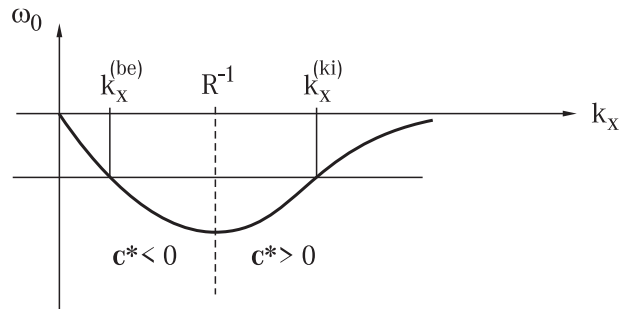
$$T = \frac{2\pi R_F \cos \varphi_0}{|c_x|} = \frac{\pi}{\Omega_F} [(R_F k_x)^2 + (R_F/R)^2], \quad (3.37)$$

valóban független a φ_0 szélességtől. A szinkronban maradási tulajdonság a planetáris hullámok jelenségének erőteljességét mutatja, és az ilyen hullámok gyakori előfordulását biztosítja.

A kelet-nyugati irányban haladó ($k_y = 0$) planetáris hullám csoportsebessége is szélességi körrel párhuzamos, nagysága

$$c^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_x} = \beta \frac{k_x^2 - R^{-2}}{(k_x^2 + R^{-2})^2}. \quad (3.38)$$

A Rossby-sugár reciprokánál nagyobb hullámszámú planetáris hullámok energiája tehát keletre halad, míg a kisebb hullámszámúaké nyugatra. A diszperzív tulajdonság fontos következménye, hogy egy falon visszeverődő hullám hosszúságának meg kell változnia. Másként ugyanis nem változhatna meg csoportsebességének előjele (hiszen frekvenciája nem változhat). Az észak-déli falra beeső és visszavert hullám k_x^{be} ill. k_x^{ki} hullámszámai tehát kielégítik az $\omega_0(k_x^{be}) = \omega_0(k_x^{ki})$ feltételt (l. 3.4 ábra). Ellenkező előjelű csoportsebesség csak akkor tarthat hozzájuk, ha R^{-1} -től való eltérésük is ellenkező előjelű. Egy nyugati óceáni peremre energiát hozó planetáris hullám hosszú hullám, melyre $k_x^{be} < R^{-1}$, a visszeverődés után rövid hullámhosszúvá válik: $k_x^{ki} > R^{-1}$. A nyugati peremvidék tehát a rövid hullámhosszú zavarok forrásának tekinthető. Az élesen eltérő frekvenciák miatt Rossby-hullám nem alakulhat át Poincaré-hullámba, az azonban megtörténhet, hogy a nyugati peremvidékre érkező Rossby-hullám hosszú hullámhosszú, tehát lassú Kelvin-hullámot kelt a partvonal mentén.



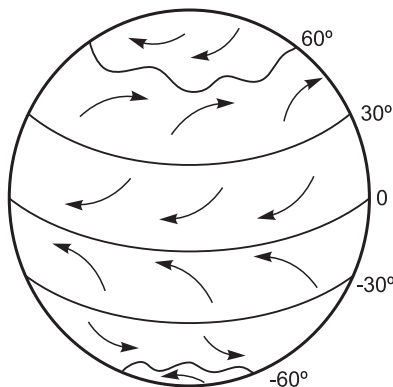
3.4 ábra: Planetáris hullámok diszperziós relációjából leolvasható, hogy észak-déli partvonalattal ütközve a beeső és visszavert hullám csoportsebessége csak akkor lehet ellenkező előjelű, ha a bejövő és kimenő hullámszámok a R^{-1} Rossby-hullámszám különböző oldalára esnek.

3.6 Az általános légköri zónális áramlásai

A Föld gömbalakjának következménye a kialakuló általános légköri zónális áramlás is, melyben szélességi körök menti, ún. *zónális áramlások* figyelhetők meg mind a Föld felszínén, mind a magasabb légrétegekben.

A légkör mozgását a Napból érkező energia hajtja. A hősugárzás következtében az Egyenlítő környékén a felmelegített levegő felemelkedik, a magasban, a 10 – 12 km-es szinten a sarkok felé fordul, helyére pedig a felszínen hűvösebb levegő érkezik. Ha a Föld a valóságosnál sokkal lassabban forogna tengelye körül, akkor a magas légköri áramlás csak a sarkoknál kényszerülne leszállásra. Ilyen egycellás légkörczés figyelhető meg a Vénusz légkörében. A Föld sokkal gyorsabb forgása a helyzetet jóval bonyolultabbá teszi.

Az egyenlítői levegő, többek között a mérsékelt égövi Rossby-hullámok és ciklonok, anticiklonok miatt, a magasban csak kb. a 30-as szélességeig jut, ahol leszáll. Ez okozza a Bak- és Rák-térítő körüli száraz éghajlatot, és az óceáni szélsendes öveget. A leszállt levegő egy része innét a felszínen az Egyenlítő felé fordul, amit a Coriolis-erő az északi féltekén jobbra, a délin balra térít el. Mindkét hatás arra vezet, hogy a passzát övezetben *keleti*, azaz keletről fújó, zonális szelek uralkodnak.



3.5 ábra: A Földön uralkodó zonális szelek sematikus rajza.

A 30-as szélességeken leszállt levegő másik része a felszínen a sarkok felé áramlik. Rá ellenkező előjelű a Coriolis-hatás, s így a mérsékelt éghajlati övben a *nyugati* zonális szelek a jellemzők, természetesen hosszú idejű, pl. éves átlagokban.

A mérsékelt égövi levegő a 60-as szélességek fölött találkozik a sarkok felől a felszínen az Egyenlítő felé áramló hideg levegővel. A két tartományt elválasztó görbe az ún. *poláris front*. Alakja, bármelyik magassági szinten nézzük is, időben változó, hullámzó görbe (3.5 ábra). A poláris front alakját rendszerint egy ott jelenlevő planetáris hullám határozza meg. Ez tehát a légköri Rossby-hullámok egy gyakori előfordulási helye is.

A sarki övezetben leszálló áramlások uralkodnak. Az Egyenlítő felé haladó mozgás a Coriolis-féle eltérülés miatt a felszínen ismét *keleti* szelek megjelenésére vezet.

Az általános légkörczés tehát a Földet három különböző övezetre bontja (3.5 ábra), melyekben eltérő irányúak a zonális áramlások. Közülük legerősebb a mérsékelt égövi nyugati szelek hatása.

3.7 Rossby-hullámok zonális áramlásban

Tekintsünk kis amplitudójú planetáris hullámokat az $u_0 = U, v_0 = 0$ homogén zonális háttéráramlásban. Az északi félgömbön $U > 0$, a délin $U < 0$ felel meg egy nyugatról keletre irányuló folyamnak (nyugati szélnek). Az egyszerűség kedvéért hanyagoljuk el a szabad felszín hatását és az aljzat egyenetlenségeit, azaz $h = H = \text{állandó}$.

Mivel a háttéráramlás sebessége egyszerűen hozzáadódik az ismert fázissebességhez, az x irányú terjedési sebesség

$$c_x = U - \frac{\beta}{k^2}. \quad (3.39)$$

A Rossby-hullám a háttéráramláshoz képest mindig nyugatra mozog. Ennek érdekes következménye, hogy egy, a Földön álló megfigyelő számára a hullám stacionárius, azaz időtől független, ha a két sebesség kiejti egymást, s ezért $c_x = 0$. Nyugatról keletre történő zonális áramlásban, ahol $U/\beta > 0$, ennek feltétele az, hogy a hullámszám a

$$k_c = \sqrt{\beta/U} \quad (3.40)$$

kritikus értéket vegye fel. A megfelelő kritikus hullámhossz

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}. \quad (3.41)$$

A légkörre jellemző $U = 10$ m/s értékkel és $\beta = 10^{-11} 1/(\text{ms})$ -al számolva, $k_c = 1/(1000 \text{ km})$ és $\lambda_c = 6280 \text{ km}$. Keletről jövő áramlásokban $U/\beta < 0$, s ezért stacionárius hullám *nem* létezik.

3.8 A domborzat hatása zonális áramlásokra

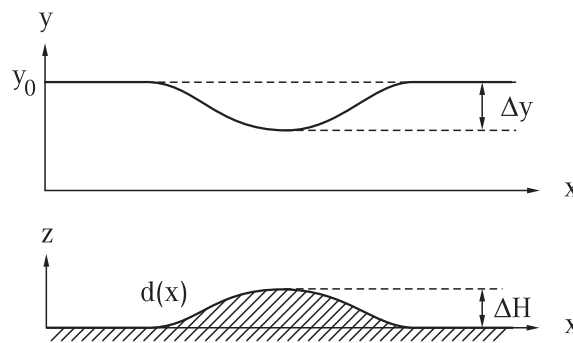
3.8.1 Geosztrofikus közelítés

A potenciális örvényesség megmaradása a geosztrofikus határesetben ($\zeta \approx 0$) azt jelenti, hogy a

$$q = \frac{f(y)}{h} H \quad (3.42)$$

hányados állandó az áramvonalak mentén.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a vízszintes domborzat feletti $u_0 = U, v_0 = 0$ homogén zonális áramlás egy észak-déli irányban húzódó aljzati kidudorodással találkozik (hegyvonulat vagy tenger alatti hátság). A domborzat $d(x)$ alakja független y -től, magassága ΔH . Az ezzel járó η felszíni alakváltozás elhanyagolható. A folyadékmélység tehát az áthaladás során a kezdeti $h = H$ értékről $h = H - \Delta H$ -ra csökken, majd újra H -ra nő. Ha a planetáris örvényesség nem függne a szélességtől, ilyen zonális áramlás nem lenne lehetséges, mert a $h = \text{konstans}$ vonalak észak-déli irányúak. A β -hatás következtében azonban kialakulhat ilyen áramlás, de a hegy fölött irányt kell változtatnia: h csökkenésének az $f(y)$ planetáris örvényesség csökkenésével kell párosulnia. Az áramlásnak tehát az Egyenlítő felé kell kitérnie, annál jobban, minél sekélyebb közegben halad (3.6 ábra).



3.6 ábra: Domborzati kidudorodás hatása zonális áramlások vízszintes síkbeli pályájára geosztrofikus közelítésben. A pálya független attól, hogy az áramlás keletről vagy nyugatról érkezik.

Az y_0 referencia szélességtől (melyen a Coriolis-paraméter f_0) számított legnagyobb Δy eltolódást a megmaradási tételből kapjuk, hiszen rá felírhatjuk, hogy

$$\frac{f(y_0)}{H} = \frac{f(y_0 - \Delta y)}{H - \Delta H}. \quad (3.43)$$

Amennyiben az eltolódás kicsi y_0 -hoz képest, a jobb oldali számláló $f_0 - \beta\Delta y$ -ként írható, s ekkor

$$\Delta y = \Delta H \frac{f_0}{\beta H}. \quad (3.44)$$

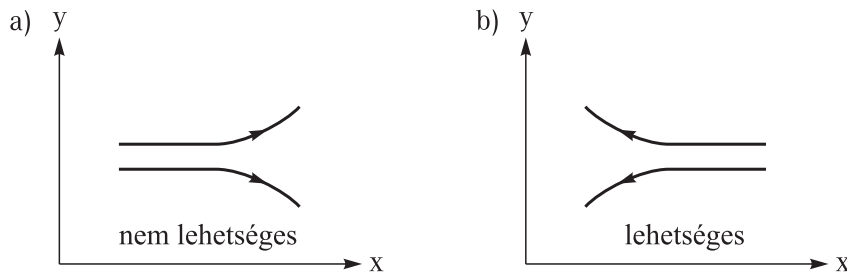
Az eltolódás tehát arányos a felszíni kiemelkedés magasságával. A teljes mélység 1 százalékának megfelelő kidudorodás közepes szélességeken $\Delta y = 60$ km eltolódást okoz.

A fent alkalmazott sorfejtés akkor megengedett, ha $\Delta H/H \ll 1$, hiszen csak ekkor igaz, hogy $\beta\Delta y \ll f_0$. Magas hegyek esetén tehát a (3.44) formula nem érvényes, a Δy és ΔH közötti reláció nemlineáris, de a kvalitatív kép változatlan: az eltolódás olyan mértékű, hogy az f/h hányados állandó maradjon. Az eredmény az áramlás sebességétől teljesen független, így az áramlás irányától is. Az Egyenlítő irányába történő elkanyarodás adott szélességen ugyanakkora akár nyugat-keleti akár kelet-nyugati áramlásról van szó. Domborzati behorpadások, völgyek esetén az eltolódás ellenkező irányú, hiszen ΔH ilyenkor negatívnak tekintendő.

3.8.2 Nemgeosztrofikus eset

A geosztrofikus egyensúlytól való eltérés megszünteti a nyugat-keleti és kelet-nyugati áramlások egyenértékűségét. Ekkor ugyanis a ζ örvényesség már nem hanyagolható el a planetáris örvényesség mellett, s nyilvánvalóvá válik az időtükrözési invariancia sérülése a kitüntetett forgásirány miatt.

A zonális áramlás irányának fontosságát érzékeltetendő, tekintsünk először egy nyugat-keleti áramlást vízszintes aljzat felett. Amíg az áramvonalak a szélességi körökkel párhuzamosak, a ζ örvényesség zérus. Ha az áramlás az északi félgömbön valahol északra kanyarodna, a ζ örvényesség pozitív értékűre nőne. Ezzel együtt nőne azonban az $f(y)$ Coriolis-paraméter, s így a potenciális örvényesség is. A délre kanyarodás a potenciális örvényesség csökkenését eredményezné. Ez ellentmondana a potenciális örvényesség megmaradásának (l. 3.7 ábra) *A nyugat-keleti áramlások vízszintes aljzat felett nem térülhetnek el.* A kelet-nyugati áramlásokban viszont az északra (délre) kanyarodás az északi félgömbön ζ negatívvá (pozitívvá) válását jelenti, melyet a Coriolis-paraméter helyfüggése kompenzálhat. Ugyanez igaz a déli féltekén is. *A kelet-nyugati áramlások vízszintes aljzat felett tehát elkanyarodhatnak.*



3.7 ábra: A potenciális örvényesség megmaradásával a sík aljzat felett nyugatról keletre történő áramlás eltérése nincs összhangban (a), a keletről érkező áramlás viszont eltérülhet (b). Ez a jelenség minkét féltekén érvényes.

Vizsgáljunk most egy nyugatról érkező áramlást, mely az aljzat egy ΔH magasságú lépcsőjére fut föl (3.8a ábra). A lépcső elérése pillanatában az örvényességnek zérusról a ζ_0 értékre kell

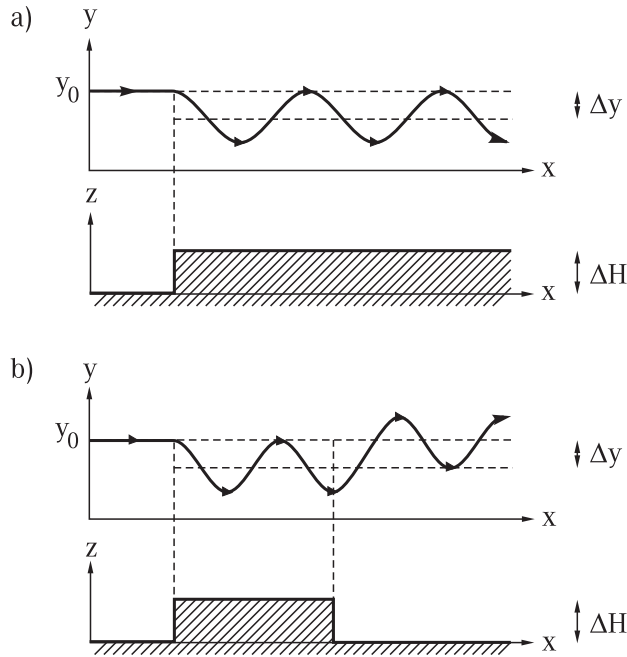
ugrania, ahol

$$\frac{f_0}{H} = \frac{f_0 + \zeta_0}{H - \Delta H}, \quad (3.45)$$

melyből

$$\zeta_0 = -f_0 \frac{\Delta H}{H}. \quad (3.46)$$

A ζ_0 örvényesség mindkét féltekén anticiklonális, $\zeta_0/f_0 < 0$, megjelenése az áramlás hirtelen elkanyarodását jelenti az Egyenlítő felé. A lépcső fölött mindenütt fenn kell állnia annak, hogy $\zeta + f(y) = \zeta_0 + f_0$. Ezért a ζ örvényesség az Egyenlítő felé való mozgás során az északi féltekén nő (a délin csökken), hiszen a planetáris örvényesség az Egyenlítő felé csökken (nő). Így az örvényesség egyszer eléri a zérus értéket, ahol a pályavonal görbülete megszűnik. Ezután a görbület az eredetivel ellentétessé válik, s mire az örvényesség a $-\zeta_0$ értéket veszi föl, a pálya érintője ismét szélességi kör lesz. A lépcső fölött hullámozó, *meanderező* mozgás alakul ki (3.8a ábra). Ennek középvonala az az egyenes, melyen $\zeta = 0$, s melynek a referencia szinttől való Δy eltolódására ugyanaz a (3.43) (vagy annak kicsinyiségekor (3.44)) érvényes mint a geosztrofikus határesetben². A ΔH paraméter negatív értéke mélyebb közegbe érkezésnek felel meg. Ilyenkor az eltolódás az Egyenlítőtől távolodást jelent, de a meanderezés ugyanúgy kialakul.

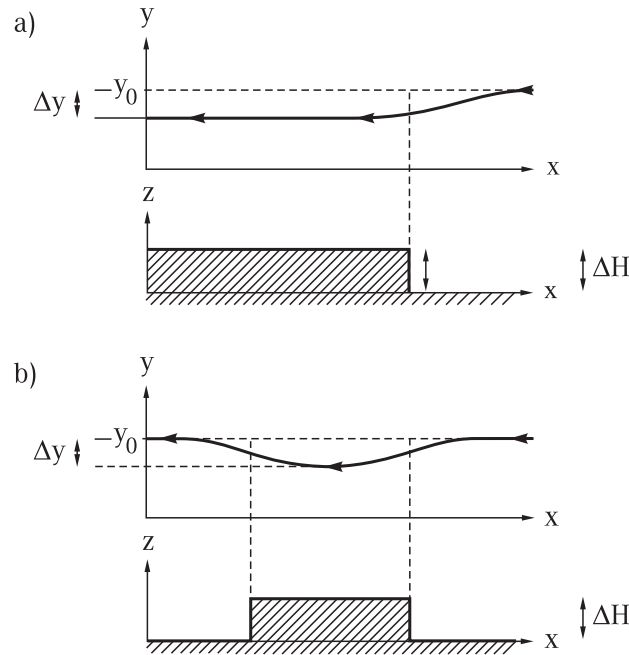


3.8 ábra: A domborzat hatása nyugatról érkező nem geosztrofikus áramlásokra. a) Lépcső. b) Véges domborzati elem.

Tekinsünk most egy véges lépcsős domborzati elemet (l. 3.8b ábra). Ennek keleti pereme elérésekor az áramlás örvényességének $-\zeta_0$ mértékű ugrást kell szenvednie, s ennek következtében a pályavonalak görbülete is hirtelen változik. A zérus örvényességű helyzet a H mélységű tartományban ismét az eredeti y_0 szélességi körnek felel meg, de az áramlás örvényessége csak átlagosan lesz zérus: a meanderezés az y_0 szélesség körül folytatódik (3.8b ábra). A nyugatról jövő áramlást tehát a domborzati kiemelkedés nemcsak az Egyenlítő felé tolja el, hanem hullámozóvá teszi, s ez a kiemelkedés elhagyása után is fennmarad. A hegy-, vagy völgy-vonulatok keleti oldalán jelentős vízszintes síkbeli hullámmozgásra kell számítani.

²A geosztrofikus közelítésben az áramvonalaknak ugrást kellene szenvedniük a lépcső elérésekor.

Az ugyanazon y_0 szélességi kör mentén keletről érkező áramlás másképpen viselkedik. Ha iránya az egész H mélységű tartományban szélességi kör menti volna, akkor a lépcső elérésekor nyert ζ_0 örvényesség az áramlást mindkét féltéken a sarok felé téríti. Ebben az irányban azonban a planetáris örvényesség abszolútértéke nő, mely megengedné, hogy az örvényesség egyre erősebb legyen, s az áramlás így önmagába visszakanyarodhatna. Ez a sohasem tapasztalt viselkedés úgy zárható ki, hogy feltételezzük, az áramlás már a konstans H mélységű tartományban elkanyarodik az Egyenlítő felé. Emlékezzünk arra, hogy a potenciális örvényesség megmaradása ezt egy keletről jövő áramlásban nem zárja ki. A pályavonalak tehát véges szög alatt futnak rá a lépcsőre. Az ott nyert ζ_0 örvényesség ismét a sarok felé térít, de a tehetetlenség a közeget még az Egyenlítő felé sodorja. Az áramlás a szélességi körök irányába kanyarodik, melyet aszimptotikusan elér (3.9a ábra). Az Egyenlítő felé tolódás mértékét ismét (3.43), ill. (3.44) adja.



3.9 ábra: A domborzat hatása keletről érkező nem geostrofikus áramlásokra. a) Lépcső. b) Véges domborzati elem.

Ennek a folyamatnak a fordítottja játszódik le véges lépcső esetén a lépcső elhagyásakor, mely az eredeti y_0 szinthez történő sima visszakanyarodáshoz vezet (3.9b ábra). A keletről érkező áramlások *nem* hoznak létre hullámokat a domborzati akadályok mögött.

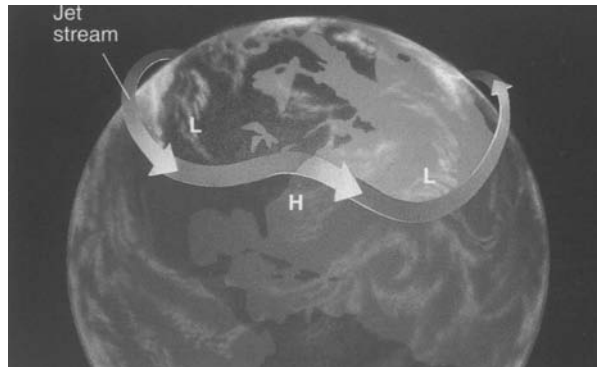
3.8.3 Alkalmazások

A planetáris örvényesség y -függése alapvetően különbözővé teszi a különböző irányú zonális áramlások és a domborzat kölcsönhatását. A keletről jövők viselkedése kvalitatíven megegyezik a geostrofikus közelítésben leírttal. A nyugatról jövők azonban már a domborzat fölött meanderezve tolnak el, s a meanderezést megtartva kerülnek vissza eredeti szélességükre. Így hullámok jönnek létre a domborzati akadályok mögött.

A fenti gondolatmenetben nem használtuk ki az örvényesség kicsinységét. Amennyiben $\zeta \ll f_0$, azaz a kvázigeostrofikus tartományban vagyunk, kvalitatív eredményeink azt jelentik, hogy a nyugatról jövő áramlások Rossby-hullámokat keltenek észak-déli irányú hegy-, vagy völgyvonalak mögött (l. következő fejezet).

A kvalitatív kép érvényes azonban az f_0 -al összemérhető örvényességű áramlásokra is, melyekben a Rossby-szám már közel egységnyi. Ezek érdekes példája az ún. jetstream (3.10 ábra),

mely a ± 60 -as szélességi kör mentén kb. 10 km magasságban kialakuló orkáncsatorna. Keresztmetszetének átlagos sugara néhány száz km, a benne megfigyelhető szélsősebesség pedig elérheti a 200 km/h-t is. A jetstream igen nagy amplitudójú meanderező mozgást végez, így északi változata gyakran lenyúlik Magyarország területe fölé is. Kialakulásában fontos szerepe van az impulzusnyomaték megmaradásának, hiszen jelenléte annak köszönhető, hogy a 30-as szélességeken leszálló meleg trópusi levegő egy része lassan a hűvösebb mérsékelt égövi levegő fölé csúszik egészen addig, amíg a magaslégkörben a 60-adik szélességi kör környékén sarkvidéki levegővel találkozik. A sarok felé haladása közben a forgástengelytől mért távolsága jelentősen csökken, s zonális sebessége ennek megfelelően erősödik az impulzusnyomaték tétellel összhangban.



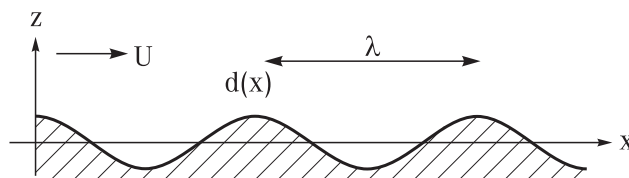
3.10 ábra: Az Északi-sarok körül húzódnó jetstream sematikus képe [Ahrens].

Meanderező áramlások gyakran figyelhetők meg az óceánok felszínén is. Legismertebb példájuk a Golf-áramlat, mely az Egyesült Államok partjaitól a Hatteras-foknál elkanyarodva erősen meanderezővé válik (2. ábra).

3.9 Domborzati egyenetlenségek által gerjesztett Rossby-hullámok

3.9.1 Szemléletes kép

Az előző fejezet általános gondolatmenetét kvázigeosztrofikus esetekre alkalmazva, olyan Rossby-hullámokhoz jutunk, melyeket domborzati egyenetlenségek gerjesztenek. A hullám kialakulásában alapvető szerepet játszik a β -hatás, de ugyanakkor a kelet-nyugati irányban változó domborzat is, tehát a planetáris és topografikus hullámok keverékéről van szó. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor nem egyetlen észak-déli hegy-, vagy völgyvonulat kelti a hullámot, hanem egy kiterjedt hegységrendszer, melynek átlagos hullámhossza λ (3.11 ábra)



3.11 ábra: A zonális áramlás a periodikus domborzat felett Rossby-hullámokat kelt, melyekben a sebesség merőleges a zonális áramlás irányára.

A domborzat rákényszeríti a hullámra saját periodicitását, tehát a gerjesztett hullám $k_x = 2\pi/\lambda$ hullámszámú lesz. Sebessége (3.39) szerint $c_x = U - \beta\lambda^2/(2\pi)^2$, ahol U a háttéráramlás

sebessége. A domborzathoz képest nem mozgó, stacionárius hullám akkor alakul ki, ha $c_x = 0$, azaz, ha az U sebesség kielégíti a

$$\lambda = 2\pi\sqrt{U/\beta} \quad (3.47)$$

feltételt. Ekkor a stacionárius Rossby-hullám (3.40) kritikus hullámszáma éppen megegyezik a hegyvonulatéval. Az ilyen hullám képes arra, hogy energiát nyerjen a zonális áramlásból: rezonancia-szerű jelenség alakul ki. Rezonancia csakis nyugatról érkező áramlásokra következhet be, amikor $U/\beta > 0$ (3.12 ábra).

A keletről jövő áramlások is létrehozhatnak stacionárius Rossby-hullámokat. Ezek azonban sohasem lehetnek rezonanciához közel, hiszen most (3.47) nem teljesül. Egyetlen hegyvonulat mögött zonális áramlásban nem alakulhat ki ilyen hullám, de ezek sorozata mégis képes Rossby-hullámok gerjesztésére. A nyugat-keleti és kelet-nyugati áramlások közötti éles különbség megmarad, hiszen az ellentétes U értékekhez tartozó amplitudók igen különbözőek.

3.9.2 Lineáris elmélet

Egyszerű választásként tekintünk a

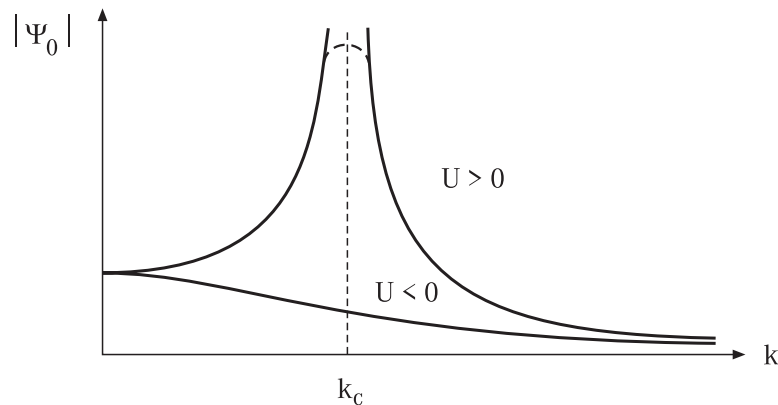
$$d(x) = AH \cos kx \quad (3.48)$$

domborzatot, mely egy $\lambda = 2\pi/k$ kelet-nyugati hullámhosszú, A dimenziótlan amplitudójú szinuszfüggvénnyel leírt hegységrendszernek felel meg.

A potenciális örvényesség szabad felszíni mozgás híján ($\eta = 0$, merev lap közelítés)

$$q = \frac{f_0 + \zeta + \beta y}{H - d} H \approx f_0 + \zeta + \beta y + Af_0 \cos kx, \quad (3.49)$$

ahol az átalakításban felhasználtuk, hogy a kvázigeosztrofikus tartományban dolgozunk, hiszen a $(\zeta + \beta y)d/H$ másodrendűen kis tagot elhanyagoltuk.



3.12 ábra: A domborzat által keltett stacionárius Rossby-hullámok amplitudója U sebességű háttéráramlásban a domborzat k hullámszámának függvényében. A szaggatott vonallal jelölt legömbölyödés a viszkozitás következménye. A $k_c = \sqrt{\beta/U}$ kritikus hullámszám több ezer km-es domborzati hullámhossznak felel meg a légkörben.

Kis amplitudójú hullámokat keresünk az $u_0 = U, v_0 = 0$ zonális háttéráramlásban. Jelölje a háttéráramlástól való eltérést az \mathbf{u}' vektor ($|u'|, |v'| \ll |U|$), melyhez a ψ' áramlási függvény tartozik. A teljes áramlási függvény ekkor $\psi = -Uy + \psi'$. A potenciális örvényesség (2.22)

megmaradásának felírásakor felhasználjuk, hogy $u = U + u'$, $v = v'$. Figyelembe véve, hogy $v\partial(\beta y)/\partial y = \beta v$ és $u'\partial\zeta/\partial x$ és $v'\partial\zeta/\partial y$ másodrendűen kicsiny:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\frac{Uf_0}{H}\frac{d}{dx}d(x). \quad (3.50)$$

Az örvényesség kifejezhető az áramlási függvénnyel: $\zeta = \Delta\psi$, de mivel a homogén háttéráramlás örvénymentes $\Delta\psi = \Delta\psi'$. Így a megmaradási törvény egyenletet jelent az eltérést leíró ψ' áramlási függvényre:

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + U\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\frac{Uf_0}{H}\frac{d}{dx}d(x). \quad (3.51)$$

A csak az x koordinátától függő stacionárius áramlás feltétele a (3.48) domborzati függvény behelyettesítése után

$$U\frac{d^3\psi'}{dx^3} + \beta\frac{d\psi'}{dx} = AUf_0k \sin(kx). \quad (3.52)$$

A megoldást a $\psi' = \psi_0 \cos kx$ alakban keresve, ahol k a (3.48) hegyvonulat hullámszáma, azt kapjuk, hogy

$$\psi_0 = f_0A\frac{U}{Uk^2 - \beta} = \frac{f_0A}{k^2 - k_c^2}. \quad (3.53)$$

Itt $k_c = \sqrt{\beta/U}$ a planetáris Rossby-hullám stacionaritásához szükséges kritikus hullámszám (l. (3.40)).

A hullám tehát lehet stacionárius, s amplitudója annál nagyobb minél közelebb van a hegységrendszer hullámszáma a kritikus értékhez. A $k \rightarrow k_c$ esetben rezonancia lép fel, a hullámamplitudó formálisan végtelenné válhat³.

A (3.52) egyenlet a

$$\frac{d\psi'}{dx} \rightarrow x \quad x \rightarrow t \quad \frac{\beta}{U} \rightarrow \omega^2 \quad (3.54)$$

megfeleltetéssel, ahol x az ω sajátfrekvenciájú oszcillátor kitérése és t a mozgás ideje, ekvivalenssé válik az $Af_0k \sin(kt)$ gyorsulással gerjesztett harmonikus oszcillátor egyenletével. A rezonancia annak következtében alakul ki, hogy a k_c hullámszámú perturbáció a domborzat jelenléte nélkül is stacionárius lenne, melyet az ugyanilyen hullámszámú (az analógiában frekvenciájú) gerjesztés nagy energia felvételére tesz alkalmassá.

Ha a hullámszám nagyobb k_c -nál, az amplitudó pozitív, s az áramlás fázisban van a hegyvel: a sarok felé irányuló sebességmaximumok a hegycsúcsokon figyelhetők meg. Hosszú hullámok ($k < k_c$) esetén azonban fordított a helyzet, az áramlás és a hegyvonulat antifázisban van: a hegycsúcsokhoz Egyenlítő irányú maximális sebesség tartozik⁴.

A mérsékeltövi időjárás szempontjából legfontosabb légköri Rossby-hullámot gerjesztő hegységek a Sziklás hegység, a Himalája, ill. az Andok és a Kelet-Afrikai-hegység. Tipikus keletnyugati hullámhosszaik 500 – 2000 km. Ezek nem esnek a rezonancia-feltétel közvetlen közelébe, de a hosszabbaknál már érvényesül az amplitudók erősödése.

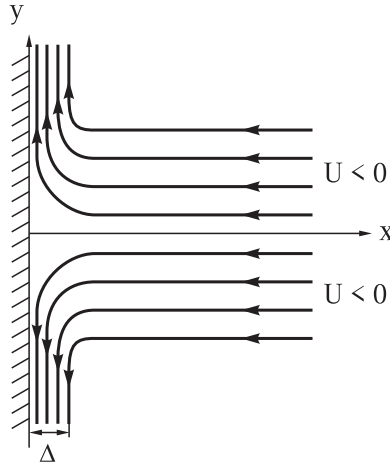
3.10 Partra merőleges áramlások, nyugati peremáramlatok

Tekintsük egy nagy óceáni medence nyugati partvonala körüli tartományt. Modellünkben a partvonal legyen az $x = 0$ egyenes, koordinátarendszerünk y tengelye (3.13 ábra). Vizsgáljunk

³Természetesen ekkor már lényeges a visszahatás is, és U állandósága nem jogos feltevés.

⁴Az amplitudót a viszkozitás végezzé teszi még a rezonancia-hullámszámon is (l. 11.4 fejezet).

először egy part felé irányuló kelet-nyugati áramlatot, melynek sebessége nagy távolságban U , s $U/\beta < 0$. Keressük, hogyan térül el az áramlás észak-déli irányban a parthoz közeledve. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a felszín változásai elhanyagolhatók.



3.13 ábra: Nyugati óceáni partnak futó U sebességű áramlás által keltett erős peremáramlat az északi féltekén. A tehetetlenségi határreteg vastagsága $\Delta = \sqrt{-U/\beta}$.

Geosztrofikus egyensúlyban az áramlásnak az $y = \text{konstans}$ vonalakat kellene követnie, de a peremfeltétel miatt azokon zérus sebesség alakulhat csak ki. A β -hatás lehetővé tesz egy nemtriviális viselkedést, mely szerint a folyadék, amíg csak lehet, az $y = \text{konstans}$ vonalak mentén halad, s utána hirtelen egy Δ vastagságú sávban elkanyarodik (egy keletről jövő áramlás ezt megteheti). A Δ vastagság egyszerűen becsülhető a megmaradási tétel alapján. Az elkanyarodási pont körüli Δ oldalhosszúságú négyzetben az örvényesség nagyságrendje U/Δ , ezért a potenciális örvényesség ott $q = U/\Delta + f_0 + \beta\Delta$. Ennek meg kell egyeznie a távoli beáramlás során felvett értékkel. Ez minden y -ra $q = f_0$, hiszen a homogén áramlás örvénymentes. Ebből a karakterisztikus vastagság

$$\Delta \equiv \sqrt{\frac{-U}{\beta}}. \quad (3.55)$$

A nyugati partvonal mentén tehát egy erős áramlás (nyugati peremáramlat) alakul ki egy véges Δ vastagságú rétegben, melyet *tehetetlenségi* (azaz nem viszkózus) határretegnek is szokás nevezni (3.13 ábra).

Ugyanezt az eredményt kaphatjuk annak a képnek felhasználásával is, hogy a nyugati peremen a rövid hullámhosszú Rossby-hullám okozta zavarok felhalmozódnak. A háttéráramlásban a Rossby-hullám (3.38) csoportsebességéhez hozzáadódik az U sebesség is, így

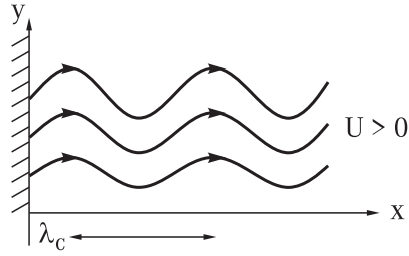
$$c^* = U + \frac{\beta}{k_x^2}. \quad (3.56)$$

Azokra a hullámszámokra, melyek energiája nem szakadhat el a parttól, $c^* < 0$, s ezek hullám-száma éppen a $k_x > \Delta^{-1}$ feltételt elégítik ki.

A határreteg vastagsága a Δ paraméter néhányszorosa. Az óceáni körök nyugatra irányuló sebességét $U \approx 0,01$ m/s-ra becsülve, $\Delta \approx 30$ km. Az óceáni medencék nyugati peremén valóban erős áramlások figyelhetők meg a β -hatás következményeként. Ilyenek a Golf-áramlat, a Japán partjai előtt futó Kuroshio-áramlat, a Brazíliai áram, a Madagaszkár és Afrika közötti Agulhas-áram, és a Kelet-ausztráliai áram. Ezek vastagsága néhányszor tíz km, mely jól megfelel a fenti Δ értéknek. A nagy óceáni körök tehát *nem középpontosak*, áramlási sebességük a

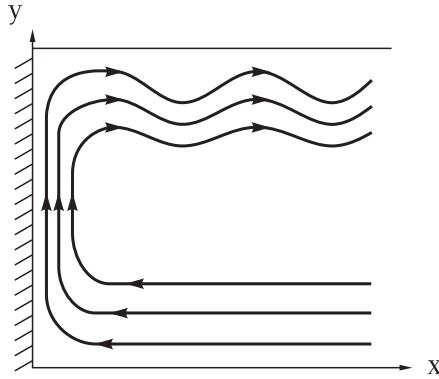
nyugati peremen jóval nagyobb mint a keletin, ahol a sebesség akár a nyugati ezredrészére is lecsökkenhet.

Vizsgáljuk most meg röviden, mi történik, ha az áramlás a parttól elfelé irányul, azaz $U/\beta > 0$. Ekkor a Δ paraméter formálisan imaginárius lesz, $\Delta = i\sqrt{U/\beta} = i/k_c = i\lambda_c/(2\pi)$, ahol λ_c a (3.41) kritikus hullámhossz. A térbeli viselkedés most nem exponenciális lecsengés, hanem szinuszos hullámozás, mely egyfajta stacionárius Rossby-hullámmal analóg. Ez azt jelenti, hogy a falra merőlegesen meanderező áramlás alakul ki (3.14 ábra), melynek átlagos zonális sebessége U . Úgy tűnik tehát, hogy a peremfeltétel hasonlóan viselkedik mint egy akadály: nyugat-keleti áramlásban a peremtől keletre hullámok keletkeznek.



3.14 ábra: Az óceán nyugati partvonalától U átlagsebességgel eltartó áramlás az északi féltekén. A hullámhossz $\lambda_c = 2\pi\sqrt{U/\beta}$.

Végül a fentiek alapján felvázolható, hogy milyen az áramlás jellege egy észak-déli irányban zárt medencében, ahol az Egyenlítőhöz közeli peremen az áramlás a nyugati part felé mutat. A sarok felé történő áramlás a part melletti Δ vastagságú tartományban történik, erős nyugati peremáramlat alakul ki, mely a sarokhoz közelebbi perem miatt a parttól elkanyarodik, s ott meanderező mozgásba kezd (3.15 ábra).



3.15 ábra: Zárt óceáni medencében kialakuló áramlás sematikus rajza a nyugati partvonal körül az északi féltekén.

3.11 A kvázigeosztrofikus egyenlet a β -síkon

A felszíni és domborzati η , ill. d alakok kicsinységét feltételezve, a potenciális örvényesség

$$q = \frac{f + \zeta}{H(1 + \eta/H - d/H)} H \approx \left(f_0 + \zeta + \beta y - \frac{f_0 \eta}{H} + \frac{f_0 d}{H} \right). \quad (3.57)$$

Mivel a felszíni alak vezető rendben arányos az áramlási függvénnyel (l. (2.25)) $\psi = \eta g/(2\Omega)$, a megmaradási törvény a fenti q -ra a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - R^{-2} \psi + f_0 \frac{d}{H} \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (3.58)$$

alakot ölti. Ez a β -síkon érvényes kvázigeosztrofikus egyenlet. A 2.7 fejezetbeli alakhoz képest itt megjelenik a β -hatást kifejező utolsó tag, mely lineáris az ismeretlen áramlási függvényben.

A (3.35) diszperziós relációjú planetáris Rossby-hullám a fenti kvázigeosztrofikus egyenlet vízszintes aljzathoz ($d = 0$) tartozó változatának harmonikus síkhullám alakú (de nem feltétlenül kis amplitudójú) megoldása.

A kvázigeosztrofikus közelítés érvényességi köre a dimenziótlanított alak felírásából olvasható le. A potenciális örvényesség U/L egységekben

$$q = \left(\frac{1}{Ro} \left(1 - \frac{\eta}{H} + \frac{d}{H} \right) + \zeta + \frac{\beta L^2}{U} y \right) \quad (3.59)$$

alakú. A két utolsó tag akkor összemérhető, ha a $\beta L^2/U = \pm Be/Ro$ dimenziótlan szám is egységnyi, ahol Be a (3.18) dimenziótlan β -paraméter. A (3.18) összefüggés alapján ez azt jelenti, hogy

$$\frac{L}{R_F} \sim Ro, \quad (3.60)$$

azaz a vizsgált tartomány lineáris méretének nemcsak egyszerűen kicsinek kell lennie a Föld sugarához képest, hanem a konzisztencia azt követeli meg, hogy a méret a Föld sugár Rossby-számszorosa nagyságrendjébe essék. $Ro \approx 0.1$ mellett így is több száz km-es tartományok vizsgálhatók. Ahhoz, hogy a többi változó is azonos rendű legyen, (3.59)-ben teljesülnie kell annak is, hogy $d, \eta \sim Ro \cdot H$, amint azt már a (2.7) fejezetben láttuk.

A dimenziótlan kvázigeosztrofikus egyenlet így

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - \left(\frac{Fr}{Ro} \right)^2 \psi + \frac{d}{Ro} \right) + \frac{Be}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (3.61)$$

Két kvázigeosztrofikus áramlás akkor lehet hasonló, ha Froude-számuk, domborzatuk, és β -paraméterük Rossby-számhoz viszonyított nagysága is azonos.

4. fejezet

A viszkozitás hatása

Surlódó sekély folyadékban a viszkozus erőnek a Coriolis-erőhöz való viszonyát az

$$Ek = \frac{\nu}{|f_0|H^2} \left(= \frac{\nu}{2|\Omega|H^2} \right)$$

Ekman-szám méri. Két áramlás akkor lehet dinamikailag hasonló, ha Ekman-számuk is megegyezik. A ν kinematikai viszkozitás helyett környezeti áramlásokban a jóval nagyobb ν_{turb} turbulens viszkozitás használandó, de az Ekman-szám még ezzel is kicsinek, $10^{-3} - 10^{-5}$ körülnek adódik. Ez is mutatja, hogy a viszkozitás a folyadék nagy részében elhanyagolható. A peremek körül létezik azonban egy keskeny határréteg, ahol a súrlódás lényeges szerepet játszik. A határréteg D vastagsága abból becsülhető meg, hogy ott a viszkozus és a Coriolis-erő összemérhető, ezért a D -re vonatkoztatott Ekman-szám egységnyi, amiből $D \sim H\sqrt{Ek} \sim \sqrt{\nu/|f_0|}$. A forgatott rendszerekben kialakuló Ekman-féle határréteg állandó vastagságú (4.1 ábra), szemben a nem forgatott rendszerben kialakulóval, mely az áramlás irányában egyre nagyobb kiterjedésűvé válik. D számértéke a mérsékelt égövi tengerekre 40 – 50 m, a légkörben kb 1 km.

A gyorsan forgatott esetben a határrétegben stacionárius áramlás alakul ki, melyet a viszkozus, a nyomási és a Coriolis-erő egyensúlya biztosít (4.2 ábra). Ennek következtében a határrétegbeli áramlás nem izobárok mentén történik, s érdekes módon függ a magasságtól.

Az alsó határrétegben a sebességnek az alsó peremen el kell tűnnie. Onnét felfelé haladva a sebesség nő a folyadék belsejében kialakult geosztrofikus sebesség eléréséig, a határréteg felső pereméig. A Coriolis-erő jelenléte miatt azonban az erők nem esnek egy egyenesbe, s ezért felfelé haladáskor a viszkozus erő csökkenésével a sebességnek el kell fordulnia. A sebesség az ún. Ekman-spirált (4.3 ábra) követve változik, mely az északi féltéken eleinte jobbra történő elfordulást jelent. A felszín közeli szelek ezen jobbrafordulása a magassággal a meteorológiában közismert.

A határréteg belsejében az áramlás nem síkbeli, hanem lassú fel- vagy leáramlással társul (4.5 ábra). A határréteg peremén ennek az Ekman-pumpálásnak az erőssége a geosztrofikus örvényességgel és a határréteg vastagságával arányos. A ciklonális örvényesség feláramlással párosul, az anticiklonális pedig leáramlással. A ciklonok, anticiklonok függőleges irányú áramlásai tehát az Ekman-pumpálás megnyilvánulásai. Irányuk összhangban van a hétköznapi meteorológiai tapasztalattal, hiszen a feláramlás rendszerint csapadékképződéssel, a leáramlás pedig száraz időjárással párosul.

A fel-, vagy leáramlások a folyadék belsejében síkbeli összefolyást, ill. szétterülést eredményeznek (4.4 ábra). Ennek következménye a 1., 1.11 és 1.12 ábrák áramlásainak spirális szerkezete. A vízszintes síkbeli áramlásra azonban hat a Coriolis-erő, s éppen olyan irányban, hogy a geosztrofikus örvényességet csökkenti. Az Ekman-pumpálás tehát az örvényesség csillapításával is jár. Ennek $t_0 \sim 1/\sqrt{Ek}$ relaxációs ideje a légkörben néhány nap, az óceánban ennél sokkal több, de mindig jóval rövidebb a viszkozitásból adódó hagyományos csillapítási időnél. Ennek következtében

a potenciális örvényesség nem állandó a mozgás során, hanem időben lassan csökken. A planetáris Rossby-hullámok ezért véges élettartamúak, átlagos idejük éppen t_0 . Ez a légkörben néhány nap, és valóban az időjárás átlagos változási idejének felel meg. Ugyanez a jelenség biztosítja a gerjesztett planetáris hullámok amplitudójának véges értéken maradását a rezonancia körül (3.12 ábra).

A felső határréteg felszínén rendszerint nem fal helyezkedik el, hanem ott egy külső közeg által keltett τ nyírási feszültség hat. A szélnyírás tipikus erőssége a vizek felszínén néhány tized N/m^2 . Az ennek hatására kialakuló felszíni sebesség-növekmény a Coriolis-erő következtében azonban nem párhuzamos a nyírással, hanem azzal 45 fokos szöget zár be. A határrétegben lefelé haladva a sebesség-növekmény spirál alakban elfordulva csökken (4.6, 4.7 ábra), s tart zérushoz a folyadék geosztrofikus belső tartományának elérésekor, azaz a határréteg alsó határán.

Az átlagos sebességnövekmény, vagy annak a határréteg vastagságával vett szorzata, az ún. Ekman-transzport, pontosan merőleges a nyírási erőre és attól az északi féltekén jobbra mutat (4.8 ábra). A Coriolis-erő csak így képes a nyírási erő kompenzálására a határréteg átlagában. Ez arra a meglepő eredményre vezet, hogy a szelek nyírási irányukra merőleges többletáramlást hoznak létre a felső határrétegben. A gyorsan forgatott rendszerben a folyadék nem arra áramlik, amelyre a szél fújja. Ez magyarázza Nansennek, az Északi-sark kutatójának megfigyelését, miszerint a jéghegyek mindig a szelektől jobbra sodródnak.

A nyírás erősségének ill. az Ekman-transzportnak dimenziótlan mérőszáma az

$$Sh \equiv \frac{\tau_0}{f_0 \rho_0 UH}$$

nyírási paraméter, ahol τ_0 a nyírás dimenziós átlagértéke. Az Sh paraméter tipikus értéke 10^{-3} . A szélnyírásnak kitett áramlások hasonlóságának szükséges feltétele az Sh paraméterek azonossága.

Az Ekman-transzport rendszerint fel- vagy leáramlást is okoz (4.9 ábra), melynek erőssége igen csekély (a tengerben néhány dm/nap) de nagy fontosságú. Feláramlás esetén ugyanis friss, tápanyagban gazdag hideg víz kerül a felszínre, mely a halászat eredményessége szempontjából döntő. Ilyen felszálló partmenti vizek általában az óceánok keleti partjai mentén alakulnak ki a szubtrópusi övben (4.10 ábra), vagyis ott, ahol a szélnek van jelentős parttal párhuzamos komponense. A Föld teljes halászatának mintegy fele a feláramlási területekre koncentrálódik.

Az északi féltekén negatív körülférésű, anticiklonális nyíráseloszlás a centrum felé mutató Ekman-transzportot és ezzel leáramlást hoz létre (4.12 ábra). Általánosan a nyírási erő rotációja arányos a felső határréteg alján kialakuló feláramlási sebességgel, s ez örvényesség-változást okoz.

Ez a kép lehetőséget ad a zárt óceáni medencékben a szél és a viszkozitás hatására kialakuló áramlások értelmezésére, melyek jó közelítéssel geosztrofikus egyensúlyban vannak. Ha a nyugati szél az északi peremen, a keleti pedig a délin veszi fel maximális erősségét, akkor a nyírás-eloszlás rotációja a medencében negatív (4.11 ábra), így leáramlást okoz. A Sverdrup-összefüggés értelmében ehhez mindenütt délre mutató gyenge áramlásnak kell tartoznia. A délre irányuló áramlást azonban a kontinuitás miatt valahol egy északra mutató áramlásnak kell kompenzálnia. Erre csak a medence nyugati peremén kerülhet sor, egy igen keskeny sávban (4.13 ábra). A nagy anticiklonális óceáni körök ezek szerint egyáltalán nem centrálisak, hanem 'középpontjuk' a nyugati perem közelébe esik. Fölöttük és alattuk általában kialakul még egy-egy ciklonális forgású kör is: a poláris és az egyenlítői körök (4.14 ábra). Ez a megközelítés a valóságos szél-nyírási feszültségek figyelembevételével hűen megadja az óceánok felszíni áramlási rendszerét és kijelöli a nagy nyugati peremáramlatok helyét (4.15 ábra).

A peremáramlatok vastagságára is jó leírást kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy az alsó határrétegnek is szerepe van, méghozzá ott, ahol a geosztrofikus örvényesség a legnagyobb, vagyis a hirtelen elkanyarodást megkövetelő nyugati peremen. Ez a jelentős geosztrofikus örvényesség a függőleges irányú áramlás előjelét pozitívvá változtatja, s így a Sverdrup-reláció következtében egy

északra mutató geosztrofikus komponens jön létre (11.2 ábra). A Stommel nevéhez fűződő elmélet helyes nagyságrendi becslést ad a Golf- és a többi nyugati peremáramlat vastagságára.

A szélnyírás fontos szerepet játszik a kisebb skálájú és ezért már nem geosztrofikus jelenségekben is. Egyik fontos következménye az állandó viharos szél hatására kialakuló part menti vízszintemelkedés, a viharhullám, mely a Coriolis-erő által a part felé szállított folyadék felhalmozódása (11.4 ábra) egy Rossby-sugárral arányos vastagságú partmenti sávban. Állandó szélerősség egyenletes vízszintemelkedést okoz, melynek sebessége a parton óránként több dm is lehet.

4.1 Az Ekman-szám

A viszkózus gyorsulás tetszőleges összenyomhatatlan folyadékban a (1.23) Navier–Stokes-egyenlet szerint

$$\nu \Delta \mathbf{v} \equiv \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}. \quad (4.1)$$

Az x és y szerinti deriváltak az L lineáris méret reciprokával arányosak, a z szerinti pedig a H mélység reciprokával. Ezért az első két tag $\varepsilon^2 \equiv (H/L)^2$ -szerese a harmadiknak, és sekély közegben elhanyagolható. Így sekély folyadékban

$$\nu \Delta \mathbf{v} \approx \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}. \quad (4.2)$$

A forgó Föld felszínén elhelyezkedő sekély forgatott folyadékban az \mathbf{u} vízszintes síkbeli sebesség Navier–Stokes-egyenlete¹ ezért

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad}p' + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}, \quad (4.3)$$

ahol \mathbf{n} a függőleges z irányú egységvektor². A viszkozitás miatt \mathbf{u} függhet a magasságtól, ezért d/dt a háromdimenziós teljes derivált. A függőleges sebességkomponens a

$$\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

divergenciamentességi feltételből kapható.

Érdemes felírni a dimenziótlan alakot is. Az áttekinthetőség kedvéért f helyfüggését elhanyagolva: $f \equiv f_0$, a $z \rightarrow Hz$ és (1.30) helyettesítéssel a

$$Ro \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mp \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \text{grad}p' + Ek \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \quad (4.5)$$

dimenziótlan egyenlethez jutunk. Ebben megjelent az

$$Ek = \frac{\nu}{|f_0|H^2} \quad (4.6)$$

Ekman-szám (V. W. Ekman (1874-1954) svéd oceanográfus, a forgatott folyadékbeli viszkozitás hatásának első leírója). Vegyük észre, hogy ez a szám független az áramlási sebességtől. Két viszkózus áramlás akkor lehet hasonló, ha Ekman-számuk is megegyezik.

¹A továbbiakban mindig a lokális rendszerben érvényes f planetáris örvényességet használjuk, mely tartalmazza a β -sík közelítésben megengedett lineáris y -függést. A laboratóriumi kísérletekre vonatkozó eredmények az $f \rightarrow 2\Omega = \text{konstans}$ helyettesítéssel kaphatók.

²Mivel függőleges irányban a sekélység miatt hidrosztatikai viszonyok érvényesülnek, a p' dinamikai nyomás kapcsolatban áll a szabad felszín η alakjával: $p' = \rho_0 g \eta$.

Ez az új dimenziótlan szám a viszkozitás és a forgatás egymáshoz képesti erősségét méri. Mivel a viszkózus $\nu \Delta \mathbf{v}$ gyorsulás nagyságrendje $\nu U/H^2$, s az ennek megfelelő relaxációs idő $t_\nu = H^2/\nu$, azt is írhatjuk, hogy

$$Ek = \frac{\text{viszkózus gyorsulás}}{\text{Coriolis-gyorsulás}} = \frac{\text{forgási idő}}{\text{viszkózus relaxációs idő}}. \quad (4.7)$$

Gyorsan forgatott rendszerben az Ekman-szám sokkal kisebb mint 1.

Az Ekman-szám kapcsolatos az (1.28)-ban definiált Reynolds-számmal. Mind Re , mind Ro a vízszintes kiterjedést tartalmazza, ezért a keresett kapcsolatban megjelenik az ε mélységi arány is:

$$Ek = \frac{Ro}{Re} \varepsilon^{-2}. \quad (4.8)$$

A 1.1 táblázatban láttuk, hogy nagyskalájú környezeti áramlásokban a Reynolds-szám rendkívül nagy, 10^{11} nagyságrendű. A mélységi arányt $\varepsilon = 1/100$ -nak véve, és felhasználva, hogy a Rossby-szám 0, 1 körüli, az Ekman-szám értékét 10^{-8} - 10^{-9} -nek becsülhetjük. Egy tipikus vízzel végzett laboratóriumi kísérletben ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) percenkénti 10 körülfordulással $\Omega \approx 1 \text{ 1/s}$ és 3-30 cm-es vízmélységgel számolva $Ek = \nu/(2\Omega H^2) = 5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-6}$.

Abban a tartományban, az ún határrétegben (l. következő fejezet), ahol a viszkozitás lényeges szerepet játszik, a környezeti áramlások rendszerint *turbulensek*, s kis távolságokon nagymértékű térbeli és időbeli rendezetlenséget mutatnak. A turbulens mozgás jelentősen megnöveli a nagyobb távolságokon érzékelhető effektív viszkozitás mértékét, mely egy ν_{turb} turbulens viszkozitási (eddy viscosity) együttható megjelenéséhez vezet (l. 7.2 fejezet). Ezért az Ekman-számban és minden más kifejezésben, ahol a kinematikai viszkozitás szerepel, el kell végezni a

$$\nu \rightarrow \nu_{turb} \quad (4.9)$$

helyettesítést. Annak ellenére, hogy a turbulens viszkozitási együttható számértéke rendszerint függ az áramlás jellegétől és a peremtől mért távolságtól is, jó tájékozódásul szolgál átlagos értéke. Ez levegőben $\nu_{turb} = 5 \text{ m}^2/\text{s}$ és vízben $\nu_{turb} = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$, azaz mintegy száz-, ill., tízezerszer nagyobbak molekuláris értékeiknél. Az így számolt Ekman-szám közepes szélességeken ($f_0 = 10^{-4} \text{ 1/s}$) a 10 km vastagságú légrétegre $Ek = 5 \cdot 10^{-4}$, a 4 km átlagos mélységű óceánra pedig $Ek = 6 \cdot 10^{-6}$. Ez éppen az a nagyságrend, ami laboratóriumban is elérhető. Az egyezés biztosítja, hogy a nagyskalájú jelenségek a viszkozitás szempontjából is jól modellezhetők kísérletekkel.

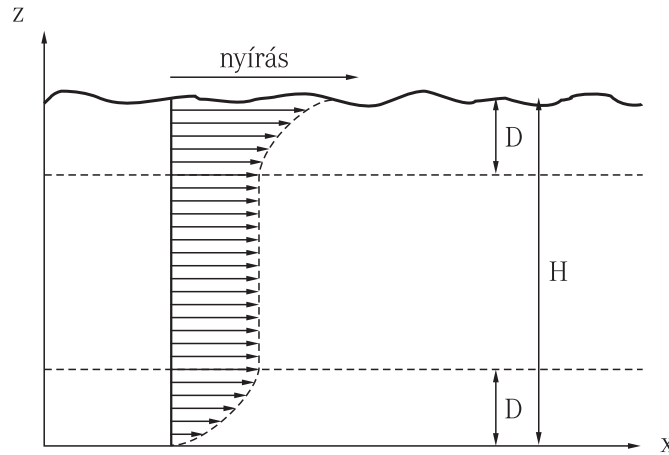
4.2 Az Ekman-féle határréteg

4.2.1 Szemléletes kép

Az Ekman-szám kicsinysége azt jelenti, hogy a viszkozitási erő a folyadék-tartomány igen nagy részében elhanyagolható a többi erőhöz képest, ahogy ezt eddig ki is használtuk. Ez az elhanyagolás azonban mindenütt nem lehet jogos, hiszen akkor a peremfeltételek nem elégíthetők ki. Ezért léteznie kell egy *határrétegnek*, melyben a viszkózus erő ugyanolyan lényeges szerepet játszik mint a többi. Gyenge viszkozitás esetén a határréteg keskeny, s a folyadék döntő része ideálisként viselkedik. A forgatott folyadékban a határréteg annál keskenyebb, minél kisebb az Ekman-szám (4.1 ábra).

A határréteg D vastagsága egyszerű gondolatmenettel megbecsülhető. Ebben a tartományban ugyanis az $|f_0|U$ rendű Coriolis-gyorsulás a fentiek szerint összemérhető a viszkózus gyorsulással, melynek nagyságrendje a D vastagságú határrétegben $\nu U/D^2$. Ebből

$$D = C \sqrt{\frac{\nu}{|f_0|}}, \quad (4.10)$$



4.1 ábra: A forgatott folyadékbeli Ekman-féle alsó és felső határréteg, és a bennük kialakuló sebességeloszlás sematikus képe. A felszínen nyíróerő hat és a folyadék belsejében véges sebességű áramlás van jelen. D az Ekman-réteg vastagsága.

ahol C dimenziótlan állandó. Bár határréteg kialakul mind hagyományos, mind forgatott folyadékokban, az utóbbi eset fontos új tulajdonsága, hogy D nem függ a helytől. A nem forgatott esetben a határréteg az áramlás irányában vastagodik, vagy időben nő. Ez összhangban van azzal a ténnyel, hogy az $f_0 \rightarrow 0$ határesetben D végtelenhez tart, azaz az átlagos vastagság értelmét veszti. Az f_0 planetáris örvényesség helyfüggését is figyelembe véve, a határréteg az Egyenlítő felé vastagodik. Annak közvetlen közelében azonban Ekman-féle határréteg nem alakulhat ki, hiszen ott a forgatás hatása elenyésző.

A határréteg dimenziótlan, azaz H egységekben mért vastagsága

$$\frac{D}{H} = C\sqrt{Ek}, \quad (4.11)$$

az Ekman-szám gyökével arányos. A határréteg tehát valóban sokkal keskenyebb a teljes folyadék-mélységnél.

A gyorsan forgatott esetben a C szám $\pi\sqrt{2} = 4,4$ -nek adódik (l. 5.3.1, 5.4.1 fejezetek). Így levegőben, ahol $\sqrt{Ek} \approx 2 \cdot 10^{-2}$ kb. 1 km vastagságú³. Ez a *planetáris* határréteg, a benne turbulensen kevert nagy por- és szennyezéstartalom miatt jól megfigyelhető repülőgép leszállása közben. Tengervízben $\sqrt{Ek} \approx 2 \cdot 10^{-3}$, ezért a turbulens határréteg, melyet Ekman-rétegnek is neveznek, mintegy 40 m vastagságú⁴. A fent említett laboratóriumi kísérletben $\sqrt{Ek} \approx 7 \cdot 10^{-3}$, s ezért a határréteg vastagsága 3 mm.

4.2.2 A gyorsan forgatott határeset

A forgatott sekély folyadék határrétegében érvényes (4.5) egyenletben a gyors forgatás a $Ro \approx 0$ határesetnek felel meg, miközben az Ek Ekman-szám véges és kicsi. Feltételezve, hogy a dimenziótlan gyorsulások egységnyi rendűek, a bal oldal eltűnik. Az (4.3) dimenziós alakban ez azt jelenti, hogy

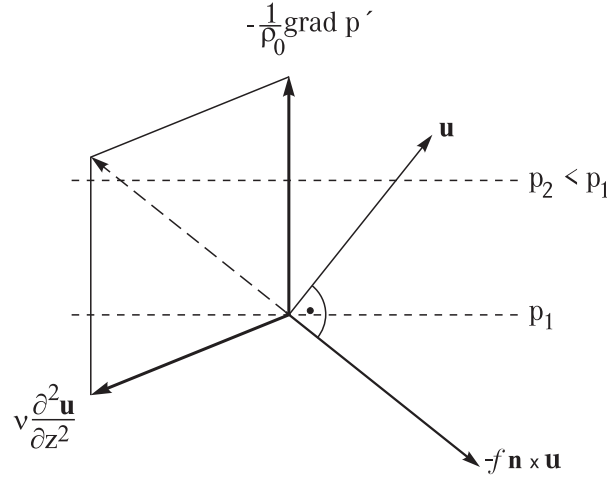
$$-f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad}p' + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0. \quad (4.12)$$

A gyorsan forgatott folyadék határrétegében tehát *stacionárius áramlás* alakul ki, melyben három erő: a viszkozus, a nyomási és a Coriolis-erő egyensúlyozza egymást, amint azt az 4.2 ábrán

³A turbulens helyett a kinematikai viszkozitással számolva 1 m-t kapnánk.

⁴A kinematikai viszkozitással 40 cm.

szemléltetjük. A helyzet hasonlít ahhoz, amit a geosztrofikus egyensúlyban láttunk, csak most a viszkózus erő is megjelenik, s ezért a sebességeloszlás alapvetően különbözik a geosztrofikustól.



4.2 ábra: A nyomási, a viszkózus és a Coriolis-erő egyensúlya az Ekman-féle határrétegekben a gyors forgatás határesetében. Az \mathbf{u} sebesség eltér a geosztrofikustól és van az izobárokra merőleges komponense is.

Ebből a feltételből már most leolvasható az Ekman-rétegbeli sebességeloszlás egy meglepő tulajdonsága. Ha távolodunk a peremtől, akkor a sebesség abszolútértéke nő, a viszkózus erő csökken, mint minden határrétegekben. Most azonban ezzel együtt a Coriolis-erő is nő. Az erők eredője csak úgy maradhat zérus, ha közben a Coriolis-erő iránya is változik. Az Ekman-rétegekben függőleges irányban haladva a sebesség irányának is változnia kell, azaz a sebesség vektor *elfordul*. Ez a magasságfüggő elfordulás csak a forgatott folyadékbeli határrétegek sajátja.

A határrétegen kívül a viszkozitás elhanyagolható, s a folyadék belsejében geosztrofikus áramlás alakul ki valamilyen \mathbf{u}_g sebességgel. Az ezt fenntartó dinamikai nyomás, mely a folyadék belsejében amúgyis független a magasságtól, a keskeny határrétegekbe *változatlanul* hatol be. Feltehetjük tehát, hogy az (4.12)-ben szereplő p' ugyanaz, mint a folyadék belsejében, s ezért kifejezhető az ottani sebességgel:

$$\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g. \quad (4.13)$$

A z -től független geosztrofikus áramláshoz tehát az

$$f \mathbf{n} \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) = \nu \frac{\partial^2 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g)}{\partial z^2} \quad (4.14)$$

egyenlet adja meg a határrétegekben létrejövő sebességeloszlást. Komponensekben

$$-f(v - v_g) = \nu \frac{\partial^2 (u - u_g)}{\partial z^2}, \quad f(u - u_g) = \nu \frac{\partial^2 (v - v_g)}{\partial z^2}. \quad (4.15)$$

Ez állandó együtthatós, homogén lineáris egyenlet, mely meghatározza a geosztrofikustól való *sebességeltérés* z -függését. A megoldás mindkét komponensét $\exp(\lambda z)$ alakban keresve azt kapjuk, hogy $\lambda^4 = -f^2/\nu^2$, melyből $\lambda = \pm(-1)^{1/4} \sqrt{|f|/\nu} = \pm\sqrt{|f|/2\nu}(1 \pm i) \equiv \pm(1 \pm i)/\delta$. Itt

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{|f|}}, \quad (4.16)$$

egy hosszúság jellegű paraméter, mely arányos a (4.10) becslésből kapott D -vel. Az általános megoldás ezért

$$u - u_g = e^{\pm z/\delta} \left(A \sin \frac{z}{\delta} + B \cos \frac{z}{\delta} \right) \quad (4.17)$$

típusú. Ehhez

$$v - v_g = \mp \frac{|f|}{f} e^{\pm z/\delta} \left(A \cos \frac{z}{\delta} - B \sin \frac{z}{\delta} \right) \quad (4.18)$$

tartozik, amint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk. Az A , B együtthatókat a peremfeltételek határozzák meg.

4.2.3 Peremfeltételek

Rögzített falak mellett a sűrűlódó folyadék felveszi a fal sebességét. Ezt szokás tapadási peremfeltételnek nevezni. A leggyakrabban előforduló álló fal esetén a sebesség zérus, tehát

$$\mathbf{v} = 0. \quad (4.19)$$

Más típusú a peremfeltétel, ha egy szabad felszínre adott nyíróerő hat. Ez nem a sebességet, hanem annak deriváltjait írja ott elő. Esetünkben ilyen helyzet a felső felszínen fordul elő, melyre, a felette fújó szél hat nyíróerővel. Tegyük fel, hogy ismert a vízszintes síkban elhelyezkedő egységnyi felületekre ható nyíróerő, a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírási vektor, melynek x és y irányú komponensei (τ_x, τ_y) , azaz $\boldsymbol{\tau} \equiv (\tau_x, \tau_y, 0)$.

Homogén izotróp összenyomhatatlan folyadékban a j normálisú egységnyi felületre ható nyíróerő l irányú komponense

$$\sigma_{j,l} = -p\delta_{j,l} + \nu\varrho_0 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right). \quad (4.20)$$

Ennek rögzített l irány mellett vett (j szerinti) divergenciája adja a $(-\text{grad}p + \nu\varrho_0\Delta\mathbf{v})$ felületi erőt az összenyomhatatlan folyadék (1.23) egyenletében⁵. A függőleges normálisú ($j = 3$) lapon vízszintes síkban megjelenő nyírás szokásos sebesség-jelölésünkkel tehát

$$\sigma_{3,l} = \nu\varrho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial z} \right), \quad (4.21)$$

ahol $l = 1$ az x , $l = 2$ az y komponensnek felel meg. A felületen ennek kell megegyeznie a külső $\boldsymbol{\tau}$ nyírási komponenssel.

Sekély folyadékban a helyzet tovább egyszerűsödik, ugyanis a zárójel első tagja jóval kisebb a másodikonál⁶. Ilyenkor tehát a függőleges irányú változások a legfontosabbak, s a peremen a

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \nu\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}} \quad (4.22)$$

összefüggésnek kell fennállnia.

A (4.2) közelítéssel elveszthetjük a lehetőséget arra, hogy a tapadási peremfeltételt függőleges síkbeli határokra előírjuk. Azt egy D -nél is keskenyebb oldalsó határréteg figyelembevételével tehetjük meg, ahol a teljes (4.1) érvényes. A (4.2) közelítés tehát az oldalsó peremeken az ideális folyadék határfeltétellel (\mathbf{u} peremre merőleges komponense = 0) konzisztens.

⁵A divergenciamentességi feltétel miatt a $\partial v_j/\partial x_l$ -lel arányos tag eltűnik. Összenyomható közegben ez a tag járulékot ad a viszkózus erő $\bar{\lambda} \text{graddiv}\mathbf{v}$ alakú részéhez (l. 1.16). Ugyanílyen típusú járulékok adódnak abból is, hogy ekkor a $\sigma_{j,j}$ diagonális nyíróerőkben (4.20) mellett megjelenik egy $\text{div}\mathbf{v}$ -vel arányos tag.

⁶Arányuk ε^2 rendű.

4.3 Az alsó határréteg

4.3.1 A sebességeloszlás

Tekintsünk egy vízszintes, nem mozgó aljzat fölött elhelyezkedő határréteget. Az $z = 0$ szinten elhelyezkedő aljzattól mért magasság függvényében keressük a sebességeket. A vízszintes komponensekre a $z = 0$ szinten a (4.19) peremfeltétel értelmében $\mathbf{u} = 0$. Ugyanakkor a folyadék belsejében a geosztrofikus áramlást kell visszakapnunk, tehát $z \rightarrow \infty$ mellett $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_g$.

A geosztrofikus áramlástól való eltérést megadó (4.17), (4.18) megoldásban a z -ben exponenciálisan növekvő viselkedést (a kitevőbeli felső előjelet) az $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_g$ peremfeltétel miatt ki kell zárnunk. A tapadási peremfeltételt $z = 0$ -ra kielégítő $u = 0$ megoldáshoz (4.17) alapján $B = -u_g$ tartozik. Ugyanakkor $v = 0$ miatt (4.18)-ból $A = -v_g f / |f|$. Ezzel

$$u = u_g - e^{-z/\delta} (u_g \cos \frac{z}{\delta} \pm v_g \sin \frac{z}{\delta}), \quad v = v_g + e^{-z/\delta} (\pm u_g \sin \frac{z}{\delta} - v_g \cos \frac{z}{\delta}), \quad (4.23)$$

ahol az alsó előjel a déli féltekén érvényes megoldáshoz tartozik. Vektoriálisan

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g (1 - e^{-z/\delta} \cos \frac{z}{\delta}) \pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g e^{-z/\delta} \sin \frac{z}{\delta}. \quad (4.24)$$

Mindkét alak világosan mutatja, hogy a geosztrofikustól való eltérés jelentős, és iránybeli változásban is kifejeződik. Bármelyik félgömről van is szó, a határrétegbeli áramlási sebesség nem párhuzamos az izobárokkal, hanem az *alacsonyabb nyomás felé mutat*, hiszen $\pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g$ arányos $\text{grad} p'$ ellentettjével (l. (4.13)).

Nyugatról érkező geosztrofikus áramlás esetén $u_g \equiv u_0, v_g = 0$, s a sebességeloszlás

$$u = u_0 (1 - e^{-z/\delta} \cos \frac{z}{\delta}), \quad v = \pm u_0 e^{-z/\delta} \sin \frac{z}{\delta}. \quad (4.25)$$

A határrétegben tehát észak-déli áramlás is kialakul.

A határréteg alján, $z \ll \delta$ -ra, a (4.24) összefüggés szerint a sebesség lineárisan tűnik el a magassággal:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_g \pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g) \frac{z}{\delta} = (u_g \mp v_g, v_g \pm u_g) \frac{z}{\delta}. \quad (4.26)$$

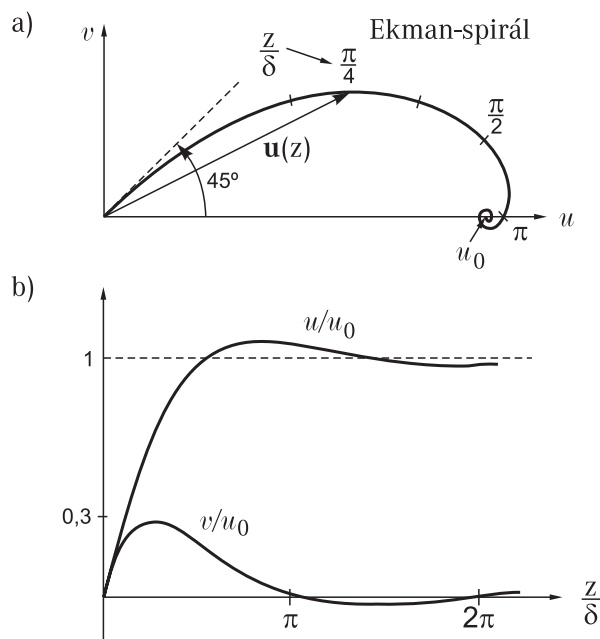
Ebből az is látszik, hogy a sebesség a geosztrofikushoz képest 45° *fokos szöget* zárva jelenik meg. Az északi féltekén (felső előjel) a geosztrofikustól balra mutat. Feljebb haladva a sebesség nagysága nő, és a geosztrofikusra merőleges komponens is erősödik. Egy maximum elérése után ez a komponens csökkenni kezd, s végül nullához tart (4.3 ábra). A sebességvektor iránya az emelkedéssel a geosztrofikus felé fordul, kicsit túllendül \mathbf{u}_g irányán, majd visszafordulva éri azt el. A sebességvektornak ezt a magassággal való viselkedését nevezzük Ekman-spirálnak.

Az ábráról leolvasható, hogy a $z = \pi\delta$ magasságban a geosztrofikus áramlás gyakorlatilag helyreállt (hiszen $\exp(-\pi) = 0.04 \ll 1$), s ezért $\pi\delta$ azonosítható a határréteg vastagságával:

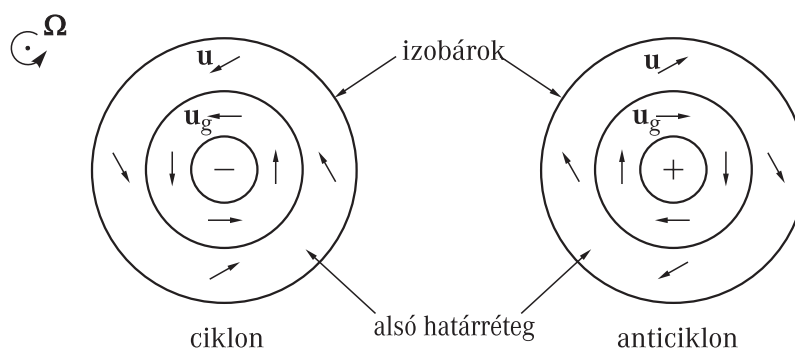
$$D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{|f|}} = \pi\delta. \quad (4.27)$$

Ezzel a (4.10) kvalitatív becslésben szereplő C együtthatót is meghatároztuk.

A felszín közeli szeleknek a magassággal való jobbra történő elfordulása jól ismert tény az északi féltekén, s nem más mint az Ekman-spirál egyik következménye. A felszíni megfigyeléseken alapuló bárikus széltörvény ezt úgy fejezi ki, hogy ha az északi (déli) féltekén háttal állunk a szélnek, akkor előbb forduljunk mintegy 30° foknyit az óramutató járásával megegyező (ellentétes) irányba, s akkor lesz a jobb (bal) oldalunkon a magas nyomású terület. Ennek egy másik megnyilvánulása az, hogy az anticiklonok alsó légrétegeiben szétáramlás, a ciklonokéban pedig összeáramlás is végbemegy, s így a ciklonok és anticiklonok légtömegei legalábbis részben kicserélődhetnek a planetáris határrétegben (4.4 ábra). A ciklonokkal társuló lassú középpont irányú mozgás alakítja ki az 1.11 ábrán látható jellegzetes spirális pályákat is.



4.3 ábra: Az alsó határrétegben az északi féltekén: a) A különböző magasságokban kialakuló \mathbf{u} sebességvektorok a folyadék belsejében uralkodó $u_g = u_0, v_g = 0$ geosztrofikus áramlás esetén. A spirál mellé írt számok a δ egységeiben mért magasságot mutatják. b) Az u és v sebességkomponensek magasságfüggése. A határrétegbeli sebesség a $z = D = \pi\delta$ szinten (a határréteg peremén) jó közelítéssel megegyezik a folyadék belsejében jelenlevő geosztrofikus sebességgel.



4.4 ábra: Szélsebesség irányok ciklonok és anticiklonok alsó légrétegeiben az északi féltekén.

4.3.2 Az Ekman-pumpálás

A felszín közeli szétterülés vagy összeáramlás világosan mutatja, hogy a határrétegben a kétdimenziós divergencia nem zérus, s ennek következtében fel-, vagy leáramlásoknak kell létrejönniük. Az Ekman-féle (4.24) megoldás alapján

$$\text{div} \mathbf{u} = \pm \text{div}(\mathbf{n} \times \mathbf{u}_g) e^{-z/\delta} \sin \frac{z}{\delta}, \quad (4.28)$$

hiszen \mathbf{u}_g divergenciamentes. Mivel az $\mathbf{n} \times \mathbf{u}_g$ vektor komponensei $-v_g$ és u_g , divergenciája nem más, mint a geosztrofikus áramlás

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \quad (4.29)$$

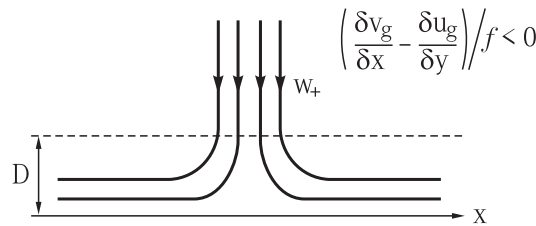
örvényességének ellentettje. A függőleges irányú sebességre a háromdimenziós összenyomhatatlanságból a

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\text{div} \mathbf{u} = \pm \zeta_g e^{-z/\delta} \sin \frac{z}{\delta} \quad (4.30)$$

egyenlet adódik. A határreteg felső peremén, a $z = D$ szinten tehát véges, w_+ nagyságú függőleges irányú sebesség van jelen. Ez behatol a geosztrofikus tartományba, tehát ott is lesz fel-, vagy leáramlás. Az exponenciális magasságfüggés miatt w_+ jó közelítéssel megegyezik a $z \rightarrow \infty$ -re kapott sebességgel. A legalsó szinten w -nek el kell tűnnie, ezért az egyenletet $z = 0$ -tól végtelenig integrálva a keresett sebességre

$$w_+ = \pm \frac{1}{2} \zeta_g \delta = \pm \frac{1}{2\pi} \zeta_g D \quad (4.31)$$

adódik (hiszen $\int_0^\infty \exp(-x) \sin x dx = 1/2$). A folyadék belsejében kialakult geosztrofikus örvénység tehát fel-, vagy leáramlást indít el a határretegben (4.5 ábra). Ezt a folyamatot Ekman-pumpálásnak nevezik. Intenzitása a határreteg vastagságával is arányos, s az Egyenlítő felé erősödik. Vegyük észre azt is, hogy a ciklonális örvénység feláramlással párosul: $w_+ > 0$, az anticiklonális leáramlással. Mindez összhangban van a hétköznapi meteorológiai tapasztalattal, hiszen a feláramlás rendszerint csapadékképződéssel, a leáramlás pedig száraz időjárással jár.



4.5 ábra: Az Ekman-pumpálás a határretegből a folyadék belsejébe irányuló függőleges áramlás, melynek erőssége a folyadék belsejében jelenlevő geosztrofikus áramlás örvényességével arányos. A feláramláshoz ciklonális, a leáramláshoz anticiklonális geosztrofikus mozgás tartozik.

Az UH/L egységekben mért feláramlási sebességre azt kapjuk, hogy

$$w_+ = \pm \zeta_g \sqrt{Ek/2}, \quad (4.32)$$

tehát az Ekman-szám gyökével arányos. Ennek megfelelően a függőleges sebességek a légkörben (ahol $UH/L = 10^{-1}$ m/s) tipikusan mm/s, az óceánban (ahol $UH/L = 10^{-4}$ m/s) 10^{-7} m/s \approx cm/nap nagyságrendűek.

Akármilyen gyenge is a függőleges irányú áramlás, igen fontos jelenség, hiszen korrekciót jelent a geosztrofikus viselkedéshez, s a folyadék belsejében is eltérést jelez a szigorúan kétdimenziós áramlástól. Ezért a (3.27) Sverdrup-reláció következtében lassú észak-déli áramlások is kialakulnak.

4.3.3 A felpörgetési idő

Az Ekman-pumpálás a határreteg feletti geosztrofikus tartomány örvényességével arányos, s ez fontos következménnyel jár az örvényesség időbeli fejlődésére nézve is. A sekély ideális folyadéokra vonatkozó (2.19) egyenlet szerint

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\zeta + f) \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (4.33)$$

A közel geosztrofikus esetben ζ elhanyagolható a planetáris örvényesség mellett. A folyadék belsejében a w sebesség az alsó határréteg fölötti w_+ értékről zérusra csökken a $z = H$ felszín elérésekor, amennyiben szélnyírás nem hat. Ezért a $\partial w_g / \partial z$ derivált, melynek z -függetlennek kell lennie sekély folyadékban, $-w_+ / H$ -ként írható (hiszen $H - D \approx H$). Ezzel az f_0 sík közelítésben

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = -f_0 \frac{w_+}{H} = \mp \frac{f_0 \delta}{2H} \zeta_g = -\frac{|f_0| \delta}{2H} \zeta_g. \quad (4.34)$$

Az örvényesség időbeli változását tehát a határréteg vastagsága, s ezen keresztül a viszkozitás szabályozza. Az időderivált magával az örvényességgel arányos, együttthatója *mindig* negatív, s ezért exponenciális lecsengést tapasztalunk. A relaxációs idő az f_0 sík közelítésben

$$t_0 = \frac{2H}{|f_0| \delta} = \frac{\sqrt{2}}{|f_0|} \frac{1}{\sqrt{Ek}}. \quad (4.35)$$

Az Ekman-réteg örvényesség-csökkentő hatása. Mivel $Ek \ll 1$, a relaxációs idő jóval hosszabb a forgási időnél: a légkörben néhány nap, az óceánban néhány hét. A viszkozus relaxáció $t_\nu \equiv H^2 / \nu_{turb} = t_0 / \sqrt{2Ek}$ ideje azonban még ennél is sokkal hosszabb, a levegőben kb. 100 nap, az óceánban több év. Laboratóriumi példánkban $t_0 \approx 3$ perc, t_ν pedig 2,5 óra. Az Ekman-pumpálás tehát jóval hatékonyabb csillapítási mechanizmushoz vezet, mint a hagyományos viszkozitásból adódó.

Ez a következő egyszerű gondolatmenettel érthető meg. Ha egy edényt hirtelen adott szögsebességgel pozitív irányba kezdünk forgatni, akkor a folyadék nagy része kezdetben nyugalomban marad, tehát az edényhez képest negatív, anticiklonális örvényességgel rendelkezik. Az alsó határrétegben kiáramlás, a folyadék belsejében leáramlás alakul ki. Ezt a felszínen összefolyásnak kell kísérnie. A radiálisan a tengely felé áramló részecskéket a Coriolis-erő jobbra téríti, s így pozitív cirkulációjúvá teszi, tehát csökkenti a folyadék teljes örvényességét. Az örvényesség zérushoz tartása annak felel meg, hogy lassan az egész folyadék átveszi az edény szögsebességét. A t_0 relaxációs időt szokás ezért felpörgetési időnek is nevezni. A felpörgetési folyamat az Ekman-pumpálás nélkül sokkal lassabb lenne. A t_0 felpörgetési idő annál rövidebb, minél gyorsabb a forgás!

4.4 A felső határréteg

4.4.1 A sebességeloszlás

Tekintsünk egy közel vízszintes folyadékfelszínt, melyre a felette fújó szél miatt τ nyírófeszültség hat. Az egyszerűség kedvéért koordinátarendszerünk origóját erre a szintre helyezzük. A felszín alatti D vastagságú határrétegben keressük a sebességeloszlást, melynek most egy fontos ismeretlene maga a felszíni áramlási erősség is. A vízszintes sebességkomponensekre a $z = 0$ szinten a (4.22) peremfeltétel érvényes. Ugyanakkor a folyadék belsejében a geosztrofikus áramlást kell visszkapnunk, tehát $z \rightarrow -\infty$ mellett $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_g$.

A geosztrofikus áramlástól való eltérést megadó (4.17), (4.18) megoldásban a mélységgel exponenciálisan növekvő viselkedést (alsó előjel) az $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_g$ peremfeltétel miatt ki kell zárnunk. A (4.22) nyírási peremfeltételből $A + B = \tau_x \delta / (\nu \rho_0)$, $A - B = \pm \tau_y \delta / (\nu \rho_0)$, ahol az előjel az f Coriolis-paraméter előjele, s δ továbbra is a (4.16) kombináció. Ezt (4.17), (4.18)-ba helyettesítve a sebességeloszlás

$$u = u_g + \frac{e^{z/\delta}}{\rho_0 \sqrt{\nu |f|}} \left(\tau_x \cos \left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \mp \tau_y \sin \left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad (4.36)$$

$$v = v_g + \frac{e^{z/\delta}}{\rho_0 \sqrt{\nu|f|}} \left(\pm \tau_x \sin \left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) + \tau_y \cos \left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \right). \quad (4.37)$$

Vektoriálisan

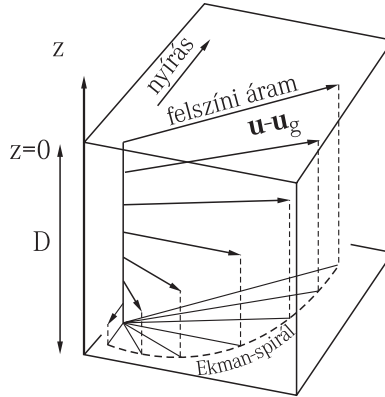
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{e^{z/\delta}}{\rho_0 \sqrt{\nu|f|}} \left(\boldsymbol{\tau} \cos \left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \pm (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}) \sin \left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \right). \quad (4.38)$$

Mindkét alak világosan mutatja, hogy a geosztrofikustól való eltérés csakis a nyírásnak köszönhető, nem függ az alsó \mathbf{u}_g folyadékáramlástól, s kis viszkozitás esetén igen jelentős. Ráadásul az áramlásnak mindig létezik a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírásra *merőleges* komponense is, melyet (4.38) második tagja ír le.

A folyadék felszínén ($z = 0$ -ra)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{1}{\rho_0 \sqrt{2\nu|f|}} (\boldsymbol{\tau} \mp \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}). \quad (4.39)$$

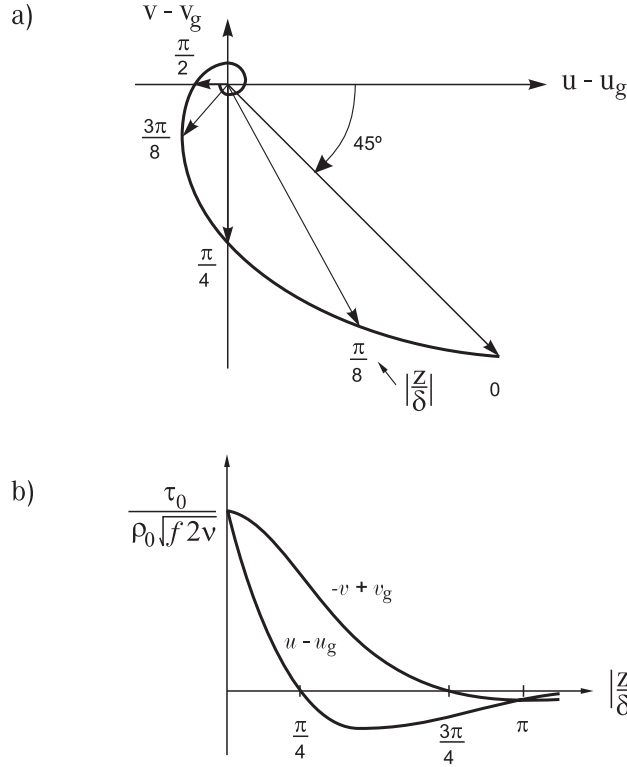
Ott tehát a sebességnövekmény *45 fokos szöget* zár be a nyírási feszültséggel, az északi féltekén a szélnyírástól *jobbra* mutat, s nagysága $|\tau|/(\rho_0 \sqrt{\nu|f|})$. A tipikus szélnyírási feszültség $0,1 \text{ N/m}^2$, mely közepes szélességeken $0,1 \text{ m/s}$ -os sebességnövekményekre vezet! Viharos szelek nyírási erőssége elérheti a néhány N/m^2 -t is.



4.6 ábra: A felső határréteg az északi féltekén: a határrétegbeli sebességnövekmény-vektor sematikus magasságfüggés.

Az északi féltekén (felső előjel) a határrétegben lefelé haladva a sebesség geosztrofikusra merőleges komponense csökken, előjelet vált, s végül nullához tart. A sebességvektor iránya egyre tovább fordul a nyírási iránytól, miközben a sebesség nagysága gyorsan közeledik a geosztrofikushoz. A sebességvektornak ezt a magassággal való viselkedését is Ekman-spirálnak nevezzük (4.6 ábra). A $z = -\pi\delta$ mélységben a geosztrofikus áramlás gyakorlatilag helyreáll (4.7 ábra), s ezért $\pi\delta$ ismét azonosítható a határréteg vastagságával (l. (4.27)). Fontos hangsúlyozni, hogy a határréteg vastagsága tehát *független* a nyírási erősségtől, noha a benne kialakuló többletsebesség arányos a nyírással.

A tenger felszíne alatti áramlások sebességének spirális mélységfüggése valóban megfigyelhető. A turbulens viszkozitás helyfüggése és a rétegezetségből adódó hatások miatt azonban az (4.38) alak valamelyest eltér a mérttől.



4.7 ábra: A felső határréteg az északi féltekén: a) A sebesség-spirál vetülete az (u, v) síkra keleti irányba mutató nyírási vektor $\tau_x > 0, \tau_y = 0$ esetén. A spirál mellé írt számok a δ egységekben mért mélységet mutatják. b) A sebességnövekmény kelet-nyugati és észak-déli komponenseinek magassággfüggése. A határrétegbeli sebesség a $D = \pi\delta$ mélységben (a határréteg peremén) jó közelítéssel megegyezik a folyadék belsejében jelenlevő \mathbf{u}_g geosztrofikus sebességgel.

4.4.2 Az Ekman-transzport, fel- és leáramlások

Érdeemes megvizsgálni, hogy a nyírás milyen nagyságú geosztrofikustól eltérő anyagmozgást hoz létre a *teljes* határrétegben. Definiáljuk ezért az

$$\mathbf{S} = \int_{-\infty}^0 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) dz \quad (4.40)$$

Ekman-transzport nevű mennyiséget, mely megadja, hogy a viszkozitás következtében időegység alatt mekkora felületű anyag folyik át egy függőleges egyenes mentén, vagy mekkora térfogatú anyag a folyadék teljes mélységét átfogó, egységnyi szélességű felületen. Az Ekman-transzport és D hányadosa a határrétegbeli átlagos sebesség. Az integrál alsó határát kényelmi okból vesszük végtelennek. A sebességeltérés nagyságának a magassággal történő exponenciális lecsen- gése miatt az integrál a $z = -D$ szint alatt már gyakorlatilag nem ad járulékot.

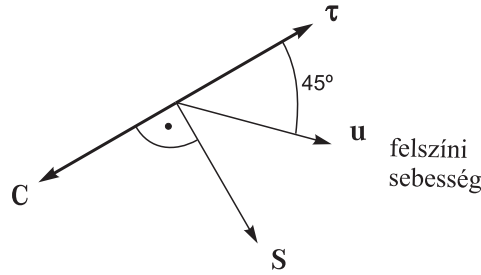
Az (4.14) egyenletet integrálva, (4.40) alapján megkapjuk az Ekman-transzportra vonatkozó összefüggést:

$$f \mathbf{n} \times \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_0}, \quad (4.41)$$

ugyanis a sebesség z szerinti deriváltja az alsó határon zérus (hiszen ott a mozgás geosztrofikus), a felsőn pedig a nyírással arányos. Ebből

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\rho_0 f} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\rho_0 f} (\tau_y, -\tau_x). \quad (4.42)$$

Az Ekman-transzport tehát éppen *merőleges* a szélnyírási vektorra, s az északi féltekén τ -tól jobbra, a délin balra mutat (4.8 ábra).

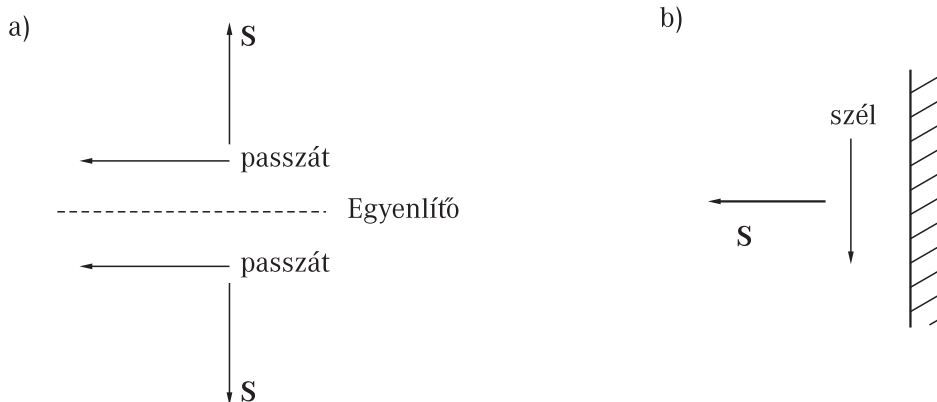


4.8 ábra: Az S Ekman-transzport, a τ nyírási vektor, és az u felszíni áramlási sebesség egymáshoz viszonyított iránya az északi féltekén. A C vektor az Ekman-transzportnak megfelelő átlagos sebességnövekményre ható Coriolis-erőt jelöli, mely merőleges magára az Ekman-transzportra.

Azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a viszkozitásból adódó átlagsebesség az Ekman-rétegben merőleges a szabad felszínen ható nyírási erőre. A sarkkutató F. Nansen (1861-1930) megfigyelése, miszerint az északi-féltekén a jéghegyek a szelektől jobbra sodródnak vezette Ekman (1905-ben) az azóta róla elnevezett sebességeloszlás és transzport elméleti leírására. A transzport irányítottsága ismét olyan tulajdonság, mely csak forgatott folyadékban lehet érvényes, a nem forgatott folyadék ugyanis arra áramlik, amerre a szél hajtja. A kapott orientációs szabály annak következménye, hogy a teljes határrétegben a sebesség-növekménnyel kapcsolatos Coriolis-erőnek pontosan kompenzálnia kell az egyetlen külső erőt, a felszíni szélnyírást.

Az Ekman-transzport nyírásra merőleges irányának fontos következményei vannak az óceáni áramlásokra nézve. Az uralkodó szelek által keltett nyírás Ekman-transzportot alakít ki az óceánok felső határrétegében. Sokszor egy lokális szélnyírás következtében létrejött transzport indítja el a folyadéktömegek tehetetlenségi mozgását (1.19 fejezet)

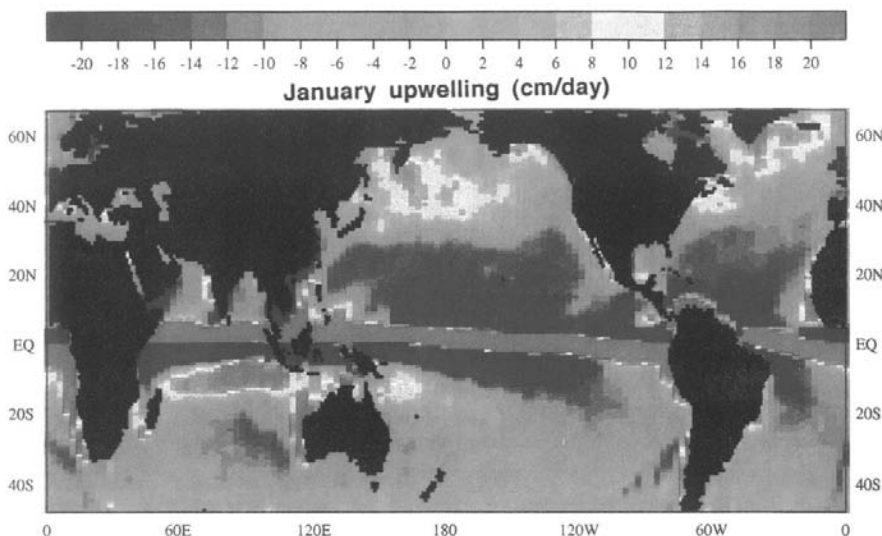
A szélirányra merőleges felszíni áramlás, vagy annak inhomogenitása, a kontinuitás következtében függőleges irányú áramlást is magával hoz. Így például az Egyenlítő környéki passzát szelek miatt az Ekman-transzport a sarkok felé irányul, s ez az Egyenlítő övezetét jelentős feláramlási területté teszi (4.9a ábra).



4.9 ábra: A szelek és az Ekman-transzport viszonya. a) Egyenlítői övezet, b) Észak-déli futású partvonalak az északi féltekén,

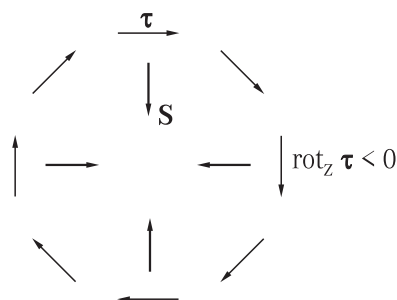
Ahol a szeleknek van jelentős parttal párhuzamos összetevője, és a part ettől a vektortól az északi féltekén balra (a délin jobbra) esik, ott az Ekman-transzport a parttól elfelé mutat, s ezért

feláramlás alakul ki (4.9b ábra). Tipikusan ez a helyzet az óceánok *keleti* partjain, mint például Peru, Kalifornia, vagy Nyugat-Afrika partjai mentén. Feláramlásoknak fontos gazdasági szerepe van partvonalak közelében, ugyanis a felszálló víz tápanyagban gazdag és ezért jó halászati lehetőséget teremt. A Föld teljes halászatának mintegy fele erre a néhány fontos feláramlási területre koncentrálódik (4.10 ábra).



4.10 ábra: A fel- és leáramlások átlagos januári erőssége az óceánokon. A feláramlás az Egyenlítő környékén és a medencék keleti partvidékei mentén jelentős. Maximális értéke 20 cm/nap [Duxbury].

Cirkuláris nyíráseloszlás is fel-, ill leáramlásokat okoz, s ez nagy jelentőségű az óceáni áramlások megértésében (l. 4.6 fejezet). Ha például a nyírási vektortér negatív körüljárású, az a centrum felé irányuló Ekman-transzportot eredményez (4.12 ábra), s ennek következtében az északi féltekén leáramlást.



4.11 ábra: Cirkuláris (itt ciklonális) nyíráseloszlás és Ekman-transzport az északi féltekén.

4.4.3 Ekman-pumpálás, nyírás okozta örvényességváltozás

A fenti kvalitatív példák is mutatják hogy a kétdimenziós sebességdivergencia a felső határretegben sem zérus. A létrejövő függőleges áramlás erőssége kvantitatíven is meghatározható. Tekintsük a háromdimenziós összennyomhatatlanságot kifejező $\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) = 0$ egyenletet, mely írható a

$$-\frac{\partial(w - w_g)}{\partial z} = \frac{\partial(u - u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v - v_g)}{\partial y} \quad (4.43)$$

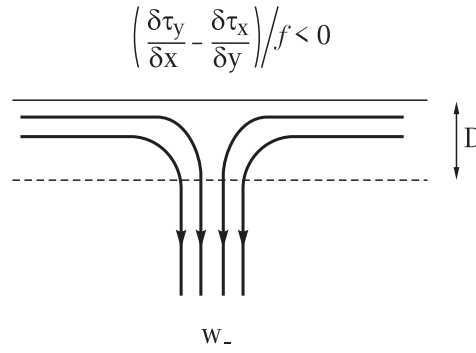
alakba is. A teljes mélységre integrálva a jobb oldalon az Ekman-transzport divergenciája jelenik meg, a bal oldalon pedig a felszíni $w_g(z=0)$ geosztrofikus feláramlási sebesség (az egzakt sebességnek a felszínen el kell tűnnie: $w(z=0) = 0$). A határreteg keskenysége miatt viszont a függőleges geosztrofikus sebesség ott jó közelítéssel állandó, s megegyezik a réteg alján megfigyelhető w_- feláramlási sebességgel: $w(z=0) = w_-$. Így

$$w_- = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 f} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho_0 f} \text{rot}_z \boldsymbol{\tau} \quad (4.44)$$

A nyírás-eloszlás

$$\text{rot}_z \boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \quad (4.45)$$

örvényessége határozza tehát meg a fel-, vagy leáramlás erősségét. Negatív nyírási örvényesség az északi féltekén leáramlást okoz (4.12 ábra), összhangban az 4.11 ábra felszíni képével. Ezt a folyamatot is Ekman-pumpálásnak nevezik, s intenzitása az Egyenlítő felé erősödik.



4.12 ábra: A felső határretegben történő Ekman-pumpálás a határretegből a folyadék belsejébe irányuló függőleges áramlás, melynek erőssége a szélnyírás rotációjával arányos. A feláramláshoz ciklonális szélnyírás (az északi féltekén $\text{rot}_z \boldsymbol{\tau} > 0$), a leáramláshoz anticiklonális szélnyírás (az északi féltekén $\text{rot}_z \boldsymbol{\tau} < 0$) tartozik.

Az UH/L egységekben mért feláramlási sebességre azt kapjuk, hogy

$$w_- = Sh \text{rot}_z \boldsymbol{\tau}, \quad (4.46)$$

ahol

$$Sh \equiv \frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 H U}. \quad (4.47)$$

Itt az egyszerűség kedvéért az f_0 sík közelítést használtuk, τ_0 a nyírási feszültség jellegzetes nagysága és Sh annak dimenziótlan kifejezése, a nyírási paraméter. A nyírási paraméter a szélnyírás következtében kialakuló feláramlás vagy az Ekman-transzport dimenziótlan mértéke, de más jelentéssel is rendelkezik. Az (4.39) összefüggésből leolvasható, hogy $\tau_0 / (\rho_0 U \sqrt{\nu |f_0|})$ megadja, hogy a szélnyírás okozta sebességnövekmény hányszorosa a geosztrofikusnak. Ezért írhatjuk, hogy

$$Sh = \sqrt{Ek} \frac{\text{szélnyírás okozta sebesség}}{\text{geosztrofikus sebesség}}. \quad (4.48)$$

A nyírási paraméter tehát a nyírási erősséget méri, s az Ekman-szám mellett egy újabb fontos dimenziótlan paraméter.

Mivel a szél által létrehozott nyírás tipikus mért értéke $0,1 \text{ N/m}^2$ nagyságrendű, az Sh paraméter értéke közepes szélességeken, $U = 0,01 \text{ m/s}$ és $H = 4 \text{ km}$ mellett 10^{-2} körüli. Ugyanígyen nagyságú nyírási paraméter elérhető laboratóriumban pl. úgy, hogy $2\Omega = 1/\text{s}$, $H = 40 \text{ cm}$, s a többi adat változatlan. A szélnyírás okozta feláramlás dimenziós erőssége az óceánban $10^{-2}UH/L = 10^{-2}10^{-4} \text{ m/s}$, azaz néhány dm/nap . Ez a függőleges mozgás általában lényegesen erősebb, mint az alsó határretegben induló Ekman-pumpálás.

4.5 A sekélyfolyadék egyenletek szélnyírással

Kihasnálva, hogy a felső határretegben viselkedés csak a szélnyírástól függ, felírhatjuk a sekélyfolyadék egyenletek kiterjesztését a külső felszínen ható nyíróerő jelenlétében. Az alapgondolat az, hogy a határreteg alatti viszonylag vastag folyadéktartomány továbbra is sekély közegként mozog, s ezért benne az \mathbf{u} sebesség független a magasságtól. Keskeny határreteg jelenlétében a (4.3) hidrodinamikai egyenletnek a folyadékmélységre vonatkozó átlagát véve, a viszkózus tag kivételével minden tag gyakorlatilag megegyezik az ideális folyadéktartományban érvényes kifejezésével. A viszkózus tag maga z szerinti derivált, ezért integrálja csak a felszínről ad járulékot, a $\nu \partial \mathbf{u} / \partial z$ kifejezést. Ez azonban (4.22) szerint a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírás és a sűrűség hányadosa. Kismértékű η felszíningadozást és vízszintes aljzatot feltételezve, a folyadék mélysége $h = H + \eta$. Mivel η jóval kisebb az átlagos mélységnél, a viszkózus erő átlagolásban η nem lép fel. Ezzel a mélységre átlagolt sekélyfolyadék egyenlet

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - g \text{ grad}\eta + \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_0 H}, \quad (4.49)$$

s érvényes a (2.13) kontinuitási egyenlet is. A felső határreteg tehát első közelítésben csak annyiban módosítja a sekélyfolyadék egyenleteket, hogy azokban külső gerjesztő erőként megjelenik a szélnyírás. Az egyenlet levezetésében csak azt használtuk ki, hogy a felső határreteg keskeny. Ezért az egyenlet nemcsak a kvázigeosztrofikus mozgásokat írja le, hanem azokat is, melyekben a Coriolis-erő nem dominál (a Rossby-szám egységnyi), sőt véges tartományokban a nem forgatott, szélnyírta folyadék leírására is alkalmazható (tehát kisebb tavak, pl. a Balaton áramlásainak vizsgálatára).

A nyírt sekély folyadék (4.49) egyenletének dimenziótlan alakjára a 2.2 fejezetben alkalmazott eljárást a $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tau_0 \boldsymbol{\tau}$ transzformációval kiegészítve kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mp \frac{1}{Ro} \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \text{ grad}\eta + \frac{Sh}{Ro} \boldsymbol{\tau}. \quad (4.50)$$

Itt megjelent az (4.47) nyírási paraméter. Ennek jelentése a nem kvázigeosztrofikus esetben az, hogy $Sh/Ek = \tau_0 / (\nu \rho_0 U/H)$ a felszíni nyírás viszonya ahhoz az elképzelt nyírási feszültséghez, mely a folyadék átlagos U sebességnek kialakításához lenne szükséges.

A (4.49) egyenlet rotációját véve a ζ örvényesség változására azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\zeta}{dt} + (\zeta + f) \text{div}\mathbf{u} = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\rho_0 H}. \quad (4.51)$$

A $\text{div}\mathbf{u} = -dh/(hdt)$ kontinuitási összefüggést felhasználva a $q \equiv (\zeta + f)H/h$ potenciális örvényesség egyenlete:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\rho_0 h}. \quad (4.52)$$

A potenciális örvényesség tehát a szélnyírás jelenlétében nem megmaradó mennyiség: a nyírási rotáció a potenciális örvényesség nyelője vagy forrása⁷.

⁷Amennyiben a teljes $\nu \Delta \mathbf{u}$ tagot megtartjuk a Navier–Stokes-egyenletben, akkor a potenciális örvényesség nyelőjeként megjelenik (4.52)-ben a $\nu \Delta \zeta H/h$ tag is, mely azonban rendszerint jóval kisebb mint a nyírásból származó.

A gyorsan forgatott geosztrofikus határesetben, amikor ζ elhanyagolható f mellett, kialakul egy \mathbf{u}_g stacionárius áramlás, amennyiben a nyírás időtől független. Ezt az

$$u_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{h} \right) + v_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{h} \right) = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\rho_0 h} \quad (4.53)$$

feltétel határozza meg. A nyírás miatt a geosztrofikus sebesség már nem az f/h mennyiség szintvonalai mentén alakul ki (v.ö. (3.23)).

4.6 A szélhajtotta óceán

4.6.1 Általános megfontolások

Az óceánok nagy felszíni áramlásait elsősorban az uralkodó szelek és az azok által kifejtett nyírási erők alakítják ki. Felszíni áramláson a felső határrétegben és az alatta levő ideális folyadék tartományban létrejövő mozgást értjük, mely első közelítésben geosztrofikus egyensúlyban levőnek tekinthető.

A fizikai kép a következő: a felső határrétegben az Ekman-pumpálás függőleges áramlást hoz létre. Ez behatol a folyadék belsejébe, s a β hatás miatt érvényes (3.27) Sverdrup-reláció következtében észak-déli irányú geosztrofikus áramlást hoz létre. Természetesen kelet-nyugati mozgás is létezhet, de azt a fel- és leáramlások nem befolyásolják. A nagy óceáni áramlások teljes megértése tehát csak a β -hatás és az Ekman-réteg együttes ismeretében lehetséges.

Mivel a $\partial w / \partial z$ deriváltak z -től függetlennek kell lennie, az állandó H mélységűnek feltételezett óceán belsejében $\partial w / \partial z = w_- / H$. Itt w_- a feláramlási sebesség a felső határréteg alján. Az alsó határrétegből származó w_+ sebességet egyelőre elhanyagoljuk, hiszen az általában sokkal kisebb w_- -nál. A (3.27) Sverdrup-reláció szerint a létrejövő geosztrofikus áramlás észak-déli v_g sebességkomponensét a

$$\boxed{v_g \beta = f \frac{w_-}{H}} \quad (4.54)$$

összefüggés határozza meg. A (4.44) feláramlási sebességet a szélnyírás rotációja adja, s ezzel

$$v_g = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\beta \rho_0 H}. \quad (4.55)$$

Ez nem más, mint a potenciális örvényesség tétele a geosztrofikus határesetben (l. (4.53) elhanyagolható felszíni alakváltozás ($h \approx H$) mellett. Az észak-déli áramlás erősségét a szélnyírás tehát egyértelműen meghatározza. A teljes H mélységben kialakuló áram, azaz a folyadék aljáig leérő egységnyi szélességű felületen átáramló folyadéktérfogat az ún. Sverdrup-transzport

$$\boxed{V = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\beta \rho_0}} \quad (4.56)$$

A $\rho_0 V$ tömegáram nagysága tehát egyszerűen a szélnyírás rotációja és a β paraméter hányadosa. Dimenziótlan alakban: $V = Sh / Be \text{rot}_z \boldsymbol{\tau}$. A Ekman- és a Sverdrup-transzport nagyságrendi viszonyát tehát a dimenziótlan β paraméter adja. Mivel ez egynél kisebb, a teljes Sverdrup-transzport nagyobb a határrétegbeli Ekman-transzportnál. Ha pl. $0,1 \text{ N/m}^2$ nyírófeszültségkülönbség 250 km -en lép fel, akkor $v_g = 0,01 \text{ m/s}$ és $V = v_g H = 40 \text{ m}^2/\text{s}$. Ugyanekkora nyírási hatására az Ekman-transzport nagysága $1 \text{ m}^2/\text{s}$ (az ehhez tartozó kb. $0,25 \text{ m/s}$ sebességnövekmény azonban nagyobb v_g -nél, hiszen a réteg csak 40 m mély).

A (4.55) reláció nagy jelentőségű, ugyanis a szélnyírás, vagy a feláramlás egész óceáni medencére terjedő ismeretében meghatározza az észak-déli sebességet, de ezzel az egész áramlási teret is, hiszen a geosztrofikus áramlás vezető rendben divergenciamentes (a néhány dm/nap feláramlási sebesség sok nagyságrenddel kisebb a majdnem m/s erősségű vízszintes sebességeknél). Az óceáni áramláshoz rendelhető ezért egy ψ geosztrofikus áramlási függvény, mellyel $v_g = \partial\psi/\partial x$, s az egyenlet a

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\text{rot}_z\tau}{\beta\rho_0 H} \quad (4.57)$$

alakot ölti. Ez a megfelelő (x, y) síkbeli peremfeltételekkel meghatározza a τ szélnyírási feszültség következtében kialakuló geosztrofikus áramlási teret.

Mielőtt egy konkrét modellt vizsgálnánk, vezessük be a

$$\Psi \equiv \psi H \quad (4.58)$$

mélységi vagy transzport áramlási függvényt, mely a teljes óceáni mélységben kialakuló anyagáramlást jellemzi⁸. A (4.56) Sverdrup-transzport tehát Ψ függvény x szerinti deriváltja. Ha két közeli áramvonalon a mélységi áramlási függvény értéke Ψ ill. $\Psi + \Delta\Psi$, akkor a köztük lévő tartományban egységnyi idő alatt $\Delta\Psi$ térfogatú anyag áramlik át a teljes mélységben. Ez könnyen látszik, ha az áramvonalak vízszintesek s távolságuk Δy , ugyanis akkor az áramlás $|u| \approx \Delta\Psi/(\Delta y H)$ erősségű, és a $\Delta y H$ felületű téglalapon $u\Delta y H = \Delta\Psi$ térfogatú folyadék halad át időegység alatt. A mélységi áramlási függvény mértékegysége tehát m^3/s . Az óceáni tipikus térfogati áramerősségek legalább 1 millió m^3/s nagyságúak, melyek jellemzésére bevezették a Sverdrup egységet, $1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$. A Ψ függvényre vonatkozó egyenlet

$$\frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\text{rot}_z\tau(x, y)}{\beta\rho_0} \quad (4.59)$$

Ez az összefüggés (éppúgy, mint (4.55)) azt mutatja, hogy a felszíni szélnyírások meghatározzák a nagy óceáni áramlásokat. A nyírás következtében kialakuló Ekman-transzport ugyanis fel-, vagy leáramláshoz vezet, amely viszont geosztrofikus közelítésben a (3.27) Sverdrup-reláció következtében vízszintes síkbeli elmozdulással jár.

4.6.2 Egyszerű óceánmodell

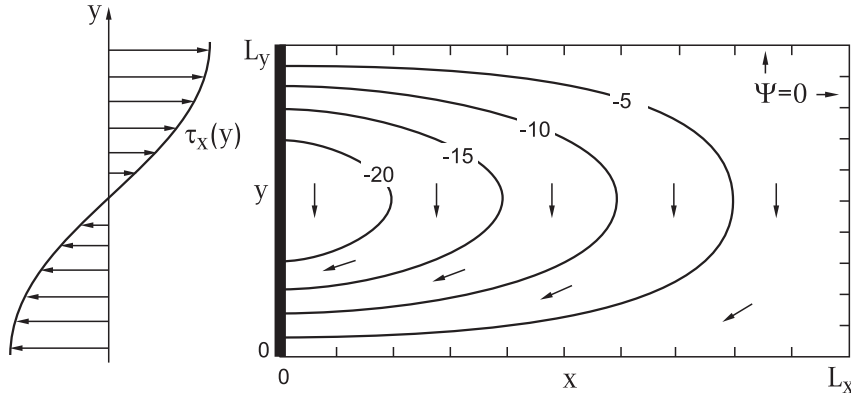
Egy óceáni medence egyszerű modelljeként tekintsünk egy téglalap alakú tartományt, melynek oldalhosszai L_x , ill L_y . A medence alsó éle legyen a szubtrópusi vidéken, ahol a keleti szelek dominálnak, felső éle pedig a mérsékelt éghajlati övben, ahol a nyugati szelek uralkodnak (4.13 ábra). Éves átlagban a szelek okozta nyírás maximuma ill. minimuma essen a medence északi és déli határaitra. A nyírás erősségének leírására válasszuk a

$$\tau_x = -\tau_0 \cos \frac{\pi y}{L_y}, \quad \tau_y = 0 \quad (4.60)$$

függvényt, de hangsúlyozzuk, hogy megoldásunk tetszőleges $\tau_x(y)$ mellett érvényben marad. Az $L_x = 6000 \text{ km}$, $L_y = 4000 \text{ km}$ választás megfelel az Atlanti-óceán méreteinek, mely közelítőleg a 75 és 10 fokos nyugati hosszúsági és a 15 és 50 fokos északi szélességi körök között terül el. A nyírási erősség maximuma $\tau_0 = 0,1 \text{ N/m}^2$, s β átlagos értéke ebben a térségben $\beta = 2 \cdot 10^{-11} \text{ 1/(ms)}$ ⁹.

⁸Általános magasságfüggő áramlás esetén Ψ a ψ áramlási függvény z szerinti integrálja.

⁹Ilyen nagy kiterjedésű tartomány leírásakor már a β közelítés érvényességi körének határán vagyunk.



4.13 ábra: Óceáni medence és az uralkodó szelek által kifejtett nyíróerők egyszerű modellje az északi féltéken. Az áramvonalak mellé írt számok a Ψ mélységi áramlási függvény értékét adják Sverdrupban kifejezve ($1\text{Sv} = 10^6 \text{m}^3/\text{s}$). A vastag vonal erős nyugati part menti peremáramlatot jelöl.

A mélységi áramlási függvény egyenlete ebben az esetben

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{\beta \rho_0} \frac{d\tau_x}{dy}. \quad (4.61)$$

A jobb oldal független x -től, ezért a Ψ függvénynek x -ben lineárisnak kell lennie. Ezzel nyilván csak az egyik észak-déli peremfeltétel elégíthető ki. Ismervén az erős nyugati peremáramlatokra való hajlamot, válasszuk az $x = L_x$ keleti partvidéket, hiszen ott az áramlás biztosan elegendően sima, s írjuk elő ott az $u = 0$ peremfeltételt. A megoldás tehát

$$\Psi(x, y) = \frac{d\tau_x}{dy} \frac{1}{\beta \rho_0} (L_x - x) = \frac{\tau_0 \pi}{\beta \rho_0 L_y} (L_x - x) \sin \frac{\pi y}{L_y}. \quad (4.62)$$

A fenti egységekkel Ψ tipikus értéke néhányszor tíz Sv (l. 4.13 ábra), mely a megfigyelt óceáni áramerősségek nagyságrendjébe esik. A modell összhangban van azzal a képpel, hogy a negatív nyírási örvényességű szélrendszer leáramlást, s a Sverdrup-reláció miatt délre történő geosztrofikus áramlást hoz létre az *egész* medencében (az északi és déli peremek kivételével, ahol $v_g \equiv 0$).

A nyugati partvidéken az $u = 0$ peremfeltétel nem elégíthető ki: az áramvonalak belefutnak az y tengelyen húzódó partvonalba. A kontinuitás miatt azonban nyilván kilakul egy délről északra futó áramlás, de ez olyan keskeny, hogy az adott közelítésben nem bontható fel. A nyugati partvonal mentén behúzott vastag vonal egy igen keskeny sávban futó peremáramlatot reprezentál. Itt az anyagáramnak ugyanakkorának kell lennie északfelé mint a medence más részeiben délfelé. Az áramlási függvény maximumát az $x = 0, y = L_y/2$ helyen veszi fel, ahol értéke $\Psi_{max} = \tau_0 \pi L_x / (\beta \rho_0 L_y) \approx 25 \text{ Sv}$. Mivel a keleti peremen az áramlási függvény eltűnik, a teljes transzport délre 25 Sv, s ezért ugyanennyinek kell lennie az északra irányuló keskeny peremáramlatban. Ez az egyszerű modell meglepően jó összhangban van azzal a ténnyel, hogy a Golf-áramlat erőssége mintegy 30 Sv.

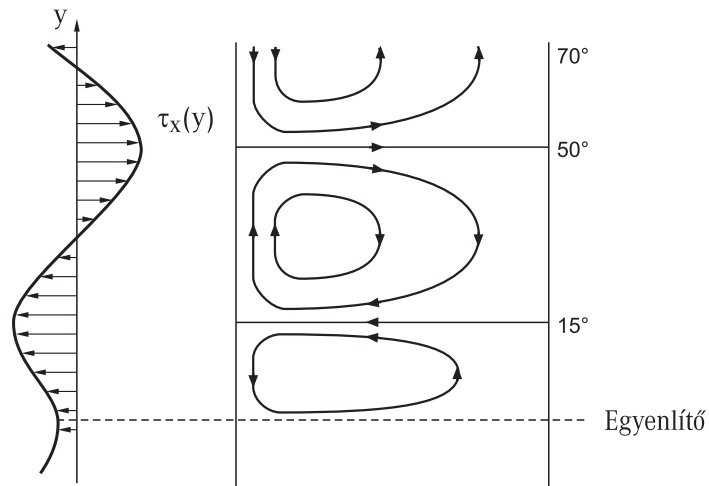
Ugyanez a szélnyírás egy lassan forgó bolygón olyan áramlást hozna létre, mely a medence középpontjára mindkét koordinátatengely mentén közel szimmetrikus! A Föld nyugati peremáramlatai tehát annak látványos következményei, hogy a forgás gyors, a geosztrofikus közelítés jogos, s a görbületből adódó β -hatás is jelen van.

Az egyes sebességkomponensek:

$$u = -\frac{\tau_0 \pi^2}{\beta \rho_0 L_y^2 H} (L_x - x) \cos \frac{\pi y}{L_y}, \quad v = -\frac{\tau_0 \pi}{\beta \rho_0 L_y H} \sin \frac{\pi y}{L_y}. \quad (4.63)$$

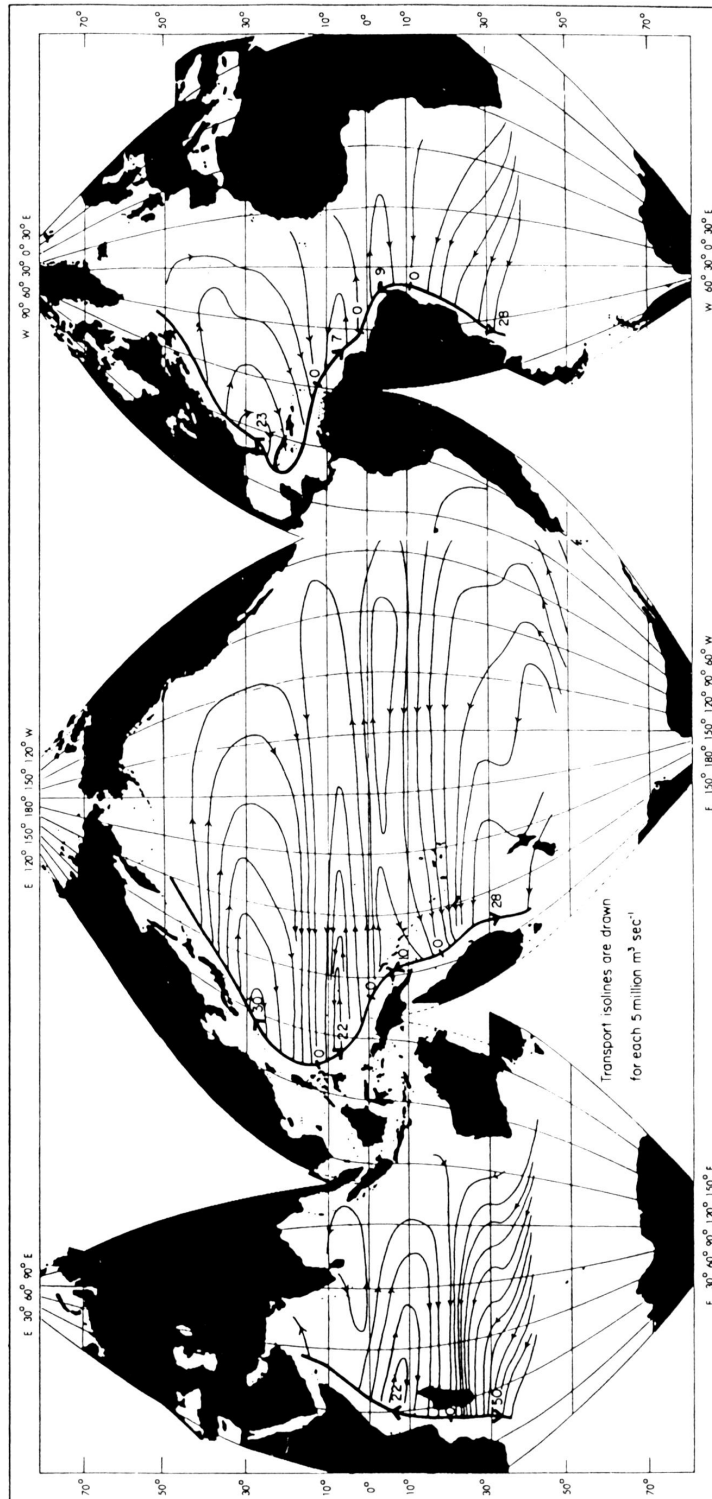
A délre mutató sebesség 1 mm/s nagyságrendű, a kelet-nyugati áramlás a medence szélességi körökkel párhuzamos peremén közel 1 cm/s erősségű.

A nagy óceáni körök mozgását tehát elsősorban az uralkodó szelek alakítják ki, s ezek vezetnek a 2.4 fejezetben megismert anticiklonális áramlásokhoz. Érdekes hangsúlyozni, hogy kizárólag x irányú nyírás esetén az északi és déli peremnek nem feltétlenül kell partvonalnak lennie, ugyanis azokon a helyeken, ahol a nyírásnak szélsőértéke van, az áramvonalak automatikusan kelet-nyugati irányúak. A valóságban ezek a nagy anticiklonális óceáni körök két ciklonálishoz csatlakoznak, melyek mérete azonban sokkal kisebb: az egyenlítői és a sarki körhöz (l. 4.14 ábra).



4.14 ábra: Az óceáni körök rendszere és az átlagos nyíróerők függése a szélességtől.

A problémát állandó mélységű világoceánt feltételezve, de a valóságos partvonalakkal és a mért átlagos szelek nyírási erősségével numerikusan megoldva a 4.15 ábrán látható áramlási képet kapjuk. Ez megegyezik a megfigyelt felszíni áramlások térképével, s a vastag vonalak egyértelműen megfelelnek a korábban említett erős nyugati peremáramlatoknak (Golf, Kuroshio, Agulhas, Nyugat-ausztráliai és Brazíliai áramlatok).



4.15 ábra: Az egyszerű modell kiterjesztése az állandó mélységűnek feltételezett világoceánra a valóságos partvonalak és a mért átlagos nyírási erők figyelembevételével. A vastag vonalak a nyugati peremáramlásokat jelölik, s egybeesnek a valóságos peremáramlatokkal [Gill].

5. fejezet

Rétegzett közegek áramlása

Természetes közegeink, a víz és a levegő nem teljesen homogének, hanem függőleges rétegzettségűek, sztratifikáltak (5.1 ábra). Hosszú idők átlagában felfelé csökkenő sűrűségű, vízszintes rétegekből álló rendszereknek tekinthetők. A természetes közegek rétegzettségét olyan hétköznapi megfigyelések bizonyítják, mint a köd, vagy a felhőréteg élesen kirajzolódó határa, vagy a tavak egyikét méteres meleg felső rétegének nyáron jól érzékelhető elkülönülése a mélyebb hideg tartománytól (5.2 ábra). Az alsó légkör, a troposféra rétegzettségénél erősebb a felette elhelyezkedő sztratoszféráé. A síma repülést kereső utasszállító gépek ezért választják a 11 km körüli utazási magasságot, a sztratoszféra alján. A rétegzettség fontos következménye, hogy az adott sűrűségű test (léggömb, bólya) megtalálja lebegési szintjét (homogén közegben a lebegési feltétel gyakorlatilag nem állítható be). Felfelé csökkenő rétegzettségű közegben a folyadékrészek nyugalmi állapota stabil (míg homogén közegben csak marginálisan stabil). A stabilitást az mutatja, hogy a függőlegesen kimozdított részecske rezgőmozgást végez nyugalmi helyzete körül. (5.3 ábra). Ennek frekvenciája, az N Brunt–Väisälä-frekvencia a sztratifikált folyadék alapvető jellemzője, s értéke annál nagyobb, minél erősebb a rétegzettség. A rétegzettséget okozó sűrűségkülönbségek azonban a tapasztalat szerint legfeljebb néhány százalékosak (5.2 ábra), ezért a függőleges mozgások gyorsaságát a $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ redukált gravitációs gyorsulás szabja meg, mely a légkörben kb. tízszeres, az óceánokban ezerszeres redukciót jelent. A statikus rétegzettség tehát viszonylag gyenge: $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$. A Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete a redukált gyorsulás és a folyadékmélység hányadosával becsülhető. A gyenge statikus rétegzettség miatt a Brunt–Väisälä-frekvencia a hétköznapi életben tapasztaltakhoz képest alacsony frekvencia, a légkörben 10^{-2} 1/s, az óceánban 10^{-3} 1/s. Ebből az is következik, hogy a rétegzettséggel kapcsolatos hidrodinamikai mozgások mindig lassúak, jellegzetes idejük több perc vagy óra nagyságrendű.

A rétegzett folyadék mozgását egy új dimenziótlan szám, az ún. belső Froude-szám jellemzi, mely a H vastagságú közeg U vízszintes átlagsebességű áramlásában

$$Fr' = \frac{U}{HN} \approx \frac{U}{\sqrt{g'H}}.$$

A rétegzettség az áramlás szempontjából akkor lényeges, ha a belső Froude-szám egynél kisebb. Értéke a környezeti áramlásokban $10^{-1} - 10^{-2}$ körüli. Természetes közegeinkben a rétegződés tehát dinamikai szempontból lényeges, annak ellenére, hogy statikai értelemben gyenge. Ezek a feltételek könnyen biztosíthatók laboratóriumi kísérletekben is.

A nagyon kis belső Froude-számnak megfelelő erősen rétegzett határesetben új jelenség fordul elő: az ún. blokkolás. Az áramlás olyan erősen vízszintes rétegekhez kötött, hogy a folyadék az akadályokat a függőleges síkban nem képes körülfolyni (5.4 ábra). Ez a nem forgatott, rétegzett közegbeli jelenség a forgatott, homogén közegek Taylor-oszlopainak a megfelelője (l. 5.1 táblázat).

A rétegzett folyadék jellegzetes hulláma a belső hullám (5.5, 5.9 ábra), melyben a részecskék a terjedési irányra merőlegesen legfeljebb Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgést végeznek (5.6 ábra).

Ebből következik, hogy a Brunt-Väisälä-frekvenciánál gyorsabb gerjesztések nem képesek belső hullámok keltésére. A belső hullám a forgatott homogén rendszerek tehetetlenségi hullámának megfelelője (de bennük a vízszintes és a függőleges irány szerepe felcserélődik). Az adott frekvenciájú hullám igen anizotróp módon terjed, a vízszintes síkkal csak adott szöveget zárhat be (5.7, 5.8 ábra), mely a ferde felületről történő visszaverődés során is érvényben marad (5.11 ábra). A belső hullámban a csoportsebesség merőleges a hullámszámvektorra. Ezek a tulajdonságok szokatlan következményekre vezetnek a törési törvényben (5.10-5.13 ábra). A légkörben előforduló inverziós helyzetek egy olyan réteg megjelenésével járnak, melyben a Brunt-Väisälä-frekvencia ugrásszerűen megnő (5.14 ábra). Az ilyen réteg az alatta levő szempontjából záróréteggé viselkedik, mert a belső hullámok belőle nem képesek kilépni.

A háttéráramlás és periodikus domborzati egyenetlenségek következtében kialakuló belső hullámok rendelkezhetnek azzal az érdekes tulajdonsággal, hogy a háttéráramlás energiájának egy részét a közeg magasabb rétegeibe juttatják. Belső hullám keltésére csak viszonylag lassú áramlások képesek, melyekben az a frekvencia, mellyel a domborzati periodicitás megjelenik az áramlásban, kisebb a Brunt-Väisälä-frekvenciánál. Ilyenkor a hullámfrontok a háttéráramlás irányába dőlnek, s a csoportsebesség erre merőleges, tehát jelentős felfelé mutató komponenssel rendelkezik (5.15, 5.18 ábra). A jelenség a légkörben a hegy mögötti (lee) hullámok kialakulását jelenti, melyek érdekes felhőképződési folyamatokkal is társulnak (5.16, 5.17 ábra).

A rétegzett közeg sokszor modellezhető két egymás fölötti, eltérő sűrűségű sekély folyadék réteggel (5.20 ábra). Az ilyen rendszerben tipikus az ún. baroklin mozgás, mely a belső elválasztófelület jelentős elmozdulásával jár, miközben a külső felszín változása igen csekély (5.23 ábra). Ennek hullám-megfelelően az elválasztó felület mozgásával járó belső hullám, melyet a felső rétegbeli zavar is kelthet (5.22 ábra). A kis amplitúdójú belső hullám c_1 terjedési sebességének négyzete közel azonos rétegvastagságok esetén a redukált gravitációs gyorsulás és a teljes mélység szorzata: $c_1 = \sqrt{g'H}/2$. A természetben előforduló belső hullámok tehát legalább tízszer lassabbak a $c_0 = \sqrt{gH}$ sebességű felszíni hullámoknál. Meglepő módon a belső hullámban az egymás fölötti rétegek szemben áramolnak (5.21 ábra). Felfedezésükre az vezetett, hogy a torkolatok környékén a sós tengervízen néhány méter vastagságban szétterülő édesvízbe érkező hajók hirtelen lefékeztek, "dead water"-be kerültek. Ekman adta meg ennek magyarázatát azzal, hogy energiájuk belső hullámok keltésére fordítódott.

Folytonos rétegzettségű sekély folyadékban a belső hullámok több egyszerű típusa is jelen van, az ún. normálmódusok. Közülük az elsőben a folyadék alsó és felső fele szemben áramlik, ez tehát olyan mozgás, melyben a folyadék durván kétréteggé viselkedik. Hasonlóan, a második normálmódusban a folyadék három olyan rétegre bomlik, melyek dinamikája alapvetően különböző, és így tovább (5.19 ábra).

Zárt medencékben, öblökben, tavakban a belső hullámok állóhullám változatai is megjelennek a tólagés (seiche) jelensége kapcsán. Ilyenkor a legnagyobb lehetséges hullámhossz a medence hosszának kétszerese, a lengési periódus több nap is lehet (12.1 ábra).

Rétegzett folyadékban számos nemlineáris hullám is megjelenik, melyek lineáris társaiktól eltérően anyagárammal járnak, s ezért a környezeti transzportfolyamatok alapvető összetevői. A belső hidraulikus ugrás a belső hullám c_1 sebességénél gyorsabban áramló réteg hirtelen megvastagodása (5.26 ábra). Ilyen nagy sebességre a lejtőn lezúduló folyadék tehet szert (5.26, 5.27 ábra). Mivel azonban az állapot instabil, alkalmas helyre érve a folyadék lelassul, s eközben rétegvastagsága megnő. A hidraulikus ugrás helye térben rögzített (5.28 ábra). A belső torlópólya (bore) a hidraulikus ugrás egyenletes sebességgel mozgó változata eredetileg nyugvó közegben. A gyorsan mozgó belső bore-okban a lépcső helyi turbulenciával jár, a lassabb változatban azonban a megemelkedett belső folyadékfelszínen nagy amplitúdójú hullámok jelennek meg (5.29, 5.30, 5.31 ábra). A gravitációs áramlat sűrű folyadék behatolása a nyugvó ritkább közeg alá, vagy hígabb folyadék felfutása a sűrűbb tetejére. Hajtóereje a sűrűségkülönbségből adódó redukált gravitációs gyorsulás (5.32, 5.33 ábra), sebessége pedig $\sqrt{g'H}$, ahol h a gyorsan mozgó réteg átlagos vastagsá-

ga. A környezetünk áramlásaiban az ilyen mozgás frontnak felel meg, s számos légköri és óceáni jelenségben megfigyelhető (5.34, 5.35, 5.36 ábra). Figyelemre méltó, hogy már egy ezreléknyi sűrűségkülönbség is (melyett vízben 5 fok hőmérsékletkülönbség vált ki) m/s sebességű áramlatot hoz létre 100 m vastagságú rétegben. A tipikus légköri sebességérték 10 m/s. A belső szolitonok a különböző sűrűségű rétegek közötti elválástófelület olyan kidudorodásai, melyek alakjukat megtartva egyenletes sebességgel haladnak (5.37, 5.38 ábra). A gravitációs áramlatok akadállyal történő ütközése vagy az árapály hatás válthatja ki őket.

A rétegzett folyadékbeli áramlások rendezetlenné válásának alapvető mechanizmusa az ún. Kelvin–Helmholtz-instabilitás. Ez viszonylag vastag folyadékrétegek között alakul ki, ha azok vízszintes síkban különböző sebességgel áramolnak. Minden sebességkülönbséghez tartozik egy kritikus hullámhossz, s az annál rövidebb hullámhosszú zavarok mind instabilak. Az elválástó felület begyűrődik, s a megtörő felszíni hullámokhoz hasonló alakot vesz fel (5.39 ábra). Ez jól megfigyelhető kísérletekben (5.40, 5.32b, 5.33 ábra) és a mozgó légrétegek határán is (5.41 ábra).

A rétegzett közegek hidrodinamikája új vonásokkal gazdagodik, ha olyan nagy a hőmérsékletkülönbségek lépnek fel, hogy a hővezetésnek is lényeges szerep jut. A konvekció az alulról történő melegítés hatására kialakuló áramlás. A nyugvó ideális folyadék a legkisebb hőmérsékletkülönbség hatására is instabil lenne, benne feláramlások indulnának el. A viszkozitás és a hővezetése miatt áramlás csak akkor alakul ki, ha a folyadék alja és teteje közötti hőmérsékletkülönbség egy véges küszöbértéket meghalad. A küszöbértéket alig meghaladó hőmérsékletkülönbségekhez szabályos térbeli szerkezetű, időfüggetlen áramlások tartoznak (5.43 ábra), melyek a hőmérsékletkülönbség növekedésével időfüggővé és egyre bonyolultabbá válnak. A természetes közegekben a függőleges irányban előálló hőmérsékletkülönbségek a küszöbértéknél több nagyságrenddel nagyobbak. Az áramlást ekkor az jellemzi, hogy a közeg aljáról rendezetlen módon meleg folyadékcsomagok szakad el, melyek gombafelhőszerű alakban emelkednek fölfelé. Ezeket termikeknek nevezzük (5.44, 5.45 ábra). A légkörben, a télen felülről hűtött óceánban, tavakban (sőt a földköpenyben is) a konvekció termikes formája zajlik.

Ha a hővezetéssel valamely anyag diffúziója is társul, akkor kettős diffúziós folyamatról beszélünk. A sűrűséget alapvetően meghatározó ilyen anyag az óceáni vizekben oldott só, vagy a levegőben levő vízpára. A nagyobb anyagtartalom sűrűbbé teszi a közeget, tehát ellenkező hatással van rá, mint a hőmérséklet. A hőmérséklet- és koncentrációkülönbség hatására kialakuló kettős diffúziós konvekció a két komponens versengésének következménye. Az alul hideg folyadékban is beindulhat konvekció, ha fent nagy a koncentráció. Ez a folyamat vezet az ún. só-ujjak kialakulásához (12.2, 12.3 ábra), mely az óceáni sótranszport egyik fontos összetevője is. Légköri analogonja a nagy vízpáratartalmú bugyrok megjelenése a felhőréteg alján (12.4 ábra). Fordított a helyzet, ha a folyadékot alulról melegítjük, de ugyanakkor a nagyobb koncentráció is lent található. A termikus konvekciót ekkor gátolja a nagy koncentrációgradiens. A fűtés által kiváltott áramlás ilyenkor nem tud kiterjedni a folyadék teljes mélységére, hanem közel azonos vastagságú vízszintes rétegekre korlátozódik (12.5 ábra). Ez a rétegekre bomlás jól megfigyelhető a nyugvó tengervízben (12.6 ábra), és a jéghegyek olvadásakor is (12.7 ábra).

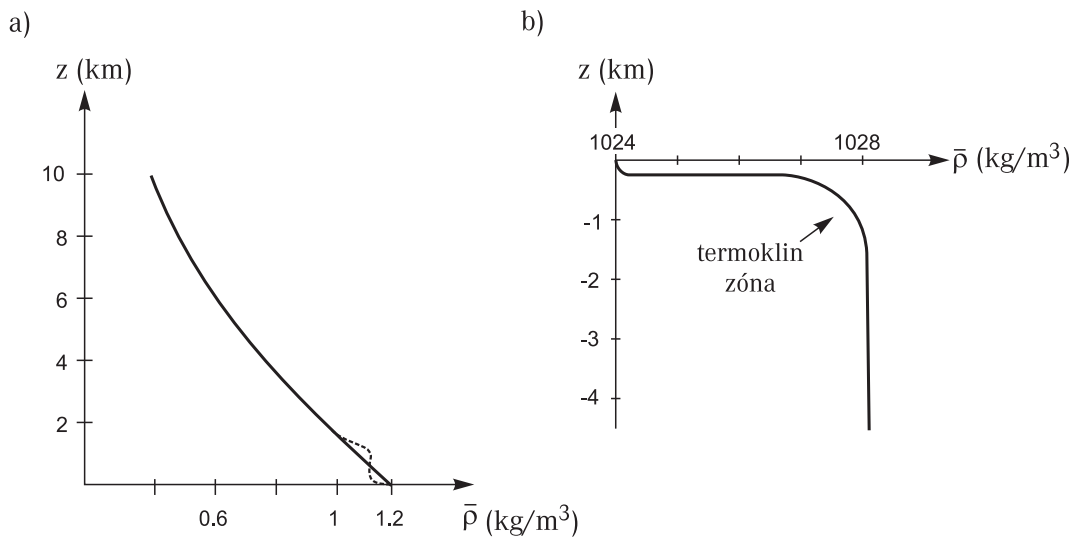
5.1 Folyadékok rétegzettsége

A rétegződés a gravitáció hatására alakul ki, a folyadék a legkisebb potenciális energia elérésére törekszik. A stabil rétegződésben ezért a nagyobb sűrűségű anyag kerül alacsonyabb szintre. A levegő különböző törésmutatójú (hőmérsékletű) rétegei néha jól megfigyelhetők a légkörben (5.1 ábra).

A rétegek rendszerint olyan közeli sűrűségűek, hogy egy folytonos $\bar{\rho}(z)$ átlagos sűrűségeloszlással jellemezhetők, mely csak a függőleges, z koordinátától függ. A légkör sűrűsége monoton csökken a magassággal (5.2a ábra), km-enként kevesebb mint 2 dkg/m^3 -rel, tehát kevesebb mint



5.1 ábra: A levegő különböző sűrűségű és törésmutatójú rétegekből áll, melyek kirajzolódhatnak a légköri képződményekben, mint például az űrhajók fellövése után visszamaradó kondenzcsíkokon [www.drsky.com/ing/nmcontrail.jpg; www.astro.ku.dk/~holger/].



5.2 ábra: A légkör (a) és az óceánok (b) átlagos sűrűségeloszlása (a nyomás magasságfüggéséből adódó járuléktól eltekintve). A légkör alsó rétege időnként jól kevertté válik. Ebben a planetáris határrétegben a sűrűség közel állandó (pontosított vonal). Jól kevert közeg az óceánok felső, ún. keveredési rétegben is. Alatta gyors sűrűség-növekedés következik be a termoklin zónában.

a felszíni 1.2 kg/m^3 sűrűség két százalékával. A föld felszíne fölötti réteg gyakran turbulenssé válik. Ebben a jól kevert rétegben, a *planetáris határrétegben* a sűrűség közel állandó. A planetáris határréteg vastagsága évszak és napszak függvénye, de átlagosan 1 km körülire tekinthető. Az óceáni sűrűségeloszlás (5.2b ábra) a légköriek szinte a fordítottja. A felső, mintegy 50 – 100 m-es *keveredési rétegben*, mely általában egybeesik az Ekman-féle határréteggel, alig változik a sűrűség, utána következik a legjelentősebb sűrűség-, és hőmérsékletgradienssel jellemzett ún. *termoklin zóna* a több száz méteres, esetleg 1 km-es mélységig, melyet egy igen lassú sűrűség-növekedés követ. A sűrűségkülönbség még a termoklin zóna felső és alsó határa között is csak néhány kg/m^3 , azaz a felszíni 1024 kg/m^3 sűrűségnek csak néhány ezreléke. A tavakban kialakuló sűrűségeloszlás a tengeri eloszlásnak kicsinyített változata, ahol a termoklin zóna a néhány méteres mélységig is feljuthat.

Laboratóriumban csökkenő koncentrációjú só-, vagy cukoroldatok egymásra rétegzésével sem

érhető el 10 százaléknál sokkal nagyobb sűrűségkülönbség a véges telítettségek miatt. Igaz azonban, hogy ez néhányszor 10 cm-en is eloszolhat, tehát a gradiens lehet nagyobb, mint a természetben. Dinamikai szempontból természetesen nem a gradiens erőssége, hanem annak az áramlási paraméterekkel kapcsolatba hozott dimenziótlan kifejezése lesz fontos.

Ha néhány, viszonylag vastag és közel állandó, de egymástól eltérő sűrűségű réteg helyezkedik el egymás fölött, két, három, stb. rétegű rétegzettségről beszélünk. Ilyenkor a $\bar{\rho}(z)$ eloszlás szakaszonként konstans. Első közelítésben az óceáni és tavi vizek kétrétegűnek tekinthetők: a keveredési tartomány és az alatta elhelyezkedő homogénnek gondolt sűrűbb folyadék együttesének. A légkörben gyakran jelentős sűrűségugrások alakulnak ki, de a planetáris határréteg és a föllette elhelyezkedő légréteg is modellezhető kétrétegű folyadékként. Akár a folytonos, akár a diszkrét esetről van is szó, a jellegzetes $\Delta\rho$ sűrűségkülönbség sokkal kisebb a ρ_0 átlagos sűrűségnél:

$$\Delta\rho \ll \rho_0. \quad (5.1)$$

E statikus értelemben enyhe rétegzettség is már új jelenségekkel jár, melyek homogén folyadékban nem fordulhatnak elő.

A rétegzett folyadék dinamikája érdekes párhuzamba állítható a forgatott homogén folyadékéval. Ezért egyelőre a folyadék sekélységét nem tételezzük fel, és a Föld görbületét sem vesszük figyelembe, tehát más oldalról kezdjük a hidrodinamika vizsgálatát mint az első fejezetben. A közelítések eddig kialakított rendszeréhez a következő fejezetben térünk vissza, ahol a forgatott sekély rétegzett folyadék nagy kiterjedésű Föld felszíni mozgásait tanulmányozzuk majd.

5.2 A Brunt–Väisälä-frekvencia

Tekintsünk egyelőre egy folytonos $\bar{\rho}(z)$ sűrűségeloszlású, nyugalomban levő folyadékot. Ha a z szintről egy egységnyi térfogatú folyadékelemet kissé kimozdítunk és a $z + \Delta z$ szintre juttatunk, akkor az ott nem marad nyugalomban, hiszen más sűrűségű környezetbe került, s a rá ható felhajtóerő megváltozott (5.3 ábra). A folyadék összenyomhatatlansága azt jelenti, hogy a térfogat a mozgás során is egységnyi marad, a részecske sűrűsége az új szinten is $\bar{\rho}(z)$, a környezeté viszont $\bar{\rho}(z + \Delta z)$ ¹. Arkhimédész tétele értelmében a súly a kiszorított folyadék $g\bar{\rho}(z + \Delta z)$ súlyával csökken, tehát az eredő erő

$$g(\bar{\rho}(z + \Delta z) - \bar{\rho}(z)) \approx g \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} \Delta z. \quad (5.2)$$

A mozgásegyenlet

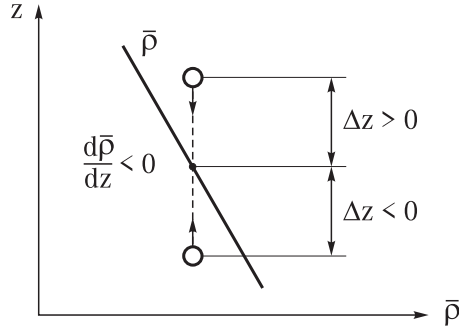
$$\ddot{\Delta z} = \frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} \Delta z. \quad (5.3)$$

Ha a sűrűség felfelé csökken, azaz a gradiens negatív, akkor akármilyen irányú is a Δz kitérés, a gyorsulás mindig vele ellentétes. Így kis kitérésekre harmonikus rezgés alakul ki a $N(z)$ (általános esetben magasságfüggő frekvenciával), ahol

$$N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz}. \quad (5.4)$$

E frekvencia a sztratifikációs vagy Brunt–Väisälä-frekvencia (D. Brunt (1886-1965) angol matematikus, meteorológus, V. Väisälä (1889-1969) finn matematikus, meteorológus, akik szinte egyszerre és egymástól függetlenül mutatták ki e frekvencia fontosságát rétegzett folyadékokban). Homogén folyadékban, ahol a gradiens eltűnik, a Brunt–Väisälä-frekvencia zérus és ott

¹Az összenyomhatóságot is figyelembe vevő gondolatmenetet a 12.3 fejezet mutatja be.



5.3 ábra: Lefelé növekvő sűrűségű sztratifikáció esetén a nyugalmi állapotából felfelé kimozdított összenyomhatatlan folyadékelem a saját sűrűségénél ritkább közegbe kerül, az erők eredője lefelé hat. Lefelé mozdítva sűrűbb közegbe kerül, a rá ható erők eredője felhajtó hatású. A nyugalmi állapot stabil, a körülötte kialakuló rezgések frekvenciája a N Brunt–Väisälä-frekvencia.

rezgés nem is alakulhat ki. Ugyanakkor (5.3) azt is mutatja, hogy pozitív sűrűség-gradiens imaginárius frekvenciára vezet, a kitérített részecske egyre messzebb kerül eredeti szintjétől, azaz a fölfelé növekvő sűrűségű rétegződés instabil.

A sztratifikáció stabilitása azt is jelenti, hogy minden folyadékrészecske, szennyeződés, szonda vagy bólya függőleges mozgása során egyértelműen megtalálja a maga sűrűségének megfelelő szintet, s ha onnét kimozdul, akkor vissza is tér.

A H vastagságú, $\Delta\rho$ sűrűségkülönbségű közegben a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete az

$$N^2(z) \approx -g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{H} \quad (5.5)$$

kifejezéssel is közelíthető. Itt megjelent a

$$g' \equiv g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \quad (5.6)$$

ún. redukált gravitációs gyorsulás. Az elnevezés arra utal, hogy a felhajtóerő következtében a súly kisebb a vákuumbelénél. A sűrűségkülönbség kicsinsységét kifejező (5.1) feltétel szerint

$$g' \ll g, \quad (5.7)$$

azaz természetes közegeinkben a redukció *jelentős*. A rétegzett folyadék függőleges irányú mozgásait a redukált g' szabályozza, s ezért azok jóval *lassabbak* a szabad felszíni mozgásoknál.

A Brunt–Väisälä-frekvencia tipikus értéke mind a légkörben, mind az óceánokban $N = 10^{-2}$ 1/s körüli, mely $T = 2\pi/N = 10$ perc körüli periódusnak felel meg. Az óceáni legnagyobb érték a termoklin zónában alakul ki. Itt 2,5 ezrelék relatív sűrűségváltozással és 600 m-es rétegvastagsággal számolva $N = 6 \cdot 10^{-3}$ 1/s frekvenciát kapunk ($T \approx 17$ perc). A mélyóceáni átlagos érték ennél kisebb: $N = 10^{-3}$ 1/s ($T \approx 1,5$ óra). A troposzférabeli Brunt–Väisälä-frekvencia a $\Delta\rho/\rho_0 = 0,2$ és $H = 10$ km értékekkel becsülhető meg, s $N = 1,4 \cdot 10^{-2}$ 1/s-ot eredményez ($T \approx 7$ perc). Az erősebb rétegzettségű sztratoszférában a Brunt–Väisälä-frekvencia két-háromszor nagyobb. Laboratóriumban ($\Delta\rho/\rho_0 = 0,1$ és $H = 1$ m) N megközelíti az 1/s-ot, mely néhány másodperces T visszatérítési időt jelent.

5.3 A hidrodinamikai egyenletek kis sűrűségingadozás esetén, a Boussinesq-közelítés

A természetes közegek rétegzettsége, mint láttuk, csak néhány százaléknyi sűrűségingadozást enged meg. Ezért nincs szükség az összenyomható folyadékok mozgását megadó teljes hidrodinamikai egyenletre, mely pl. hang- vagy lökeshullámokat is leír, hanem elegendő a sűrűségváltozásokat vezető rendben figyelembe venni. Ez az ún. Boussinesq-közelítés keretében tehető meg.

A közelítés alapfeltevése, hogy a teljes sűrűség mindig írható, mint

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \varrho_0 + \varrho''(\mathbf{r}, t), \quad |\varrho''(\mathbf{r}, t)| \ll \varrho_0, \quad (5.8)$$

ahol ϱ_0 egy konstans, helytől és időtől független referenciasűrűség, pl. a troposzféra vagy az óceánok átlagos sűrűsége. Ehhez képest a $\varrho''(\mathbf{r}, t)$ sűrűségeltérés minden helyen és pillanatban kicsi, összhangban az átlagos sűrűségkülönbségre vontakozó (5.1) megfigyeléssel. Mivel forgatott rendszerekben nemcsak függőleges rétegzettség alakulhat ki, hanem ferde is (ami persze nem feltétlenül stabil), és szeretnénk, hogy az alapegyenletek majd forgatás mellett is érvényben maradjanak, az esetleges $\bar{\varrho}(z)$ egyensúlyi rétegzettséget az (5.8) felbontás nem veszi figyelembe.

Az anyagmegmaradást kifejező (1.21)

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.9)$$

kontinuitási egyenlet (5.8) értelmében:

$$\frac{d\varrho''}{dt} + \varrho'' \operatorname{div} \mathbf{v} + \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.10)$$

A ϱ'' sűrűségingadozások kicsinsége miatt az utolsó tag elemei, pl. $\varrho_0 \partial u / \partial x$ jóval nagyobbak, mint az első, ezért az utolsó tagnak önmagában is el kell tűnnie,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.} \quad (5.11)$$

Az áramlás tehát a sűrűségváltozások ellenére is divergenciamentes marad. Ennek egyik fontos következménye, hogy a viszkózus tag továbbra is a sebesség Laplace-operátorával fejezhető ki (l. (1.19)) a Navier–Stokes-egyenletben. A (5.10) egyenletből az következik, hogy $d\varrho''/dt$ kicsi a $\operatorname{div} \mathbf{v}$ -ben fellépő tagokhoz, pl. $\varrho_0 \partial u / \partial x$ -hez képest.

Hővezetési és diffúziós folyamatok a folyadékelem ϱ'' sűrűségének lassú változására vezetnek. Érdekes az ezen folyamatokkal kapcsolatos jellegzetes távolságot megbecsülni. A diffúzióban résztvevő két, kezdetben közeli részecske (pl. szennyezőanyag) átlagos δr távolsága t idő után nyugvó közegben $\delta r = \sqrt{2Dt}$, ahol D a diffúziós állandó. A só diffúziós állandója vízben $1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, mellyel δr 1 nap után 1,6 cm, de még egy év alatt is csak 30 cm! A hődiffúziós állandó vízben mintegy százszor nagyobb, a vízgőz diffúziós állandója levegőben pedig ismét százszor. Az utóbbival tehát napi 1,6 m-es elmozdulás jár. Még a turbulencia révén felerősödött mintegy $5 \text{ m}^2/\text{s}$ -os levegőbeli diffúziós együttható (l. 7.2 fejezet) is csak napi 300 m-es távolságra vezet. A diffúziós és hővezetési folyamatok tehát a planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben lényegesek², de annál nagyobb méretekben a több napos időskálán is *elhanyagolhatók*.

A nagyléptékű folyamatokban tehát

$$\boxed{\frac{d\varrho''}{dt} = 0.} \quad (5.12)$$

²l. 5.17, 12.3 fejezet

A folyadékelem mozgása során *megtartja* sűrűségét³, hiszen d/dt a teljes deriváltat jelenti.

Az (5.8) közelítés szellemében a Navier–Stokes-egyenletben minden olyan kifejezésben, mely a teljes ϱ sűrűséget tartalmazza, vezető rendben ϱ_0 -at írhatunk. Az egyedüli kivétel a függőleges irányú sebesség, ugyanis annak egyenletében a felhajtóerő alapvető szerepet játszik. Válasszuk le ezért a ϱ_0 sűrűséghez tartozó statikus $p_0(z) = p_0 - \varrho_0 g z$ eloszlást a teljes nyomásról:

$$p(\mathbf{r}, t) \equiv p_0(z) + p''(\mathbf{r}, t). \quad (5.13)$$

Az (1.23) Navier–Stokes-egyenletben a nyomási erő és súly eredője: $-\text{grad}p - g\varrho\mathbf{n}$ úgy is írható, mint $-\text{grad}p'' + g\varrho_0\mathbf{n} - g\varrho\mathbf{n} = -\text{grad}p'' - g\varrho''\mathbf{n}$, azaz kifejezhető a sűrűség-, és nyomásingadozással. A Navier–Stokes-egyenlet így a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\text{grad}p'' - g\frac{\varrho''}{\varrho_0}\mathbf{n} + \nu\Delta\mathbf{v} \quad (5.14)$$

alakot ölti. Itt a ν kinematikai viszkozitást a ϱ_0 referenciasűrűséggel képezzük. A jobboldalon a gravitációs gyorsulás helyett a $g\varrho''/\varrho_0$ redukált gyorsulás jelenik meg ((5.6) lokális megfelelője). A fenti (5.11)-(5.14) egyenletek írják le a rétegzett folyadék mozgását Boussinesq-közelítésben. Ideális folyadéokra adiabatikus mozgást írnak le, melynek során hőközlés nem történik, a folyadékelem *entrópiája* állandó⁴.

A rétegzett folyadék *baroklin*, vagyis mozgása során az állandó sűrűségű és állandó nyomású felületek *nem* esnek egybe. Az olyan folyadékok, amelyekben az említett felületek egybeesnek (pl. összenyomhatatlan homogén folyadék) barotropok. A baroklinitás fontos következménye az, hogy a sűrűség-inhomogenitások okozta térfogati erők a közegre forgatónyomatékokat fejtenek ki. Ezért a cirkuláció még az ideális, nem forgatott, rétegzett folyadékokban sem állandó.

5.4 A hidrodinamikai egyenletek függőleges rétegzettség esetén

Függőleges rétegzettségű esetben $\bar{\varrho}(z) - \varrho_0$ is része a (5.8)-ban definiált ϱ'' sűrűségeltérésnek. Ilyenkor azonban célszerűbb a $\bar{\varrho}(z)$ -től való eltérést megadó $\varrho'(\mathbf{r}, t)$ ingadozást használni, azaz azt írni, hogy

$$\varrho = \bar{\varrho} + \varrho' = \varrho_0 + \varrho'. \quad (5.15)$$

Mivel $\bar{\varrho}(z)$ stacionárius eloszlás, melyhez áramlás nem tartozik, a ϱ' ingadozást dinamikai sűrűségnek nevezik, hiszen mozgás kialakulásával kapcsolatos.

A $\varrho'' \equiv \bar{\varrho}(z) - \varrho_0$ sűrűségeltéréssel áramlás nem jár, $\mathbf{v} = 0$. A hozzá tartozó $p'' = \bar{p}(z)$ nyomást (5.14) alapján a

$$0 = -\frac{1}{\varrho_0}\text{grad}\bar{p} - g\frac{\bar{\varrho} - \varrho_0}{\varrho_0}\mathbf{n} \quad (5.16)$$

hidrosztatikai összefüggés határozza meg. Mozgást nyilván a \bar{p} , $\bar{\varrho}$ eloszlásoktól való eltérés hozhat csak létre. Vezessük be ezért a

$$p(\mathbf{r}, t) \equiv \bar{p}(z) + p'(\mathbf{r}, t) = p_0(z) + p''(\mathbf{r}, t) \quad (5.17)$$

³Ezt a Brunt–Väisälä-frekvencia levezetésében ki is használtuk.

⁴Homogén közegben a sűrűség egyértelmű kapcsolatban van a T hőmérséklettel. Kis változásokra a $\varrho = \varrho_0(1 - \alpha T'')$ állapotegyenlet érvényes, ahol α a hőtágulási együttható, és $T'' \equiv T - T_0$ a T_0 referenciahőmérséklethez tartozó hőmérsékletingadozás. A sűrűségingadozás ekkor $\varrho'' = -\varrho_0\alpha T''$. A T'' hőmérsékletingadozásra (5.12) alapján a $dT''/dt = 0$ dinamikai egyenlet érvényes.

felbontással a p' dinamikai nyomást, mely az (1.19) egyenlettel definiált dinamikai nyomás általánosítása (homogén közegben $\bar{p}(z) = 0$ és $p' = p''$). Az (5.16) összefüggés miatt a p' dinamikai nyomás és a $\varrho' = \varrho - \bar{\varrho}$ dinamikai sűrűség (l. (5.15)) éppúgy kielégíti a mozgásegyenletet, mint p'' és ϱ'' .

A függőleges rétegzettségű folyadék egyenletei tehát

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho_0} \text{grad} p' - g \frac{\varrho'}{\varrho_0} \mathbf{n} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \varrho' = -w \frac{d\bar{\varrho}}{dz} \equiv w \frac{\varrho_0}{g} N^2(z), \quad (5.19)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (5.20)$$

A ϱ'' -re vonatkozó (5.12) sűrűségegyenlet ϱ' -re történő átírásában felhasználtuk, hogy $\bar{\varrho}$ csak a függőleges koordinátától függ, s behelyettesítettük a Brunt–Väisälä-frekvencia definícióját. A dinamikai sűrűség kicsinysége ellenére ez egy nemlineáris egyenletrendszer, mely minden fontos, függőleges rétegzettséggel kapcsolatos jelenséget leír.

5.5 A dimenziótlan alak, a belső Froude-szám

Annak megbecslésére, hogy mikor játszik egy *áramlásban* lényeges szerepet a rétegzettség, érdemes a függőleges sztratifikációjú eset egyenletét dimenziótlan alakba írni. Mérjük a vízszintes síkbeli távolságot valamilyen L jellemző kiterjedés egységében, a függőleget a folyadék H mélysége, a vízszintes sebességet pedig a U karakterisztikus sebesség egységében. Az időegység tehát L/U . A dinamikai nyomás mértékegységét $\varrho_0 U^2$ -nak választjuk. A ϱ' dinamikai sűrűség nagyságrendjét az adja meg, hogy a $g\varrho'/\varrho_0$ redukált gravitációs gyorsulás összemérhető a dinamikai nyomásból származó $(1/\varrho_0)\partial p'/\partial z$ függőleges irányú gyorsulással (l. (5.18)). ϱ' tipikus értéke ezért $\varrho_0 U^2/(gH)$. A W karakterisztikus függőleges sebesség nagysága az (5.19) egyenlet alapján a dinamikai sűrűség időderiváltja osztva $\varrho_0 N^2/g$ -vel, tehát

$$W = \frac{U^3}{LHN^2}. \quad (5.21)$$

Itt N a Brunt–Väisälä-frekvencia átlagos értéke.

Az

$$\begin{aligned} x, y, z &\rightarrow Lx, Ly, Hz, & \mathbf{u} &\rightarrow U\mathbf{u}, & w &\rightarrow Ww, \\ t &\rightarrow \frac{L}{U}t, & p' &\rightarrow \varrho_0 U^2 p', & \varrho' &\rightarrow \frac{\varrho_0 U^2}{gH} \varrho' \end{aligned} \quad (5.22)$$

áthelyettesítéssel a

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\text{grad} p' + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (5.23)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{Fr^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \varrho' \right) + \frac{1}{Re} \Delta w, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{grad}) \varrho' = w \quad (5.25)$$

dimenziótlan egyenleteket kapjuk. A divergencia-mentesség alakja változatlan. Megjelent egy új dimenziótlan szám, az

$$\boxed{Fr' = \frac{U}{HN}} \quad (5.26)$$

belső Froude-szám. Az ideális, azaz sűrűdásmentes, rétegzett folyadék dinamikáját egyetlen szám, a belső Froude-szám szabályozza. Két rétegzett közegbeli áramlás akkor lehet hasonló, ha belső Froude-számuk azonos.

A belső Froude-szám jelentése és a (1.27)-ben definiált (külső) Froude-számhoz való hasonlósága világossá válik, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzetét a teljes folyadékmélységben kialakuló $\Delta\rho$ sűrűségkülönbséggel becsüljük (5.5), mellyel

$$Fr' \approx \frac{U}{\sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} H}} = \frac{U}{\sqrt{g' H}}. \quad (5.27)$$

A belső Froude-szám tehát ugyanúgy fejezhető ki a sűrűségkülönbség következtében kialakuló (5.6) redukált gravitációs gyorsulással, mint a külső (1.27) Froude-szám a teljes g -vel.

A belső Froude-szám négyzete tekinthető úgy, mint a folyadék átlagos $\rho_0 U^2$ kinetikus energiájának a rétegződés teljes átrendeződéséhez szükséges $\Delta\rho g H$ potenciális energiához való viszonya:

$$Fr'^2 = \frac{\text{mozgási energia}}{\text{rétegzettség helyzeti energia}}. \quad (5.28)$$

Látni fogjuk, hogy Fr' egyben az áramlási sebességnek és a rétegzett folyadékbeli belső gravitációs hullámok sebességének az aránya.

A rétegzettség hatása akkor erős, ha a belső Froude-szám *kicsi*, azaz ha

$$Fr' \ll 1. \quad (5.29)$$

Ez annak a *dinamikai* feltétele, hogy az áramlásban lényeges szerepe legyen a sztratifikációnak, s nincs ellentmondásban azzal, hogy a rétegzettség *statikus* értelemben (l. (5.1)) gyenge.

A belső Froude-szám értéke légköri és óceáni példákban $10^{-1} - 10^{-2}$ körüli. A termoklin zónabeli $N = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ értékkel, $H = 600 \text{ m}$ mélységgel, és a homogén közegre jellemzőknél lassabb, $U = 0,1 \text{ m/s}$ -os sebességgel számolva $Fr' = 3 \cdot 10^{-2}$. A légköri becslés $U = 10 \text{ m/s}$ -mal ($N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $H = 10 \text{ km}$) $Fr' = 0,1$. Ugyanezek az értékek laboratóriumban ($N = 1 \text{ s}^{-1}$, $H = 1 \text{ m}$) $U = 3 - 10 \text{ cm/s}$ -os sebességgel kaphatók meg.

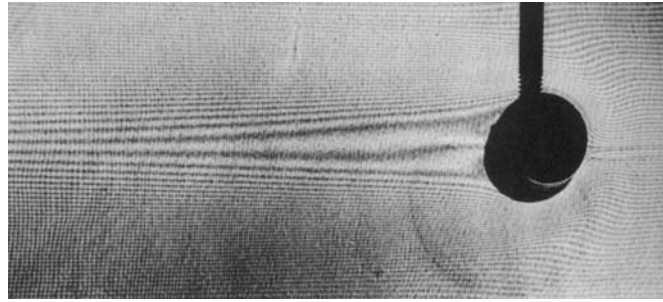
Érdeemes megemlíteni, hogy a függőleges sebesség (5.21) becslése a belső Froude-számmal írható úgy is, mint

$$\frac{W/H}{U/L} = Fr'^2. \quad (5.30)$$

Ez az új dimenziótlan szám tehát meghatározza, hogy milyen erős lehet a feláramlás, pontosabban a $\partial w/\partial z$ derivált értéke a vízszintes síkbeli divergencia U/L nagyságrendjéhez viszonyítva. Annak ellenére, hogy a vízszintes és függőleges méreteket megkülönböztettük, a folyadék sekélységét nem tételeztük föl. A belső Froude-szám kicsinysége, az erős rétegzettség azonban éppolyan típusú megszorítást ír elő a W/U viszonyra, mint a sekélység. Erősen rétegzett folyadékban a feláramlások gyengék.

5.6 Analógia a forgatott folyadékkal

A belső Froude-szám (5.26) definíciója hasonló a Rossby-szám (1.3) kifejezéséhez. Mindkettőben a vízszintes sebességet hasonlítjuk össze egy távolság és frekvencia szorzatával. A



5.4 ábra: A blokkolás jelensége: igen erősen rétegzett folyadékban a mozgó test maga előtt tolja az egész folyadékréteget. A folyadék nem folyja körül az akadályt, mert a függőleges sebességkomponens elhanyagolhatóan kicsi. Ez a Taylor–Proudman-tétel analogonja rétegzett folyadékokra [Tritton].

Rossby-számban azonban a vízszintes, a Froude-félében pedig a függőleges méret jelenik meg. Ebben kifejeződik a Coriolis-erő és a gravitációs erő irányának különbözősége.

Az erős rétegzettség, éppúgy, mint a gyors forgatás, az áramlást kétdimenzióssá teszi. Lát-szik ez az (5.30) összefüggésből is, hiszen $Fr' \rightarrow 0$ mellett $W \rightarrow 0$. Dinamikailag ezt az Fr'^2 -tel megszorított (5.24) egyenlet fejezi ki, melyben az $Fr' \rightarrow 0$ határesetben a függőleges hidrodinamikai gyorsulás elhanyagolhatóvá válik, s a vízszintes peremek miatt a függőleges sebesség eltűnik: $w \equiv 0$. A felső légkörben, a sztratoszférában ezért mozognak a felhők vékony vízszintes síkokban. Ha egy erősen rétegzett folyadékban véges vastagságú akadályt, pl. vízszintes tengelyű hengert mozgatunk, akkor az a vastagságának megfelelő folyadékréteget maga előtt tolja, ill. maga mögött húzza, anélkül, hogy a közeg az akadályt körülfolyná (5.4 ábra). Az adott réteg tehát együtt mozog az akadállyal. Ez az ún. *blokkolási jelenség* (blocking) homogén folyadékban sohasem fordul elő, s a Taylor-oszlopok analogonja rétegzett közegekben.

Bár mind a gyors forgatás, mind az erős rétegzettség kétdimenziós viselkedésre vezet, az előbbi függőleges, az utóbbi pedig vízszintes síkbeli struktúrák kialakulásával jár. Ezért az analógia teljessé tételéhez (5.1 táblázat) ezen irányok felcserélése is szükséges.

RÉTEGZETT	N	függőleges irány	H	Fr'	blokkolás
FORGATOTT	$2 \Omega $	vízszintes irány	L	Ro	Taylor-oszlop

5.1 táblázat: A rétegzett, nem forgatott és forgatott, homogén folyadékok jellemzői közötti megfeleltetés

Végül megjegyezzük, hogy amint az előző fejezetbeli példák is mutatták, a természeti áramlások nem nagyon erősen rétegzettek, hiszen belső Froude-számuk nem rendkívül kicsi. Sőt ezen számok nagyságrendje megegyezik a tipikus Rossby-számokéval, amiből az következik, hogy a környezeti áramlások szempontjából a rétegzettség és a forgatás összemérhető fontosságú (l. 6.4 fejezet).

5.7 Belső hullámok

5.7.1 Síkhullám megoldások

A rétegzett folyadék kollektív mozgásában a Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgés megfelelője egy speciális hullámfajta, a belső hullám. A peremektől távol, a (5.18)-(5.20) hidrodinami-

kai egyenleteket kis amplitudójú mozgásra alkalmazva, a másodrendűen kicsiny advektív gyorsulások elhanyagolhatók, s egy lineáris változathoz jutunk. A megoldást az egyszerűség kedvéért az y irányban eltolásinvariánsnak tételezve, kereshetjük síkhullám alakban. Tételezzük fel, hogy $(u, w, p'/\rho_0, -\rho'g/(\rho_0 N)) = (u_0, w_0, P_0, r_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_z z)$. Itt $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ a hullámszám vektora, ω_0 a frekvenciája. Ezzel elhanyagolható viszkozitás esetén, állandó Brunt–Väisälä-frekvenciát feltételezve az

$$i\omega_0 u_0 = +ik_x P_0, \quad i\omega_0 w_0 = +ik_z P_0 + Nr_0, \quad (5.31)$$

$$i\omega_0 r_0 = -Nw_0, \quad k_x u_0 + k_z w_0 = 0 \quad (5.32)$$

polarizációs egyenletekhez jutunk.

Vegyük észre, hogy ez ekvivalens a tehetelenségi hullámokra kapott (1.64)-(1.67) rendszerrel, ha ott a viszkozitást elhanyagoljuk, és az

$$u_0 \rightarrow w_0, \quad k_x \rightarrow k_z, \quad w_0 \rightarrow u_0, \quad k_z \rightarrow k_x, \quad v_0 \rightarrow r_0, \quad 2\Omega \rightarrow N \quad (5.33)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ez megfelel az előző fejezetben említett iránycserének. Az y irányú sebesség helyett most a sűrűségváltozás szerepel, s 2Ω szerepét a Brunt–Väisälä-frekvencia veszi át.

Nemtriviális megoldás csak akkor létezik, ha

$$\omega_0 = \pm N \frac{k_x}{k} = \pm N \cos \theta, \quad (5.34)$$

ahol θ a \mathbf{k} vektor vízszintes tengellyel bezárt szöge⁵. Ez a belső hullámok diszperziós relációja (5.5 ábra). A \pm előjel azt fejezi ki, hogy minden hullámszámvektorhoz tartozik egy vele azonos és ellentétes irányban haladó hullám is. A $\cos \theta$ tényező mutatja, hogy a hullám frekvenciája felülről korlátos: nem lehet nagyobb az N értéknél: $|\omega_0| \leq N$. Ilyen hullámok tehát *csak* rétegzett rendszerben fordulhatnak elő, de ott sem rezeghetnek gyorsabban N -nél. A legnagyobb frekvenciájúak a vízszintes irányába haladó hullámok ($k_z = 0$), melyekben a folyadékrészecskék függőlegesen mozognak a Brunt–Väisälä-frekvenciával. Ennél gyorsabban rezgő belső hullámok *nem gerjeszthetők*. Gyors gerjesztés esetén ugyanis a részecskéknek nincs idejük saját, N frekvenciájú rezgésük kialakítására, ezért az energiaátadás lokális marad és nem vezet hullámterjedésre.

A (5.32) egyenletből látszik, hogy a sebességtér merőleges a hullámszámvektor irányára, a hullám transzverzális (5.6 ábra). A folyadékelemek tehát a vízszintessel $\pi/2 - \theta$ szöget bezáró "lejtőn" mozognak. A gravitációs gyorsulás lejtő irányú komponense $g \cos \theta$, s a rezgés frekvenciája ezért a Brunt–Väisälä-frekvencia $\cos \theta$ -szorososa. A polarizációs egyenletek szerint, ha u_0, w_0 valós, akkor P_0 is az, de r_0 imaginárius. Ez azt jelenti, hogy a nyomás-, és sűrűségmaximumok negyed periódus különbséggel követik egymást.

5.7.2 Fázis és csoportsebesség

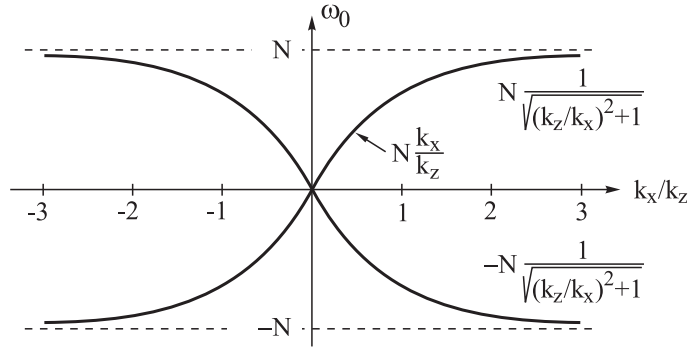
A belső hullámok fázissebessége az x és z irányban

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = \pm N \frac{1}{k}, \quad c_z = \frac{\omega_0}{k_z} = \pm N \frac{k_x}{k_z k}. \quad (5.35)$$

Az energia terjedését megadó \mathbf{c}^* csoportsebességre azt kapjuk, hogy

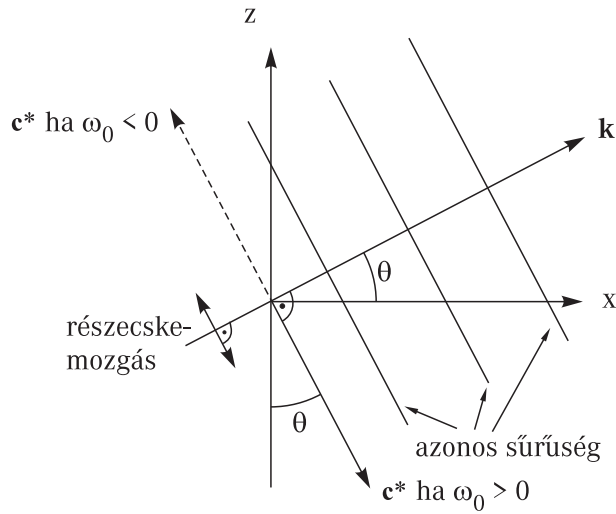
$$c_x^* = \pm N \frac{k_z^2}{k^3}, \quad c_z^* = \mp N \frac{k_x k_z}{k^3}. \quad (5.36)$$

⁵Az összefüggés y irányban is terjedő hullámokra is érvényes, ha θ a hullámszámvektornak a vízszintes síkkal bezárt szögét jelöli.



5.5 ábra: Belső hullámok diszperziós relációja rögzített k_z függőleges hullámszám esetén. A $N \rightarrow 2\Omega$, $k_x \rightarrow k_z$ ($\sin \theta \rightarrow \cos \theta$) cserével a tehetetlenségi hullámok diszperziós relációját kapjuk (1.15 ábra).

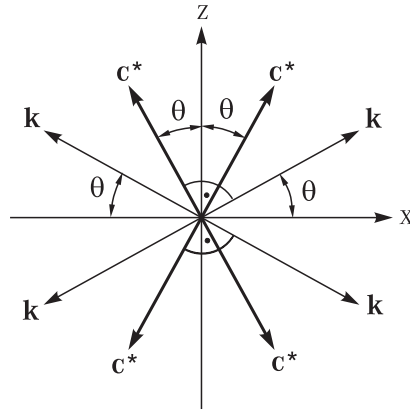
A csoportsebesség abszolútértéke $N \sin \theta / k$, iránya pedig merőleges a \mathbf{k} vektorra. Az első szögnyegyben fekvő hullámszámvektor ($k_x, k_z > 0$) esetén a pozitív frekvenciájú hullám csoportsebessége a \mathbf{k} -tól jobbra lefelé mutat (5.6 ábra). Vízszintes terjedés ($k_z \rightarrow 0$) esetén a Brunt-Väisälä-frekvenciájú rezgés magától is fennmarad, az ilyen irányú hullámmal ezért energia nem halad, csoportsebessége eltűnik. A függőleges irányú terjedés határesetében ($k_x \rightarrow 0$) a hullámzás megszűnik: $\omega_0 \rightarrow 0$, összhangban a blokkolási jelenséggel.



5.6 ábra: A \mathbf{c}^* csoportsebesség és \mathbf{k} hullámszámvektor viszonya belső hullámban. Az energia mindig a hullámfrontokkal párhuzamosan terjed, tehát \mathbf{k} -ra merőlegesen. Az, hogy jobbra vagy balra mutat, a fázissebesség (frekvencia) előjelétől függ. A részecske-mozgás a hullámszámvektorra merőleges síkban történik.

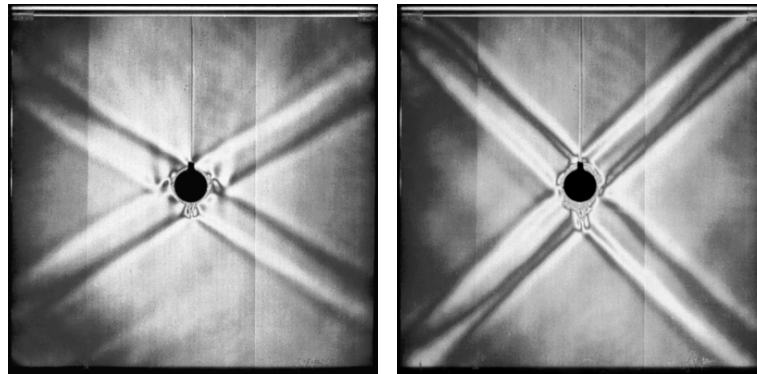
Ha a folyadékot valamilyen kis méretű test ω ($0 < \omega < N$) frekvenciájú mozgásával gerjesztjük, akkor a belső hullámok átveszik ezt a frekvenciát: $\omega_0 = \omega$, és $\theta = \pm \arccos(\omega/N)$ szög alatt haladnak az x tengelyhez képest. A belső hullám tehát erősen *anizotróp* módon terjed. A csoportsebesség vektorok $\pm\theta$ szöget zárnak be a függőleges tengellyel (5.7 ábra). Ezekben az irányokban megváltozik a törésmutató, s az ergiaterjedés folyamata jellegzetes X alakzatot rajzol ki.

A gerjesztő szögsebesség növelésekor az energia terjedési iránya egyre közelebb esik a függőlegeshez, a kialakuló X alakzat egyre meredekebb, s $\omega_0 = N$ -re eltűnik. Mindez jól látható



5.7 ábra: Pontszerű, $|\omega| < N$ frekvenciájú forrásból induló belső hullámok és csoportsebességeik lehetséges irányai.

laboratóriumi kísérletekben (5.8 ábra). Belső hullámok keltette mintázat gyakran figyelhető meg felhőképeken is (5.9 ábra).



(a)

(b)

5.8 ábra: Kisméretű henger ω frekvenciájú mozgatóásával gerjesztett belső hullámok. Jól megfigyelhető a törésmutató változása egy X alakú tartományban, mely az energia terjedési irányának felel meg. Nagyobb gerjesztési frekvenciára (jobb oldali kép) az X alak meredekebb (v.ö. 1.20 ábra).

5.7.3 A törési törvény, elhajlás, inverzió

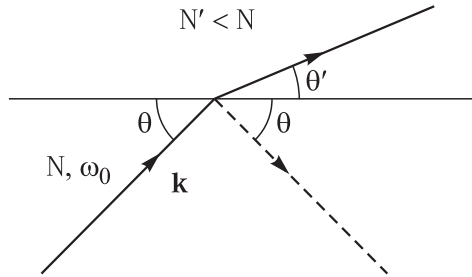
A belső hullámok különböző Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegek határán megtörnek. A törési törvény abból a megszorításból adódik, hogy a hullám frekvenciája nem változik. Ha az N Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegekben a síkhullám a vízszintessel θ szöget zár be, akkor az N' Brunt–Väisälä-frekvenciájú szomszédos közegbe történő áthaladás után az új θ' szögre (5.10 ábra) igaz, hogy

$$N \cos \theta = N' \cos \theta'. \quad (5.37)$$



5.9 ábra: A belső hullámok időnként érdekes felhőalakok kialakulására vezetnek [www.wolkenatlas.de/wolken/wo11403.htm].

A nagyobb Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegben tehát a szög koszinusza kisebb, az erősebben rétegzett közegbe lépve hullámszám-, (csoportsebesség-) vektor a függőleges (vízszintes) felé törik.

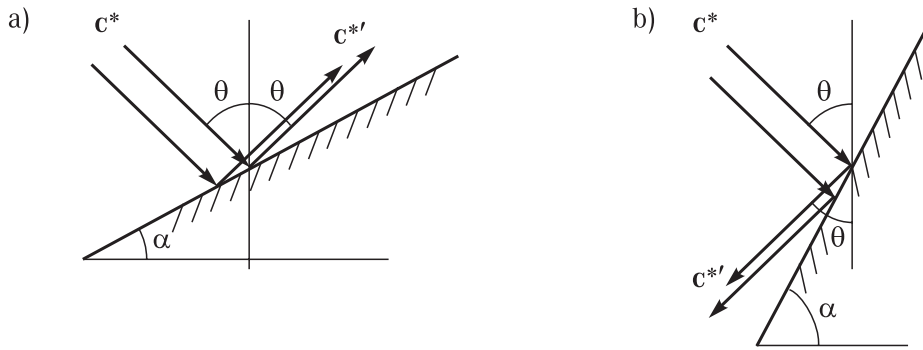


5.10 ábra: A belső hullám terjedési iránya (hullámszámvektorának iránya) megváltozik két különböző Brunt–Väisälä-frekvenciájú közeg határán. A gyengébb rétegzettségű közegbe érve a hullám a vízszintes felé törik. A szaggatott vonal a visszavert hullám irányát mutatja. A csoportsebességvektorok $\pi/2 - \theta$, $\pi/2 - \theta'$ szöget zárnak be a vízszintessel.

Ennek érdekes következménye a teljes visszaverődés jelensége. Amennyiben ugyanis N' kisebb a hullám frekvenciájánál, $N' < |\omega_0|$, a szög koszinuszának 1-nél nagyobbá kellene válnia. A frekvencia túl nagy ahhoz, hogy az új közegben belső hullám kialakulhasson. Ilyenkor az adott ω_0 frekvenciájú hullám az eredeti közegben marad. Közel homogén folyadékrétegről minden belső hullám visszaverődik, hiszen mint láttuk, homogén közegben belső hullámok nem létezhetnek.

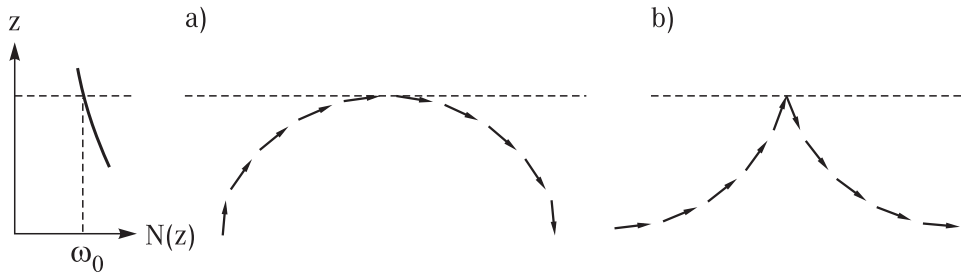
A belső hullámok terjedésének anizotrópiája merev lapról történő visszaverődés esetén is megmarad. A csoportsebességnek irányt kell váltania, de a függőlegessel bezárt szög nagyságának a visszavert hullámban is θ -nak kell maradnia. Az α szögű lejtőn történő visszaverődés jellege függ attól, hogy α mekkora a kritikus $\alpha_c \equiv \pi/2 - \theta$ szöghoz képest. Ha a dőlésszög kicsi, akkor a haladási irány vízszintes komponense nem változik (5.11a ábra), ha viszont nagyobb a kritikusnál, akkor előjelet vált (5.11b ábra). Vegyük észre, hogy egyik esetben sem igaz, hogy a beesési és a visszaverődési szög azonos lenne. Ez is a belső hullámok egy különleges tulajdonsága. A tengeri belső hullámok meredek partvonalról visszaverődnek. Lapos partvonal esetén erre nincs módjuk (a felső rétegről való visszeverődés sem változtatja meg a csoportsebesség vízszintes komponensét). Az ilyen partvonalak mentén a belső hullámok ezért megtörnek, energiájuk turbulens mozgássá alakul.

A fentiek alapján kvalitatív képet alkothatunk arról is, hogy mi történik, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia térben folytonosan változik. Abban az esetben, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia



5.11 ábra: Belső hullám visszaverődése α szögű lapon. A vonalak a csoportsebességvektor irányát mutatják. a) Lapos akadály. A csoportsebesség vízszintes komponense nem változik. a) Meredek akadály. A csoportsebesség vízszintes komponense előjelet vált.

fölfelé gyengül, a fölfelé induló belső síkhullám iránya egyre közelebb kerül a vízszinteshez. Arról a rétegről, melynek Brunt–Väisälä-frekvenciája éppen a hullám ω_0 frekvenciája, a hullám lefelé hajlik, visszaverődik (5.12 ábra).



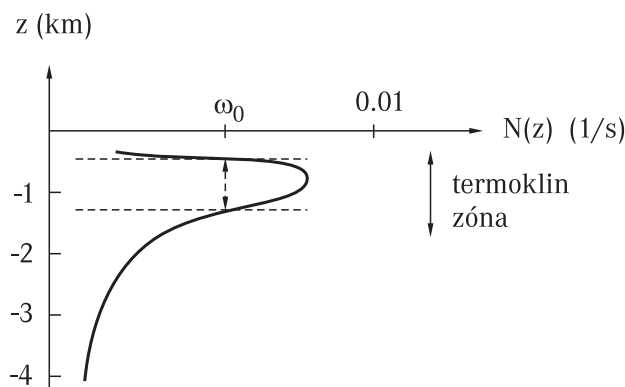
5.12 ábra: ω_0 frekvenciájú belső hullám terjedési irányának változása felfelé gyengülő sztratifikáció esetén. a) A hullámszámvektorok változása haladás közben. b) A csoportsebességvektorok változása haladás közben. Az $N = \omega_0$ szinten teljes visszaverődés történik.

Általánosan, az ω_0 frekvenciájú belső hullám csak abban a tartományban mozoghat, ahol $|\omega_0| \leq N(z)$. Mivel a termoklin zónában a Brunt–Väisälä-frekvenciának lokális maximuma van, az ott keletkezett viszonylag gyors belső hullámok se a felszíni, se a mélytengeri vizekbe nem juthatnak el (5.13).

A légkörben a különleges rétegzettségű tartományokat szokatlan hőmérsékleteloszlásuk jelzi. Ilyenek az ún. *inverziós* helyzetek, melyeket az jellemez, hogy a hőmérséklet *nő* a magassággal, a szokásos csökkenés helyett. A magassággal ekkor nagyon gyorsan csökken a sűrűség, s ezért an inverzió mindig erős rétegzettségnek felel meg (l. 12.3 fejezet).

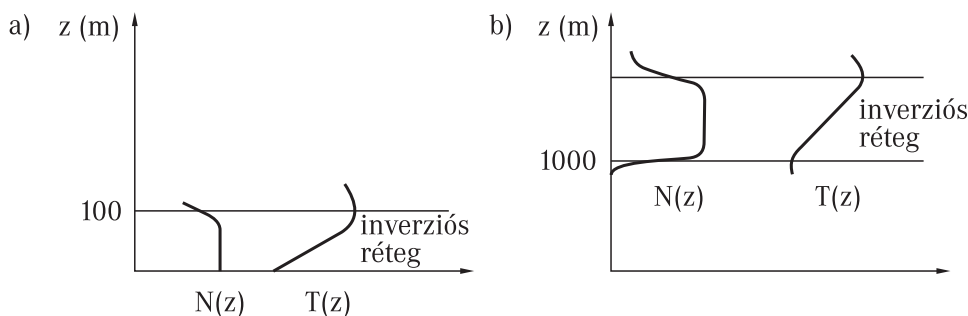
Az inverzió egyik fajtája akkor jön létre, ha szélcsendes időben a talaj lehűlése miatt a hideg éjszakai légtömegek a talaj közelében maradnak, s föléjük melegebb levegő kerül (5.14 a ábra). Különösen gyakori ez télen és zárt völgyekben. A talajközeli levegőben ekkor nagy a Brunt–Väisälä-frekvencia és alig változik. Az áramlások közel síkbeliek, a szennyezések tehát mintegy csapdába záródnak, nem tudnak a magasabb légrétegekbe jutni. Az ilyen rétegek nem túl vastagok (50 – 100 m) és viszonylag gyorsan feloldódnak.

Nagyobb környezeti veszélyekkel jár az inverzió azon, néhány napig is fennállni képes fajtája, melynek során leszálló, viszonylag meleg légtömegek (anticiklon) kerülnek szinte az egész planetáris határréteg fölé. A planetáris határrétegben akár turbulens feláramlások is lehetnek, az tehát nem rétegzett, s feléje kerül egy erősen sztratifikált, és ezért nagyon stabil réteg. Ha az alsó rétegből hideg légcsoomagok kerülnek a melegbe, akkor azok környezetüknél jóval nehezebbek



5.13 ábra: A Brunt–Väisälä-frekvencia tipikus mélységfüggése tengerekben. A maximális frekvenciák a termoklin zónában esik. Adott ω_0 frekvenciájú, viszonylag gyors belső hullámok a termoklin zóna azon alrétegére korlátozódnak, ahol $|\omega_0| \leq N(z)$ (szaggatott vonallal jelölt sáv).

és gyorsan elhagyják az inverziós réteget. A teljes visszaverődés miatt az inverziós rétegből sincs energiaáramlás az alsó felé. A réteg sok szempontból úgy hat, mintha egy merev vízszintes zárólap lenne (5.14 b ábra). Az ilyen inverzió ezért jár gyakran erős légszennyeződéssel, szmog képződéssel.



5.14 ábra: a) Talajközeli inverzió. A Brunt–Väisälä-frekvencia nagy, ezért az áramlások közel kétdimenziósak. Az energiacsere gyenge az egymás fölötti vízszintes rétegek között. b) Leáramlás következtében kialakuló inverzió. A planetáris határréteg nem feltétlenül stabil, benne a Brunt–Väisälä-frekvencia nincs értelmezve, az inverziós rétegben viszont hirtelen nagy a Brunt–Väisälä-frekvencia. A két réteg között energiacsere és anyagkicserélődés csak nagy energiabefektetéssel lehetséges.

A légkör legalsó rétege, a troposféra fölött a 10 – 12 km magasságban kezdődő sztratosféra is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy benne a hőmérséklet nő a magassággal (kb. az 50km-es szintig). Ez tehát egy hatalmas, állandó elhelyezkedésű inverziós rétegnek is tekinthető, mely igen stabilan sztratifikált (innét ered elnevezése, s ezért biztosít síma haladást a repülőgépeknek). A sztratosféra ezért mintegy záróréteggént helyezkedik el a troposféra felett. A két réteg között anyagkicserélődés néhány igen erős feláramlással járó folyamat (vulkánkitörés, atom- vagy hidrogémbomba robbantás, nagy viharfelhők) kivételével nem megy végbe. Ezért tekinthetjük a légkör alsó rétegét a felette elhelyezkedőktől függetlennek, s ezért szorítkozunk ezután is főleg a troposzférabeli légköri jelenségek vizsgálatára.

5.8 Hegy mögötti hullámok (lee waves)

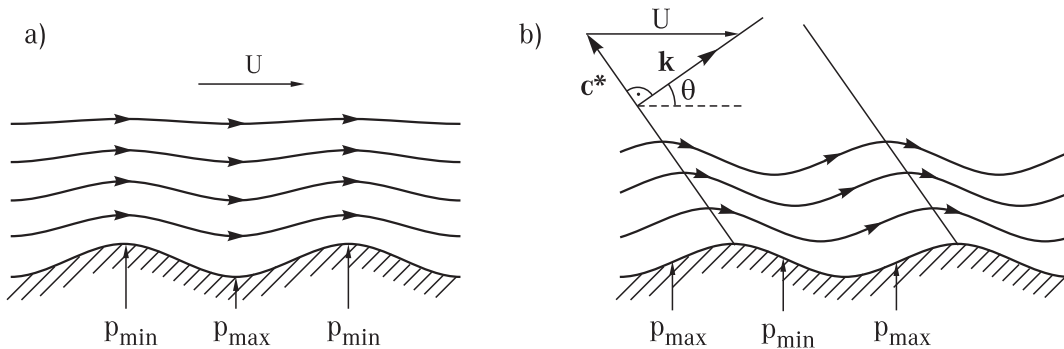
5.8.1 Szemléletes magyarázat

A domborzati egyenetlenségek fölött az adott irányból állandó U sebességgel fújó szél (vagy homogén áramlás) rétegzettség esetén jelentős felfelé irányuló energiaáramot biztosító *stacionárius* belső hullámokat hozhat létre.

A domborzatnak az áramlás irányára merőleges átlagos λ hullámhossza meghatározza az általa keltett belső hullámok k_x hullámszámát. A λ távolságban levő két hegyvonulat közötti áthaladás ideje $\lambda/|U|$, a közeghez rögzített koordinátarendszerben a hegyvonulatok tehát $|\omega| = 2\pi|U|/\lambda$ frekvenciával érkeznek, s ez felel meg a hullám gerjesztési frekvenciájának. Belső hullámok csak $|\omega| < N$ esetén gerjesztődnek, vagyis csak olyan U sebességű áramlásokra, melyekre

$$|U| \leq U_c \equiv \frac{\lambda N}{2\pi}, \quad (5.38)$$

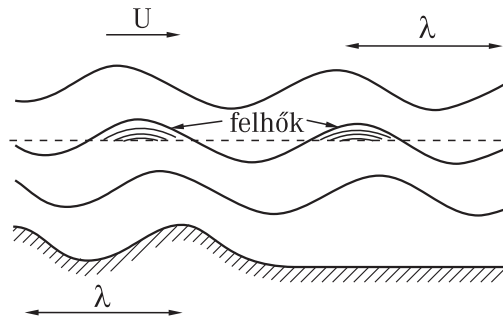
azaz, melyek az U_c kritikus sebességnél *lassabbak* (5.15 ábra). A kritikus sebesség a $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ értékkel számolva, $\lambda = 1 - 10 \text{ km}$ hullámhossz esetén $U_c = 1,6 - 16 \text{ m/s}$. A nagy hegyek és hegyvonulatok mögött tehát még eléggé erős szelek is képesek lee hullámokat keltetni. Az éppen a kritikus sebességgel érkező áramlás a Brunt–Väisälä-frekvenciát biztosítja, s hozzá vízszintes terjedési irány, $k_z = 0$ tartozik. Ennél lassabb áramlások kisebb frekvenciájú gerjesztést jelentenek, mely véges k_z hullámszám-komponens megjelenésével jár (l. (5.34)). Mivel a keltés a domborzaton történik, a hullámok innét távolodnak, ezért a kialakuló hullámok frontja az áramlás felé dől (5.15b ábra).



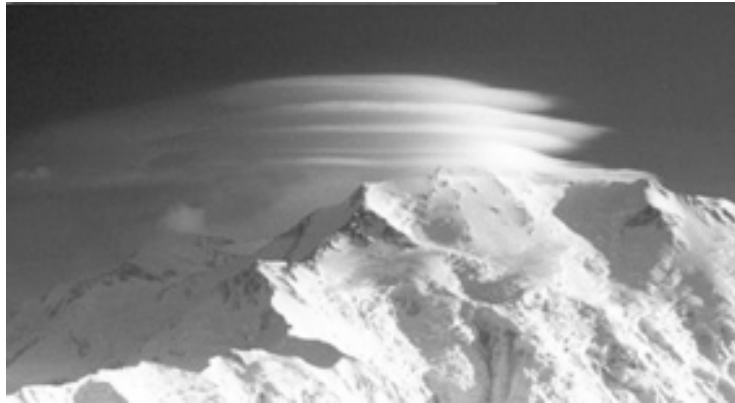
5.15 ábra: Periodikus domborzat háttéráramlásban stacionárius sebességeloszlást alakíthat ki. A kritikus sebességnél gyorsabb áramlás esetén a mozgás erőssége a magassággal csökken (a). Ennél lassabb áramlásban csillapítatlan belső hullámok keletkeznek, melyek az áramlás irányában és felfelé terjednek (b). A relatív mozgás csoportsebessége merőleges a terjedési irányra, de a háttéráramlás sebességével képzett eredő párhuzamos vele. p_{max} és p_{min} a nyomás szélsőértékeit jelzi.

A hegyvonulatok vagy izolált hegyek mögötti hullámok érdekes meteorológiai jelenségekre vezetnek. A hullámzás okozta feláramlás térben periodikus (de időben alig változó) felhősödést és esetleg csapadékképződést okozhat, hiszen a hullámhegyekben a levegő elérheti a kicsapódási szintet. Az ilyen felhősávok a hegyvonulattal párhuzamosan, azaz a szél irányára merőlegesen alakulnak ki (5.16 ábra). A felhősávok távolsága a hegyvonulat szél irányban mérhető hullámhossza. A hegyvonulat egyenetlenségei miatt a hullámhegyekben időnként lokalizált lencsefelhők (lentikuláris felhők) jönnek létre (5.17 ábra). A hegy mögötti hullámokban kialakuló felhőket a szél nem elfújja, hanem éppen ellenkezőleg, átfúj rajtuk: a hullámvölgyekbe kerülve

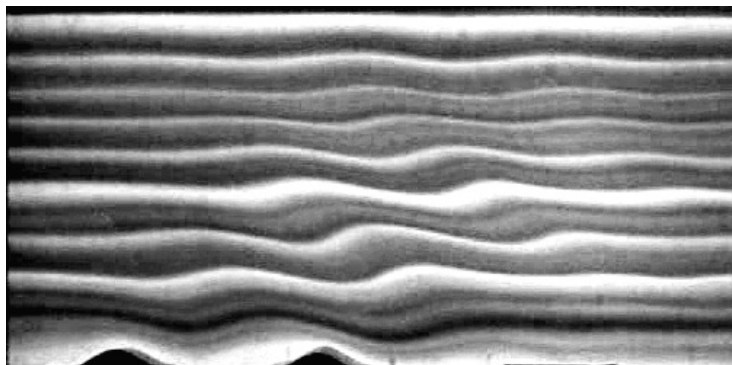
a vízgőz elpárolog, viszont új légcsoomagok érkeznek a hullámhegyekbe, ahol végbemegy a kicsapódás. A felhő dinamikus egyensúlyban létezik, alakja helyhez kötött, a stacionárius áramlásnak megfelelően.



5.16 ábra: Hegy mögötti hullámok sematikus képe. Ha a középső levegőréteg nedves, s a hullámhegyek elérik a kicsapódási szintet (szaggatott vonal), akkor a hegyvonulattal párhuzamos felhősávok, vagy lencsefelhők alakulnak ki.



5.17 ábra: A lencsefelhőkben világosan megmutatkozik a levegő rétegzettsége. A Mount Mc Kinley (Alaszka) mellett kialakult felő [H. Garber felvétele].



5.18 ábra: Hegy mögötti hullámok laboratóriumban. A nyugvó, egyenletesen rétegzett folyadék alján két hegy-alakú akadályt állandó sebességgel húzunk. Ennek következtében nemlineáris belső hullámok alakulnak ki, melyek amplitúdója összemérhető a hegyek magasságával.

5.8.2 Lineáris elmélet

Tekintsünk belső hullámokat egy $u_0 = U, w_0 = 0$ sebességű vízszintes háttéráramlásban. Az (5.18)-(5.20) mozgásegyenletet ekkor a sebességben ezen konstans érték körül kell linearizálni, mely a $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} - (U, 0)$ sebességeltérésekre ideális folyadékban a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0}\text{grad}p' - g\frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{n}, \quad (5.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho' = w'\frac{\rho_0}{g}N^2(z), \quad (5.40)$$

$$\text{div } \mathbf{v}' = 0 \quad (5.41)$$

egyenletekre vezet. Síkhullámmegoldásra az egyenletek azt mutatják, hogy az 5.7 fejezetben tárgyalt belső hullámokban az $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - Uk_x$ helyettesítést kell elvégeznünk. A diszperziós reláció tehát

$$\omega_0 = Uk_x \pm N\frac{k_x}{k}, \quad (5.42)$$

ahol k a hullámszámvektor hossza. Amennyiben a hullámot egy

$$d(x) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (5.43)$$

függvénnyel leírt hegyvonulat hozza létre, a hullám átveszi az ennek megfelelő $k_x = 2\pi/\lambda > 0$ hullámszámot. A hullám akkor válik stacionáriussá, frekvenciája akkor tűnik el, ha

$$|U| = \frac{N}{k}, \quad (5.44)$$

vagyis, ha a függőleges hullámszámkomponensre igaz, hogy

$$k_z^2 = \frac{N^2}{U^2} - k_x^2. \quad (5.45)$$

A valós megoldás feltétele $|N/U| \geq k_x$, azaz $|U| \leq U_c$, ahol U_c az (5.38)-ban meghatározott kritikus sebesség.

Az ennél gyorsabb áramlások esetén a hullámszám imaginárius: $k_z = \pm i/\delta$, ahol δ valós, s ez a függőleges irányban az $\exp(-z/\delta)$ szerinti lecsengő amplitudójú hullámzásnak felel meg, mely pontosan követi a domborzat alakját (5.15a ábra). Ilyen exponenciálisan csillapodó hullámok kialakulhatnak homogén közegben ($N = 0$) is, és nem járnak függőleges energiaáramlással.

A kritikusnál lassabb, $|U| < U_c$ sebességű áramlásokra k_z valós, s térbeli csillapítás nem történik. A balról jobbra haladó ($U > 0$) áramlásokhoz az (5.42) egyenlet alsó előjelének kell tartoznia, hiszen definíció szerint $N, k_x > 0$, s ω_0 csak úgy tűnhet el, ha a második tag negatív. A háttéráramláshoz képest kialakuló belső hullám (5.34) frekvenciája tehát $-Nk_x/k$, azaz negatív. Mivel az energiának felfelé kell haladnia: $c_z^* > 0$, ez (5.36) szerint negatív frekvenciával csak $k_z > 0$ -ra lehetséges (l. 5.6 ábra). Ezért a függőleges hullámszámkomponens pozitív. A hullámszámvektor jobbra fölfelé mutat. A hullámszámvektor hossza most N/U , a belső hullám csoportsebességének abszolútértéke ezért $U \sin \theta$. A nyugvó koordinátarendszerbeli teljes csoportsebességben c^* -hoz x irányban hozzáadódik az áramlás U sebessége. Az x komponens így $-U \sin^2 \theta + U = U \cos^2 \theta$, a függőleges komponens pedig $U \sin \theta \cos \theta$, az energiaáram iránya tehát *azonos* a hullámszámvektorával (5.15b ábra). A szél alatti (lee) hullámok energiája a sztratoszféráig is felhatolhat.

5.9 Belső hullámok sekély folyadékban, normálmódusok

Tekintsünk egy H mélységű folytonosan rétegzett közeget, melynek vízszintes kiterjedése sokkal nagyobb mélységénél. A tipikus belső hullámok vízszintes hullámhossza ($2\pi/k_x$) ekkor sokkal nagyobb a függőleges irányhoz tartozó $2\pi/k_z$ -nél. A k_x hullámszámkomponens tehát elhanyagolható a függőleges komponenshez képest, $k_x \ll k_z$, és az (5.34) diszperziós reláció

$$\omega_0 = \pm N \frac{k_x}{k_z} \quad (5.46)$$

alakú. A véges H mélység ugyanakkor meghatározza, hogy a k_z hullámszámkomponens nagyságrendje $1/H$. Az ilyen sekély folyadékbeli belső hullámok tehát nem diszperzívek, hanem jól definiált ω_0/k_z konstans terjedési sebességgel rendelkeznek. Ráadásul a H mélységhez csak bizonyos k_z hullámhosszak illeszkedhetnek, ezeknek egy *diszkrét* $k_z^{(n)}$ rendszere alakulhat csak ki. A belső hullámok tehát függőleges irányú viselkedésük szerint állóhullámok, melyekhez csak a

$$c_n = \frac{N}{k_z^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.47)$$

vízszintes terjedési sebesség tartozhat.

A lehetséges terjedési sebességek spektruma függ a peremfeltételtől. A függőleges hullámszámok lehetséges $k_z^{(n)}$ értékeinek meghatározása ugyanolyan típusú feladat, mint a felhangok spektrumának, vagy a kvantummechanikai potenciálgödrök kötött állapotainak kiszámítása. A legegyszerűbb esetben, amikor a folyadékot egy lappal lefedjük (merev lap közelítés), s ezért felületi mozgás nem alakulhat ki, a peremfeltétel az, hogy a w függőleges sebesség mind az aljzaton, mind a felszínen eltűnik. Állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett a függőleges sebesség magasságfüggése trigonometrikus függvénnyel írható le. Ennek félhullámhossza n egész számszor férhet rá a H intervallumra, azaz $n\pi/k_z^{(n)} = H$, amiből $k_z^{(n)} = n\pi/H$. A lehetséges terjedési sebességek tehát

$$c_n = \frac{NH}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.48)$$

Leggyorsabban az $n = 1$ indexű belső hullám terjed, a többiek sebessége n -nel fordítottan arányos. A légkörben ($N = 10^{-2}$ 1/s, $H = 10$ km) az első módus sebessége $c_1 = 32$ m/s. Az óceánok átlagára jellemző $N = 10^{-3}$ 1/s -os értékkel és $H = 4$ km-rel számolva, $c_1 \approx 1$ m/s. Ugyanez a sebesség sekély vizekben sokkal lassabb. A Brunt–Väisälä-frekvencia átlagos redukált gravitációs gyorsulással megadott (5.5) kifejezését használva

$$c_n \approx \frac{\sqrt{g'H}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.49)$$

Az ilyen belső hullámok tehát a sekély folyadék felszíni hullámmainak megfelelői, de őket a redukált gravitációs gyorsulás határozza meg. Ráadásul egész spektrumuk létezik a folytonos rétegzettség következtében. Mindegyik terjedési sebességhez a hidrodinamikai változók más és más függőleges eloszlása tartozik.

A w függőleges sebesség magasságfüggése $\sin(Nz/c_n)$ -nel arányos, hiszen csak így tűnhet el mindkét határon. A divergenciamentesség miatt a vízszintes sebesség $\cos(Nz/c_n)$ alakban függ a magasságtól. (5.18) szerint ugyanilyen a dinamikai nyomás z -függése. A sekély folyadékban érvényes hidrosztatikai viszonyok miatt a sűrűségingadozás ennek integrálja, tehát $\sin(Nz/c_n)$ -nel arányos.

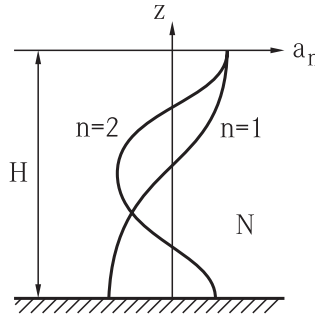
Általánosan igaz, hogy a linearizált (5.18)-(5.20) egyenletek megoldása sekély folyadékban (amikor dw/dt elhanyagolható) írható, mint

$$(u, p', w, \varrho') = \left(u_n a_n(z), p'_n a_n(z), w_n b_n(z), \varrho'_n \frac{da_n(z)}{dz} \right) e^{-ik_x(x-c_n t)}, \quad (5.50)$$

illetve mint ezen kifejezések lineáris kombinációja. Itt $a_n(z)$ egy dimenziótlán függvény, $b_n(z)$ az a_n integrálja, $u_n, p'_n, w_n, \varrho'_n$ pedig (komplex) állandók. Az $a_n(z)$ függvényt a rétegzett folyadék n -edik *normálmódusának* nevezzük. Ez a mennyiségek függőleges iránybeli eloszlását adja meg a c_n sebességgel terjedő hullámban. A magasságfüggés tehát állóhullám, a vízszintes koordinátától való függés pedig haladó hullám jellegű. Az $a_n(z)$ mennyiség a z magasságban haladó hullám amplitudójával arányos. Lineáris problémáról lévén szó, az általános megoldás kifejthető a (5.50) normálmódusok *összegeként*. Az egyes normálmódusok súlyát a kezdőfeltétel szabja meg. Annak ellenére, hogy minden egyes módushoz vízszintes terjedés tartozik, összegük függőleges komponensű mozgást is leírhat. A rövidebb hullámhosszú módusok gyorsabb viszkózus csillapodása miatt (a relaxációs ráta νk^2 -tel arányos) hosszú időskálán csak az *első néhány módusnak* van jelentősége. Merev lap közelítésben állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett tehát a normálmódusok (5.19 ábra)

$$a_n(z) = \cos(Nz/c_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.51)$$

alakúak, ahol a c_n sebességeket (5.48) adja meg, s a függvények maximális értékét 1-re normáltuk.



5.19 ábra: Állandó Brunt–Väisälä-frekvenciájú folyadék első két normálmódusa: $a_1(z), a_2(z)$. A normálmódusokból minden hidrodinamikai változó magasságfüggése megkapható. Az $n = 0$ -hoz tartozó $a_0 \approx 1$ barotróp módus olyan mozgást jellemez, mely homogén folyadékban is előfordul.

Amennyiben a folyadékfelszín mozgását is megengedjük, w nem tűnik el a felszínen. A pontos peremfeltételhez⁶ tartozó normálmódusok kidolgozása helyett, szemléletesen is könnyen elképzelhető, hogy új jelenségként megjelenik egy olyan hullám, melyben az egész folyadék vízszintesen mozgása független a mélységtől, tehát olyan a sebességtér, mint a nem rétegzett sekély homogén folyadék felszíni hullámai esetén. (Ez azért lehet így, mert az átlagos sűrűség-ingadozás csekély, l. (5.1).) Ennek megfelelően kialakul egy

$$c_0 = \sqrt{gH} \quad (5.52)$$

sebességű hullám, melyhez az $a_0(z) \approx 1$ normálmódus tartozik. Az óceáni példában $c_0 = 200$ m/s, tehát két nagyságrenddel gyorsabb, mint a leggyorsabb belső hullám. A többi normálmódus

⁶A felső peremen $w = \partial\eta/\partial t$ és $p' = \varrho_0 g \eta$, azaz $w = 1/(\varrho_0 g) \partial p'/\partial t$. A linearizált (5.19) egyenletből $\partial \varrho'/\partial t = w \varrho_0 N^2/g$, mely a $\partial p'/\partial z = -\varrho' g$ hidrosztatikai egyenlettel a $\partial^2 p'/(\partial z \partial t) = -(N^2/g) \partial p'/\partial t$ összefüggésre vezet. A normálmódusok (5.50) alakja miatt az a_n amplitúdóra a $\partial a_n/\partial z = -a_n N^2/g$ peremfeltételnek kell fennállnia.

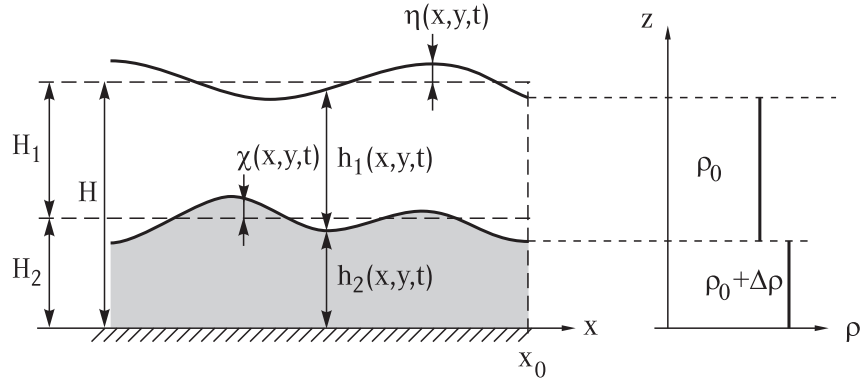
sebessége alig változik (a korrekció $\Delta\rho/\rho_0$ rendű), s (5.48) jó közelítéssel érvényben marad⁷.

Az $n \geq 1$ módusok az ún. *baroklin módusok*, hiszen a hozzájuk tartozó áramlásban a nyomás- és sűrűség-ingadozások magasságfüggése alapvetően különböző. Az ezektől eltérő jellegű $n = 0$ módust *barotrópnak* nevezzük. A merev lap közelítés jellegére vonatkozóan ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az kiszűri a gyors felszíni mozgást, a lassú baroklin módusokat viszont alig módosítja.

5.10 Kétrétegű közegek

5.10.1 Kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika

Amennyiben a $\bar{\rho}(z)$ egyensúlyi sűrűség változása nagyon erős egy keskeny tartományban (pl. a termoklin zónában vagy a planetáris határreteg tetején), akkor ott jó közelítéssel sűrűségugrásról beszélhetünk. A legegyszerűbb közelítésben ilyenkor két homogén összenyomhatatlan réteget különböztetünk meg, köztük valamekkora $\Delta\rho$ sűrűségkülönbséggel. Az egyensúlyi rétegzettség azt követeli meg, hogy a sűrűbb közeg feködjön alul. A relatív sűrűségkülönbség kicsi, $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$.



5.20 ábra: A kétrétegű közelítésben két élesen elkülönülő, homogén és összenyomhatatlan sekély folyadék-réteggel modellezzük a sztratifikációt. A belső és a külső felszín is szabadon mozoghat. A vízszintes sebesség mindkét rétegben független a magasságtól.

Mindkét réteget keskenynek feltételezve, alkalmazhatjuk a hidrosztatikus közelítést, miszerint a nyomás a sűrűség magasság szerinti integráljaként áll elő. Ez mindkét közegben lineáris z -függést jelent, a két közeg (idő-, és helyfüggő) határán a nyomás folytonos, de gradiense ugrásszerűen változik. Az egyes közegek pillanatnyi és átlagos vastagsága legyen $h_1(x, y, t)$, $h_2(x, y, t)$, ill., H_1 , H_2 (a 2-es közeg a sűrűbb). A $z = 0$ szinten vízszintes aljzatot feltételezve, a teljes nyugalmi folyadékmélység $H = H_1 + H_2$. A felszín és a belső elválasztó felület ingadozását η -val, ill. χ -vel jelölve (5.20 ábra), a pillanatnyi rétegvastagságok

$$h_1 = \eta - \chi + H_1, \quad h_2 = \chi + H_2. \quad (5.53)$$

A teljes nyomáseloszlás a folyadékban:

$$p = p_0 + \rho_0 g(\eta + H - z), \quad \text{ha } z > h_2(x, y, t), \quad (5.54)$$

⁷A $\partial a_n / \partial z = -a_n N^2 / g$ peremfeltétel dimenziótlan jobb oldali együtthatója $N^2 H / g \approx \Delta\rho / \rho_0 \ll 1$, s ezért a peremfeltétel $n \neq 0$ esetén alig tér el a $\partial a_n / \partial z = 0$ feltételtől.

és

$$p = p_0 + \rho_0 g h_1 + (\rho_0 + \Delta \rho) g (h_2 - z) \quad (5.55)$$

egyébként, ahol p_0 a konstans külső felszíni nyomás. Ezután mindkét közegben felírjuk a vízszintes sebességkomponesre vonatkozó Euler-egyenletet, melyben a nyomásgradienst η és χ gradienseivel fejezzük ki. A felső és alsó közeg vízszintes síkbeli, magasságtól független sebességvektorait \mathbf{u}_1 -gyel, ill. \mathbf{u}_2 -vel jelölve:

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = -g \text{grad} \eta, \quad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -g \text{grad} \eta - g' \text{grad} \chi. \quad (5.56)$$

A d/dt derivált csak a vízszintes sebességkomponenseket tartalmazza. Itt $g' \equiv g \Delta \rho / \rho_0$ a sűrűségugrás miatt létrejövő redukált gravitációs gyorsulás. Az egyes összenyomhatatlan folyadék-rétegekben a kontinuitást a folyadékoszlopok térfogatának megmaradása jelenti. Ezért mindkét közeg $h_i, i = 1, 2$ vastagságára fennáll a (2.13) egyenlet, tehát

$$\frac{dh_i}{dt} = -h_i \text{div} \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.57)$$

A fenti egyenletek a (5.53) kapcsolattal együtt zárt egyenletrendszert alkotnak, a két enyhén különböző sűrűségű sekélyfolyadék-réteg egyenleteit. A szokásos dimenziótlanítással a két kontinuitási egyenlet nem változik, a dinamikai egyenletekben $\text{grad} \eta$ előtt a külső (1.27) Froude-szám, $\text{grad} \chi$ előtt pedig az

$$Fr' = \frac{U}{\sqrt{g'H}}. \quad (5.58)$$

belső Froude-szám jelenik meg. Ez mutatja, hogy az utóbbi csak a belső elválasztó felülettel kapcsolatos mozgásokat jellemzi.

5.10.2 Belső hullámok két közeg határán

Kis amplitudójú lineáris hullámokra az egyenletrendszer linearizálható a $h_i = H_i$ átlagos rétegvastagsághoz tartozó nyugalmi állapot körül. Az $(u_1, u_2, \eta, \chi) = (u_{10}, u_{20}, \eta_0, \chi_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakú, x irányban haladó síkhullámmegoldást keresve a

$$\omega_0 u_{10} = g k_x \eta_0, \quad \omega_0 u_{20} = g k_x \eta_0 + g' k_x \chi_0, \quad (5.59)$$

$$\omega_0 (\eta_0 - \chi_0) = H_1 k_x u_{10}, \quad \omega_0 \chi_0 = H_2 k_x u_{20} \quad (5.60)$$

polarizációs egyenletekre jutunk. As első és harmadik egyenletből a sebességeket kiküszöbölve a

$$\chi_0 = \eta_0 \left(1 - g H_1 \frac{k_x^2}{\omega_0^2} \right) \quad (5.61)$$

összefüggésre, majd a sebességek közötti

$$u_{10} = u_{20} \left(1 - g' H_2 \frac{k_x^2}{\omega_0^2} \right) \quad (5.62)$$

alakra jutunk. A sebesség- és felszíningadozások amplitudóinak a két közegben tehát *arányosnak* kell lennie. Az első és utolsó polarizációs egyenletből $u_{10} \chi_0 = u_{20} \eta_0 g H_2 k_x^2 / \omega_0^2$ következik. Ez csak akkor konzisztens (5.61), (5.62)-vel, ha

$$\left(1 - \frac{g' H_2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{g H_1}{c^2} \right) = \frac{g H_2}{c^2}. \quad (5.63)$$

Mivel az egyenletben csak az ω_0/k_x kombináció jelent meg, bevezettük a $c \equiv \omega_0/k_x$ terjedési sebességet, melynek négyzetére a

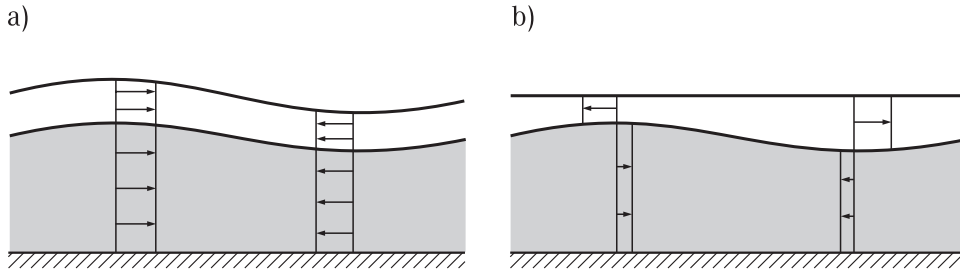
$$c^4 - c^2(gH + g'H_2) + gg'H_1H_2 = 0 \quad (5.64)$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ez természetesen egzaktul is megoldható, de érdemes kihasználni, hogy a relatív sűrűségkülönbség csekély, vagyis $g' \ll g$.

A fenti egyenletnek van olyan megoldása, melyben a sebesség nagy, a g' -vel arányos tagok elhanyagolhatók, s ezért vezető rendben a terjedési sebesség abszolútértéke

$$c_0 = \sqrt{gH}. \quad (5.65)$$

Ekkor $u_{10} \approx u_{20}$ és $\chi_0 = \eta_0 H_2/H$. A sebesség a két rétegben tehát alig különbözik, s a felszíni ingadozások aránya a rétegvastagságok arányát követi (5.21a ábra). Ez nagyon közel esik a H vastagságú összenyomhatatlan homogén sekély folyadék hullámmozgásához, s ezért joggal nevezhető barotróp módusnak.



5.21 ábra: Kis amplitudójú lineáris hullámok kétrétegű folyadékban. a) Barotróp módus: mindkét réteg hasonlóan mozog. b) Baroklin módus: mindkét réteg ellentétes fázisban mozog és az elválasztó felület hullámozgása sokkal erősebb a felszínénél.

A másik gyök nagysága kicsi, g' -vel arányos, s ekkor c^4 hanyagolható el. Ezzel a

$$c_1 = \sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H}} \quad (5.66)$$

megoldást kapjuk, g'/g rendű korrekciók erejéig. Ilyenkor $u_{20} = -u_{10}H_1/H_2$, és $\chi_0 = -\eta_0 gH/(g'H_2)$. A két rétegben tehát *ellenkező* előjelű a vízszintes sebesség. Ráadásul a belső határfelület hullámozgása jóval *erősebb* (g/g' arányban) a felszínénél. Az előjelek itt is különbözőek, tehát felszíni kidudorodáshoz belső behorpadás tartozik és fordítva (5.21b ábra). Ez a mozgás a kétszintű rétegzett közeg belső hulláma. A c_1 sebességű megoldást nevezik ezért baroklin módusnak is. Egyforma vastagságú rétegek ($H_1 = H/2$) esetén az áramlás analóg a folytonosan rétegzett folyadék első baroklin módusával (l. 5.9 fejezet), hiszen ott is előjelet vált a sebesség a folyadék középvonalában. A két folyadékréteg határfelületén kialakuló hullám $c_1 = \sqrt{g'H}/2$ sebessége azonban valamivel nagyobb a folytonos közegbeli $c_1 = \sqrt{g'H}/\pi$ -nél, mert a kétféle áramlás részletei nem azonosak.

Két közeg határán futó belső hullámok tavakban és tengerekben rendszeresen előfordulnak a felső hígabb és alsó sűrűbb réteg határán, pl. folyótorkolatok közelében vagy a termoklin zónában. A felszínről nézve mozgásuk alig vehető észre (5.22 ábra), legfeljebb a belső hullámhegyek által keltett apró felszíni kapilláris hullámok okozta fényvisszaverés révén. Felfedezésükre az vezetett, hogy a torkolatok környékén a sós tengervízen néhány méter vastagságban szétterülő édesvízbe érkező hajók hirtelen lefékeződtek, mert energiájuk belső hullámok keltésére fordítódott. E

"dead water"-nek nevezett jelenség magyarázatát és a belső hullámok első elméletét ugyanaz a V. Ekman adta meg (1904-ben), akinek nevéhez fűződik a forgatott rendszerek határrétegének megértése. Légköri rétegek határán futó belső hullámok is gyakran megfigyelhetők pl. füst vagy köd szétterülésekor. A hideg légréteg tetején vízszintes síkban haladó belső hullámok párhuzamos felhősávok kialakulására vezethetnek.



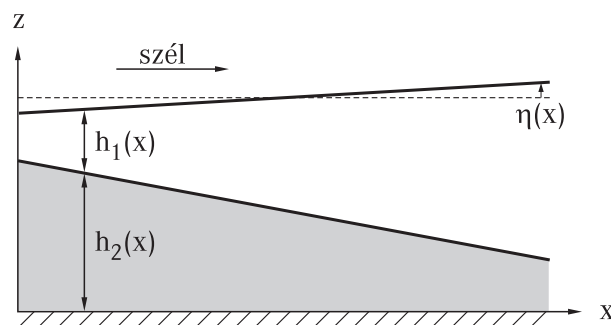
5.22 ábra: Belső hullámok gerjesztése kétrétegű közegben. Az úszó tárgyak a felső híg és alsó sűrűbb folyadék határán belső hullámokat keltenek.

5.10.3 Megjegyzések

A kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika a lineáris hullámokon túl is számos érdekes jelenséget leír. A baroklin mozgásokra jellemző általános tulajdonság, hogy a felszíni alakváltozást azzal ellentétes előjelű és sokkal nagyobb mértékű belső változás követi. Képzeljük el például, hogy valamilyen külső hatás miatt egy csekély felszínemelkedést stabilizálódik. Ezt tavakban gyakran az adott irányból huzamos ideig fújó szél nyírási ereje okozza, mely az egyik oldalra hajtja a vizet. Tekintsük a közel állandó felszíni meredekséget adottnak, s alkalmazzuk az alsó közeg Euler-egyenletét. A stacionárius állapot fentartásából azt a feltételt kapjuk, hogy a két gradiensnek közelítőleg kompenzálnia kell egymást, vagyis

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \approx -\frac{g}{g'} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (5.67)$$

Az állandó szél tehát a termoklin zóna jelentős lejtését válthatja ki (5.23 ábra). A szél elülése után ezen nemegyensúlyi állapot stabilitása megszűnik, a víz elkezd visszaáramolni. Tehetetlensége miatt azonban túllendül a nyugalmi állapoton, s ez okozza az állóhullámok, tölengések kialakulását (l. 12.1 fejezet).



5.23 ábra: Az állandó szélnyírás következtében a tavak felszíne megdől. A belső elválasztó réteg (a termoklin zóna) ezzel ellentétes irányban és jóval nagyobb mértékben lejt.

Több réteg feltételezésekor annyi c_n hullámsebességet találunk, amennyi a rétegek száma. Egyre több, egyre keskenyebb réteg használatával, s a teljes folyadékmélységet állandó H értéken

tartva, visszakapjuk a folytonos rétegzettséghez tartozó c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ normálmódus-eloszlást. A folytonos rétegzettség tehát számos keskeny egymás fölötti réteg határesetének tekinthető, melyek között a sűrűségkülönbség vastagságuk arányában csökken.

5.11 A redukált sekélyfolyadék-modell

A kétrétegű leírás különösen egyszerű esetét kapjuk, ha az egyik közeg jóval nagyobb folyadék-tömeget képvisel, mint a másik. Annak kifejezésére, hogy az eredmény független attól, hogy a keskeny közeg felül vagy alul helyezkedik el, a keskeny közeg pillanatnyi (átlagos) vastagságát $h(x, t)$ -vel (h_0 -lal) jelöljük. Feltesszük, hogy a teljes mélység sokkal nagyobb a vizsgált rétegénél, tehát $h \ll H$.

A dinamikai egyenlet levezetéséhez célszerű azt az esetet tekinteni, amikor a keskeny közeg van alul. Ekkor a felső közeg gyakorlatilag áll, számára a választófelület mozgása elhanyagolhatóan kis perturbációt jelent csak. Így elég az alsó közeg mozgásával törődnünk. Mivel felül érvényes a ρ_0 sűrűségnek megfelelő hidrosztatika, az alsó közegbeli p'' dinamikai nyomás

$$p''(x, y, t) = g\Delta\rho h(x, y, t). \quad (5.68)$$

A sekély mozgó réteg vízszintes síkbeli sebességterét a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{grad})\mathbf{u} = -g' \text{grad}h \quad (5.69)$$

egyenlet adja meg, s homogén közegről lévén szó, kontinuitását a

$$\frac{dh}{dt} = -h \text{div} \mathbf{u} \quad (5.70)$$

egyenlet fejezi ki. Mindez megfelel a kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika $\mathbf{u}_1, \eta \rightarrow 0$ határesetének. Levezetésünkben azonban a felső közeg sekélységét nem tételeztük fel. Az alsó közeg dinamikájára tehát a (2.7) sekélyfolyadék-egyenlettel ekvivalens alakot kaptunk, de benne nem a teljes g gravitációs gyorsulás, hanem a $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ redukált gyorsulás jelenik meg. Ezt az egyenletrendszeret ezért a redukált sekélyfolyadék-modellnek is nevezik. Ugyanezek az egyenletek igazak egy keskeny ritka közegre is, mely egy sűrűbb passzív folyadék felett helyezkedik el, ha a sűrűségek különbsége kicsi.

A keskeny réteg határán kialakuló belső hullámok sebessége természetesen

$$c_1 = \sqrt{g'h_0}, \quad (5.71)$$

melyet az (5.66) egyenlet $h_0/H \rightarrow 1$ határesetéből is megkaphatunk, ahol $h_0 = \min(H_1, H_2)$. A barotróp módus most nem jelenhet meg, hiszen a vastag közeg áll. A közeghatár hullámmozgása, és (5.69), (5.70) értelmében a mozgó közeg egész hidrodinamikája *független* a folyadék teljes mélységétől.

A redukált sekélyfolyadék egyenletek túlzott egyszerűsítésnek tűnhet a kis amplitudójú belső hullámok jellemzésére. Van azonban számos olyan *nemlineáris* jelenség, melyek leírása már a kétrétegű közelítésben is igen nehéz. A redukált sekélyfolyadék-modell viszont sokszor meglepően valóságközeli eredményeket szolgáltat a véges amplitudójú nemlineáris mozgásokra.

A redukált sekélyfolyadékmodell általános megoldása nem ismert. Egydimenziós változata ($u \equiv u(x, t), v \equiv 0$) *stacionárius* esetben két megmaradó mennyiséggel rendelkezik, melyek ekvivalensek a hidrodinamikai egyenletekkel. Az

$$u(x)h(x) = Q \quad (5.72)$$

hozam állandósága a (5.70) kontinuitási egyenletből, az

$$\frac{u(x)^2}{2} + g'h(x) = \frac{Q^2}{2h^2(x)} + g'h(x) = B \quad (5.73)$$

Bernoulli-állandó léte pedig a (5.69) Euler-egyenletből olvasható le. Amennyiben a sűrű alsó közeg egy csekély $d(x)$ domborzati kidudorodás fölött áramlik, úgy, hogy az áramlás lassan változik, az energiamegmaradást kifejező Bernoulli-törvény az

$$\frac{u(x)^2}{2} + g'(h(x) + d(x)) = B \quad (5.74)$$

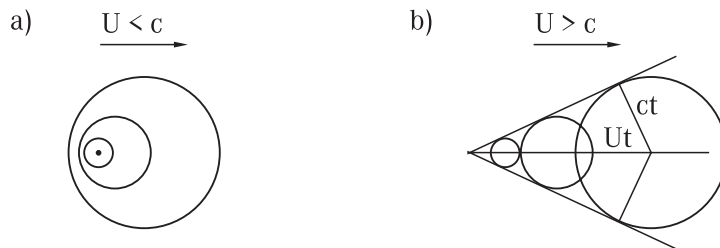
alakot ölti.

5.12 Szuperkritikus áramlások

A sekély folyadékrétegekben kialakuló véges amplitudójú, nemlineáris hullámok rendszerint jelentős áramlással járnak, méghozzá gyorsabban, mint a lineáris belső hullámok terjedési sebessége.

Az olyan áramlásokat, melyek U átlagsebessége nagyobb a lineáris belső hullámok fázis-sebességénél, *szuperkritikusoknak* nevezzük. Az ilyen áramlások Fr' belső Froude-száma tehát egynél nagyobb. Az $Fr' < 1$ feltételt kielégítő áramlások szubkritikusak.

Egy kétdimenziós szuperkritikus áramlás alapvető tulajdonsága, hogy a benne kialakuló lineáris hullámok nem terjedhetnek az áramlással szemben. Így a pontszerű forrásból kiinduló belső hullámok csak a forrás mögötti arcsin $(1/Fr')$ félnyílásszögű tartományba juthatnak el (5.24 ábra), hasonlóan a szuperszonikus áramlásbeli hangterjedéshez.



5.24 ábra: A vízszintes síkban pontszerű forrásból terjedő gravitációs hullámok által elérhető tartomány U sebességű áramlásban. a) Szubkritikus, b) szuperkritikus áramlás. A c paraméter a belső (vagy a felszíni) lineáris hullámok terjedési sebessége.

A továbbiakban az egydimenziós redukált sekélyfolyadék-modellt használjuk. A szuperkritikus és szubkritikus áramlások közötti másik szembevetendő különbség az akadályok fölötti átáramlással kapcsolatos. Tételezzük fel, hogy a h_0 vastagságú U_0 sebességű ($Q_0 = U_0 h_0$ hozamú) alsó sűrű folyadékréteg enyhe $d(x)$ domborzati kitüremkedéssel találkozik. Az (5.74) Bernoulli-tétel értelmében

$$\frac{Q_0^2}{2g'h^2} + h = B/g' - d, \quad (5.75)$$

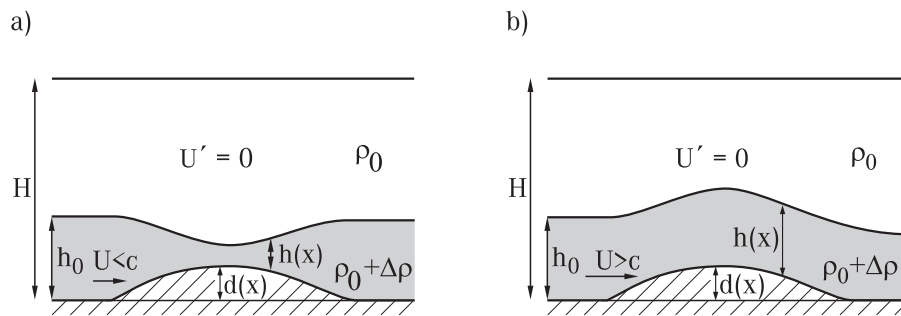
ahol $h(x)$ az x ponthoz tartozó rétegvastagság a sűrű alsó rétegben. A kis Δd domborzati emelkedéshez tartozó Δh vastagságváltozás ebből differenciálással kapható:

$$\frac{\Delta h}{\Delta d} = \frac{1}{Fr'^2 - 1}, \quad (5.76)$$

ahol

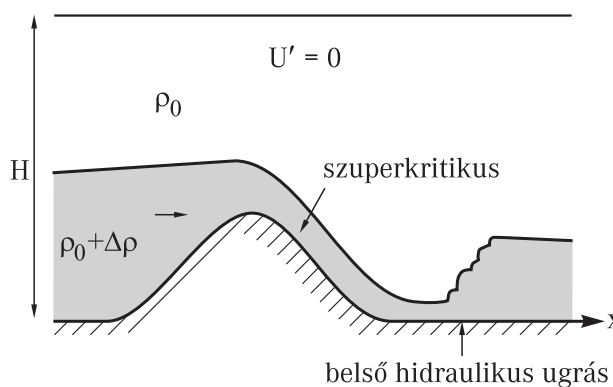
$$Fr' = \sqrt{\frac{Q_0^2}{g'h_0^3}} = \frac{U_0}{\sqrt{g'h_0}} \quad (5.77)$$

a beáramlási belső Froude-szám. A viselkedés alapvetően függ $(Fr' - 1)$ előjelétől. Szubkritikus áramlásban a derivált negatív, sőt mindig kisebb (-1) -nél, melyből következik, hogy $h + d < h_0$. A réteg annyira elkeskenyedik, hogy a folyadékhatár behorpad a domborzat felett: a folyadék a potenciális energiából nyer kinetikus energiát az akadályon való áthatoláshoz (5.25a ábra). Szuperkritikus áramlásban a vastagság megnövekszik, a kezdeti kinetikus energia olyan nagy, hogy a folyadék felgyülemlik (5.25b ábra). Az $Fr' = 1$ értékhez tartozó szinguláris derivált arra utal, hogy ott stacionárius megoldás nem létezhet.



5.25 ábra: A két közeg közötti elválasztó felület alakja enyhe domborzati kidudorodás fölött különböző jellegű a szubkritikus (a) és a szuperkritikus (b) esetben.

Amennyiben az akadály meredek, a sűrű folyadék előtte lelassul, feltorlódik, ezért az áramlás szubkritikus. A legmagasabb ponton áthaladva azonban a folyadék a lejtőn történő lefutás következtében felgyorsul, s az áramlás gyakran szuperkritikussá válik (5.26 ábra). Az ilyen szuperkritikus áramlások instabilak. A bennük felhalmozódott kinetikus energia egy része turbulens áramlás révén leadódik. A folyadék átlagos mozgása hirtelen lelassul, s egy lépcsőszerű vastagodás áll be a sűrű folyadék rétegben, a belső hidraulikus ugrás.



5.26 ábra: A meredek domborzati lejtőn lezúduló folyadék szuperkritikussá gyorsul, és a sík felszínre való kikutás után belső hidraulikus ugrás képződik.

A beható légköri hideg légtömegek hegyek mögött erős lecsapó áramlatokat, bukó szeleket (főn, chinook) okoznak. A hegy mögötti síkságon a belső hidraulikus ugrás időnként kirajzolódik a felhőképekben (5.27 ábra).



5.27 ábra: Hidraulikus ugrás kialakulhat szuperkritikus bukó szelek síkra történő kifutása után. Az ugrást a felette képződő felhők és a felkavart por teszi láthatóvá [Turner].

5.13 A hidraulikus ugrás és a torlópulver (bore) jellemzése

Az időfüggetlen áramlással járó hidraulikus ugrás nagysága vízszintes síkon való áramlás esetén egyszerűen megkapható. Figyelembe kell vennünk, hogy a kontinuitási egyenlet érvényes, de az ugrás közben kialakuló erős turbulencia miatt a lokális Bernoulli-tétel nem alkalmazható. Az ugrás közelében sem a liminaritás (a sebesség függetlensége a magasságtól), sem az időfüggetlenség nem teljesül. Az ugrás előtti (u_1 sebességű, h_1 vastagságú) és utáni (u_2 sebességű, h_2 vastagságú) lamináris tartományban (5.28 ábra) azonban elképzelhetünk két függőleges síkot és a köztük levő tartományra felírhatjuk az Euler-egyenlet integrális változatát. Az egyszerűség kedvéért a sűrűséget most egységnyiinek vesszük. A síkokra ható erők eredőjének stacionárius ugrás esetén a teljes impulzusváltozással kell megegyeznie. Az utóbbi az $uh \cdot u$ mennyiség különbsége a két oldalon, tehát $Q(u_2 - u_1) = Q^2(1/h_2 - 1/h_1)$, ahol felhasználtuk a (5.72) kontinuitási feltételt. Az erő mindkét oldalon az átlagos $g'h/2$ nyomásnövekmény és a h magasság szorzata. Mivel a járulékok a két oldalon különböző előjelű, az eredő $g'(h_1^2 - h_2^2)/2$. A keresett egyenlet ezért

$$g'(h_1 + h_2) = 2u_1^2 \frac{h_1}{h_2} = 2 \frac{Q^2}{h_1 h_2}. \quad (5.78)$$

A beáramlási adatokat általában ismerjük, ezért az érdekes mennyiség az ugrás mértéke, vagyis a h_2 magasság.

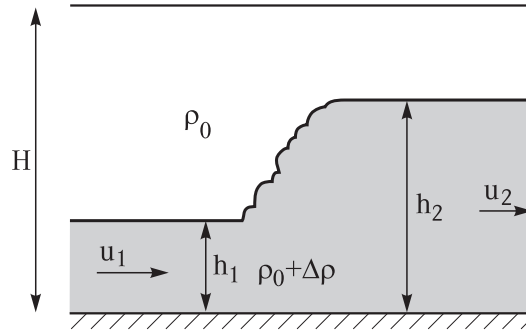
A befolyási sebesség és szintmagasság, ill. a belőlük alkotott $Fr'_1 = u_1/\sqrt{g'h_1} \equiv Q/\sqrt{g'h_1^3}$ belső Froude-szám ismeretében a kifolyási szintmagasság

$$h_2 = h_1 \frac{\sqrt{1 + 8Fr_1'^2} - 1}{2}. \quad (5.79)$$

Ez valóban nagyobb h_1 -nél, amennyiben a befolyás szuperkritikus, tehát $Fr'_1 > 1$. Az ugrás utáni folyadékszint a belső Froude-szám $\sqrt{3}$ értékénél lesz kétszer olyan magas mint a befolyási. A megfelelő kifolyási sebesség

$$u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2} \quad (5.80)$$

természetesen már szubkritikus: $Fr'_2 = u_2/\sqrt{g'h_2} < 1$. Az (5.73) Bernoulli-konstans nem azonos



5.28 ábra: Stacionárius belső hidraulikus ugrás és jellemzői a redukált sekély folyadék modellben. A u_1 sebességgel mozgó koordinátarendszerben az ugrás torlól hullámként, bore-ként jelenik meg.

a hidraulikus ugrás két oldalán. A

$$B_1 - B_2 = g' \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \quad (5.81)$$

különbség méri azt az energiát, mely turbulencia keltésére fordítódott. Mivel ennek pozitívnak kell lennie, az eredmény mutatja, hogy hidraulikus ugrás csak $h_2 > h_1$, vagyis szuperkritikus beáramlás esetén lehetséges⁸.

Egy szorosan kapcsolódó jelenség a híg és sűrű folyadék határfelületén lépcsőszerű mélységváltozással kísért belső torlól hullám, vagy belső bore. Mivel a bore közel állandó sebességgel halad, a vízlépcsővel együttmozgó koordinátarendszerben a folyamat ugyanúgy írható le, mint egy hidraulikus ugrás. Az álló folyadékban U sebességgel haladó bore esetén a sekély rétegbeli áramlási sebesség az együttmozgó koordinátarendszerben $u_1 = -U$. Ezért (5.78) most a bore sebességének kifejezésére használható az előtte és mögötte létrejövő rétegvastagságok függvényében. A bore U sebességére tehát fennáll, hogy⁹

$$U^2 = g' h_2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right). \quad (5.82)$$

Ez az U lényegesen *nagyobb* mind az eredeti h_1 , mind az új $h_2 > h_1$ mélységű folyadékréteg felületén kialakuló lineáris belső hullámok $\sqrt{g' h_1}$ ill., $\sqrt{g' h_2}$ sebességénél. Négyeszeres mélységi arány, $h_2/h_1 = 4$ esetén pl. $U = \sqrt{10} \sqrt{g' h_1}$. Ezerszeres redukció és 10 m-es keskenyebb rétegvastagság mellett az ilyen bore sebessége $U = 1$ m/s.

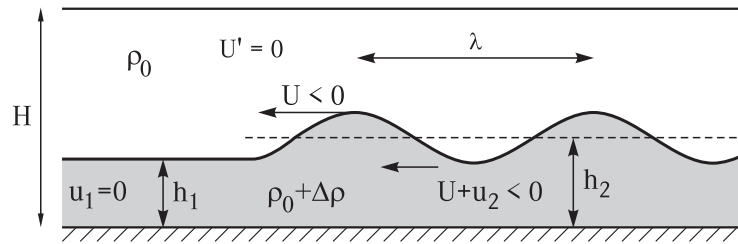
A nagy mélységi arányú erős bore-ok mindig turbulens hullámzás övezte vízlépcső megjelenésével járnak. A gyenge bore-okban azonban, melyeket egy kritikusnál kisebb mélységi arány jellemez (mely belső bore esetén¹⁰ 3 körüli), a hidraulikus ugrásban felszabaduló energiát véges amplitudójú hullámok szállítják el (5.29 ábra). Az ilyen hullámzó (unduláris) bore esetén a magas folyadékszint hullámos felületű. A h_2 mennyiség átlagos mélységként értelmezendő, s a hullámok amplitudója $h_2 - h_1$ nagyságrendű. A λ hullámhossz a h_2 bore-mélység mintegy tízszerese. A belső hullámzó bore-ok a belső hullámok egyik leggyakoribb nemlineáris változatát alkotják.

Ezek a nemlineáris belső hullámok laboratóriumban könnyen tanulmányozhatók (5.30 ábra), és mind a légkörben, mind tengerekben vagy tavakban gyakoriak. Nagy folyadéktömegek vízszintes mozgása az előttük levő folyadékot feltorlaszolja, abban bore-t hoz létre, mely rendszerint

⁸A folyadék-levegő határfelületen is kialakuló külső hidraulikus ugrásra eredményeink a $g' \rightarrow g$ helyettesítéssel érvényesek.

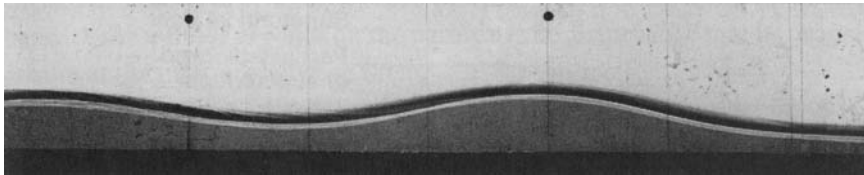
⁹A $g' \rightarrow g$ helyettesítéssel a homogén sekély folyadék felszíni torlól hullámának sebességet kapjuk.

¹⁰A szabad felszínre 1, 3.

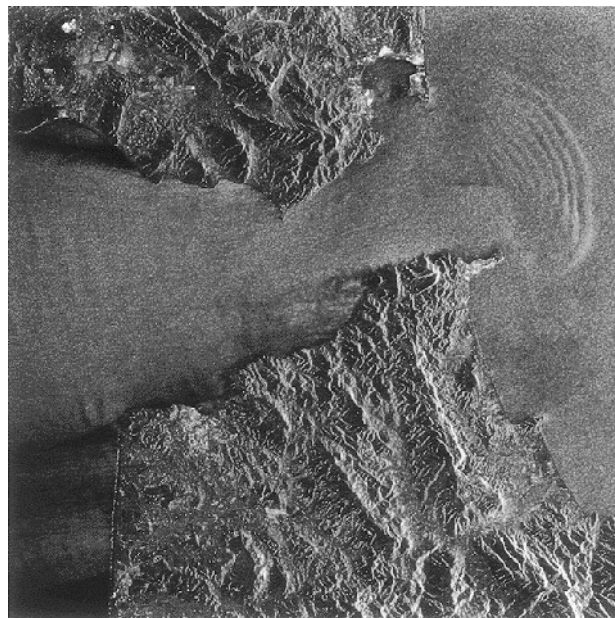


5.29 ábra: A belső torlóhullám (bore) mozgó hidraulikus ugrás. Az ábra a hullámzó (unduláris) belső bore jellemzőit mutatja, mely kis magassági arány ($h_2/h_1 < 3$) esetén alakul ki. Az alsó közeg, melybe az árhullám behatol, nyugalomban van.

a gyengébb, hullámzó típusú. Unduláris bore-t alakíthat ki a sós dagályhullám megérkezése a partmenti édesvízrétegekben, vagy a Földközi-tenger sósabb vizének és az Atlanti-óceán kevésbé sós vizének a Gibraltári-szorosnál történő ki- és beáramlása (5.31 ábra). A gyorsan érkező hideg légáramlatok az előttük tollt meleg levegőrétegben hozhatnak létre hullámzó belső bore-okat.



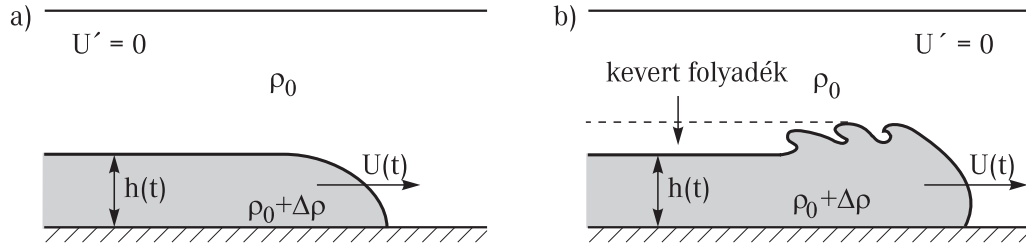
5.30 ábra: Hullámzó (unduláris) belső bore laboratóriumban két különböző (világos és sötét-szürke) közeg határán.



5.31 ábra: Nagy amplitudójú tengeri belső hullámok megfigyelhetők űrhajófelvételeken. Itt az Atlanti-óceán (balra) Földközi-tengerbe áramló hígabb vize kelt hullámokat miután áthaladt (és felgyorsult) a Gibraltári-szorosban. A belső hullámokat a felszín kapilláris hullámai teszik láthatóvá [www.tanger.8m.com/gibraltar.jpg].

5.14 Gravitációs áramlatok

Ha a vékony, sűrű folyadékréteg csak véges vízszintes tartományra terjed ki, vagyis a két közeget elválasztó határfelület valahol kifut a peremre (az alsó domborzatra), az nemegyensúlyi kezdőfeltételt jelent. A kiegyenlítő erős áramlással jár, melynek hajtóereje a gravitáció, noha esetleg csak néhány ezreléknyi sűrűségkülönbség miatt. Az ilyen mozgásokat ezért gravitációs áramlásoknak nevezzük. A gravitációs áramlat határvonalának áthaladása a perem egy rögzített pontján hirtelen sűrűségváltozással jár. Ezért az áramlat elejét jelző diszkontinuitási felületet *frontvonalnak*, magát az áramlatot pedig *frontnak* is tekinthetjük.



5.32 ábra: Gravitációs áramlat sematikus képe. a) Keverés mentes, ideális eset. b) A Kelvin–Helmholtz-instabilitás fej kialakulására vezet, mely mögött jól kevert folyadékréteg marad vissza. A viszkozitás miatt a fej kissé előredudorodik.

A redukált sekélyfolyadék-közelítésben a gravitációs áramlás U haladási sebessége megbecsülhető a keskeny réteg pillanatnyi h vastagságának függvényében (5.32a ábra). Az U sebességű áramlás $(\rho_0 + \Delta\rho)U^2/2 \approx \rho_0 U^2/2$ kinetikus energiasűrűsége ugyanis megegyezik a nyomáskülönbséggel, mely a frontvonal és a mögötte húzódó h vastagságú réteg belseje között kialakul. A frontvonal helyén a nyomás $\rho_0 gH$, ahol H a teljes folyadékvastagság, a h vastagságú réteg alján pedig $\rho_0 g(H - h) + (\rho_0 + \Delta\rho)gh$. A különbség $g\Delta\rho h$ -val egyenlő. Ebből

$$U^2 = 2g'h. \quad (5.83)$$

Ez tehát a front pillanatnyi sebessége és vastagsága közötti kapcsolat. A front terjedési sebessége nagyobb az ugyanolyan átlagos mélységű réteg határán terjedő belső gravitációs hullámok $\sqrt{g'h}$ sebességénél, belső Froude-száma $Fr' = \sqrt{2}$.

Eddig feltételeztük, hogy a két különböző sűrűségű közeget elválasztó felület a mozgás során élesen definiált marad. A valóságban a gravitációs áramlat elején erős keveredés történik a két közeg között. A gravitációs áramlások elején ezért a hátsó h rétegvastagságnál valamivel magasabb 'fej' alakul ki (5.32b, 5.33 ábra), melynek hossza a rétegvastagságnak csak néhányszorosa. Ennek elején a határfelület még éles és sima, de a jelentős sebességkülönbség miatt instabillá válik. A gyorsan áramló folyadékrétegek között mindig fellépő Kelvin–Helmholtz-instabilitás (l. 5.16 fejezet) miatt a fej felső határán az elválasztó felület begyűrődik, benne jellegzetes örvények alakulnak ki, melyek távolsága és kiterjedése összemérhető a fej vastagságával. Az egész folyamat tehát bonyolultabb annál, hogy a redukált sekélyfolyadék-modell minden részletében helyesen írhasse le.

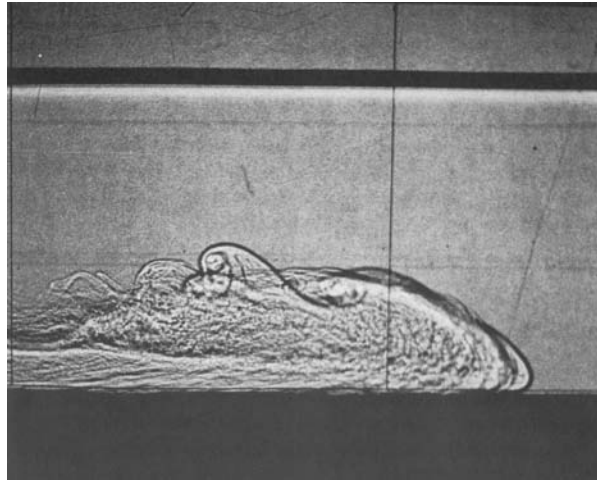
A keveredés és a véges H teljes folyadékmélység figyelembevételével a h vastagságú gravitációs áramlat sebessége írható mint

$$U = \sqrt{g'h} f \left(\frac{h}{H} \right), \quad (5.84)$$

ahol f csak a h/H mélységi arány függvénye. A mérések szerint az f értéke eltűnő mélységi arányra közel van $\sqrt{2}$ -höz, s h/H -val enyhén csökken.

Elegendően kis viszkozitás, vagyis nagy Uh/ν Reynolds-szám mellett az áramlási sebesség nem függ a viszkozitástól. A felületre vonatkozó tapadási peremfeltétel miatt viszont az áramlat

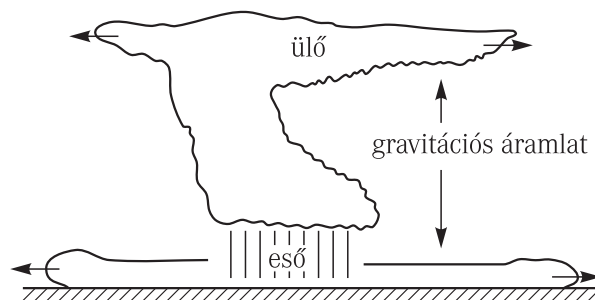
egy alsó határrétegen siklik, s ezért jól megfigyelhető, hogy a fej kissé felemelkedik, a sűrű közeg legelől levő pontja nem az aljzaton, hanem valamivel fölötte helyezkedik el.



5.33 ábra: Laboratóriumban létrehozott gravitációs áramlat feje. A felső fekete sáv a könnyű folyadék felszíne.

A gravitációs áramlatokkal kapcsolatos jelenségek sora igen hosszú. Kezdve az olyan hétköznapi folyamatokkal, mint a hideg levegő szobába történő beáramlása, a bányafolyosókban a metán (bányalég), a tenger felszínén az olajszenyezés szétterjedéséig, számos természeti jelenséggel kapcsolatos.

A légkörben minden lokalizált lehűlés hideg áramlatokat okoz. A jól ismert parti vagy tavi, tengeri szeleken kívül ilyen a nagy zivatarok előszele, a kifutó szél. A zivatarfelhőkben kialakuló eső hideg levegő leáramlását okozza, mely a Föld felszínére kerülve gravitációs áramlat formájában terül szét (5.34 ábra). A hideg szeleket a felkavart por vagy homok teheti láthatóvá (5.35 ábra). Mivel a 6 fokos hőmérsékletkülönbség a hőtágulás miatt (l. 14.1 táblázat) mintegy 2 százalékos sűrűségkülönbségnek felel meg, s az ilyen kifutó áramlás vastagsága kb. 1 km, a front (5.83) sebessége $U = \sqrt{2g'h} = \sqrt{400} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$ (több, mint 70 km/h). Ugyanakkor a zivatarfelhőben feláramló meleg levegő a troposzféra felső határát alkotó tropopauzába ütközik, s annak mentén folyik szét. Mivel itt már kicsapódás történik, ez a gravitációs áramlat jól látható a viharfelhő mozgó üllőjeként (5.34 ábra).



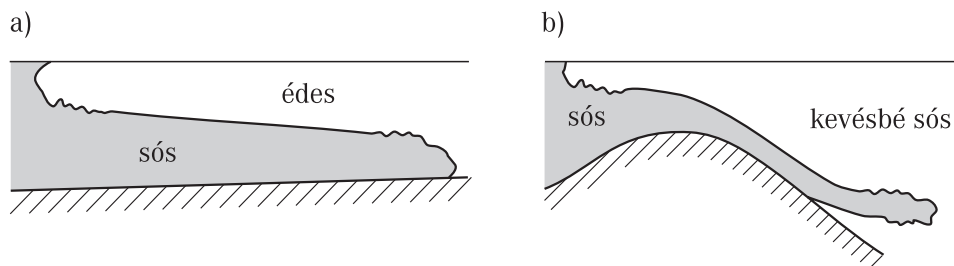
5.34 ábra: A zivatar előszele és a felhő üllőjének mozgása is gravitációs áramlat.

A folyótorkolatok előtti sekély vizekben a dagállal érkező sós tengervíz hoz létre alul sós gravitációs áramlatot, mellyel a felszínen kiáramló édesvízű front társul (5.36a ábra). A sós tengerek vize is gravitációs áramlatokon keresztül jut el a hígabb óceánokba. Így pl a Földközi-tenger vize gravitációs áramlatot alkotva jut a Gibraltári-szoroson át az Atlanti-óceán közepes



5.35 ábra: A kifutó szél által felkavart por kirajzolja a gravitációs áramlat hideg levegőjét [www.usgcrp.gov/usgcrp/images/duststorm.jpg; www.damtp.cam.ac.uk/user/fdl/people/jes14/].

vízrétegeibe (5.36b ábra), míg a felszínen az óceáni víz áramlik a tenger felé. Ha ez az áramlás eléggé erős, undulált bore-t hoz létre maga előtt, melynek nemlineáris gravitációs hullámai megfigyelhetők (l. 5.31 ábra). A tengerekben kialakuló gravitációs áramlatok tipikus sebessége m/s körüli.



5.36 ábra: Gravitációs áramlatok tengerben. a) A dagály érkezésekor sós víz áramlik a torkolati területek alsó rétegeiben és ez felső édesvízi gravitációs áramlatot is indít. b) A különböző sókoncentrációjú tengerek vízcseréje is gravitációs áramlatok formájában zajlik szorosokon keresztül. A felszínen könnyebb tengervíz folytonosan rétegzett, ezért a gravitációs áramlat csak saját sűrűségének eléréséig süllyed.

Gravitációs áramlat a lavina is, melyben a levegővel keveredett hó jelenti a mozgó közeget. Kevésbé nyilvánvaló, de gravitációs áramlatnak tekinthető számos kőomlás, földcsuszamlás, a visszahulló vulkáni hamu mozgása, vagy a lávafolyás is. Bár az eredeti közegek nem folyadékok, ha valamilyen erős kezdeti hatás (pl. földrengés) miatt mozgásba lendülnek, a mozgás során fölhígulnak, *fluidizálódnak*. A mozgó kődarabok egyre erősebben ütköznek egymással, s emiatt egyre távolabbra kerülnek, a rendszer egyre hígabb lesz. Lávafolyás közben pedig a magas hőmérséklet miatt gázok szabadulnak fel a talajból, s ez lazítja a mozgó közeget. Természetesen ilyenkor a közeg sűrűsége mellett a levegő elhanyagolható, s ezért $g' \approx g$. Ez már 10m-es közegvastagság esetén is $U = 10$ m/s-os sebességre vezet.

5.15 Belső szolitonok

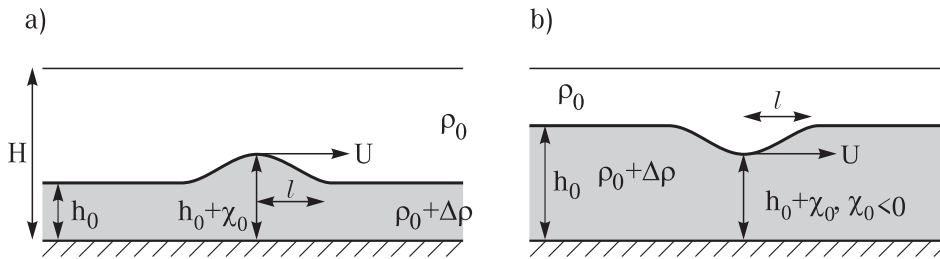
Két különböző sűrűségű réteg határfelületén kialakulhatnak kidudorodások vagy behorpadások, melyek alakjukat megtartva a sekély folyadék dinamikának megfelelő c_1 belső hullám sebességénél

gyorsabban terjednek, s a sebesség *függ* a kidudorodás nagyságától¹¹.

Elhanyagolható külső felszíni változások esetén a H_1 és H_2 átlagos vastagságú rétegek határán a pozitív x irányban haladó, χ_0 amplitudójú belső szoliton (5.37 ábra) sebessége

$$U = c_1 \left(1 + \frac{\chi_0}{2} \frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right), \quad (5.85)$$

ahol c_1 a sekély folyadékbeli belső hullám (5.66) sebessége. Az elmélet szerint az χ_0 amplitudónak mindkét rétegvastagságnál jóval kisebbnek kell lennie. Vegyük észre, hogy a sűrűségkülönbség csak a c_1 belső hullám sebességen keresztül jelenik meg. A szolitonok mindig gyorsabbak a lineáris hullámoknál: $U > c_1$. A fenti képlet így azt mutatja, hogy vastag alsó réteg, $H_2 > H_1$ esetén az amplitudónak negatívnak kell lennie. Ilyenkor tehát a szoliton a réteghatár *lefelé* történő elmozdulásával jár (5.37b ábra). A belső szoliton mindig a keskenyebb réteg lokális megvastagodása.



5.37 ábra: A belső szoliton az elválasztó felület kidudorodásával jár. Ez felfelé történik, ha az alsó réteg keskenyebb a felsőnél (a), és lefelé, ha az alsó réteg vastagabb (b).

A szoliton l félszélessége is amplitudófüggő az

$$l^2 = \frac{4}{3} \frac{H_1^2 H_2^2}{\chi_0 (H_1 - H_2)} \quad (5.86)$$

összefüggés szerint¹². A szoliton $2l$ 'hullámhossza' általában nagyobb a rétegvastagságoknál. A folyadék sebessége csak a szoliton kiterjedésének megfelelő tartományban tér el lényegesen zérustól. Ott egy rétegen belül azonos irányú, de a két rétegben ellentett előjelű¹³¹⁴.

A nagyon keskeny alsó réteg, $h_0 \equiv H_2 \ll H$, határesetében, mely a redukált sekélyfolyadékmodell analogonja, (5.85), (5.86)-ból

$$U = c_1 \left(1 + \frac{\chi_0}{2h_0} \right), \quad (5.87)$$

¹¹Hasonlóan a külső felszíni szolitonokhoz, l. 2.10 fejezet.

¹²Az egyforma rétegvastagságot jelentő $H_1 = H_2$ esetben szoliton a fenti képletek szerint nem létezik az eddig használt Boussinesq-közelítésben, ahol mindent csak a sűrűségkülönbségben vezető rendig határozunk meg. A részletes elemzés szerint ilyenkor a c_1 -hez adódó korrekció a sűrűségkülönbséggel arányos, l^2 pedig ennek reciprokával. $(U - c_1)$ és l tehát véges, szoliton létezik, de jóval lassabb és szélesebb, mint az eltérő rétegvastagsághoz tartozók.

¹³A χ belső felszíni alak kielégíti a (9.17) KdV-egyenletet a $c_0 \rightarrow c_1, 3c_0/(2H) \rightarrow 3c_1(H_1 - H_2)/(2H_1 H_2), c_0 H^2/6 \rightarrow c_1 H_1 H_2/6$ helyettesítéssel. A szoliton-megoldás: $\chi(x, t) = \chi_0 / \text{ch}^2 [(x - Ut)/l]$, a sebességek $u_1 = -c_1 \chi / H_1$ és $u_2 = c_1 \chi / H_2$, a felszíni alak pedig $\eta = -\chi \Delta \rho / \rho_0$.

¹⁴Az egyforma rétegvastagságot jelentő $H_1 = H_2$ esetben szoliton a fenti képletek szerint nem létezik az eddig használt Boussinesq-közelítésben, ahol mindent csak a sűrűségkülönbségben vezető rendig határozunk meg. A részletes elemzés szerint ilyenkor a c_1 -hez adódó korrekció a sűrűségkülönbséggel arányos, l^2 pedig ennek reciprokával. $(U - c_1)$ és l tehát véges, szoliton létezik, de jóval lassabb és szélesebb, mint az eltérő rétegvastagsághoz tartozók.

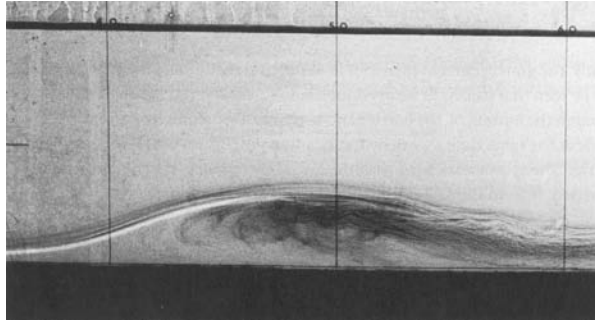
$$l^2 = \frac{4}{3} \frac{h_0^3}{\chi_0} \frac{H}{h_0}. \quad (5.88)$$

A terjedési sebesség ugyanúgy függ az alsó réteg vastagságától, mint szabad felszíni társáé a teljes mélységtől, de most a belső hullámok $c_1 = \sqrt{g'h_0}$ sebességével arányos (l. 2.10 fejezet).

A légkörben a hideg áramlások hegyekről való visszaverődése vezethet belső szolitonokhoz. A tengeri belső szolitonokat domborzati egyenetlenségek és az árapály hatás gerjeszthetik a termoklin zónában. Amplitudójuk néhányszor 10 m is lehet, sebességük m/s nagyságrendű, hosszuk a több 10 km-t is elérheti.

Érdeemes röviden összehasonlítani az eddig tárgyalt nemlineáris jelenségeket a kis amplitudójú belső hullámokkal. A legszembetűnőbb különbség, hogy míg a lineáris hullámban a sebességtér periodikus, s ezért azt nem kíséri anyagáram csak energiaáram, addig *a nemlineáris hullámok jelentős folyadékmozdulással járnak*. Ez fejeződik ki abban, hogy U átlagsebességük véges, sőt nagyobb a belső hullámok terjedési sebességénél (szuperkritikusak, belső Froude-számuk 1-nél nagyobb). A belső bore és a gravitációs áramlatok esetén kiterjedt tartományokban zajlik az anyagmozgás, a belső szoliton által okozott viszont a szoliton $2l$ méretére korlátozódik.

A vizsgált nemlineáris jelenségek egymáshoz is kapcsolódhatnak. Ha a nemlineáris effektusok lényegesebbek a diszperzióból adódóknál, akkor gravitációs áramlat vagy bore alakul ki. A gravitációs áramlat maga is létrehozhat belső bore-t abban a közegben, melybe behatol. Ha bármelyikük akadálynak ütközik, energiájuk csökken, s a nemlineáris és diszperziós hatás összemérhetővé válhat. Ha így van, a visszaverődött hullám belső szoliton alakjában mozog a két eltérő sűrűségű közeg határán. Laboratóriumban is könnyen lehet belső szoliton kelteni gravitációs áramlat fallal történő ütköztetése révén (5.38 ábra).



5.38 ábra: Belső szoliton laboratóriumban egy gravitációs áramlat falon történő visszaverődése után alakul ki.

5.16 Kelvin–Helmholtz-(KH)-instabilitás

5.16.1 Szemléletes kép

Tekintsünk két kissé eltérő sűrűségű, egymás felett elhelyezkedő vastag folyadékréteget, melyek egymáshoz képest ΔU relatív sebességgel áramolnak a vízszintes síkban. Legyen az alsó közeg sűrűbb és tegyük fel, hogy kiinduláskor az elválasztó felületük sík. Vizsgáljuk meg, hogy a felület kis deformáció után a kezdeti állapota felé indul vissza, vagy éppen távolodik tőle, vagyis a sík elválasztó felület stabil-e. Az, hogy a kimozdított felület milyen irányban mozdul el, függhet a deformáció hullámhosszától. Ha csak egyetlen hullámhossz is létezik, melyre távolodás történik, akkor a felület már instabil.

Mivel $\Delta \rho$ véges (ha kicsi is), a ΔU relatív sebesség megszűnésekor instabilitás nem léphet fel, hiszen a sztratifikáció stabil. Véges sebességkülönbség esetén csak valamilyen λ_c kritikus hul-

lámhosszú, vagy annál rövidebb zavarok válhatnak instabillá, s λ_c -nek ΔU csökkenésével egyre kisebbnek kell lennie. Amíg a folyadékréteg H vastagsága sokkal nagyobb a kritikus hullámhossznál, a probléma legfontosabb hosszúságjellegű paramétere λ_c . Az instabilitás szempontjából nyilván lényeges a g' redukált gyorsulás is. A ΔU , g' és λ_c mennyiségekből csak egy dimenziótlan szám alkotható, az

$$\frac{(\Delta U)^2}{g' \lambda_c} \quad (5.89)$$

kritikus hullámhosszal képzett belső Froude-szám. Ezt egységnyinek tételezve azt kapjuk, hogy λ_c arányos $(\Delta U)^2/g'$ -vel.

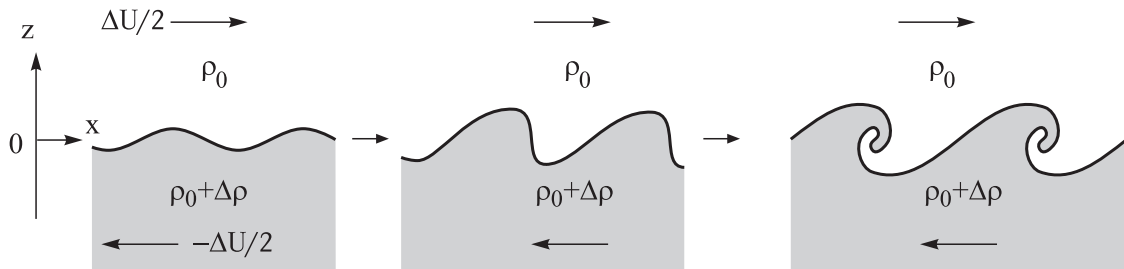
Az instabilitás tehát olyan λ hullámhosszú zavarokra áll fenn, melyek rövidebbek a kritikus hullámhossznál, tehát amelyekre

$$\lambda < \lambda_c \equiv C \frac{(\Delta U)^2}{g'}. \quad (5.90)$$

Itt C egy dimenziótlan szám, mely enyhén függhet a H vastagságtól az $Fr' = \Delta U / \sqrt{g'H}$ hagyományos belső Froude-számon keresztül. Mély közegben, amikor $Fr' \rightarrow 0$, a C konstans π -nek adódik (l. következő alfejezet). A kritikus hullámhossz a légkörre jellemző 10 m/s-os sebességkülönbséggel és tízszeres redukcióval $\lambda_c = 300$ m, éppúgy, mint $\Delta U = 1$ m/s sebességkülönbség és a tengerben gyakori ezerszeres redukció esetén.

Véges sebességkülönbség esetén tehát mindig létezik olyan elegendően rövid hullámhosszú perturbáció, melyre nézve a sima felület instabil. Első leírójukról ezt a jelenséget Kelvin-Helmholtz-instabilitásnak nevezzük. A különböző vízszintes áramlásokat elválasztó felületek tehát nem maradnak simák. Vegyük észre, hogy ez azonos sűrűségű ($g' = 0$) rétegekre méginkább igaz, ott ugyanis semmilyen hullámhosszú perturbáció sem stabil. A sűrűségkülönbség tehát valamelyest stabilizálja a helyzetet, de csak nagy hullámhosszakra.

Az instabillá vált felület először valamilyen $\lambda < \lambda_c$ hullámhosszal egyre nagyobb amplitudójú kitérést mutat, de előbb-utóbb elhagyjuk a lineáris viselkedés tartományát, s a felületi alak már nem írható le szinuszfüggvénnyel. A tapasztalat szerint a határfelület begyűrődik, és a megtörő felszíni hullámokhoz (pl. tengerhullámokhoz) hasonló alakot rajzol ki meglepő szabályossággal. A folyamatot a sematikus 5.39 ábra szemlélteti. A nemlineáris hullám amplitudója összemérhető a hullámhosszal, s a végállapotban egy λ -val arányos vastagságú réteg válik kevert sűrűségűvé.



5.39 ábra: A két folyadékot elválasztó felület időfejlődése a relatív sebességkülönbség hatására kialakuló Kelvin-Helmholtz-instabilitás következtében. A megfigyelt periodicitás a λ_c kritikus hullámhossz nagyságrendjébe esik.

Az instabilitás két, kezdetben vízszintesen elhelyezkedő egymásra rétegzett folyadékréteg tartályának megdöntésével laboratóriumban is jól tanulmányozható (5.40 ábra). Ha az elválasztó felület a kicsapódási zónában van, akkor a Kelvin-Helmholtz-mintázat felhőképekben is kirajzolódik (5.41 ábra), s az ún. hullámfelhők (billow clouds) kialakulásához vezet.



5.40 ábra: Kelvin–Helmholtz-instabilitás létrehozható egy kétrétegű folyadékot tartalmazó edény megdöntésével [Van Dyke].



5.41 ábra: Kelvin–Helmholtz-felhők két egymáshoz képest mozgó légréteg határán [www.atmos.washington.edu/atlas/IMG.32.jpg].

5.16.2 Lineáris stabilitásvizsgálat

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindkét folyadékréteg nagyon vastag, s legyen az elválasztófelület a $z = 0$ sík. Válasszuk az alsó, $\varrho_0 + \Delta\varrho$ sűrűségű közeget negatív irányban mozgóknak. Átlagsebessége legyen $-U \equiv -\Delta U/2 < 0$. A felette elhelyezkedő ϱ_0 sűrűségű folyadék mozogjon az $U \equiv \Delta U/2$ átlagsebességgel a pozitív irányba. Ez azt jelenti, előírjuk, hogy a vízszintes sebességkomponens nagy negatív (pozitív) z értékekre $-U$ -hoz (U -hoz) tartson. Tegyük fel, hogy a kialakuló áramlás az y irányban eltolásinvariáns. Jelölje az elválasztó felület pillanatnyi alakját a $\chi(x, t)$ függvény.

Bevezetjük a hidrosztatikus nyomáselosztástól való eltérést megadó p' nyomásingadozást. A teljes nyomás tehát írható mint

$$p = p_0 - \varrho_0 g z + p' \quad \text{ha } z > \chi, \quad (5.91)$$

és

$$p = p_0 - \varrho_0 g \chi - (\varrho_0 + \Delta\varrho)g(z - \chi) + p' = p_0 + \Delta\varrho g \chi - (\varrho_0 + \Delta\varrho)g z + p' \quad (5.92)$$

egyébként. Az Euler-egyenlet az alsó közegben

$$\frac{du_2}{dt} = -g' \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (5.93)$$

ahol g' az (5.6) redukált gravitációs gyorsulás. A felső folyadékrétegre ugyanez az egyenlet a felületi alak deriváltja nélkül érvényes (g' formálisan eltűnik). Az áramlás az (x, z) síkban összenyomhatatlan, ezért mindkét közegben létezik egy $\psi_i(x, z, t)$ áramlási függvény, mellyel $u_i =$

$-\partial\psi_i/\partial z$ és $w_i = \partial\psi_i/\partial x$, $i = 1, 2$. Feltehetjük, hogy az áramlás örvénymentes is, hiszen mindkét közeg homogén, s így y irányú forgatónyomaték nem hat a folyadékelemekre. Ezért ψ_i -nek ki kell elégítenie a Laplace-egyenletet, hiszen az örvényesség y komponense $\partial u_i/\partial z - \partial w_i/\partial x = 0$. Így

$$\Delta\psi_i = 0 \quad i = 1, 2. \quad (5.94)$$

Tekintsük most mindkét közegben a háttérsebességtől való eltérést leíró ψ'_i áramlási függvényeket, melyekre

$$\psi_1 = -Uz + \psi'_1, \quad \psi_2 = Uz + \psi'_2. \quad (5.95)$$

Kis eltérések esetén mind ψ'_1 -et, mind ψ'_2 -t az $\exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_z z)$ alakban keresve, a Laplace-egyenlet a $k_x^2 + k_z^2 = 0$ megszorítást jelenti. Mivel x irányban hullámalakot tételezünk fel, k_x -et valósnak (sőt pozitívnak) választjuk, de ekkor

$$k_z = \pm ik_x \quad (5.96)$$

imaginárius. Ez a függőleges irányban exponenciális változást jelent a k_x lecsengési rátával. A végtelenbe tartó megoldás kizárásával a felső közegben a negatív, az alsóban a pozitív előjelet tartjuk meg:

$$\psi'_1 = \psi_{10} e^{i\omega_0 t - ik_x x - k_x z}, \quad \psi'_2 = \psi_{20} e^{i\omega_0 t - ik_x x + k_x z}. \quad (5.97)$$

A sebességtér tehát exponenciális gyorsasággal tart a homogén áramláshoz.

A diszperziós reláció az elválasztó felületre vonatkozó határfeltételekből adódik. A függőleges áramlási sebesség a határ mindkét oldalán úgy írható, mint az elválasztó felület teljes deriváltja: $w_1 = \partial\chi/\partial t + u_1\partial\chi/\partial x$, és $w_2 = \partial\chi/\partial t + u_2\partial\chi/\partial x$. Az $u_1 = U$, $u_2 = -U$ sebességű homogén áramlás körül linearizálva:

$$w_1 = \frac{\partial\chi}{\partial t} + U\frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad \text{ill.} \quad w_2 = \frac{\partial\chi}{\partial t} - U\frac{\partial\chi}{\partial x}. \quad (5.98)$$

A feláramlási sebességek tehát eltérnek a felület két oldalán, hiszen a háttéráramlás is ad járulékot ott, ahol a felület nem vízszintes. A megoldást a $\chi(x, t) = \chi_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban keresve és a függőleges sebességet az áramlási függvénnyel $w_i = \partial\psi'_i/\partial x$ szerint kifejezve (5.98)-ból a

$$-k_x\psi_{10} = (\omega_0 - Uk_x)\chi_0 \quad \text{ill.} \quad -k_x\psi_{20} = (\omega_0 + Uk_x)\chi_0 \quad (5.99)$$

összefüggést kapjuk.

A $\partial p'/\partial x$ vízszintes nyomásgradiens folytonosságából a felületen (5.93) alapján fenn kell állnia a

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + g' \frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (5.100)$$

megszorításnak. Ennek linearizált változata a ψ'_i áramlási függvényekkel:

$$-\frac{\partial^2\psi'_2}{\partial t\partial z} + U\frac{\partial^2\psi'_2}{\partial x\partial z} + g' \frac{\partial\chi}{\partial x} = -\frac{\partial^2\psi'_1}{\partial t\partial z} - U\frac{\partial^2\psi'_1}{\partial x\partial z}. \quad (5.101)$$

A ψ'_i -kre vonatkozó (5.97) alakok behelyettesítésével:

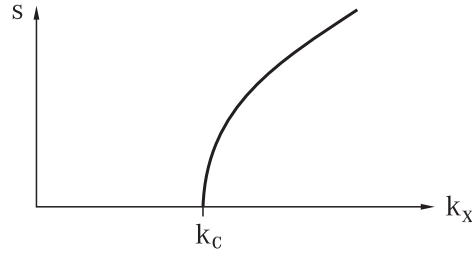
$$-(\omega_0 + Uk_x)k_x\psi_{20} - g'k_x\chi_0 = (\omega_0 - Uk_x)k_x\psi_{10}. \quad (5.102)$$

(5.99) alapján az

$$(\omega_0 + Uk_x)^2 + (\omega_0 - Uk_x)^2 - g'k_x = 0 \quad (5.103)$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ebből

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{g'}{2}k_x - U^2k_x^2}. \quad (5.104)$$



5.42 ábra: A k_x hullámszámú perturbáció instabilitási exponense a Kelvin–Helmholtz-instabilitásban. A k_c kritikuskál kisebb hullámszámú perturbációk stabilak, instabilitási exponensük nem értelmezett.

Amikor mindkét közeg nyugalomban van, azaz $U = 0$, a frekvencia valós: $\omega_0 = \pm\sqrt{(g'/2)k_x}$ ¹⁵. Véges U áramlási sebességekre a frekvencia sohasem valós minden hullámszámra. A

$$k_c = \frac{g'}{2U^2} \quad (5.105)$$

hullámszámnál nagyobbak esetén

$$\omega_0 = \pm is. \quad (5.106)$$

Az

$$s = \sqrt{U^2 k_x^2 - g'k_x/2} = \sqrt{g'k_x(k_x/k_c - 1)/2} \quad (5.107)$$

mennyiség neve *instabilitási exponens*, mert a $k_x > k_c$ tartományban az $\exp(i\omega_0 t) = \exp(\mp st)$ faktorok közül a pozitív előjelű exponenciálisan növekvő időfüggést ír le (l. 5.42 ábra). A kritikus hullámhossz $\lambda_c = 2\pi/k_c = \pi(\Delta U)^2/g' = 4\pi U^2/g'$. Az (5.90)-ben fellépő együttható tehát $C = \pi$.

Csakis a k_c -nél kisebb hullámszámú, azaz a λ_c -nél nagyobb hullámhosszú perturbációk stabilak.

Az instabilitási exponens a kétszeres kritikus hullámszám, $k_x = 2k_c$ esetén $s = g'/(\sqrt{2}U)$, mely arányos $\Delta U/\lambda_c$ -vel. A harmonikus hullámalak gyorsan megszűnik, hiszen az amplitúdója annyi idő alatt, amíg a két rétegben levő részecskék a kritikus hullámszámnak megfelelő távolságra kerülnek, már e -szeresére nő.

5.17 Termikus konvekció

Az eddig tárgyalt jelenségekben a hőmérséklet passzív szerepet játszott, mintegy a sűrűséggel vándorolt megmaradó mennyiségként. A kisskálájú jelenségekben azonban a hővezetés jelentős. A hőmérsékletre vonatkozó egyenlet a

$$\frac{dT''}{dt} = \kappa \Delta T'' \quad (5.108)$$

hődiffúziós egyenlet. Itt T'' a T_0 referenciahőmérséklettől való eltérés. Ezzel megjelent egy új paraméter, a κ hődiffúziós állandó, mely új dimenziótlan szám(ok)kal is együttjár. Homogén anyagi összetételű közegben a $\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ állapotegyenlet értelmében (α a hőtágulási együttható)

$$\varrho'' = -\alpha \varrho_0 T''. \quad (5.109)$$

¹⁵Ez a két mély folyadékréteg határán kialakuló belső hullám diszperziós relációja. A hullám, szemben a sekély rétegek között kialakuló társával diszperzív.

A hővezetési egyenlet ekkor tehát a (5.12) sűrűségegyenlet általánosítását jelenti. Mivel a hővezetés alapvető eltérést jelent az ideális folyadék leírásától, melyben csak adiabatikus folyamatok létezhetnek, a hővezetés mindig disszipációval, viszkozitással párosul.

Az egyik legfontosabb új jelenség a konvekció, az alulról történő egyenletes melegítés hatására kialakuló áramlás. Az áramlás jellegzetes vízszintes síkbeli lineáris mérete ekkor mindig összemérhető a folyadék H mélységével. Az (5.108) egyenlet szerint a jellegzetes U sebességet a hődiffúzió szabja meg. Abból a tényből, hogy a $(\mathbf{vgrad})T$ és a $\kappa\Delta T$ tagok összemérhetők, a sebesség nagyságrendje $U = \kappa/H$. A sebesség tehát nem szabad paraméter, mint eddig, mert most az áramlást a hővezetés váltja ki. A konvekciót jellemző legfontosabb dimenziótlan szám a Rayleigh-szám

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T H^3}{\nu\kappa}, \quad (5.110)$$

ahol ΔT a T'' eltérés jellegzetes értéke, pl. a folyadék alja és teteje közötti hőmérsékletkülönbség. Ez a szám nem más, mint a $g\alpha\Delta T$ felhajtóerő viszonya a $\nu U/H^2 = \nu\kappa/H^3$ viszkózus erőhöz:

$$Ra = \frac{\text{felhajtóerő}}{\text{viszkózus erő}}. \quad (5.111)$$

Áramlás nyilván akkor indul be, ha a felhajtóerő, azaz a hőmérsékletkülönbség elég nagy, vagyis, ha Ra nagyobb egy Ra_c kritikus értéknél. Az áramlás nélküli állapot tehát

$$Ra > Ra_c. \quad (5.112)$$

esetén instabil.

A Rayleigh-szám definíciójában a ΔT hőmérsékletkülönbség akkor pozitív, ha a kívülről előírt hőmérséklet az edény alján nagyobb mint a tetején. A hőmérséklet felfelé csökken az áramlásmentes állapotban is, az ehhez tartozó $\bar{\rho}(z)$ sűrűség pedig *növekszik* a magassággal. Vegyük észre, hogy az ilyen sztratifikáció hővezetés nélkül instabil, a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete negatív! A hődiffúzió képes *stabilizálni* olyan rétegzettséget is, mely anélkül már régen felbomlana. Ez a stabilizálódás azonban nem terjedhet minden határon túl, és a kritikus Rayleigh-szám éppen azt fejezi ki, hogy a felhajtóerő mikor győzi le a hődiffúzió stabilizáló hatását.

A kritikus Rayleigh-szám értéke függ a geometriai elrendezéstől és a peremfeltételektől. Vízszintes síklapokkal lezárt tartomány esetén $Ra_c = 1708$. A kritikus Rayleigh-számnál a λ_c kritikus hullámhossz válik instabillá, melynek tipikus értéke

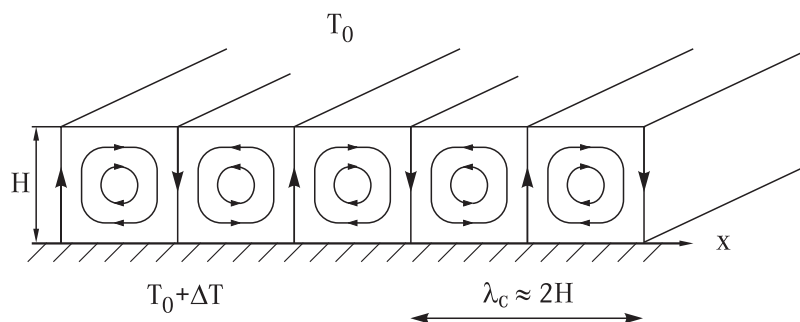
$$\lambda_c \approx 2H, \quad (5.113)$$

azaz a félhullámhossz egyezik meg a folyadékmélységgel.

A közvetlenül az Ra_c fölött kialakuló új stabil állapot egy időtől független, de térben valamilyen periodicitást mutató stacionárius áramlás. Az áramlás cellás szerkezetű, melynek periodicitását az instabillá vált kritikus hullámhossz határozza meg. Amennyiben az elrendezés egy irányban eltolásinvariáns, az áramlás szemben forgó hengerek kialakulására vezet (5.43 ábra), melyek között felváltva fel- és leszálló áramlási zónák helyezkednek el. Kevésbé szabályos peremek esetén általában hatszöges áramlási cellák alakulnak ki, melyekben pl. középen történik feláramlás, a hatszög oldalai mentén pedig leáramlás.

A kritikus Rayleigh-szám néhányszorosának megfelelő fűtés esetén egyre bonyolultabb és már időfüggő áramlások jönnek létre, melyek karakterisztikus mérete eltérhet a λ_c hullámhossztól. A feláramlás tipikus sebessége abból becsülhető meg, hogy az $\alpha g\Delta T$ felhajtóerőt a $\nu W/H^2$ viszkózus erő lényegében kompenzálja, melyből:

$$W = \frac{\alpha g\Delta T H^2}{\nu}. \quad (5.114)$$



5.43 ábra: Stacionárius konvekciós áramlás. Közvetlenül a kritikus hőmérséklet-különbség (kritikus Rayleigh-szám) elérése után szabályos, hengeres áramlási cellák alakulnak ki, ha a geometria y irányban eltolásinvariáns.

A WH/κ dimenziótlán feláramlási sebesség tehát a Rayleigh-számmal arányos. A feláramlás sokkal gyorsabb, mint a hődiffúzió jellegzetes κ/H sebessége, a konvekció tehát jóval hatékonyabb transzportfolyamat, mint a hővezetés.

Nagyon nagy Rayleigh-számok mellett az áramlás a peremfeltételtől is függetlenül szabálytalanná, turbulenssé válik. Ilyenkor a viszkozitás már nem meghatározó paraméter. A feláramlás átlagos sebességét a folyadék rétegen átfolyó hőáram határozza meg.

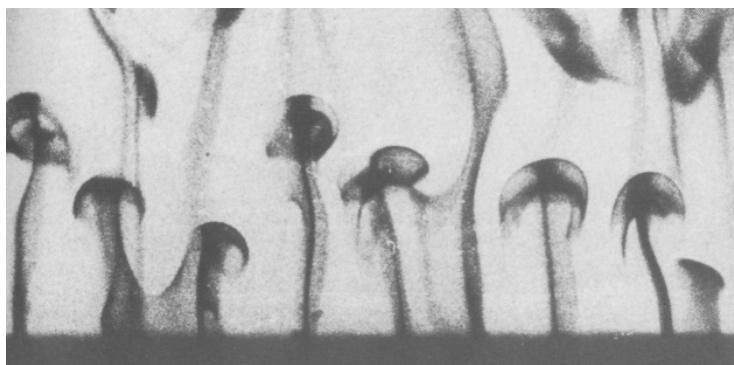
A légköri és óceáni tipikus értékekkel számolt Rayleigh-számok jóval nagyobbak Ra_c -nél. Mivel $\kappa_{viz} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, $\kappa_{lev} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (l. 14.1 táblázat) és a H rétegvastagság a harmadik hatványon jelenik meg, Ra értéke meghaladja a 10^{15} értéket. Mindössze egy fok különbséggel számolva, a planetáris határrétegben ($H = 1 \text{ km}$) $Ra = 10^{17}$, az óceáni keveredési rétegben ($H = 100 \text{ m}$) pedig¹⁶ $Ra = 10^{16}$. Az Ra_c értéknél kialakuló első instabilitást azért nem tárgyaljuk részletesebben, mert környezeti áramlásokban jelentősége csekély.

A természetes közegek tipikus konvekciója a szabályostól erősen eltér, hiszen a Rayleigh-szám sok nagyságrenddel meghaladja a kritikusát. A jellegzetes folyamat a *termikek* kialakulása, melyek laboratóriumban is jól tanulmányozhatók (5.44 ábra). A felmelegedett folyadékcsomagok véletlenszerűen szakadnak el az alsó peremtől (5.45a ábra). Az egész áramlás a szabályos hatszöges áramlás térben és időben is szabálytalanná vált esetének tekinthető. A felszálló meleg közeg peremén örvényesség keletkezik, ezért a termikek sebességtere hasonlít egy felfelé mozgó örvénygyűrűjéhez (5.45b ábra), hőmérsékleteloszlásuk pedig gombaszerű (5.45c ábra). Az áramlás a peremen erősen turbulenssé válik. A kicsapódási szintet elérve a légköri termikek alakja kirajzolódik a gomolyfelhők képében. A termikek mellett leszálló mozgás történik, s rendezetlen, turbulens áramlási rendszer alakul ki.

A légköri termikek alakja a kicsapódási szint elérése után a gomolyfelhők képében rajzolódik ki. A termikek által dominált turbulens keveredés vezet a planetáris határréteg jó keveredéséhez (l. 7.5, 7.6 fejezet). A termikek legerősebb változata a nagy zivatarfelhők kialakulásához vezető gyors konvekciós feláramlás, melyet a vízpára kicsapódásakor felszabaduló hő még gyorsít is. Az ilyen termikek szélessége 10 km is lehet, feláramlási sebességük néhány m/s, s feljuthatnak a troposzféra tetejéig.

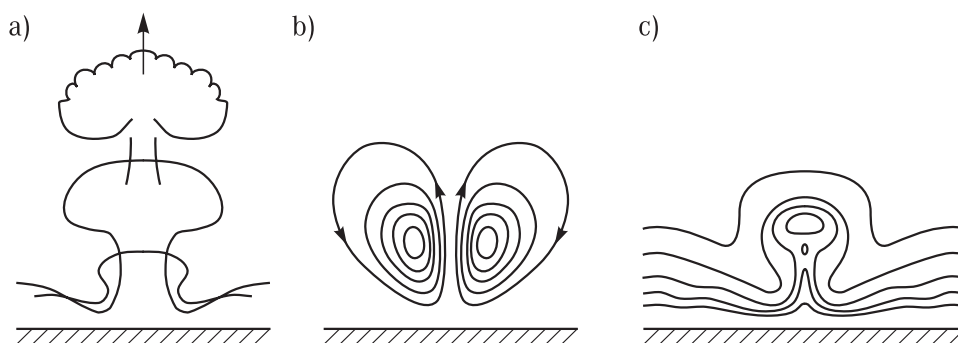
A természetes vizek konvekcióját általában az éjjeli vagy az őszi-téli felszíni hűtés váltja ki. Az édesvízi tavakban őszi kialakuló turbulens konvekció a víz hőmérsékletének homogénizálásához vezet. A 4 fokos hőmérséklet elérése után már csak a felszín hűl tovább, mert

¹⁶A nagyon nagy Rayleigh-szám ellenére a légkörben időnként mégis megfigyelhető hengeres áramlás. Stabilizálódásában ezért konvekción kívüli tényezőknek (pl. a szélnek) is szerepet kell játszania. A reggeli órákban a gyorsan melegedő talaj az alsó légréteget fűti, s a sík felszín fölött valóban kialakulhat az 5.43 ábrán mutatotthoz hasonló jellegű áramlás. A felszálló övekben a levegő elérheti a kicsapódási szintet, mely párhuzamos felhősávok megjelenésére vezet.



5.44 ábra: Meleg termikek felszállása alulról melegített közegben.

a víz 4 fokon a legsűrűbb. A rétegződés stabil, mert 4 fok alatt a hőtágulási együttható már negatív. Ez az anomális viselkedés az oka annak, hogy a tavak nem fagynak be teljes mélységükben, s annak is, hogy a tavaszi felszíni melegedés képes konvekciót beindítani ($\alpha, \Delta T < 0$, de $Ra > 0$). A tengerek felszínén télen a sós víz $-1,7$ fokos is lehet, a 100 m körüli mélységben viszont $+(1-2)$ fok, s ez turbulens konvekcióhoz vezet. A sarkok közeli tengereken a levegő és a víz közötti hőmérsékletkülönbség igen erős felfelé irányuló hőáramot vált ki, mellyel 10 cm/s körüli feláramlás társul.



5.45 ábra: Termik szerkezete. a) A felszállás három fázisa (a vonal a hideg-meleg határfelületet mutatja). b) Áramvonalak az (x, z) síkmetszeten. c) Izotermák az (x, z) síkmetszeten.

A konvekció fontos szerepet játszik a Föld mintegy 3000 km mélységig terjedő köpenyében. A köpeny szilárd anyaga igen hosszú időskálán folyadékként viselkedik. E folyadék természetesen igen erősen sűrűdő: viszkozitási együtthatója $\nu = 10^{17}$ m²/s-mal becsülhető¹⁷. A hőtágulási és a hővezetési együttható a nem fémes szilárd anyagokénak megfelelő $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ 1/fok és $\kappa = 10^{-6}$ m²/s. A Rayleigh-szám $H = 3000$ km-es vastagsággal és 2000 fok hőmérsékletkülönbséggel számolva $Ra \approx 10^8$. Ez mutatja, hogy a konvekció a földköpenyben is turbulens. A felszálló termikek mozgatják a kéreg litoszféralemezeit. E lemezek átlagos sebessége, éppúgy mint a termikek felszállási sebessége néhány cm évente. Ezzel a sebességgel egy 3000 km sugarú kör bejárásához több százmillió év szükséges. A konvekcióban résztvevő anyagok tehát csak 20–30-szor fordulhattak körül a kéregben a Föld egész élettörténete során.

¹⁷A Föld forgása és a nagy méretek ellenére a köpeny áramlásában a Coriolis-hatás nem lényeges, mert a sebesség igen kicsi.

6. fejezet

A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadéokra

Forgatott rétegzett folyadékban két karakterisztikus frekvencia verseng egymással: az N Brunt-Väisälä-frekvencia (vagy kétrétegű közegbeli megfelelője, a $\sqrt{g'/H}$ mennyiség) és az adott szélességi körre jellemző f Coriolis-paraméter. Mivel természetes közegeinkben N tipikus értéke $10^{-2} - 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, a közepes szélességeken pedig az f_0 helyi Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} körüli, a két frekvencia hányadosa, az

$$Fn \equiv \frac{N}{|f_0|}$$

frekvenciaarány 10 és 100 közötti. A rétegzettség önmagában tehát sokkal gyorsabb mozgásokat hoz létre, mint a forgás.

Mivel a rétegzettség hatása főleg a függőleges irányú mozgáshoz kapcsolódik, a forgatásé pedig a vízszintes síkbelihez, célszerű a frekvencia-aránynak a H/L méretaránnyal vett szorzatát, ill. e szám négyzetét, a

$$Bu \equiv \left(\frac{NH}{f_0 L} \right)^2$$

Burger-számot használni. Ennek kis értéke forgás-domináns, nagy értéke pedig rétegzettség-domináns áramlásra utal. A sekély folyadék tulajdonság szerint $H \ll L$, s a Földön két nagyságrend a tipikus különbség. A Burger-szám tipikus értéke tehát a Földön egységnyi, s ez azt jelenti, hogy a forgás és a rétegzettség fontossága összemérhető (ez nem feltétlenül jellemző más bolygók légkörére). A Burger-szám maga nem tartalmazza az áramlásra jellemző sebességet, de előáll két ilyen mennyiség, a Ro Rossby-szám és az Fr' belső Froude-szám arányának négyzeteként $Bu = Ro^2 / Fr'^2$. Egységnyi Burger-szám mellett a Rossby-szám és a belső Froude-szám azonos nagyságrendűek.

Ha a folyadékot állandó sűrűségű rétegekre bontottnak képzeljük el, mint a 6.1 ábrán, akkor mindegyik réteg sekély homogén folyadékot képez, melyben elhanyagolható viszkozitás esetén külön-külön érvényes a potenciális örvényesség megmaradása. Vízszintes aljzatot és csekély külső felszíni változásokat tekintve, a potenciális örvényességhez az f Coriolis-paraméteren kívül két járulékos adódik: a szokásos hidrodinamikai örvényesség és a belső elválasztó felület változásából következő megnyúlási örvényesség. E két örvényességjárulékos aránya éppen a Burger-szám. Ennek egységnyi értéke azt is jelenti, hogy környezeti áramlásainkban a vízszintes síkbeli áramlásból adódó örvényesség összemérhető a feláramlásokkal kapcsolatos örvényességgel.

A Burger-szám és az áramlás vízszintes L kiterjedése segítségével definiálható egy jellegzetes vízszintes síkbeli méret, az

$$R' \equiv L\sqrt{Bu} = \frac{NH}{|f_0|} \sim \frac{g'H}{|f_0|}$$

belső Rossby-sugár. A belső jelző arra utal, hogy ez a távolság a rétegzettség következtében jelenlévő belső elválasztó felületek mozgásával kapcsolatos. Mivel a belső mozgásokat a rétegek közötti sűrűségkülönbség szabályozza, melyi mindig lényegesen kisebb az átlagos sűrűségnél, a belső Rossby-sugár mindig kisebb a külsőnél. A belső Rossby-sugár az óceánban 50 km, a légkörben 1000 km nagyságrendűnek adódik. A belső Rossby-sugár ugyanakkor jóval nagyobb a H folyadék-mélységnél, hiszen $R' = H Fn$. Végül soron tehát az Fn paraméter nagy értéke miatt jogos a sekélyfolyadék közelítés használata rétegzett közegekben is.

A belső Rossby-sugár minden olyan jelenségre jellemző vízszintes méret, mely a belső, vagy baroklin mozgásokkal kapcsolatos az f_0 -síkon. Ezen a távolságskálán külső Rossby-sugár hullámhosszú változások nem is gerjesztődnek, s ezért a külső felszín gyakorlatilag vízszintesnek tekinthető. A szabad felszíni Poincaré- (tehetetlenségi-gravitációs) hullámok (l. 2. fejezet) analogonjaként kialakuló belső Poincaré-hullámok (6.2 ábra) frekvenciája nagyobb a Coriolis-paraméternél és jellegzetes hullámhossza éppen R' . Folytonos rétegzettségű közegben ezek a hullámok a vízszintessel θ szöget bezárva is haladhatnak, s ekkor megfigyelhető, hogy a pillanatnyi sebességvektor a haladási iránnyal szemben haladva anticiklonálisan fordul el (6.4 ábra). A meredek partvonalak mentén futó belső Kelvin-hullámok a termoklin zóna jelentős mozgásával járnak, a nem forgatott rendszerbeli belső hullám terjedési sebességével haladnak, de a partra merőlegesen lecsengenek a belső Rossby-sugárnyi távolságon (6.3 ábra).

A gyors forgás rétegzett folyadékokban is időfüggetlen, stacionárius áramlás kialakulására vezet. Ennek a geosztrofikus áramlásnak új vonása, hogy képes a gravitációs egyensúlytól eltérő, tehát nem függőleges rétegzettséget is fenntartani. A sűrűségfelületek döntöttsége esetén a felület két oldalán ráadásul eltérő nagyságú geosztrofikus sebességek alakulnak ki, a felület mentén a sebességnek tehát ugrása van (6.5 ábra). Folytonos rétegzettség esetén ez azt jelenti, hogy véges vízszintes sűrűséggradienshez függőleges sebességnyírás tartozik. Mivel a sűrűségkülönbséget rendszerint hőmérsékletkülönbség hozza létre, az ilyen áramlást termikus áramlásnak, a légkörben termikus szélnek nevezzük. Az utóbbi tipikusan a sarkokhoz közeledve csökkenő hőmérsékletek miatt alakul ki. A termikus áramlás a magassággal erősödik (l. 6.5 és 6.16 ábrák), s maximális sebessége az óceánban néhány m/s, a légkörben 10 m/s. Lokális belső felszíni kidudorodások és behorpadások ciklonális és anticiklonális áramlásokra vezetnek, a felső és alsó réteg sebességének viszonya azonban a külső és a belső felületek alakjának viszonyától függ (l. 6.6 és 6.17 ábrák).

Frontról forgatott közegben is akkor beszélünk, ha a két különböző sűrűségű közeget elválasztó felület kifut az aljzatra vagy a külső felszínre. A geosztrofikus egyensúly egyik megdöbbentő következménye, hogy a frontoknak ebben az állapotban nem kell mozogniuk. Előttük és mögöttük, ill. az elválasztó felület felett és alatt azonban jelentősen különbözik a frontvonallal párhuzamos sebesség (6.7 ábra) a két közegben. A sebességugrást alapvetően az elválasztó felület γ dőlésszöge szabja meg. Az elválasztó felület alakját leírhatja egy, a rétegvastagsághoz exponenciálisan tartó függvény, melynek lecsengési állandója éppen a belső Rossby-sugár (6.12 ábra). A dőlésszög nagysága ezért jó közelítéssel $H/R' = |f_0|/N = 1/Fn$. Légköri frontokra ez 10^{-2} körüli érték, a tapasztalattal jó egyezésben. A valóságos légköri frontok a geosztrofikus állapottól valamelyest eltérnek, mozognak. A frontvonal mentén össze-, és feláramlás figyelhető meg (6.8, 6.9 ábra). A frontvonallal párhuzamos sebességugrás, és a feláramlás miatt mind a hideg, mind a melegfront mentén lokális nyomásminimum (6.10 ábra) figyelhető meg, a barométer esik, ha frontok közelednek. A front áthaladását a paraméterek, pl. a szélirány hirtelen változása jelzi (6.11 ábra).

A geosztrofikus egyensúlyi állapot kialakulása a belső Rossby-sugár újabb jelentését adja: Ha kezdetben mindkét közeg nyugszik, de az egyik csak egy félegyenesnyi tartományra terjed ki állandó vastagsággal (6.13a ábra), akkor a geosztrofikus egyensúly kialakulásáig az elválasztó felület sima, exponenciális függvényvel leírható alakúvá válik, a frontvonallal párhuzamosan sebességkülönbség jön létre, s a frontvonal maga éppen R' -nyi távolságra mozdul el (6.13b ábra). Ez megfigyelhető forgókádas laboratóriumi kísérletekben (6.14 ábra). A meredek tengerparttal párhuzamosan fújó

szelek feláramlást keltenek (13.1 ábra), mely belső frontok kialakulására vezet (13.2 ábra).

A geosztrofikus egyensúlytól enyhén eltérő kvázigeosztrofikus mozgásokat egy napnál jóval hosszabb periódusú lassú dinamika jellemzi. A lokális belső felszíni kidudorodások alatti anticiklonális áramlás a folyadékot a keleti oldalon a kisebb Coriolis-paraméter irányába sodorja. A potenciális örvényesség csak úgy maradhat állandó, ha az alsó rétegvastagság csökken, a felső nő. Mindkét hatás arra vezet, hogy a keleti oldalon leáramlás, a nyugatin feláramlás történik, azaz a deformáció nyugatra tolódik (6.18a ábra). Hullámalakú belső felszíni változás esetén is ugyanez a potenciális örvényesség megmaradásának következménye. A kialakuló hullám a belső (baroklin) Rossby-hullám (6.18b, 13.3 ábra), melynek jellegzetes hullámhossza a belső Rossby-sugár. A domborzati akadályok miatt felfelé haladó Rossby-hullámok alapvetően hatnak a magaslégköri mozgásokra is (13.4 ábra).

A termikus áramlás instabil: A döntött sűrűségfelületeknek a vízszintes felé fordulása ugyanis potenciális energiát szabadít fel, mely a perturbáció kinetikus energiáját, és így annak amplitudóját növeli. A kialakuló új áramlási kép jelentősen eltér a termikustól. Ezt a folyamatot nevezzük baroklin instabilitásnak. Az instabilitás jelen van minden olyan elmozdulás esetén, mely a döntött állandó sűrűségű felszín és a vízszintes közötti szögterületbe esik. Ilyenkor ugyanis egy folyadékelem sűrűbb közegbe kerül, felfelé mozdul el, s ezért távolodik kiindulási helyzetétől (6.19 ábra). Mivel minden forgatott rétegzett rendszer jellegzetes vízszintes mérete a belső Rossby-sugár, a leginstabilabb hullámok hossza is R' nagyságrendű. Jellegzetes növekedési idejük R'/U (U a termikus áramlás erőssége), mely a légkörben néhány nap, az óceánban néhány hónap. Az instabilitási mechanizmus következtében kialakuló nagy amplitudójú, nemlineáris baroklin hullámok az átcsapó, megtört part menti hullámokra jellemző begyűrődő szerkezetet, vagy meanderező alakot mutatnak a vízszintes síkban (6.20 ábra). A baroklin instabilitás végeredményeként közel R' sugarú, nagy örvények keletkeznek.

Ez a mechanizmus jelentős szerepet játszik a Golf-áramlat gyűrűinek leszakadásában és a légköri ciklonok kialakulásában. A mérsékeltövi légköri ciklonok leggyakrabban a sarki hideg levegőt a közepes szélességek melegebb légtömegeitől elválasztó poláris front mentén alakulnak ki (6.21 ábra). Időnként egész ciklon-vonulatok is megfigyelhetők, melyek a baroklin hullámok jellegzetes alakját mutatják (6.22 ábra). Túl hosszú vonulatokra azonban nem számíthatunk, hiszen a belső Rossby-sugár csak néhányszor fér rá a közepes szélességi körökre. Az egymás feletti légrétegekben a ciklonok áramlási képe a baroklin instabilitás következtében nem azonos (13.6 ábra). A baroklin instabilitás kísérletileg is jól vizsgálható a közepesen hűtött, a szélén ΔT értékkel melegebbre fűtött hengergyűrűben levő Ω szögsebességgel forgatott folyadékkal (6.24 ábra). A legfontosabb paraméterek a $\Delta T/\Omega^2$ -tel arányos termikus Rossby-szám és az Ω^2 -tel arányos Taylor-szám. Az instabilitás elég gyors forgatás mellett mindig fellép (6.25 ábra), s a megfigyelt tendenciák összhangban vannak a vízszintesen korlátlan kiterjedésű közegre kapott kvantitatív eredményekkel is. A kialakuló áramlási kép (6.26 ábra) erős hasonlóságot mutat a nagyskálájú környezeti áramlásokban megfigyelttel. Mindez mutatja, hogy a baroklin instabilitás az alapvető oka időjárásunk változékonyságának, s egyben az óceáni áramlások dinamikájára is jelentős hatással van.

6.1 A forgatott kétrétegű sekély folyadék egyenletei

Célunk a sekély, rétegzett folyadék áramlásának leírása a forgó Földön. Nagyskálájú áramlásokat vizsgálva, a viszkozitást elhanyagoljuk. Először a közeget két élesen különböző sűrűségű rétegből állónak tekintjük, köztük $\Delta\rho$ sűrűségkülönbséggel. A tapasztalathoz igazodva feltesszük, hogy a relatív sűrűségkülönbség kicsi, $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$, vagyis a redukált gravitációs gyorsulás sokkal kisebb a teljesnél: $g' \equiv \Delta\rho/\rho_0 \ll g$.

A sekélység következtében mindkét rétegben alkalmazhatjuk a hidrosztatikus közelítést. A nyomáseloszlás ugyanolyan alakú (l. 5.10 fejezet), mint a nem forgatott sekély folyadékban,

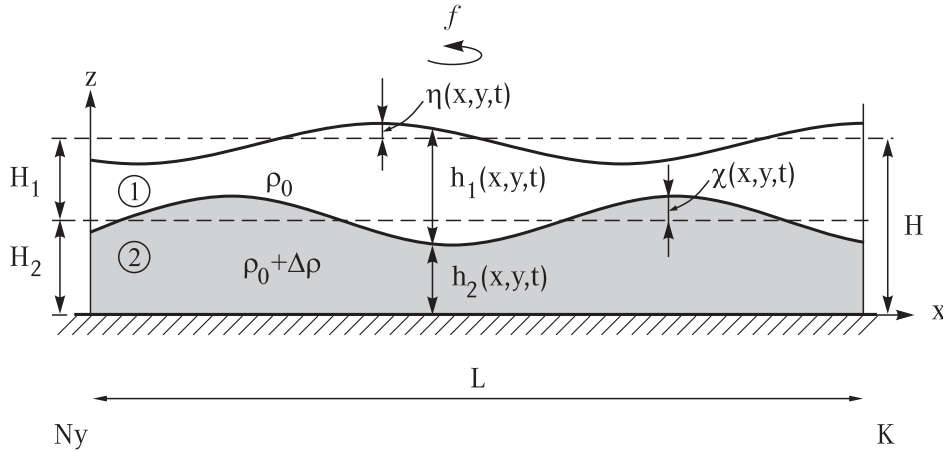
hiszen azt a hidrosztatika határozza meg. A vízszintes sebességkomponensekre vonatkozó Euler-egyenletekben új tagként a Coriolis-gyorsulás jelenik meg, s ezért az 5.10 fejezet jelöléseit használva (l. 6.1 ábra).

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1 - g\text{grad}\eta, \quad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u}_2 - g\text{grad}\eta - g'\text{grad}\chi. \quad (6.1)$$

Mindkét egyenlet a forgó Föld felszínén érvényes, s a z tengely a lokális függőleges \mathbf{n} irányt jelöli ki. A forgás helyi erősségét az $f = f_0 + \beta y$ Coriolis-paraméter méri (l. 3.3 fejezet). A g , ill. g' gravitációs gyorsulások magukban foglalják a centrifugális járulékot is. A d/dt derivált a két-dimenziós advektív gyorsulást tartalmazza, hiszen az egyes sekély rétegekben a sebesség feltevése szerint független a magasságtól. A kontinuitást a folyadékoszlopok térfogatának megmaradása jelenti, ezért mindkét közeg pillanatnyi $h_1 = \eta - \chi + H_1$ és $h_2 = \chi + H_2$ vastagságára fennáll

$$\frac{dh_i}{dt} = -h_i \text{div}\mathbf{u}_i, \quad (6.2)$$

$i = 1, 2.$



6.1 ábra: A Föld felszínén elhelyezkedő kétrétegű sekély folyadék, s a fejezetben használt jelölések. A koordináta-rendszer z tengelye a lokális függőleges irányba mutat. Az x tengely a szélességi körökkel párhuzamos. Az északi féltéken az x koordináta értéke keletre, az y -é északra növekszik (a délin fordítva). A folyadék forgatási erősségét a helyi Coriolis-paraméter $f(y) = f_0 + \beta y$ szabja meg, mely enyhén függ az y koordinátától. A külső felszín nyugalmi szinthez viszonyított $\eta(x, y, t)$ alakján kívül, fontos a ρ_0 sűrűségű 1-es közeget a $\rho_0 + \Delta\rho$ sűrűségű 2-es közegetől elválasztó *belső* felület $\chi(x, y, t)$ alakja. Az egyszerűség kedvéért az aljzatot vízszintesnek tekintjük ($z = 0$ szint). Vegyük észre, hogy a felső réteg szempontjából a *belső* felület játssza a pillanatnyi alsó domborzat (a 2.1 fejezetbeli $d(x, y)$) szerepét. A folyadék átlagos H mélysége sokkal kisebb L vízszintes kiterjedésénél.

Mindkét rétegben azonos U nagyságrendű sebességeket feltételezve, a (1.30) és az $\eta \rightarrow (|f_0|LU/g)\eta$ dimenziótlanítással a két kontinuitási egyenlet nem változik, a dinamikai egyenletekben a keresztszorzat és a $\text{grad}\eta$ tag előtt a $Ro = U/(|f_0|L)$ Rossby-szám jelenik meg, a H egységekben mért *belső* felszíni ingadozás $\text{grad}\chi$ gradiense előtt pedig az $Fr' = U/\sqrt{g'H}$ *belső* Froude-szám. Az alsó közeg dimenziótlan egyenlete az f_0 síkon például:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = \mp \frac{1}{Ro} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_2 - \text{grad}\eta) - \frac{1}{Fr'^2} \text{grad}\chi \quad (6.3)$$

(az alsó előjel a déli féltekére vonatkozik). A problémában tehát mind a forgatásra, mind a rétegzettségre jellemző dimenziótlan szám jelen van.

Mivel a külső felszínen és a rétegek között sem tételezünk fel sűrűlódást, a két réteg egymástól függetlennek tekinthető, s *mindkettőben* fennáll a potenciális örvényesség megmaradása (l. 2.3 fejezet). Ezért az $i = 1, 2$ réteg ζ_i függőleges örvényesség-komponense és h_i pillanatnyi vastagsága segítségével képzett

$$q_i = \frac{\zeta_i + f}{h_i} H_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.4)$$

potenciális örvényesség az i -edik közegben mozgásállandó.

A redukált sekélyfolyadék-modell azt az esetet írja le, melyben valamelyik réteg sokkal vastagabb a másiknál, s a vastag rétegben áll a folyadék. A mozgó réteg változóiban, a forgatott sekélyfolyadék-modell egyenletei

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - g'\text{grad}h, \quad (6.5)$$

$$\frac{dh}{dt} = -h\text{div}\mathbf{u} \quad (6.6)$$

függetlenül attól, hogy melyik szintről van szó. A nyugalmi rétegvastagság $h_0 \equiv \min(H_1, H_2)$. Annak ellenére, hogy a kétrétegű közelítés sokszor túlzott egyszerűsítés, mégis első tájékozódásként jól használható. A (6.5) egyenlet ugyanolyan struktúrájú, mint a (2.7), s ez mutatja, hogy minden jelenség, melyet forgatott sekély folyadékban megismertünk, előfordul rétegzettség esetén is, csak *rövidebb* skálán jelenik meg, melyet a g' redukált gravitációs gyorsulás határoz meg. Mivel a későbbiek szempontjából fontos mindkét közeg sebességeloszlása, ahol csak lehet, a redukált sekélyfolyadék-modell helyett a pontosabb kétrétegű leírást használjuk.

6.2 A folytonos rétegzettségű forgatott sekély folyadék egyenletei

Folytonos rétegzettség esetén a Boussinesq-közelítést (l. 5.3 fejezet) használjuk a forgó Föld felszínén felírt Euler-egyenletben. A sekélységből adódóan elhanyagolható függőleges gyorsulás a nyomáseloszlás z -függésére hidrosztatikai viszonyokat biztosít. A geometriai elrendezés azonos a 6.1 ábrán látottal, de most a sebességtér folytonos magasságfüggésű. A külső felszín η alakján kívül a belső elválasztó felületek mozgását külön nem követjük, ezek az állandó sűrűségű felületeknek felelnek meg. A rétegek vízszintes nyugalmi elrendezését és az ezzel kapcsolatos Brunt–Väisälä-frekvencia jelenlétét egyelőre nem tételezzük föl, mert forgatott rendszerben függőlegestől *eltérő* rétegzettség is kialakulhat, sőt stacionárius is maradhat, ha hozzá megfelelő áramlás tartozik. Az ilyen stacionárius állapot stabilitása azonban nem garantált.

A H vastagságú folyadékban a mozgásegyenletek a két vízszintes sebességkomponens időfejlődésére ekkor

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0}\text{grad}p''. \quad (6.7)$$

Itt p'' a $p_0(z) \equiv p_0 + \rho_0 g(H - z)$ nyomástól való eltérést (l. (5.13)), a grad az (x, y) változók szerinti gradienst jelenti. d/dt a teljes időderivált: $\partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$, hiszen a vízszintes sebesség most függ a magasságtól is. A harmadik komponens egyenletéből a sekélység

következtében $dw/dt \approx 0$, tehát hidrosztatikai viszonyok érvényesülnek:

$$\boxed{\frac{\partial p''}{\partial z} = -\varrho'' g.} \quad (6.8)$$

Fennáll továbbá a Boussinesq-közelítésből (l. 5.3 fejezet) következő

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0} \quad (6.9)$$

divergencia-mentességi feltétel, és a

$$\boxed{\frac{d\varrho''}{dt} = 0} \quad (6.10)$$

egyenlet is, ahol ϱ'' a ϱ_0 sűrűségtől való (általános esetben időfüggő) eltérés.

A (6.8) hidrosztatikai egyenlet integrálásával a nyomás kifejezhető a sűrűségingadozással és a szabad felszíni η alakkal,

$$p = p_0 + \varrho_0 g (\eta(x, y, t) + H - z) + g \int_z^{\eta+H} \varrho'' dz' \equiv p_0(z) + p'', \quad (6.11)$$

ahol a külső felszíni p_0 nyomás feltevés szerint állandó. A ϱ'' sűrűségváltozás általában függ az (x, y) vízszintes koordinátáktól: *a sűrűségváltozás (6.7) szerint vízszintes irányú gyorsulást okoz*, hiszen a gravitációs erő az állandó sűrűségű felületek vízszintes síkba forgatására törekszik.

Függőleges rétegzettség esetén adott az időfüggetlen egyensúlyi $\bar{\varrho}(z)$ sűrűségeloszlás. Ilyenkor a ϱ'' sűrűségingadozás helyett a $\bar{\varrho}(z)$ sűrűségeloszlástól való eltérést megadó ϱ' dinamikai sűrűséget használjuk (l. (5.15)). Az egyensúlyi $\bar{p}(z)$ nyomástól való eltérést az (5.17) p' dinamikai nyomás adja. A (6.10) sűrűség egyenlet éppúgy, mint a nem forgatott esetben (5.4 fejezet)

$$\boxed{\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \varrho' = -w \frac{d\bar{\varrho}}{dz} \equiv w \frac{\varrho_0}{g} N^2(z),} \quad (6.12)$$

ahol N a Brunt-Väisälä-frekvencia és (6.9) is érvényben marad. A (6.7), (6.8) egyenletekben ekkor a kétvesszős helyett az egyvesszős dinamikai mennyiségek jelennek meg.

6.3 Hullámok forgatott kétrétegű sekély folyadékban

A nyugalmi állapotból történő kis eltéréseket a (6.1) Euler-egyenletek

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_1 - g \operatorname{grad} \eta, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_2 - g \operatorname{grad} \eta - g' \operatorname{grad} \chi \quad (6.13)$$

linearizált változatai adják. A (6.2) kontinuitási egyenletek linearizált alakja pedig

$$\frac{\partial(\eta - \chi)}{\partial t} = -H_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = -H_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2, \quad (6.14)$$

hiszen a felső réteg vastagságának ingadozása $\eta - \chi$, az alsóé pedig χ .

A nem forgatott rendszerben szerzett tapasztalatunk alapján (l. 5.10 fejezet) azt várjuk, hogy a jelentős χ belső felszíni változásokkal járó baroklin mozgások esetén a külső felszín η változása

csekély szerepet játszik csak. Ezért az η mennyiséget először elhanyagoljuk χ mellett az első kontinuitási egyenletben, azaz a merev lap közelítést alkalmazzuk. Ennek előnye, hogy rögtön zárt egyenletet kapunk a két közeg közötti $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ relatív sebességre. Az Euler-egyenletek kivonásával ugyanis

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u} - g' \text{grad} \chi. \quad (6.15)$$

A különbségi mozgást tehát a belső felszín alakváltozása vezérli forgatott esetben is. A kontinuitási egyenletek összegéből ugyanekkor az következik, hogy az

$$\bar{\mathbf{u}} \equiv \frac{H_1 \mathbf{u}_1 + H_2 \mathbf{u}_2}{H} \quad (6.16)$$

mélységi átlagsebesség síkbeli divergenciája nulla. Az időben változó felszínek miatt a hullámok külön-külön nem lehetnek divergenciamentesek, ezért hullámmegoldás csak úgy létezhet, hogy a mélységi átlagsebesség térben állandó. Mivel mindkét sebesség időben oszcillál, az állandó csak zérus lehet: $H_1 \mathbf{u}_1 = -H_2 \mathbf{u}_2$. Az így előálló *baroklin* hullámokban a két rétegben tehát *ellenkező* előjelű a sebesség. A kontinuitási egyenletek súlyozott különbsége ($\eta = 0$ mellett) a relatív sebesség újabb kapcsolatát adja a belső felszíni alakokkal:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - \left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} \right)^{-1} \text{div} \mathbf{u}. \quad (6.17)$$

A (6.15) és (6.17) zárt egyenletrendszer teljes mértékben analóg a (2.7) sekélyfolyadék-egyenletekkel, csak benne a g' redukált gyorsulás és a rétegek mélységének harmonikus közepe jelenik meg.

A teljes rétegvastagság helyett a $\text{div} \mathbf{u}$ tag együtthatója most $H_1 H_2 / H$. A homogén esetben megjelent $R = \sqrt{gH} / |f_0|$ (külső) Rossby-sugár analogonja ezért az

$$R' \equiv \frac{\sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H}}}{|f_0|} \quad (6.18)$$

belső Rossby-sugár. A L síkbeli távolsághoz viszonyított R'/L belső Rossby-sugár úgy is írható, mint a Rossby-szám és az $Fr' = U / \sqrt{g'H}$ belső Froude-szám hányadosa szorozva egy, a rétegvastagságok arányától függő kifejezéssel. A belső Rossby-sugár tehát becsülhető az

$$R' \approx L \frac{Ro}{Fr'} \quad (6.19)$$

aránytal. Ez mutatja, hogy a belső Rossby-sugár az a távolság, ahol a forgásból és a rétegzettségéből adódó hatások összemérhető szerepet játszanak. Érdekes felírni a belső Rossby-sugár egy másik alakját is. Felhasználva, hogy (6.18) számlálójában a nem forgatott kétrétegű közeg belső hullámának (5.66) sebessége áll,

$$R' \equiv \frac{c_1}{|f_0|}, \quad (6.20)$$

teljes analógiában azzal, hogy a külső Rossby-sugár a szabad felszíni hullámok c_0 terjedési sebességének és a Coriolis-paraméternek a hányadosa.

Az ócánbeli belső Rossby-sugár jóval kisebb a külsőnél. Tipikus $g' = 0,03 \text{ m/s}^2$, $H_1 = 400 \text{ m}$, $H_2 = 3600 \text{ m}$ értékekkel és $f_0 = 10^{-4} \text{ 1/s}$ Coriolis-paraméterrel számolva azt kapjuk, hogy $R' \approx 30 \text{ km}$ ($c_1 \approx 3 \text{ m/s}$). A légköri különbség nem ilyen nagy: a légkört két egyforma vastag rétegre bontva ($H_1 = H_2 = 5000 \text{ m}$), $g' = 1 \text{ m/s}^2$ -tel $R' \approx 500 \text{ km}$ adódik.

Amennyiben az egyik réteg jóval vastagabb, mint a másik, akkor

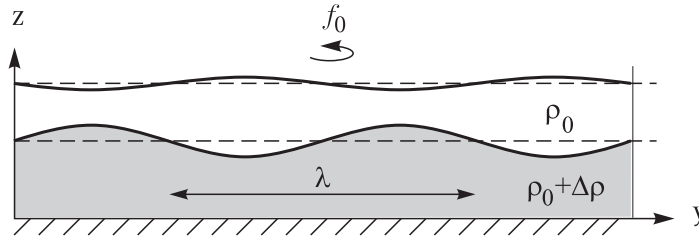
$$R' \equiv \frac{\sqrt{g'h_0}}{|f_0|}, \quad (6.21)$$

ahol $h_0 = \min(H_1, H_2)$ a keskenyebb réteg vastagsága. Ez nem más mint a (6.5) redukált sekélyfolyadék-modell belső Rossby-sugara.

A homogén közegek Poincaré-hullámai (2.8 fejezet) mintájára a kétrétegű közegben kialakulnak a tehetetlenségi-gravitációs hullámok *belső*, vagy *baroklin* változata is (6.2 ábra). A belső tehetetlenségi-gravitációs hullámokat a két közeget elválasztó felület bármilyen csekély perturbációja, pl. a termoklin zónabeli enyhe fel-, vagy leáramlás is kiválthatja. Diszperziós relációjuk a (2.59) összefüggéssel analóg módon

$$\omega_0 = \pm(f_0^2 + c_1^2 k^2)^{1/2} = \pm f_0 \left(1 + (R'k)^2\right)^{1/2}, \quad (6.22)$$

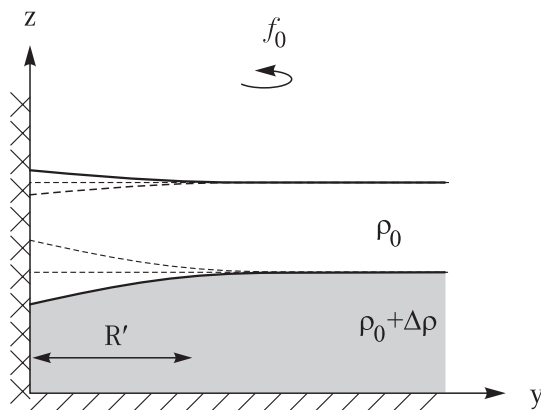
ahol $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ a hullámszámvektor hossza. A tehetetlenségi mozgás is jelen van ezekben a hullámokban, melyre az f_0 minimális frekvencia megjelenése utal. A c_1 sebességű belső hullámoktól való eltérés az R' belső Rossby-sugárral *összemérhető* vagy annál *nagyobb* hullámhosszakra válik jelentőssé, a rövid hullámok esetén a Coriolis-hatás elhanyagolható.



6.2 ábra: Belső Poincaré- (tehetetlenségi-gravitációs) hullám kétrétegű közegben. A külső felszín változásánál jóval erősebb a belső felszíné. A hullám frekvenciája a forgási szögsebességnél (az f_0 Coriolis-paraméternél) nem lehet kisebb, ezért gyorsabb a nem forgatott rendszerbeli belső hullámnál. A mozgás a tehetetlenségi körmozgás és a g' redukált gravitációs térben kialakuló felszíni hullám kombinációja.

Meredek, egyenes partvonalak mentén kialakulnak *belső*, vagy *baroklin Kelvin-hullámok* is. A lokális szelek által létrehozott helyi fel- vagy leáramlások mozgathatják meg a termoklin zóna határát, s ez gerjeszti a part menti baroklin hullámokat. A belső Kelvin-hullámok a nem forgatott rendszer belső hullámainak c_1 sebességével haladnak a partvonal mentén (6.3 ábra), de arra merőlegesen, az y irányban az $\exp(-y/R')$ összefüggés szerint csengenek le. Partra merőleges kiterjedésük tehát néhány belső Rossby-sugárnyi.

Megemlítjük, hogy az η felszíni alakváltozás megtartása (a merev lap közelítés elvetése) esetén a nem forgatott esethez hasonlóan kiderül, hogy a baroklin mozgás során $\eta \approx -\chi g'/g$. A felszíni alakváltozás tehát csekély és *ellenkező előjelű* a belsőhöz képest. Ennek megfelelően a (6.18) belső Rossby-sugárhoz is csak $g'/g \ll 1$ rendű korrekciót kapunk, a (6.18) alak tehát használható felszíni mozgás jelenléte esetén is. Létezik ugyanakkor olyan megoldás is, melyben a felszíni alakváltozás jelentős, a belső ingadozás azzal összemérhető és azonos előjelű. A (??) egyenletről látszik, hogy g' kicsinysége miatt ekkor $\mathbf{u}_2 \approx \mathbf{u}_1$, tehát a két réteg közel azonosan mozog, s g'/g nagyságú korrekciók erejéig visszkapjuk a homogén forgatott közegben megjelenő hullámokat (Poincaré- vagy Kelvin-hullámok). Ezeket a rétegzett közeg *barotróp* hullámainak



6.3 ábra: Belső Kelvin-hullám kétrétegű közegben. A hosszú szaggatott vonalak a felületek alakját jelzik fél periódussal később. A külső felszín változásánál itt is jóval erősebb a belső felszíné. A hullám az x tengely mentén halad a belső hullámok c_1 sebességével, az y tengely mentén pedig lecseng az R' belső Rossby-sugárnak megfelelő távolságon.

nevezzük. Karakterisztikus méretük a $R = \sqrt{gH}/|f_0|$ külső Rossby-sugár, mely, mint láttuk a légkörben és az óceánokban 3000 ill. 1000 km nagyságrendű. Ennek fényében érthető, hogy amennyiben a külső Rossby-sugárnál rövidebb skálájú jelenségeket vizsgálunk, $k_x R \gg 1$, akkor jogos a külső felszíni alakváltozások elhanyagolása, vagyis a merev lap közelítés használata.

6.4 Hullámok állandó függőleges rétegzettségű forgatott, sekély folyadéokban

A 6.2 fejezetben bemutatott mozgásegyenletek állandó Brunt–Väisälä-frekvenciával jellemzett rétegzettség esetén kialakuló nyugalmi állapot körül linearizált alakja

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (6.23)$$

ahol p' a $\bar{p}(z)$ egyensúlyi nyomástól való eltérés. A harmadik sebességkomponensből a sekélység következtében :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho'g. \quad (6.24)$$

A (6.12) sűrűség egyenlet linearizált változata

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = w \frac{\rho_0}{g} N^2. \quad (6.25)$$

A baroklin mozgások megtalálásához alkalmazzuk most is a merev lap közelítést, azaz tegyük fel, hogy a felszín nem mozdulhat el, tehát a függőleges sebesség a $z = H$ felső szinten éppúgy eltűnik, mint a közeg alján, $z = 0$ -ra. Ekkor a függőleges sebesség és minden más változó magasságfüggése is kifejezhető egy $\exp(-ik_z z)$ tényezővel, ahol a hullámszám függőleges k_z komponense a

$$k_z = n \frac{\pi}{H}, \quad (6.26)$$

$n = 1, 2, \dots$ értékeket veheti csak fel, vagyis a λ_z függőleges irányban kialakuló hullámhossz fele egész számszor fél rá a teljes H magasságra: $\lambda_z/2 = H/n$. A nem forgatott folytonos rétegzettségű közeg dinamikájának leírásakor használt normálmódusok bevezetésének mintájára (5.9

fejezet) alkalmazzuk az

$$(u, v, w, p', \varrho')(x, y, z, t) \rightarrow (u, v, w, p', \varrho')(x, y, t) \cdot e^{-ik_z z} \quad (6.27)$$

helyettesítést. A jobb oldalon álló, csak síkbeli koordinátáktól függő térmennyiségek a forgatott rétegzett folyadék *normálmódusai*. Időfüggés egyelőre tetszőleges lehet. A normálmódusok függenek a k_z -t megadó n indextől, de az egyszerűség kedvéért ezt egyelőre nem jelöljük.

A (6.25) sűrűség egyenlet z szerinti deriváltjából a (6.24) hidrosztatikai egyenlet és (6.27) felhasználásával:

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t \partial z} = \frac{k_z^2}{g} \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\varrho_0 N^2}{g} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (6.28)$$

A divergenciamentességi egyenletből $\partial w / \partial z$ -t kifejezve, k_z (6.26) lehetséges alakjainak felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{\partial(p' / \varrho_0 g)}{\partial t} = -\frac{N^2 H^2}{g \pi^2 n^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (6.29)$$

A (6.23) Euler-egyenlettel ez azonos szerkezetű rendszert képez, mint a (2.52)-(2.54) linearizált sekélyfolyadék egyenletek, amelyekbe a

$$p' \rightarrow g \varrho_0 \eta, \quad \frac{N^2 H^2}{g \pi^2 n^2} \rightarrow H \quad (6.30)$$

helyettesítéssel megy át. A

$$H_{e,n} \equiv \frac{N^2 H^2}{g \pi^2 n^2} \quad (6.31)$$

mennyiséget ezért *ekvivalens mélységnek* nevezzük. Azt adja meg, hogy milyen mélységű homogén sekély folyadékban alakulnának ki ugyanazok a hullámjelenségek, mint H mélységű folytonosan rétegzett folyadékban. Már az első módus ekvivalens mélysége is meglepően csekély: óceánban 1 m-nél valamivel rövidebb, a légkörben pedig néhány száz m.

A nem forgatott rétegzett folyadék belső normálmódusainak 5.9 fejezetben meghatározott (l. (5.48)) sebességeivel az ekvivalens mélység a

$$c_n^2 = g H_{e,n} \quad (6.32)$$

kapcsolatban áll. Az ekvivalens mélységek, ill. a terjedési sebességek egész spektruma miatt, a problémához a belső Rossby-sugarak *sorozata* tartozik:

$$R'_n \equiv \frac{\sqrt{g H_{e,n}}}{|f_0|} = \frac{c_n}{|f_0|} = \frac{NH}{|f_0| \pi n}, \quad (6.33)$$

$n = 1, 2, \dots$. Nagyságrendi becslésekben a folytonos rétegzettségű közeg belső Rossby-sugarára az

$$R' \approx \frac{NH}{|f_0|} \quad (6.34)$$

értéket használjuk.

A légköri $N = 10^{-2}$ 1/s Brunt-Väisälä-frekvenciával és $H = 10$ km vastagsággal számolva közepes szélességeken ($f_0 = 10^{-4}$ 1/s) azt kapjuk, hogy $NH/|f_0| = 1000$ km. A Brunt-Väisälä-frekvencia tipikus óceáni $N = 10^{-3}$ 1/s értékével a belső Rossby-sugár a folytonos rétegzettségű óceánban ($H = 4$ km) 40 km. Mivel a rövidebb hullámok gyorsabban csillapodnak, az első normál módusok a legjelentősebbek. A megfigyelések szerint a hosszú idejű óceáni mozgások szempontjából első közelítésben elegendő az $n = 1$ és $n = 2$ normál módus figyelembevétele.

Egy $n + 1$ rétegű közegben n különböző belső hullám terjedési sebesség lehetséges, s ezért n különböző belső Rossby-sugár definiálható. Ha tehát a folytonos rétegzettségű közeg első n normál modulusával dolgozunk csak, az annak felel meg, hogy a közeget $n + 1$ rétegűként közelítjük.

A forgatott rétegzett rendszerekre jellemző két frekvencia jellegű mennyiség a N Brunt–Väisälä-frekvencia és az f_0 Coriolis-paraméter között rendszerint nagyságrendi különbség áll fenn a Brunt–Väisälä-frekvencia javára: az

$$Fn \equiv \frac{N}{|f_0|} \quad (6.35)$$

frekvenciaszám vagy frekvencia arány nagy. Adataink alapján a légkörben $Fn = 100$, az óceánban $Fn = 10 - 100$. Ezzel

$$R' \approx H Fn. \quad (6.36)$$

A belső Rossby-sugár, mely az áramlatok jellegzetes vízszintes mérete, sokkal nagyobb a teljes mélységnél. Végső soron tehát a nagy frekvenciaarány teszi jogossá a sekélyfolyadék közelítés használatát forgatott rétegzett közegben.

Mivel a H/L méretarány is tipikusan 10^{-2} , nagyskalájú környezeti áramlásokban a

$$Bu \equiv \left(\frac{NH}{f_0 L} \right)^2 = \left(\frac{Ro}{Fr'} \right)^2 \approx \left(\frac{R'}{L} \right)^2 \quad (6.37)$$

Burger-szám egységnyi. A jellemző frekvenciák arányát tehát a méretarány éppen kompenzálja. A Burger-szám egységnyi nagyságrendje azt fejezi ki, hogy a kvázigeosztrofikus mozgások szempontjából a forgás és a rétegzettség hatása egyformán fontos. Ebből következően a belső Rossby-sugár a rendszer jellegzetes vízszintes kiterjedésének nagyságrendjébe esik. A belső Rossby-sugár összemérhetősége a teljes lineáris kiterjedéssel a földi áramlások szempontjából alapvető fontosságú¹.

Az n -edik normál módusnak megfelelő belső Poincaré-hullám diszperziós relációja folytonos rétegzettség esetén a homogén közegbeli összefüggés alapján

$$\omega_0 = \pm (f_0^2 + c_n^2 k^2)^{1/2} = \pm \left(f_0^2 + \frac{N^2 H^2}{\pi^2 n^2} k^2 \right)^{1/2} = \pm f_0 \left(1 + (R'_n k)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.38)$$

ahol $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ a hullámszámvektor hossza a vízszintes síkban. Figyelembe véve a függőleges hullámszámvektor (6.26) lehetséges értékeit, a teljes diszperziós reláció úgy is írható, mint²

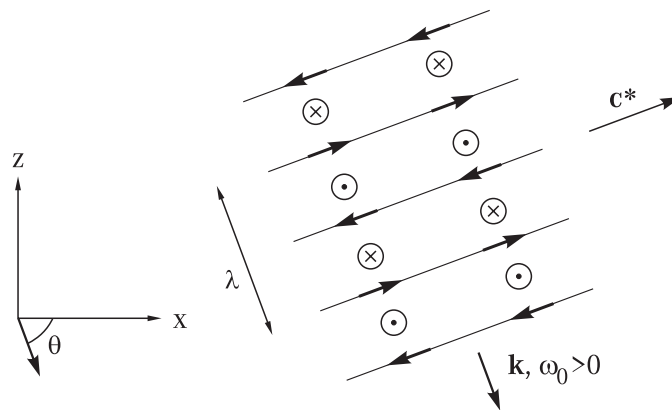
$$\omega_0 = \pm \left(f_0^2 + N^2 \frac{k^2}{k_z^2} \right)^{1/2}. \quad (6.39)$$

¹Olyan bolygók légkörében, ahol ez nem áll fenn, a környezeti áramlások más jellegűek mint a Földön. A Brunt–Väisälä-frekvencia a légkörrel rendelkező bolygók esetében $10^{-2} - 10^{-3}$ 1/s körülinek becsülhető. A Burger-számot ezért elsősorban a Coriolis-paraméter szabja meg. A Vénusz esetében a Burger-szám 1-nél jóval nagyobb, a Jupiter felsőlégkörében pedig 10^{-1} körüli.

²Mély rétegzett folyadékban, melyben a hidrosztatikus közelítés nem használható, a diszperziós relációra $\omega_0^2 = f_0^2 \sin^2 \theta + N^2 \cos^2 \theta$ adódik, ahol θ a hullámszámvektor vízszintessel bezárt szöge. Ez nem más, mint a 1.9 fejezetben látott tehetetlenségi hullámok és az 5.5 fejezet belső hullámai diszperziós relációinak egyfajta kombinációja. A (6.39) alak a sekély folyadéknak megfelelő $k_z \gg k_x, k_y$ esetben adódik, amikor $\sin \theta \approx 1$ és $\cos \theta \approx k/k_z$.

Mivel a függőleges és a vízszintes hullámszám a H mélység ill. az L síkbeli kiterjedés reciprokával arányos és $H \ll L$, a k_z függőleges hullámszámkomponens sokkal nagyobb, mint k_x, k_y , vagyis a teljes hullámszámvektor vízszintessel bezárt szöge közel 90 fok. A hullámok tehát majdnem függőleges terjedési irányúak. Csoportsebességük merőleges a terjedési irányra, s előjelét a belső hullámokra érvényes összefüggések adják meg.

Érdekes megfigyelhető következménnyel jár a hullám elliptikus polarizációja. A tehetetlenségi hullámokhoz (l. 2.8 fejezet) hasonlóan a két vízszintes sebességkomponens komplex amplitudójára a linearizált egyenletekből azt kapjuk, hogy $v_0 = iu_0 f_0/\omega_0$, a két sebességkomponens tehát negyed fázisnyi különbségben van, de amplitudójuk most nem azonos. Adott helyen a sebességvektor anticiklonálisan forog időben, hiszen a Coriolis-erő az áramlást az északi félgömbön jobbra, a délin balra téríti. Ennek következtében (amint az 1.10 fejezetben is láttuk) a sebességvektorok elfordulása egy adott pillanatban *térben* is anticiklonális, ha az ω_0/k_z fázissebességgel ellentétes irányban mozgunk a z tengely mentén (l. 1.16 ábra). A pillanatnyi sebességek térbeli elfordulása megfigyelhető mind a légköri, mind az óceáni mozgások belső tehetetlenségi hullámokból eredő komponenseiben. A tapasztalat szerint a légköri hullámok csoportsebessége döntően felfelé mutat, tehát bennük pozitív frekvencia esetén a k_z hullámszám negatív. Ilyenkor az anticiklonális sebességelfordulás felfelé haladva látható (6.4 ábra). A tengeri hullámokban fordított a helyzet, ott az energiaszállítás főleg lefelé történik, s ezért ott az anticiklonális sebességelfordulás a mélyebb rétegek felé haladva figyelhető meg leggyakrabban (mint a 1.16 ábrán).



6.4 ábra: Belső Poincaré-hullám pillanatnyi sebességvektorai (kis nyilak) folytonos rétegzettségű közegben. A kis körben elhelyezett pont (kereszt) az ábra síkjából kifelé (síkjába befelé) mutató vektort jelöl. A hullám jobbra lefelé halad, az általa szállított energia pedig jobbra fel. A sebességtér a haladási tengely körül forog, a hullám elliptikusan polarizált. A pillanatnyi sebességvektor a haladási irányval szemben, azaz felfelé haladva anticiklonálisan fordul el. Ez a légköri tehetetlenségi-gravitációs hullámokban jól megfigyelhető.

A belső Kelvin-hullámok folytonosan rétegzett közegben a c_n sebességek valamelyikével haladnak, és az n indexnek megfelelő R'_n belső Rossby-sugárral csengenek le. Itt is az első néhány módusnak van csak gyakorlati jelentősége. Az első normálmódus geometriája azonos a 6.3 ábrán látottal, ha a belső elválasztó felületnek az éppen eltűnő vízszintes sebességű pontok összességét tekintjük.

Az η felszíni alak megtartása most is csekély változást jelent csak a baroklin hullámok tulajdonságaiban. Létezik ugyanakkor barotróp hullám is, ahol a felszíni alakváltozás jelentős, s a két réteg közel azonosan mozog, hasonlóan az homogén közegéhez. Ezt a külső Rossby-sugár jellemzi. Érdekes ezért a Rossby-sugarak (6.33) rendszerét kiegészíteni a külső Rossby-sugárral. Ez formálisan az $n = 0$ indexhez tartozónak tekinthető, a felszíni hullámok c_0 sebességével (l. 2.46).

A fenti megfontolások egyértelművé teszik, hogy gyorsan forgatott rétegzett folyadékban kialakulnak Rossby-hullámok is, s azokat a Rossby-sugarak rendszere határozza meg. Mielőtt azonban ezen fontos hullámok tárgyalására rátérnénk, érdemes megismerkedni az igen gyors forgatás határesetével kapcsolatos geosztrofikus egyensúlyi jelenségekkel.

6.5 Geosztrofikus egyensúly kétrétegű sekély folyadékban

A (6.3) Euler-egyenletben fellépő hidrodinamikai gyorsulás Rossby-számszor kisebb jelentőségű, mint a Coriolis-gyorsulás. A gyors forgatás határesetében a hidrodinamikai gyorsulás eltűnik, s kialakul egy $\mathbf{u}_{g,1}$, $\mathbf{u}_{g,2}$ stacionárius áramlás, amelyben a felszíni alakok kompenzálják a Coriolis-hatást, azaz

$$f_0 \mathbf{n} \times \mathbf{u}_{g,1} = -g \text{grad} \eta, \quad (6.40)$$

$$f_0 \mathbf{n} \times \mathbf{u}_{g,2} = -g \text{grad} \eta - g' \text{grad} \chi. \quad (6.41)$$

A két egyenletet kivonva:

$$f_0 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_{g,2} - \mathbf{u}_{g,1}) = -g' \text{grad} \chi. \quad (6.42)$$

A geosztrofikus áramlást a felső közegben tehát a felszíni alak határozza meg, a két közeg közötti sebességkülönbséget pedig az elválasztó felület alakja. A (6.42) egyenletből az is leolvasható, hogy az elválasztó felület szintvonalaival *párhuzamos* a relatív sebesség. Komponensekben:

$$v_{g,1} = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad u_{g,1} = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (6.43)$$

és

$$v_{g,2} = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g'}{f_0} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad u_{g,2} = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g'}{f_0} \frac{\partial \chi}{\partial y}. \quad (6.44)$$

Az f_0 síkon zajló geosztrofikus áramlás mindkét közegben kétdimenziós, divergenciamentes. Léteznek tehát egy ψ_1 és egy ψ_2 áramlási függvény, melyből a geosztrofikus sebességek a szokásos deriválási szabállyal kaphatók. A fenti (6.43), (6.44) egyenletek alapján

$$\boxed{\psi_1 = \frac{g}{f_0} \eta, \quad \psi_2 = \frac{g}{f_0} \eta + \frac{g'}{f_0} \chi.} \quad (6.45)$$

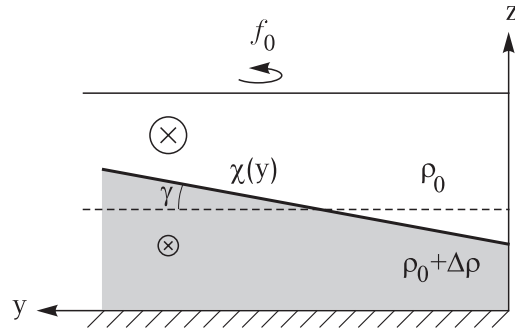
Ebből ismét látszik, hogy a relatív sebességeket a belső χ felületi alak határozza meg.

Konkrét példaként tekintsük azt az esetet, amikor az elválasztó felület az y irányban egyenletesen változik. Tegyük föl, hogy észak felé emelkedik, azaz a γ dőlésszöge pozitív. Ez annak felel meg pl., hogy az Északi-sark felé haladva az alsó hidegebb légréteg egyre vastagabb. A (6.43), (6.44) egyenletekből

$$u_{g,2} - u_{g,1} = -\frac{g'}{f_0} \text{tg} \gamma. \quad (6.46)$$

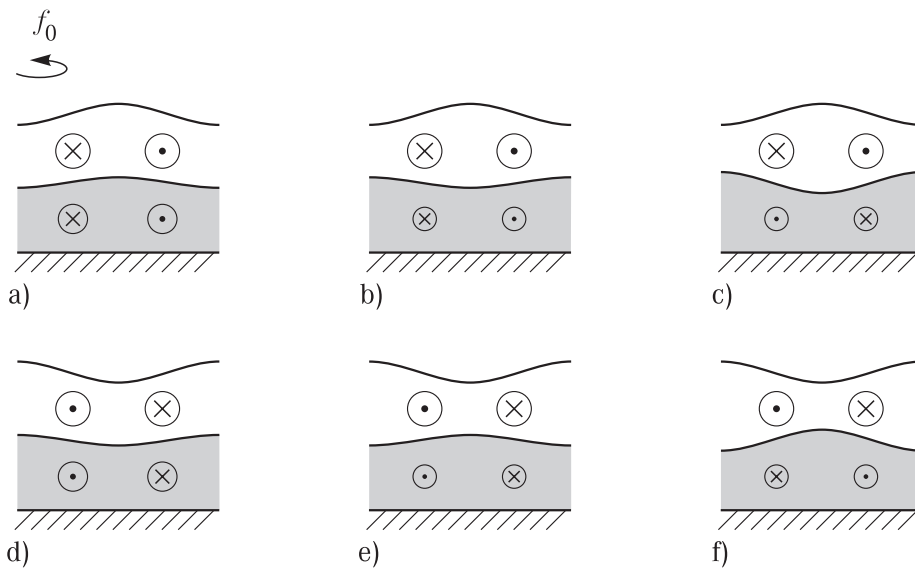
Az ilyen dőlés tehát az északi féltekén a keletre irányuló áramlási sebességet befolyásolja. A felső rétegben az áramlás *erősebb*, mint alul (6.5 ábra), *függetlenül* attól, milyen a külső felszíni alak.

A következő példában megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja az áramlást a felszín és a belső elválasztó felület viszonya. Tegyük fel, hogy a felszínen kidudorodás figyelhető meg, η lokális maximummal rendelkezik, mely anticiklonális áramlást hoz létre. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy χ arányos η -val. Ha χ és η azonos nagyságrendűek, akkor (6.44)-ben a g' -vel arányos tagok csekély szerepet játszanak, s ezért az áramlás gyakorlatilag azonos mindkét rétegben, mely egy homogén (barotóp) anticiklonnak felel meg (6.6a ábra). Ha az elválasztó



6.5 ábra: Geosztrofikus egyensúly kétrétegű közegben. A felső elválasztó felületnek a közelebbi pólus irányában történő egyenletes emelkedése olyan stacionárius áramlással van egyensúlyban, mely *keletre* történik és a *felső (melegebb) rétegben gyorsabb* (ott a sebesség nagyságát jelző kör nagyobb sugarú).

felület behorpad és változása jóval erősebb, mint a felszíné, de $\eta + \chi g'/g$ még pozitív, akkor az áramlás baroklin, és az alsó közeg jóval lassabban mozog, mint a felső (6.6b ábra). Ha viszont, $\chi < -\eta g/g'$, akkor az alsó áramlás iránya is megváltozik: ott ciklonális forgású a sebesség (6.6c ábra). Ez jól mutatja, hogy rétegzett közegben csak adott magassági szinten értelmes a ciklonális-anticiklonális megkülönböztetés. A felszín behorpadása esetén is hasonló a helyzet (6.6d-f ábra). Az elválasztó felület erős kidudorodása alul anticiklonálissá teheti az áramlást.



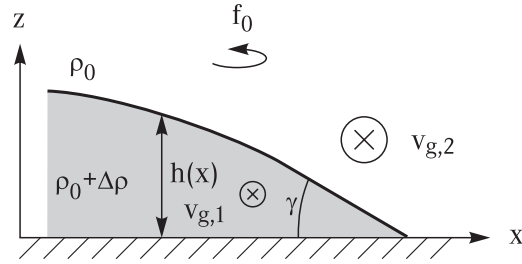
6.6 ábra: Geosztrofikus egyensúly kétrétegű közegben a külső és belső felszíni alak viszonyának függvényében. A külső felszín kiemelkedése alatt az áramlás mindig anticiklonális (a)-(c), de az alsó rétegben egyre lassab, ha a belső felszín változása ellenkező előjelű mint a külsőé (b), sőt előjelét is megváltozathatja (c). Hasonló a helyzet a külső felszín behorpadása esetén is (d)-(f). Az ábra tekinthető az x, y síkon közel forgásszimmetrikus elrendezések oldalnézetének, de az y irányban translációinvariáns felszíni alakokhoz tartozónak is.

6.6 Frontok forgatott rendszerekben, a Margules-összefüggés

Légköri vagy óceáni hideg vagy meleg áramlatok határán, a felszínt vagy aljzatot elérő *frontok* mentén hirtelen sűrűség-ugrás következik be. A frontok viselkedésének leírására a kétréteges közelítés jól alkalmazható. Legyen a sűrű közeget elválasztó felület alakja az egyszerűség kedvéért y -től független (6.7 ábra). Mivel a két közeget elválasztó felület most nem egy átlagos vízszintes vonal körül ingadozik, a sűrűbb közeg vastagságát érdemes változónak tekintenünk, melyet $h = h(x, t)$ -vel jelölünk. A frontvonal mentén, az alsó felszínen természetesen $h = 0$. A geosztrofikus áramlás feltétele ekkor (6.43), (6.44) szerint

$$v_{g,2} - v_{g,1} = \frac{g'}{f_0} \frac{dh}{dx}. \quad (6.47)$$

Ez azt mutatja, hogy a frontvonallal *párhuzamosan* sebességugrás alakul ki. A nyugatról érkező hideg frontban ($dh/dx < 0$) az északi féltekén $v_{g,2} < v_{g,1}$. Ezek szerint a frontban jelentős délre mutató, azaz északi szél komponens is megjelenik: a déli szél gyengül vagy ellenkező irányúvá változik.



6.7 ábra: Nyugalomban levő front körüli áramlás geosztrofikus egyensúlyban. A sűrű (hideg) közeg a $h(x)$ függvénnyel határolt tartományban helyezkedik el. Az áramlási sebesség mindkét közegben merőleges a rajz síkjára és az alsó közegben *gyengébb* az y irányú sebesség. A rajzon a γ dőlésszög negatív.

Az összefüggést a front véges γ hajlásszögű élére alkalmazva

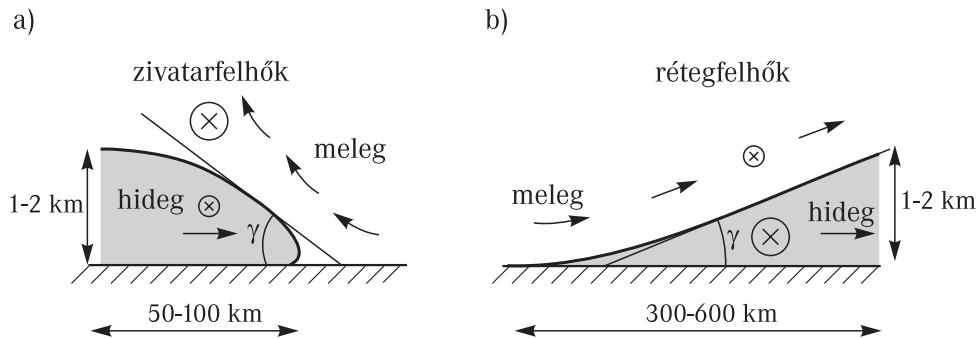
$$v_{g,2} - v_{g,1} = \frac{g'}{f_0} \operatorname{tg} \gamma. \quad (6.48)$$

Ez az ún. Margules-féle összefüggés a front két oldalán megfigyelhető sebességkülönbség, a redukált gravitációs gyorsulás és az elválasztó felület vízszintessel bezárt γ dőlésszöge között teremt kapcsolatot. Ez a szög nő a sebességkülönbséggel és a Coriolis-paraméterrel. A meredekség tipikus értéke a közepes szélességeken ($f_0 = 10^{-4}$ 1/s) 100-szoros redukcióval és 10 m/s sebességkülönbséggel számolva 1/100. A szög tehát kicsi, s ezért tangensével helyettesíthető. A front hajlásszögének sűrűség-, ill. hőmérsékletkülönbséggel megadott kifejezése ezért

$$\gamma = \frac{f_0}{g} \frac{\rho_0}{\Delta \rho} (v_{g,2} - v_{g,1}) = \frac{f_0}{g \alpha \Delta T} (v_{g,2} - v_{g,1}). \quad (6.49)$$

Az utolsó átalakításban felhasználtuk, hogy $\Delta \rho = \alpha \rho_0 \Delta T$, ahol α a hőtágulási együttható és ΔT a felső és az alsó közeg közötti hőmérsékletkülönbség. A szög abszolútértéke nő a sűrűség-, ill. hőmérsékletkülönbség csökkenésével.

A Margules-összefüggés geosztrofikus egyensúlyban lévő stacionárius frontokra vonatkozik. A valóságos frontok a kvázigeosztrofikus földi áramlásokban alakulnak ki, s ezért a fenti elmélet csak első közelítés. A frontok általában mozognak, s a felszínnel való súrlódás alakjukat befolyásolja.



6.8 ábra: Mozgó légköri frontok alakja (oldalnézet) és sematikus áramlási viszonyaik. A sebességnek a frontra merőleges és azzal párhuzamos komponense is van. (a) Hideg front. Alakja hasonlít a gravitációs áramlatéhoz. A front előtti heves feláramlás zivatarfelhők kialakulására vezet. (b) Meleg front. A feláramlás gyengébb, de a meleg levegő messze a front előtt is felhatol a hideg fölé, s rétegfelhők megjelenésével jár.

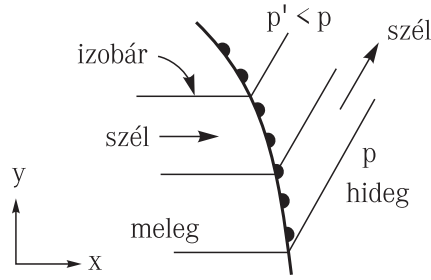
A légköri hideg frontok (hideg levegő behatolása a meleg alá) határfelülete előregyűródik a felszínen eltűnő sebesség miatt (6.8a, 6.9 ábra). A hideg front légtömegének mozgása ezért hasonlít egy gravitációs áramlatéhoz (5.14 fejezet), de nem szabad elfelejtenünk, hogy bennük a frontra *merőleges* áramlás is jelentős. Az általában gyorsan mozgó hideg frontok dőlésszöge $1/50$ körüli. A hideg légréteg vastagsága $1 - 2$ km, melyet az elválasztó felület a frontvonal mögött mintegy 50 km-re már elér.



6.9 ábra: Hidegfront (bal oldali fehér légtömeg) áthaladása a Balatonon 2001. május 18-án [Horváth Ákos (OMSZ Siófoki Viharjelző Observatórium) felvétele].

A légköri meleg front (a meleg levegő a lassan mozgó hideg légréteg fölé csúszik) határfelülete a súrlódás miatt ellaposodik (6.8b ábra). A meleg frontok dőlésszöge kisebb, $1/200-1/300$. Az 1 km-es szintet az elválasztó felület tehát kb. 300 km-rel a front előtt éri el.

Mozgó frontok mentén az alsó légrétegek ütköznek, összeáramlás történik, s ez feláramlás-hoz vezet (6.8 ábra). A frontok ezért a felszínen *mindig lokális nyomáscsökkenéssel* járnak. A



6.10 ábra: Felszíni nyomáseloszlás frontok mentén. A nyomás a front körüli feláramlás miatt lokális *minimumot* mutat. A felszíni sebességugrás következtében az izobárok *megettörnek*. Az ábra egy nyugatról érkező meleg front (vonal kis félkörökkel) körüli viszonyok sematikus rajza.

frontvonal mentén a felszíni izobárok *megettörnek* (6.10 ábra), hiszen a front átvonulása a sűrűbb közeg többlet-nyomásának megjelenésével jár. Összhangban van ez azzal is, hogy a felszíni szélsebességben *ugrás* történik a frontra merőleges irányban: *szélfordulás* tapasztalható (6.11 ábra). A feláramlás a hideg front mentén erőteljesebb a nagyobb dőlésszög miatt. A hideg front mentén ezért a föláramló levegőből nagy zivatarfelhők képződnek (6.9 ábra). Meleg front esetén a feláramlás lassúbb és kiterjed az egész elválasztó felület feletti levegőrétre, vagyis a felszínről nézve megelőzi a frontot. A meleg levegő feljutása rétegfelhők kialakulására vezet, melyek átlagos vastagsága annál kisebb, minél távolabb (és magasabbra) vagyunk a fronttól. Az égen megjelenő pehely (cirrusz) felhők ezért közeledő meleg frontra utalnak.

Térjünk most vissza a geosztrofikus közelítéshez és vizsgáljunk egy konkrét nemlineáris elválasztó felület alakot (6.12a ábra). Legyen

$$h(x) = h_0(1 - e^{-x/r_0}), \quad (6.50)$$

s az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a hígabb közegben a sebesség eltűnik. A sebesség a sűrű közegben északra mutat, s értéke (6.47) szerint

$$v_{g,2}(x) = \frac{g' h_0}{f_0 r_0} e^{-x/r_0}. \quad (6.51)$$

A sebesség tehát gyorsan csökken a frontvonal mögött. A teljes anyagtranszport

$$v_{g,2}(x)h(x) = \frac{g' h_0^2}{f_0 r_0} (1 - e^{-x/r_0}) e^{-x/r_0}. \quad (6.52)$$

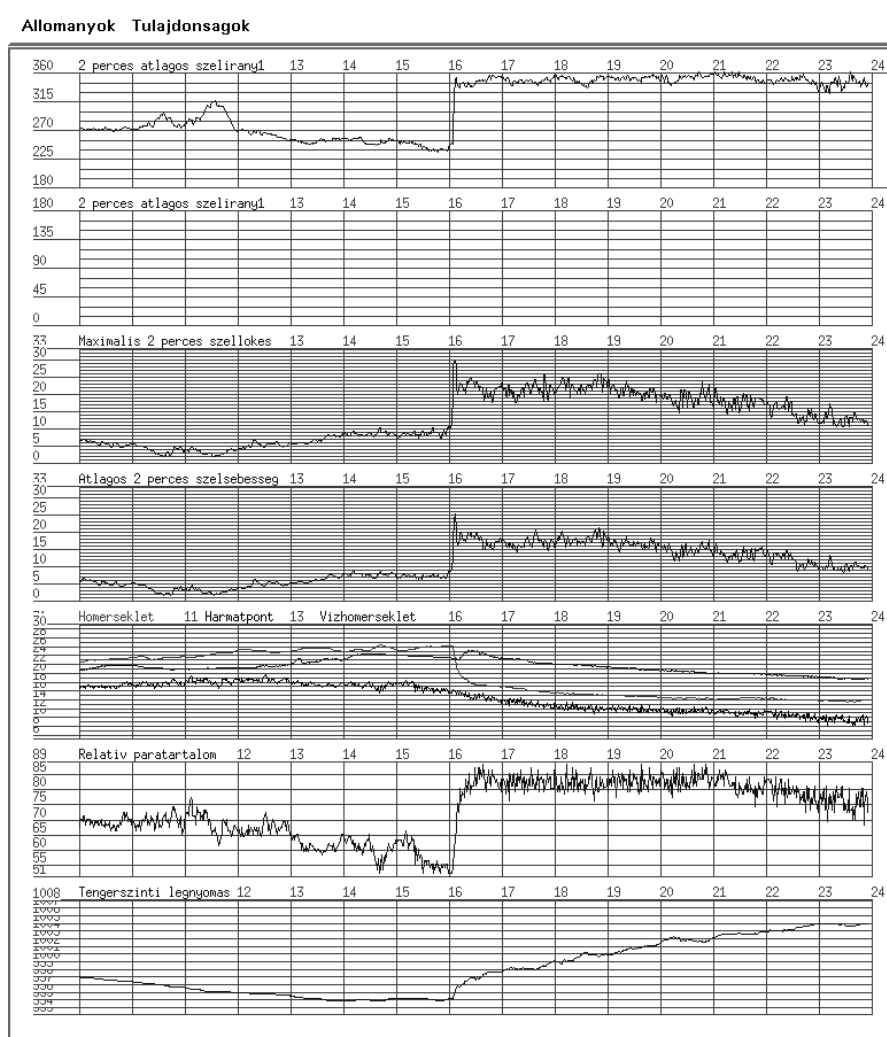
Ez a mennyiség a frontvonalától $r_0 \ln 2$ távolságra maximális.

A (6.51) kifejezést a frontvonal helyén, $x = 0$ -ra kiértékelve, összhangban vagyunk a (6.48) Margules-összefüggéssel. Ebben a képből a meredekséget a h_0 rétegvastagság és az r_0 lecsengési paraméter határozza meg: $\gamma \approx h_0/r_0$, s a front menti sebesség ezért $v_{g,2} = g'h_0/(f_0 r_0)$.

Érdeemes ugyanezt a modellt óceáni meleg frontra is alkalmazni egy H vastagságú közeg felső határán (6.12b ábra). Ha a meleg közeg kelet felé mélyül, akkor északra irányuló áramlás alakul ki a front mentén. A sebességet és az anyagtranszportot a fenti képletek adják. A külső felszín alakja is következik, hiszen az alsó közegben csak úgy tűnhet el a sebesség, ha $g d\eta/dx + g' d(H - h)/dx = 0$, ahonnan

$$\eta(x) = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} h(x). \quad (6.53)$$

A meleg folyadék északra történő áramlása tehát felszíni kidudorodással jár, amint a homogén esetben (2.17 fejezet) már láttunk. Mivel az anyagtranszport egy r_0 vastagságú tartományra korlátozódik, ez a front modell egyben óceáni *áramlatok*, így a Golf-áramlat modellje is. Érdeemes ismét megfigyelni, hogy a belső alakváltozás mellett a külső elhanyagolhatóan kicsi, hiszen $\Delta \varrho \ll \varrho_0$.



6.11 ábra: Hidegfronttal járó paraméterváltozások a 6.9 ábrán látható front esetén. Figyelemreméltó a jelentős szélfordulás, ill. szélesség-, és hőmérsékletváltozás a 16 óra után néhány perccel áthaladó front jeleként [Horváth Ákos adatai].

6.7 A geosztrofikus egyensúly beállása

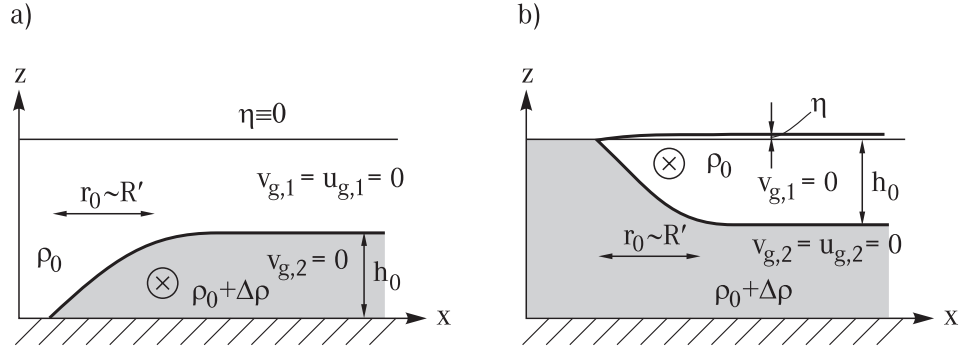
Ha kissé eltávolodunk a geosztrofikus egyensúlytól, s időfüggést is megengedünk, megérthetjük, hogy egy kezdeti ugrásszerű sűrűségkülönbségből hogyan alakul ki az egyensúlyi konfiguráció. Az elválasztó felület alakját a potenciális örvényesség megmaradása határozza meg. Használjuk ismét a kétrétegű közelítést, s vizsgáljunk egy meleg frontot, mely kezdetben a pozitív x tengely mentén helyezkedik el, véges H_1 állandó vastagsággal (6.13a ábra). Az alatta levő sűrű réteg vastagsága H_2 .

Az y koordinátától független $\mathbf{u}(x) = (0, v(x))$ áramlást feltételezve, elhanyagolható felszíni alakváltozás esetén a potenciális örvényesség az egyes közegekben

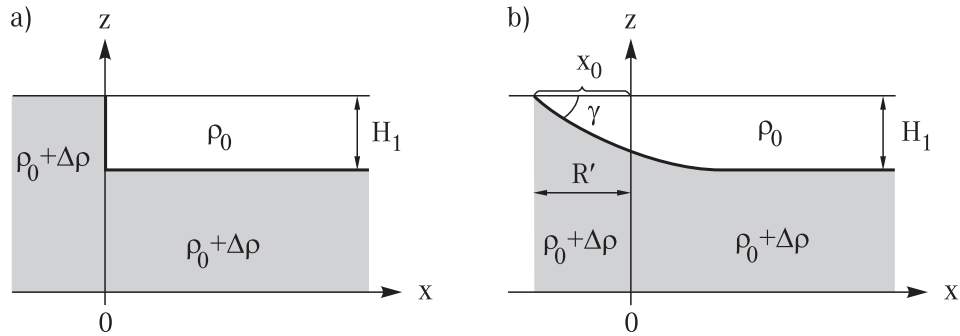
$$q_i = \frac{f_0 + \partial v_i / \partial x}{h_i} H_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.54)$$

ahol $h_1 = h$ a felső réteg pillanatnyi vastagsága és $h_2 = H - h$. Mivel kezdetben nem volt mozgás, $q_i = f_0$. A megmaradási tételből következik, hogy $\partial v_i / \partial x = f_0 (h_i / H_i - 1)$.

A végállapotban (6.13b ábra) az áramlások geosztrofikusak, ezért igaz rájuk a (6.47) össze-



6.12 ábra: Az r_0 távolságon exponenciálisan lecsengő függvényvel leírt frontok geosztrofikus egyensúlyban. (a) Hideg front az aljzaton. (b) Meleg front a folyadék felszíne alatt. Ez egyben a Golf-áramlat modelljének tekinthető, annak az amerikai partvonallal párhuzamosan futó szakaszában. A pólus felé irányuló áramlás a front melletti r_0 vastagságú tartományban jelentős.



6.13 ábra: A geosztrofikus egyensúly beállása kezdetben függőleges elválasztó felület esetén. (a) A meleg közeg a pozitív félegyenes mentén állandó H_1 vastagságú rétegből indul. (b) A végállapotot exponenciális függvény írja le, mely az R' belső Rossby-sugáron cseng le az eredeti H_1 mélységig. A front is éppen R' távolságot mozdul el. A geosztrofikus egyensúlyi front meredeksége $|\gamma| \approx H_1/R'$.

függés. Ebből

$$\frac{\partial v_{g,2}}{\partial x} - \frac{\partial v_{g,1}}{\partial x} = f_0 \left(\frac{H-h}{H_2} - \frac{h}{H_1} \right) = \frac{g'}{f_0} \frac{d^2 h}{dx^2}. \quad (6.55)$$

Ennek a lineáris egyenletnek megoldása exponenciális lecsengés a

$$\frac{\sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H}}}{f_0} \quad (6.56)$$

távolságon, mely nem más mint a (6.18) belső Rossby-sugár. Az egyensúlyi alak tehát

$$h = H_1 (1 - e^{-(x-x_0)/R'}), \quad (6.57)$$

ahol x_0 a front élének koordinátája a végállapotban (6.13b ábra). Az utóbbi értékét abból kaphatjuk meg, hogy a teljes anyagmennyiség változatlan, tehát $\int_0^\infty (H_1 - h) dx = \int_{-x_0}^0 h dx$. Ebből az adódik, hogy $x_0 = R'$, vagyis az elmozdulás nagyságát is az R' belső Rossby-sugár határozza meg! Szokták ezért R' -t belső *deformációs* sugárnak is nevezni³. (A partmenti feláramlásokban játszott szerepére nézve l. 13.1 függelék).

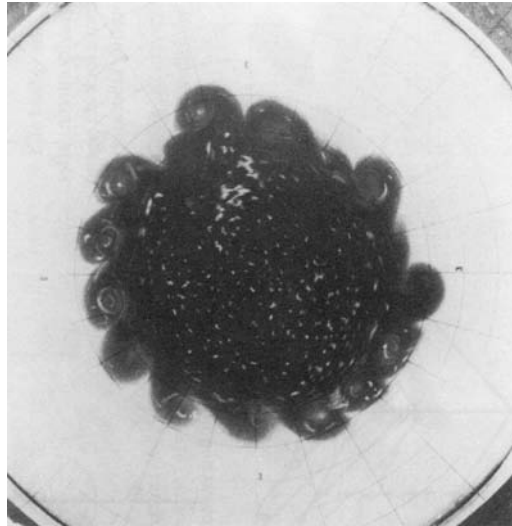
³Eredményünk a $g' \rightarrow g$ ($H_2/H \rightarrow 1$) helyettesítéssel a homogén közeg szabad felszínén a H_1 szintkülönbségű lépcső kisimulása utáni alakját adja meg. Az átmenet ekkor a $\sqrt{gH_1}/|f_0|$ külső Rossby-sugárnyi tartományon történik.

Az előbb esetekre alkalmazva ez azt jelenti, hogy a frontok, tengeráramlatok vastagságát a belső Rossby-sugár határozza meg: $r_0 = R'$. Az előző fejezet értelmében a frontok dőlésszögét is a belső Rossby-sugár szabja meg

$$|\gamma| \approx \frac{H}{R'} \approx \frac{|f_0|}{N}, \quad (6.58)$$

legalábbis geosztrofikus egyensúlyban. Az Fn frekvencia-arány (6.35) definíciója alapján az eredmény azt is mutatja, hogy a dőlésszög $1/Fn$ rendű.

A geosztrofikus egyensúly beállása forgatott hengeres kísérlettel demonstrálható. Ha kezdetben a henger közepén egy kisebb átmérőjű hengerrel elválasztjuk az eltérő sűrűségű folyadékot, akkor a kis henger eltávolítása után gravitációs áramlat indul meg sugárirányban. A nem forgatott rendszerrel ellentétben azonban elegendően nagy szögsebesség esetén az áramlat *nem* éri el a nagyobb henger külső falát, mert belső Rossby-sugárnyi elmozdulás után a sugárirányú mozgás megszűnik. Ezzel egyidejűleg tangenciális áramlás jön létre, s kialakul a geosztrofikus egyensúly. A 6.14 ábra egy ilyen állapotot mutat. A két közeg határán megfigyelhető hullámzó struktúra a 6.12 fejezetben tárgyalásra kerülő baroklin instabilitás következménye.

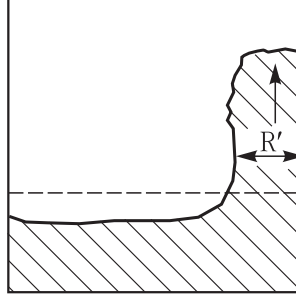


6.14 ábra: Kezdeti gravitációs áramlat következtében kialakult közel stacionárius geosztrofikus állapot forgatott hengerben (felülnézet). A sötét folyadék sűrűbb, s jelenlegi kiterjedése mintegy felének megfelelő sugarú tartományból indult.

Amennyiben az induló gravitációs áramlat partvonal mentén halad, a Coriolis-erő a partvonal felé terelheti az áramlást, s ez arra vezet, hogy az áramlás partra merőleges jellegzetes mérete is belső Rossby-sugár nagyságrendű lesz (6.15 ábra). Ez analóg a belső Kelvin-hullámok viselkedésével, noha az ilyen gravitációs áramlat a Kelvin-hullámok legfeljebb nemlineáris változatának tekinthető. Dél-Amerika és Ausztrália keleti partjai mellett erős szelekkel járó frontok szoktak megjelenni, melyek a déli sarki hideg levegő Egyenlítő felé áramlásával kapcsolatosak, miközben azt (a déli féltéken balra térítő) Coriolis-gyorsulás a parti hegyvonulatok mentén koncentrálna.

6.8 Geosztrofikus egyensúly folytonos rétegzettségű folyadékban

Gyors forgatás esetén folytonos rétegzettség mellett is igaz, hogy a hidrodinamikai gyorsulás elhanyagolható a többi gyorsulás mellett. A meglepő új vonás az, hogy (6.7) szerint ekkor tetszőleges *időfüggetlen* $\varrho'' \equiv \bar{\varrho}(x, y, z)$ sűrűségeloszlás esetén kialakul egy stacionárius geosztrofikus



6.15 ábra: Fal mentén haladó gravitációs áramlat sematikus képe forgatott közegben (felülnézet). Az áramlatot a Coriolis-erő egy fal körüli sávra koncentrálja, melynek vastagsága a belső Rossby-sugár. Az ábrán a forgatási irány pozitív.

áramlás, melynek komponensei

$$v_g = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H \bar{\rho} dz', \quad u_g = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^H \bar{\rho} dz'. \quad (6.59)$$

Az integrálok felső határában az η felszíni alakot elhanyagoltuk, hiszen az mindig kicsi a teljes H mélységhez képest. A fentiekből következik, hogy az áramlás magasságfüggő, noha az f_0 -sík közelítésben minden egyes vízszintes síkban divergencia mentes.

A felszíni forma kiküszöbölhető, amennyiben tudjuk, hogy a folyadék nagy mélységben mozdatlan. Ekkor tehát létezik egy olyan z_0 szint, amelyben a geosztrofikus áramlás eltűnik. A z_0 szintre felírt (6.59), egyenletek

$$0 = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^H \bar{\rho} dz', \quad 0 = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^H \bar{\rho} dz', \quad (6.60)$$

melyek egyben használhatók a felszíni alak meghatározására is. Ezeket az egyenleteket az eredetiekéből kivonva:

$$v_g = -\frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z \bar{\rho} dz', \quad u_g = \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z \bar{\rho} dz'. \quad (6.61)$$

A stacionárius, nem vízszintes rétegzettségű sűrűségeloszlás a felszíni alaktól függetlenül is egyértelműen meghatároz egy geosztrofikus áramlást. A geosztrofikus egyensúly egyik fontos új vonása, hogy a Coriolis-erő képes egyensúlyt tartani a ferde rétegzettségéből adódó gravitációs nyomásgradiensekkel is. A Coriolis-hatás következtében tehát olyan sűrűségeloszlások is stacionáriusak lehetnek, melyek eltérnek a helyzeti energia minimumát megvalósító függőleges rétegzettségtől. Az ilyen állapot külső energia betáplálása nélkül is fennmarad, de mint látni fogjuk nem feltétlenül stabil. Érdekes néhány fontos esetet külön megvizsgálunk.

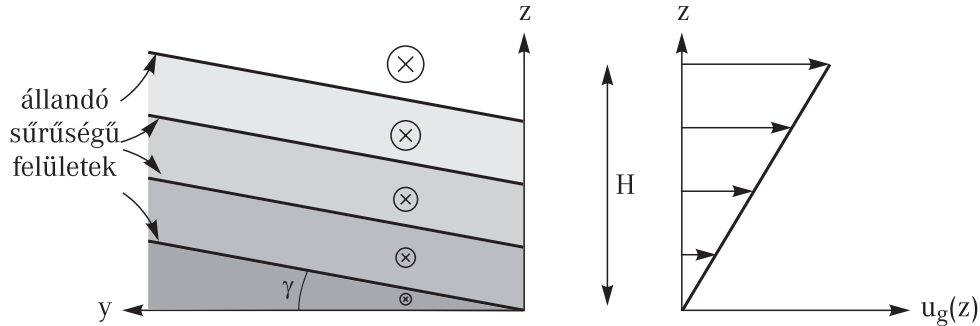
Megjegyezzük, hogy függőleges rétegzettség, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$ esetén az integrálok függetlenek a vízszintes koordinátáktól, így ilyenkor a (6.59) geosztrofikus áramlás teljes mértékben *meggyezik* a homogén közegbelivel, azaz egyedül a hidrosztatikai nyomáseloszlástól való eltérést megadó p' dinamikai nyomás határozza meg. Ebből az is következik, hogy a ψ áramlási függvény $\psi = p'/(f_0 \rho_0)$.

6.8.1 A termikus áramlás

Tegyük fel, hogy a geosztrofikus áramlás az aljzaton, vagyis a $z = z_0 = 0$ szinten tűnik el. A (6.59) sebességkomponenseket z szerint deriválva ekkor

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}. \quad (6.62)$$

A sűrűséggradiens vízszintes komponensei tehát egyértelműen meghatározzák a geosztrofikus sebesség magasságfüggését. Vegyük észre, hogy a sűrűséggradiens kelet-nyugati (x irányú) komponense az észak-déli sebesség változását okozza a magassággal, és fordítva. Az északi féltekén ($f_0 > 0$) pl. az észak felé növekvő sűrűség a keletre irányuló áramlás sebességének *növekedését* okozza a magassággal (6.16 ábra).



6.16 ábra: A termikus áramlás a ferdén elhelyezkedő sűrűségfelületekhez tartozó geosztrofikus áramlás. Ha az emelkedés a pólus irányában történik, és a felületek függetlenek az x koordinátától, akkor felfelé haladva egyre erősebb keletre mutató áramlást (nyugati szelet) tapasztalunk. A γ meredekség arányos az áramlás U/H gradiensével.

Ha a sűrűség nem függ x -től és a $\partial\bar{\rho}/\partial y$ derivált állandó, akkor a geosztrofikus áramlás lineárisan erősödik (6.16 ábra):

$$u_g(z) \equiv U(z) = \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial y} z \equiv U \frac{z}{H} \quad (6.63)$$

Ilyen mozgás homogén forgatott folyadékban nem alakulhat ki, hiszen ott egyedül a felszíni alak határozza meg az áramlást, mely ezért független a magasságtól.

Mivel a valóságban a sűrűségeloszlás x, y -függését rendszerint a hőmérséklet eloszlás inhomogenitása okozza, a (6.63) geosztrofikus áramlást *termikus* áramlásnak, a meteorológiában termikus szélnek nevezik. A vízszintes síkban kialakult hőmérsékletkülönbségek jelentős szélerősödéshez vezethetnek a magasabb légrétegekben, ahol a szél teljesen más erősségű lehet mint a felszínen⁴. A (6.62) egyenletek lehetőséget adnak arra is, hogy a sűrűségeloszlás ismeretében következtethessünk a légkör magasabb vagy az óceánok mélyebb rétegeiben létrejövő áramlásokra, melyek közvetlen módon nehezen mérhetők.

A ΔT hőmérsékletkülönbség hatására kialakuló termikus áramlás U/H sebességgradiense a (6.63) összefüggés alapján becsülhető, mint $g\Delta\rho/(|f_0|\rho_0 L)$, ahol L a vízszintes méret. Itt $\Delta\rho$ a vízszintes síkbeli hőmérsékletkülönbség következtében fennálló sűrűségkülönbség. A $\Delta\rho = \rho_0\alpha\Delta T$ összefüggés (α a hőtágulási együttható, $\Delta T > 0$) miatt a felszíni termikus sebesség nagysága az

$$U = \frac{g\alpha\Delta TH}{|f_0|L} \quad (6.64)$$

kifejezéssel becsülhető. Ennek alapján $L = 1000$ km távolságon 10 fokos hőmérsékletkülönbség esetén a sebesség a levegőben 30 m/s, az óceánban pedig valamivel kisebb, mint 1m/s.

A (6.63) termikus áramlás analóg a kétrétegű leírásban az észak felé dőlő elválasztó felületek esetén kapott eredménnyel, mely szerint a felső szinten a keletre irányuló sebesség erősebb, mint

⁴A csak sűrűségváltozásból adódó szélerősödés nem jár irányváltással, mint a viszkozitásból származó Ekman-rétegben.

alul (6.5 ábra). Az azonos sűrűségű felületek irántangense $\gamma = -(\partial\bar{\rho}/\partial y)/(\partial\bar{\rho}/\partial z)$. Mivel a z szerinti derivált nyilván negatív, a szög pozitív, azaz az azonos sűrűségű felületek észak felé emelkednek. A (6.63) alapján ez a meredekség

$$\gamma = \frac{f_0}{N^2} \frac{U}{H} = \frac{f_0 U}{g\alpha\Delta T} \quad (6.65)$$

A (6.49) összefüggés tehát a termikus áramlás diszkrét változatát jelenti.

6.8.2 A Golf-áramlat gyűrűinek forgása

A Golf-áramlat gyűrűi leszakadásuk után közel forgásszimmetrikusak, a síkbeli koordinátáktól csak a tengelyüktől mért r távolságon keresztül függenek. Bennük a sűrűségeloszlás nem állandó, hanem enyhe helyfüggést mutat. Közelítő alakként a

$$\bar{\rho}(z, r) = \Delta\rho e^{-r^2/r_0^2 + (z-H)/h_0} + \bar{\rho}(z) \quad (6.66)$$

sűrűségeloszlást választjuk. Ez tekinthető úgy is, mint valamely $\bar{\rho}(z)$ tetszőleges függőleges rétegzettségnek az r -függésen keresztül módosított változata. Itt $h_0 = 100 - 500$ m a gyűrű mélységi kiterjedése, $\Delta\rho$ pedig a gyűrű középpontjában és attól távol mért felszíni sűrűségek különbsége. A meleg gyűrűkben $\Delta\rho$ negatív, a hidegekben pozitív. Mivel $h_0 \ll H$, ahol H a teljes vízmélység, a radiális koordinátától függő járulék a néhányszor h_0 mélységben már elhanyagolható. A gyűrű $r_0 \approx 50$ km sugara nem új paraméter, mert láttuk, hogy a Golf-áramlat vastagságát a belső Rossby-sugár határozza meg, mely $R' = \sqrt{g(|\Delta\rho|/\rho_0)h_0}/|f_0|$ nagyságrendű.

Geosztrofikus állapotot feltételezve, a (6.61) egyenlet szerint a kialakuló radiális sebesség

$$|\mathbf{u}_g|(z, r) = \frac{2g}{|f_0|} \frac{|\Delta\rho|}{\rho_0} \frac{h_0}{r_0} \frac{r}{r_0} e^{-r^2/r_0^2 + (z-H)/h_0}. \quad (6.67)$$

Az eredmény nem függ attól, hogy a z_0 referenciaszintet hogyan választjuk, ha az sokkal mélyebben van, mint a gyűrűk alja ($z_0 \ll H - h_0$), hiszen a levágás exponenciális, s ekkor $\exp((z_0 - H)/h_0)$ jó közelítéssel nullának vehető. A sebesség lefelé csökken; minden mélységi szinten a tengelyen eltűnik, onnét kifelé haladva először lineárisan nő, majd az r_0 távolságon túl exponenciálisan lecseng.

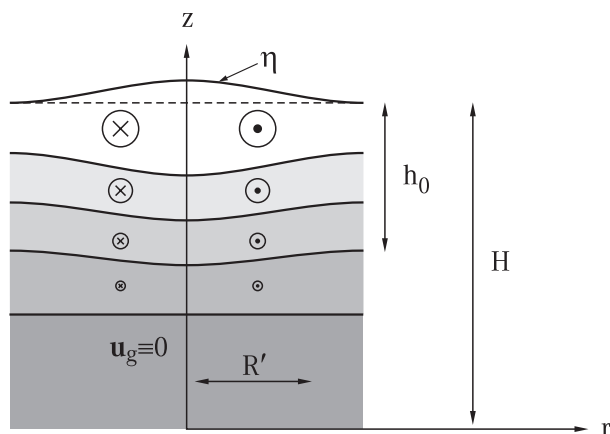
A felszíni alak ugyanakkor (6.60)-ből:

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0} \int_{z_0}^H \bar{\rho} dz'. \quad (6.68)$$

A sűrűségeloszlást behelyettesítve

$$\eta = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0} h_0 e^{-r^2/r_0^2}. \quad (6.69)$$

A meleg gyűrűk ($\Delta\rho < 0$) tehát kidudorodással kapcsolatosak, és anticiklonális forgásúak (6.17 ábra). Az állandó sűrűségű felületek behorpadnak a gyűrű tengelye körül, az tehát nagynyomású tartománynak felel meg. Ezzel egyben megkaptuk az anticiklonális áramlások tipikus alakját folytonos rétegzettség esetén is (6.17 ábra). A ciklonálisakhoz felszíni behorpadás és az állandó sűrűségű felületek tengely körüli kidudorodása tartozik.



6.17 ábra: A Golf-áramlat közel geosztrofikus meleg gyűrűinek sematikus sűrűség- és sebességeloszlása. A gyűrű vízszintes mérete belső Rossby-sugár nagyságrendű. Az ábra egyben a folytonos közegbeli tipikus anticiklonális áramlásnak felel meg.

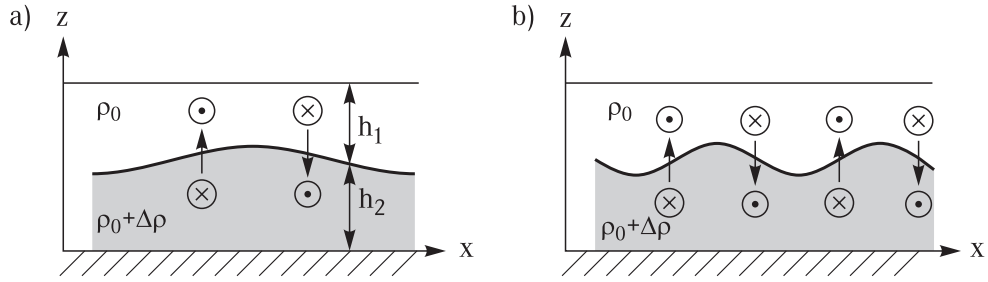
6.9 Rossby-hullámok kétrétegű közegekben: szemléletes kép

A 6.5 fejezetben láttuk, hogy igen gyors forgatás hatására mindkét rétegben időtől független síkbeli geosztrofikus áramlás jön létre, melyhez a (6.45) áramlási függvények tartoznak. Kevésbé gyors forgatás esetén lassú időbeli változásokkal járó kvázigeosztrofikus áramlás alakul ki. A homogén közeghez hasonlóan (2.5 fejezet) a sekélyfolyadék-dinamika ekkor mindkét rétegben *ekvivalens* a potenciális örvényesség megmaradásával, ezért a továbbiakban csak ezt a törvényt használjuk.

Tekintsünk egy felülről zárt folyadékot (merev lap közelítés), melyben az elválasztó felület kis lokális kidudorodását hoztuk létre (6.18a ábra). Az alsó, sűrűbb rétegben ez egyértelmű nyomásnövekedést jelent. A maximum körül ezért alul anticiklonális jellegű (de nem egészen stacionárius áramlás) jön létre. A felső réteg szempontjából az elválasztó felület pillanatnyi kidudorodása hasonló hatású, mint egy homogén közegben az alsó domborzat kiemelkedése, s ezért ott ciklonális az áramlás.

A felső rétegben az elválasztó felszín kidudorodásától keletre a folyadék sebessége északra mutat. A részecskék így olyan tartományba kerülnek (az Északi-sark felé közeledvén), ahol az f planetáris örvényesség erősebb. A $q_1 = H_1(f_0 + \beta y)/h_1$ potenciális örvényesség csak úgy maradhat meg, ha a h_1 folyadékmélység nő. Ugyanekkor az alsó rétegben a kidudorodástól keletre a folyadék sebessége délre mutat. A részecskék így olyan tartományba kerülnek, ahol a planetáris örvényesség gyengébb. A $q_2 = H_2(f_0 + \beta y)/h_2$ potenciális örvényesség csak úgy maradhat meg, ha a h_2 folyadékmélység csökken. Mindkét rétegben tehát arra a következtetésre jutunk, hogy a keleti oldalon enyhe leáramlásnak kell kialakulnia. Hasonló okokból a nyugati oldalon feláramlás alakul ki, s ezzel az egész kezdeti kidudorodás *nyugatra mozdul el*.

Tekintsük most az elválasztó felület hullámalakú kezdeti deformációját az x tengely mentén, mely legyen az egyszerűség kedvéért független az y koordinátától (6.18b ábra). A köztes felszín kidudorodása körül az áramlás jellege ugyanolyan, mint az előbb tárgyalt esetben. A felszín behorpadása esetén attól keletre feláramlás, nyugatra pedig leáramlás jön létre. A teljes hullám ezért szintén nyugatra halad. Érdeemes felhívni a figyelmet arra is, hogy a nyomás az elválasztó felület kitüremkedése alatt maximális, fölötte pedig minimális, és behorpadás esetén fordítva. A legerősebb függőleges áramlás viszont az adott szinten kialakuló nyomási szélsőértékek között tapasztalható. A potenciális örvényesség megmaradása következtében tehát létezik a



6.18 ábra: Belső Rossby-hullámok kialakulási mechanizmusa kétrétegű közegben. (a) Lokalizált felső felszíni kidudorodás körüli kvázigeosztrofikus áramlás a felső közegben ciklonális, az alsóban ellentétes irányú. A potenciális örvényesség megmaradása következtében ez *mindkét* közegben leáramlást kelt a keleti (jobb) oldalon és feláramlást a nyugatin, mely a kidudorodást *nyugati* irányba tolja. (b) Hullámalakú felső felszíni forma mozgása.

Rossby-hullámok megfelelője kétrétegű folyadékban, mely a *belső Rossby-hullám*, vagy a baroklin Rossby-hullám nevet viseli.

A homogén folyadék szabad felszínével kapcsolatos kvázigeosztrofikus jelenségek tehát a kétrétegű folyadék felszíni mozgásainak megfelelői. Mivel az utóbbiakat a teljes g gyorsulás helyett a $g' \ll g$ redukált gyorsulás határozza meg, a jellegzetes távolságskála ennek arányában csökkentett. Azt várjuk, hogy a lineáris belső Rossby-hullám diszperziós relációja (2.45)-nek megfelelően

$$\omega_0 = -\beta \frac{k_x}{k^2 + R'^{-2}}, \quad (6.70)$$

ahol R' a belső Rossby-sugár⁵. Mivel ez általában sokkal kisebb a R külső Rossby-sugárnál, a belső Rossby-hullámok diszperziós relációjában a nevezőbeli második tag rendszerint nem hanyagolható el, szemben a külső Rossby-hullámok esetével. A (6.70) diszperziós reláció pontos levezetéséhez szükségünk van a kétrétegű folyadék kvázigeosztrofikus egyenletére.

6.10 A kvázigeosztrofikus egyenlet kétrétegű közegben

A H_i átlagos rétegvastagságokhoz képest csekély η külső és χ belső felszíni ingadozást feltételezve és a Föld sugaránál kisebb vízszintes kiterjedésű áramlásokat vizsgálva, az egyes rétegek potenciális örvényessége:

$$q_i = \frac{\zeta_i + f}{1 + (h_i - H_i)/H_i} \approx \zeta_i + f \left(1 - \frac{h_i - H_i}{H_i}\right) \approx \zeta_i + f - \frac{f_0}{H_i} (h_i - H_i), \quad (6.71)$$

$i = 1, 2$. Az átalakításokban kihasználtuk, hogy a $(h_i - H_i)/H_i$ relatív vastagságingadozás, a ζ_i örvényesség, és a Coriolis-paraméter helyfüggéséből adódó $f - f_0 = \beta y$ változás kicsi, egymással vett szorzatuk tehát elhanyagolható. Mivel a kvázigeosztrofikus közelítés gyengén időfüggő áramlásokat ír le, a potenciális örvényesség kifejezésében szereplő tagok időderiváltja kicsi. Ezért a ζ_i örvényesség és a pillanatnyi rétegvastagság ugyanúgy fejezhető ki a ψ_i kvázigeosztrofikus áramlási függvénnyel, mint geosztrofikus egyensúlyban. Irhatjuk tehát, hogy $\zeta_i = \Delta\psi_i$. Másrészt

⁵Folytonosan rétegzett közegben a diszperziós reláció $\omega_0 = -\beta k_x / (k^2 + R_n'^{-2})$, ahol R_n' az (6.33) n -edik Rossby-sugár (l. 13.3 fejezet).

$h_1 - H_1 = \eta - \chi$ és $h_2 - H_2 = \chi$ (az utóbbi kifejezésben felhasználtuk, hogy az aljzat vízszintes), s ezért (6.45) alapján

$$h_2 - H_2 = \frac{f_0}{g'}(\psi_2 - \psi_1), \quad h_1 - H_1 = \frac{f_0}{g}\psi_1 - \frac{f_0}{g'}(\psi_2 - \psi_1). \quad (6.72)$$

A q_i potenciális örvényességek megmaradásából így a

$$\frac{d}{dt} \left(\Delta\psi_1 + \beta y - \frac{f_0^2}{gH_1}\psi_1 - \frac{f_0^2}{g'H_1}(\psi_1 - \psi_2) \right) = 0, \quad (6.73)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\Delta\psi_2 + \beta y + \frac{f_0^2}{g'H_2}(\psi_1 - \psi_2) \right) = 0 \quad (6.74)$$

egyenletrendszer adódik. A teljes időderivált az $i = 1, 2$ rétegben a

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.75)$$

kifejezést jelenti. A fenti csatolt nemlineáris egyenletrendszer a kétrétegű közelítés kvázigeosztrofikus egyenlete. A merev lap közelítés azt jelenti, hogy az η felszíni ingadozás elhanyagolható H_1 mellett, ezért $h_1 - H_1$ -ben, s következésképpen a (14.29) egyenletben a ψ_1 -gyel arányos tag nem jelenik meg. A kvázigeosztrofikus mozgást ekkor tehát csakis az elválasztó felület viselkedése és a g' redukált gyorsulás határozza meg, az $1/g$ -vel arányos tag nem jelenik meg (g formálisan végtelen).

6.11 Lineáris Rossby-hullámok kétrétegű közegekben

Tekintsük a linearizált kvázigeosztrofikus egyenleteket a merev lap közelítésben: Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta\psi_1 - \frac{f_0^2}{g'H_1}(\psi_1 - \psi_2) \right) + \beta \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = 0, \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta\psi_2 + \frac{f_0^2}{g'H_2}(\psi_1 - \psi_2) \right) + \beta \frac{\partial\psi_2}{\partial x} = 0. \quad (6.77)$$

Az x irányban haladó hullámokat leíró áramlási függvényeket $\psi_i = \psi_{i,0} \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban keresve, az

$$\left(\omega_0(k_x^2 + \frac{f_0^2}{g'H_1}) + \beta k_x \right) \psi_{1,0} = \omega_0 \frac{f_0^2}{g'H_1} \psi_{2,0}, \quad (6.78)$$

$$\omega_0 \frac{f_0^2}{g'H_2} \psi_{1,0} = \left(\omega_0(k_x^2 + \frac{f_0^2}{g'H_2}) + \beta k_x \right) \psi_{2,0} \quad (6.79)$$

polarizációs egyenletre jutunk. Az amplitúdók kiküszöbölésével a

$$\left(\frac{\beta k_x}{\omega_0} + k_x^2 + \frac{f_0^2}{g'H_1} + \frac{f_0^2}{g'H_2} \right) \left(\frac{\beta k_x}{\omega_0} + k_x^2 \right) = 0 \quad (6.80)$$

összefüggést kapjuk. Az első tényező akkor tűnik el, ha

$$\omega_0 = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + R'^{-2}}, \quad (6.81)$$

ahol R' a (6.18) belső Rossby-sugár. Ez a (6.70) diszperziós reláció x irányú terjedéshez tartozó speciális esete. A (6.78), (6.79) egyenletekből azt kapjuk, hogy ekkor $\psi_{1,0}/\psi_{2,0} = -H_1/H_2$, azaz az áramlás a két rétegben *ellentétes* előjelű. Az ilyen belső, baroklin Rossby-hullám mellett létezik a másik megoldásként adódó

$$\omega_0 = -\frac{\beta}{k_x} \quad (6.82)$$

diszperziós relációjú barotróp Rossby-hullám is. Az ehhez tartozó amplitudók (6.79) szerint azonos nagyságúak: $\psi_{1,0}/\psi_{2,0} = 1$. A barotróp Rossby-hullámban a két réteg azonosan mozog, s ezért nem csoda, hogy visszakaptuk a homogén közegben kialakuló, felszíni változással nem járó Rossby-hullám (2.37) diszperziós relációját.

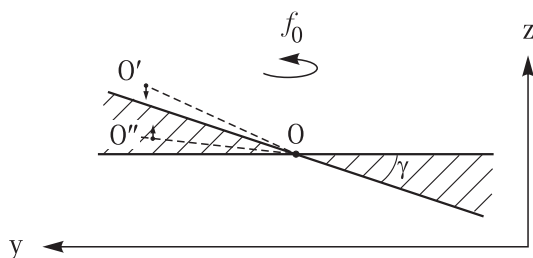
Amennyiben a külső felszín mozoghat, a teljes (14.29), (14.30) egyenletrendszer linearizált változatát kell megoldanunk, ahol (14.29)-ben szerepel $f_0^2\psi_1/(gH_1)$ is. Az ω_0 -ra kapott egyenlet ekkor nem faktorizálódik, de a $g \gg g'$ feltétel miatt a két gyök élesen kettéválik. A barotróp módusban $\psi_{1,0}/\psi_{2,0} \approx 1$, s a diszperziós relációban a külső Rossby-sugár jelenik meg. A baroklin módusban (6.81) jó közelítéssel érvényben marad, s igaz az is, hogy a két közeg ellentétesen mozog, $\psi_{1,0}/\psi_{2,0} \approx -H_1/H_2$. A merev lap közelítés tehát csekély eltéréssel megadja ismét a szabad felszínhez tartozó baroklin megoldást is.

6.12 A baroklin instabilitás: szemléletes kép

Geosztrofikus egyensúlyban olyan áramlások is kialakulhatnak, melyekben az állandó sűrűségű felületek ferdek. Ezt az állapotot csakis az erős forgatás tarthatja fenn, s nyilván nem felel meg a potenciális energia minimumának, hiszen ahhoz vízszintes rétegződés tartozik. Tipikus példa erre a termikus áramlás (6.8.1 fejezet), melyet a légkörben az északi félgömbön a sarok felé hűlő levegő tart fenn (az állandó sűrűségű felületek észak felé emelkednek), s melyhez a magassággal erősödő nyugati szél tartozik. Hasonlóan az óceánban, ahol az amerikai partokat elhagyó Golf-áramlat kelet felé fordul, ott éppen az áramlat választja ketté a sarki hideg tengervizet az egyenlítői melegtől, s így termikus áramlásnak is tekinthető. Az észak felé emelkedő sűrűségfelületek geosztrofikus egyensúlyi megoldások, de nem feltétlenül stabilak.

Az instabilitás lehetősége egyszerű gondolatmenettel megmutatható. Tekintsünk egy folytonosan rétegzett közeget, melyben a sűrűségfelületek északra emelkednek. Kövessünk egy folyadékkeletemet (a 6.14 ábrán O -val jelölt pontot), melyet egyensúlyi helyzetéből kissé kimozdítunk, s az elmozdulás északra és felfelé történik, ráadásul az azonos sűrűségű felületek γ dőlésszögénél nagyobb szögben (6.19 ábra). A folyadék így alacsonyabb sűrűségű környezetbe kerül (az ábrán az O' pont), s ezért lefelé mozdul el. Ezáltal közelebb került kiindulási állapotához, mely tehát stabil. Merőben más a helyzet a γ szögnél alacsonyabb szögben történő elmozdulásokra. A folyadék részecske ekkor a sajátjánál nagyobb sűrűségű közegbe kerül (O'' pont), rá eredő *felhajtóerő* hat, ezért *emelkedik*, s így távolodik eredeti állapotától. A kezdeti állapot tehát *instabil* minden olyan elmozdulásra, mely a vízszintes sík és az állandó sűrűségű felületek által bezárt szögtartományba esik. Az ilyen elmozdulások következtében az állandó sűrűségű felület a vízszintes felé fordul, tehát helyzeti energia szabadul fel. Ez a jelenség homogén folyadékban nem fordulhat elő, ezért az instabilitást *baroklin instabilitásnak* hívjuk. Az instabilitás hajtóereje tehát a döntött sűrűségfelületekben felhalmozódott helyzeti energia. Ez az energia elegendően lapos szögben zajló zavaráramlás hatására felszabadul, az áramlás laminaritását megtöri, és erősödő hullámmozgásra, baroklin hullámok kialakulására vezet. A termikus áramlások tehát instabilak. Még ha a kezdeti áramlás többé-kevésbé homogén is, hajlamos arra, hogy benne a közel vízszintes síkbeli kis zavarok felerősödjenek.

Az instabilitás jellegzetes λ_c hullámhosszát annak alapján becsülhetjük meg, hogy a forgatott rétegzett közeg egyetlen karakterisztikus távolsága az R' belső Rossby-sugár. Ezért a kritikus



6.19 ábra: A baroklin instabilitás lehetősége termikus áramlásban. A folytonos rétegzettségű közegben a döntött sűrűség-felületek és a vízszintes sík közötti (sátirozott) tartományba eső elmozdulás a kiindulása helyzettől történő *távolodást* eredményez. A kiindulási helyzet az O-O'' elmozdulásra nézve instabil (az O-O'-re stabil).

hullámhossz ezzel arányos:

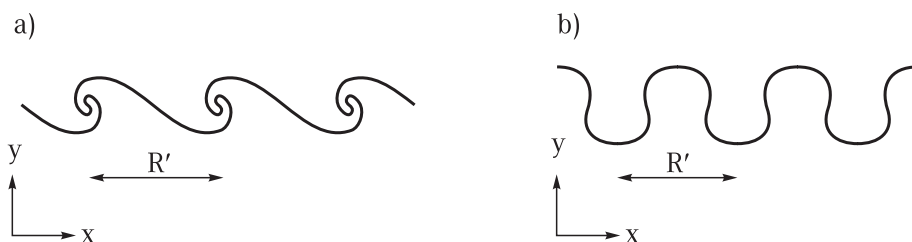
$$\lambda_c \sim R'. \quad (6.83)$$

A baroklin instabilitás tehát a *belső Rossby-sugárral* összemérhető hosszúságú hullámokra következik be. Ennek megfelelően a $k_c = 2\pi/\lambda_c$ kritikus hullámszám

$$k_c = CR'^{-1}, \quad (6.84)$$

ahol C egy dimenziótlan arányossági tényező.

Az egyre erősödő mozgás csak eleinte tartja meg a hullámalakot, utána a nagy amplitudójú nemlineáris viselkedés már más jellegű. Noha a kiváltó ok *nem* az egymás fölötti rétegek közötti sebességkülönbség, a nyírás, a nemlineáris hullám alakja 'felülnézetből' hasonlíthat a Kelvin-Helmholtz-instabilitásban látotthoz, csak sokkal nagyobb távolságskálán. Jól lokalizált áramlások, mint a jet stream vagy a Golf-áramlat esetében a baroklin instabilitás az áramlás begyűrődéséhez, meanderezéséhez vezet (6.20 ábra). Végző soron a begyűrődésekből alakulnak ki nagy leváló örvények, mint a ciklonok (1. ábra) vagy a Golf-áramlat gyűrűi (2. ábra). Ez az a mechanizmus, mely jelentős hőcserét tesz lehetővé az egyenlítői meleg és a sarki hideg közegek között, jóval hatékonyabban mint az egyszerű hővezetés.



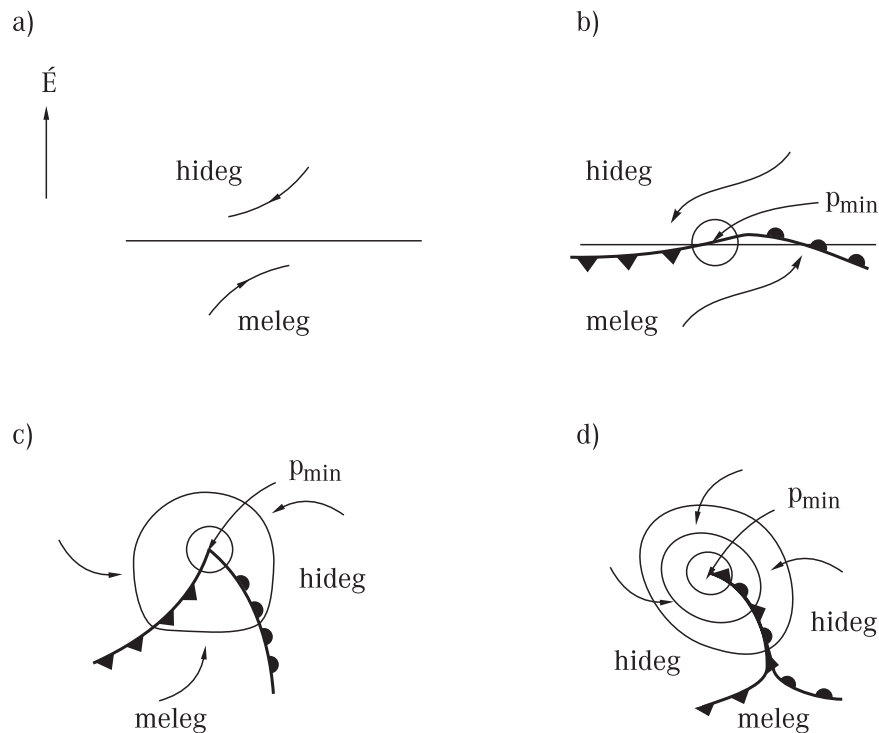
6.20 ábra: A baroklin instabilitás következtében megjelenő nagy amplitudójú baroklin hullámok lehetséges alakjai (felülnézet). (a) Begyűrődő hullámok (a Kelvin-Helmholtz-hullámokhoz hasonló szerkezet). (b) Meanderező áramlás

A mérsékeltövi ciklonok legfontosabb keletkezési helye a sarki hideg légtömegeket az egyenlítőhöz közelebb eső melegebb légtömegektől elválasztó poláris front. Ez a felszínen a 40-50 fokos szélességek tartományába esik, de rendszerint nem szélességi kör mentén, hanem nagy amplitudójú Rossby-hullámszerű mozgást mutatva. Mivel a hideg levegő a felszínen az Egyenlítő, a meleg pedig a közelebbi sarok felé tart (s mindkettőt eltéríti a Coriolis-erő, mely a termikus

szelet okozza), a poláris front mentén eleve alacsony nyomás uralkodik, hiszen itt lassú össze-, és feláramlás történik. A lokális sűrűség-, ill., hőmérsékletkülönbség a poláris front mentén a legnagyobb, a termikus szél is általában itt a legerősebb, s ezért ebben a tartomány várható a baroklin instabilitás legerőteljesebb megnyilvánulása.

Az egyszerűség kedvéért gondoljunk az északi féltékére, s tegyük fel, hogy a poláris front rövid szakasza egyenes, s itt egyelőre geosztrofikus egyensúly áll fenn (6.21a ábra). Amennyiben a magasabb légrétegekben valamilyen perturbáció történik, pl. valamilyik állandó sűrűségű felület behorpad, lokális ciklonális áramlás jön létre az alacsony légrétegekben. Ez a behorpadástól keletre kissé északra tolja a frontvonalat. Így meleg levegő kerül hideg környezetbe, ezért ott feláramlás indul meg. A felszíni nyomás lecsökken, s e pont mint centrum körül is kialakul egy ciklonális áramlás. A felszíni áramlás tehát a magas légköri ciklonális áramlást erősíti és így a hidrodinamikai viszonyok egyre jobban eltérnek a termikus szélnek megfelelőtől.

A ciklonális áramlás a centrumtól nyugatra a hideg levegőt a meleg levegő alá tolja. Ott mozgó hideg front alakul ki, a másik oldalon pedig meleg front (6.21b ábra). Az erősödő örvényesség és a feláramlás a felszíni surlódás miatt a planetáris határretegben spirálisan becsavarodó mozgással jár (4.3 fejezet), ezért a frontvonalak is enyhén begömbülnek⁶.



6.21 ábra: A mérsékeltévi ciklonok kialakulásának sematikus rajza az északi féltéken, felszíni viszonyok. (a) Kiindulási állapot: a poláris front (egyenes vonal) nem mozog. (b) Kis perturbáció: a meleg feláramlás miatt létrejövő ciklonális mozgás a nyugati oldalon mozgó hideg frontot (kis háromszögekkel jelölt görbe), a keletin pedig mozgó meleg frontot (kis félkörökkel jelölt görbe) hoz létre. (c) A közepstádium: a frontvonalak begömbülnek, a hideg front kezdi utólérni a meleget (a ciklon középpontja a termikus szél miatt kelet felé mozog). (d) A végállapot (okklúziós fronttal): a meleg levegő az alacsony nyomású központ körül mindenütt a felső légrétegekbe szorult, az instabilitás hajtóereje megszűnt.

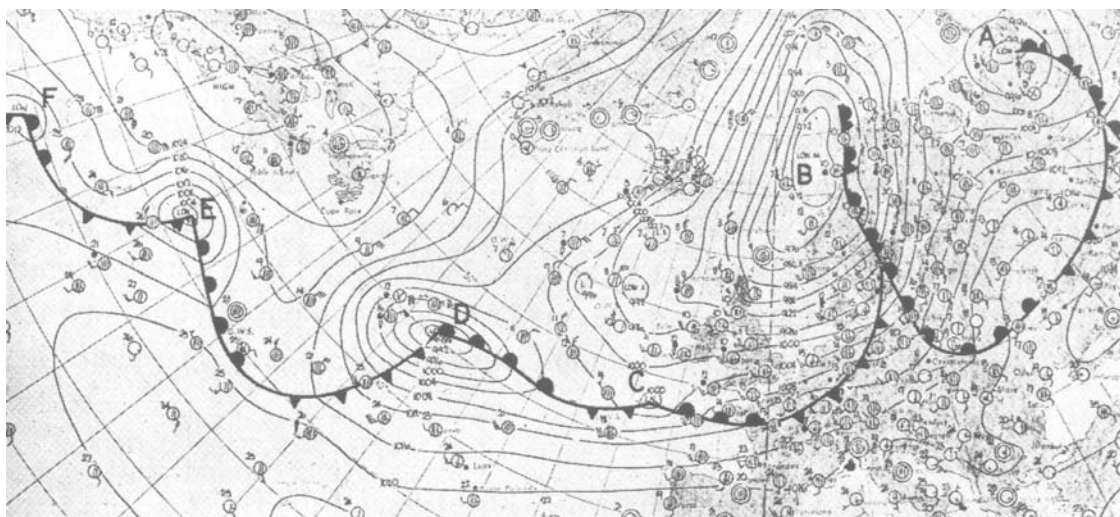
Az átlagos termikus szél a kifejlődőben lévő ciklont keletre sodorja, s így a felszínen a me-

⁶Különösen viharos ciklon alakulhat ki, ha a jetstream a felszíni alacsony nyomású központ fölé kerül, hiszen akkor a fenti gyors áramlás a levegőt megszívja, és erős feláramlást okoz.

leg front észak-keletre mozdul, de általában jóval lassabban, mint a dél-keletre haladó hideg front, melyet a felszíni nyugati szél támogat. A meleg levegő ekkor már csak egy viszonylag kis szögterületet foglal el a felszínen (6.21c ábra).

A meleg levegő kiszorítása tovább folytatódik, s végül a felszíni frontok összezáródnak, ún. *okklúziós* front jön létre (kis háromszögekkel és félkörökkel együtt jelölt vonal a 6.21d ábrán), melynek mindkét oldalán hideg levegő található (köztük csekély hőmérsékletkülönbséggel). A felszíni meleg levegő magasabb szintre emelése befejeződött, s a ciklon teljes felszíni területét elárasztotta a hideg levegő, a poláris front maga délebbre került. A ciklon mozgásához használható potenciális energia ezzel felemészte, s ezért a ciklon ezután lassan elhal. A teljes folyamat hasonlít a hullámtöréshez (tekintsük a 6.21 ábrát egy pillanatra oldalnézeti képnek), melyben a kezdetben kis amplitudójú hullám egyre élesebb maximumú lesz, átbukik és megtörik, azaz energiája kisskálájú turbulens mozgássá alakul.

A ciklonok teljes életciklusa néhány nap, s ez időjárásunk változásának jellegzetes ideje. Tipikus méretük R' belső Rossby-sugárnyi, tehát néhány 1000 km. Általában csoportosan keletkeznek, s ilyenkor a köztük lévő távolság is ugyanilyen nagyságrendű, összhangban a (6.83) egyenlettel. Az egész baroklin hullám megjelenésében ilyenkor hasonlít a Kelvin–Helmholtz-instabilitás következtében létrejövő hullámokhoz (1. hullámtörési hasonlat), de hosszú hullámvonulat megfigyelésére nem számíthatunk, mert a belső Rossby-sugár nem fér rá sokszor a mérsékeltövi szélességi körökre (6.22 ábra).



6.22 ábra: Cikloncsalád. Az Atlanti-óceán felett ciklonvonulat (baroklin hullám) felszíni képe figyelhető meg (1967. október 15., 12 óra). A köztük levő távolság 1000 km körüli. Az Európától legtávolabbi ciklon most van születőben.

A baroklin instabilitás a forgatás és rétegzettség együttes hatásának egyik legfontosabb megnyilvánulása. Az instabilitás következtében kialakuló mozgás alapvetően befolyásolja a környezeti áramlásokat, így pl. az egész mérsékeltövi éghajlat jellegét. A baroklin instabilitás fontosságának felismerése és első leírása J. Charney nevéhez fűződik, a ciklonképződés kialakulásának mechanizmusa pedig V. Bjerknes-éhez. Ebből mára kiterjedt elmélet alakult ki, melyet a geofizikai folyadékdinamika egyik legjelentősebb eredményének tekinthetünk.

6.13 A baroklin instabilitás kétrétegű közegben

Tekintsünk egy kétrétegű közeget merev lap közelítésben. A közeg eleinte geosztrofikus egyensúlyban van észak felé igen enyhén emelkedő belső elválasztó felülettel az északi féltekén. Ha

a dőlésszög γ , akkor a két réteg közötti keletre mutató sebességek különbsége (6.46) alapján $\Delta U = \gamma g'/f_0$. Az egyszerűség kedvéért legyenek a rétegek azonos átlagos vastagságúak: $H_1 = H_2 = H/2$, melyből az következik, hogy a belső Rossby-sugár (l. 6.18)

$$R' = \frac{\sqrt{g'H}}{2f_0}. \quad (6.85)$$

Célszerű a jelenséget olyan koordinátarendszerből vizsgálni, melyben a felső közeg $U = \Delta U/2$ sebességgel mozog keletre, az alsó pedig $-U$ sebességgel nyugatra.

A (14.29), (14.30) kétrétegű kvázigeosztrofikus egyenletben az áramlási függvényeket úgy a

$$\psi_1 = -Uy + \psi'_1, \quad \psi_2 = Uy + \psi'_2 \quad (6.86)$$

alakban vesszük fel, ahol ψ'_i a két közeg kis perturbációit leíró időfüggő áramlási függvények. Ezt behelyettesítve és csak a lineáris tagokat megtartva:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\Delta \psi'_1 + \frac{R'^{-2}}{2} (\psi'_2 - \psi'_1) \right) + (\beta + R'^{-2}U) \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} = 0, \quad (6.87)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\Delta \psi'_2 - \frac{R'^{-2}}{2} (\psi'_2 - \psi'_1) \right) + (\beta - R'^{-2}U) \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} = 0. \quad (6.88)$$

Az utolsó tagok abból következnek, hogy a (14.29), (14.30) egyenletekben fellépő $\psi_1 - \psi_2$ különbség vezető rendben $-2Uy$, mely ugyanolyan jellegű járulékot ad a lineáris egyenletben, mint a β tag. A baroklin hullámokat a $\psi'_i = \psi_{i,0} \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban keresve a

$$\left[(\omega_0 - Uk_x)(k_x^2 + \frac{R'^{-2}}{2}) + k_x(\beta + R'^{-2}U) \right] \psi_{1,0} = (\omega_0 - Uk_x) \frac{R'^{-2}}{2} \psi_{2,0}, \quad (6.89)$$

$$\left[(\omega_0 + Uk_x)(k_x^2 + \frac{R'^{-2}}{2}) + k_x(\beta - R'^{-2}U) \right] \psi_{2,0} = (\omega_0 + Uk_x) \frac{R'^{-2}}{2} \psi_{1,0} \quad (6.90)$$

egyenletrendszerhez jutunk. A $\psi_{i,0}$ amplitúdók kiküszöbölése után a diszperziós relációt meghatározó összefüggés:

$$\left(\omega_0(k_x^2 R'^2 + \frac{1}{2}) + k_x \beta R'^2 \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4} = U^2 k_x^2 \left((k_x^2 R'^2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (6.91)$$

Tekintsük először az f_0 -sík közelítést, melyben a β -effektus nincs jelen. Ha $\beta = 0$, a frekvencia közvetlenül leolvasható, mint

$$\omega_0^2 = U^2 k_x^2 \frac{(k_x R')^2 - 1}{(k_x R')^2 + 1}. \quad (6.92)$$

A frekvencia imaginárius, ha

$$k_x < k_c \equiv R'^{-1}. \quad (6.93)$$

Minden, a belső Rossby-szám reciprokánál kisebb hullámszámra, vagyis $2\pi R'$ -nél nagyobb hullámhosszakra a perturbáció instabil. Az ilyen hullám amplitúdója időben nő, növekedésének gyorsaságát az $s \equiv \omega_0/i$ instabilitási exponens jellemzi (6.23a ábra)

$$s = Uk_x \sqrt{\frac{1 - (k_x R')^2}{(k_x R')^2 + 1}}. \quad (6.94)$$

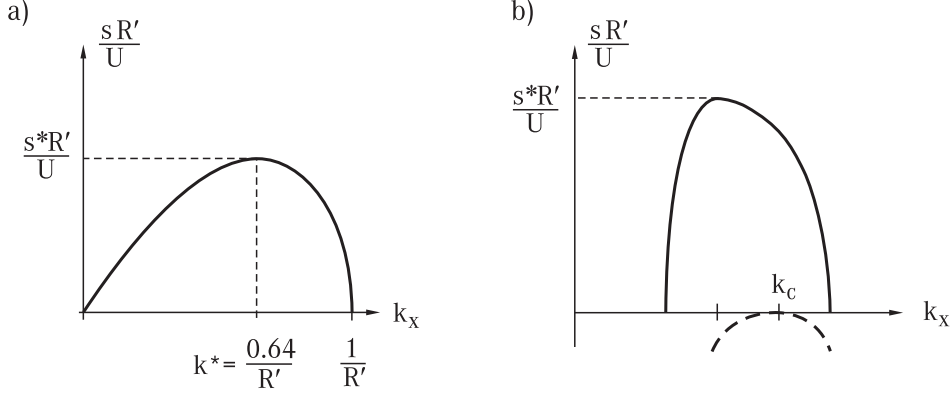
A leggyorsabban növekvő amplitúdó ahhoz a k^* hullámszámhoz tartozik, melyre s maximális. Ez

$$k^* = \sqrt{\sqrt{2} - 1} R'^{-1} \approx 0,64 R'^{-1}. \quad (6.95)$$

A megfelelő hullámhossz $2\pi/k^* \approx 10R'$, mely a légkörben 5000 km, az óceánban 300 km nagyságrendű. Az ehhez tartozó instabilitási exponens

$$s^* = (\sqrt{2} - 1) \frac{U}{R'}. \quad (6.96)$$

Ennek reciproka $U = 10$ m/s légköri sebességgel kb. 3 nap, óceáni 1 m/s értékkel pedig kb. 1 nap kétszereződési (pontosabban e -szereződési) időt jelent.



6.23 ábra: A baroklin instabilitás s instabilitási exponense kétrétegű közegben. (a) f_0 -sík közelítés. Az instabilitási tartomány és a leggyorsabban növekvő hullám k^* hullámszáma *nem* függ a termikus áramlás sebességétől. (b) β -sík közelítés. Instabilitás csak az U_c kritikus sebességnél *gyorsabb* termikus áramlásokra lép fel. A szaggatott vonal a kritikus sebességhez tartozó instabilitási exponens négyzetét mutatja, mely a k_c hullámszámnál lesz zérus. $U = U_c$ -re tehát csak ez az egyetlen hullámszám nem stabil. Növekvő sebességekre egyre szélesebb az instabilitási tartomány, s egyre nagyobb az exponens. A megrajzolt görbe $U = 2U_c$ -hez tartozik.

A realisabb esetben, amikor a Föld görbületét kifejező β -paramétert nem hanyagoljuk el, a másodfokú egyenlet megoldásából a diszperziós relációra azt kapjuk, hogy

$$\omega_0 = -\beta \frac{2k_x^2 R'^2 + 1}{2k_x (k_x^2 R'^2 + 1)} \pm k_x \frac{\sqrt{\beta^2 R'^4 / 4 + U^2 k_x^4 R'^4 (k_x^4 R'^4 - 1)}}{k_x^2 R'^2 (k_x^2 R'^2 + 1)}. \quad (6.97)$$

Megjegyezzük, hogy termikus áramlás hiányában ($U = 0$ -ra) visszkapjuk a Rossby-hullámok (6.81), (6.82) diszperziós relációit. Az $U \neq 0$ eset tehát úgy is tekinthető, mint a termikus áramlás stabilitásának vizsgálata Rossby-hullámszerű perturbációkra. Amíg (6.97) valós, a termikus áramlás jelenlétében kialakuló Rossby-hullámok diszperziós relációját adja. A gyökjel alatti kifejezés minimumát a

$$k_c = 2^{-1/4} R'^{-1} = 0,84 R'^{-1} \quad (6.98)$$

kritikus hullámszámnál veszi fel, ahol értéke

$$R'^2 \beta^2 - U^2. \quad (6.99)$$

Ez akkor lehet negatív, ha az U sebesség abszolútértéke nagyobb a $\beta R'$ kritikus értéknél:

$$|U| > U_c \equiv \beta R'. \quad (6.100)$$

A kritikus hullámszám jelentése az, hogy az U_c sebességnél éppen a k_c hullámszám válik instabillá. Numerikus értéke valamivel nagyobb az f_0 -sík közelítéssel kapott k^* -nál. A kritikus sebességre a $\beta = 10^{-11}$ 1/(ms) értékkel a légkörben 10 m/s-ot kapunk, s a kritikus hullámhossz 3700 km. Az óceánban U_c kisebb 1 m/s-nál, és a kritikus hullámhossz néhány száz km.

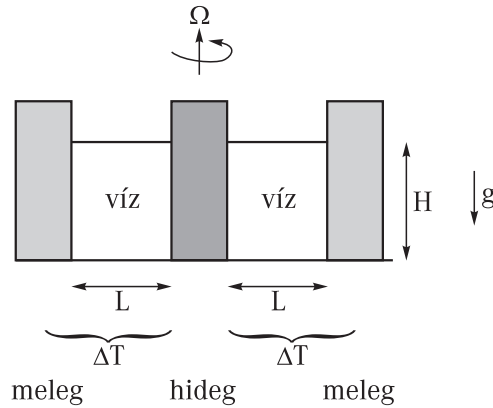
Ha a sebesség nagysága U_c -t meghaladja, akkor egyre nagyobb hullámszámtartomány válik instabillá. Az instabilitási exponens $|U| > U_c$ esetén

$$s = \frac{|U|}{R'} \frac{\sqrt{(1 - (U_c/U)^2)/4 - (k_x^4 - k_c^4)^2 R'^8}}{k_x^2 R'^2 + 1}, \quad (6.101)$$

amint a 6.23b ábra mutatja. A β paraméter jelenlétének tehát stabilizáló hatása van, hiszen a lassú áramlások minden hullámszámmal stabilnak bizonyulnak. Ennek oka az, hogy a felszabaduló energia most Rossby-hullámok keltésére is fordítható. Az instabilitás csak elegendően nagy sebességkülönbségek esetén jelenik meg, hasonlóan a Kelvin–Helmholtz-instabilitáshoz. A kritikus sebességkülönbség azonban a környezeti áramlásokban szokásos sebességek nagyságrendjébe esik, ezért a baroklin instabilitás kialakulása a β -hatás jelenlétében is gyakorlatilag elkerülhetetlen.

6.14 A baroklin instabilitás kísérleti kimutatása

A forgatott rendszerben oldalról fűtött folyadék áramlásának kísérleti vizsgálata során egy hengert koaxiálisan három részre osztanak. A belső kis hengert hidegen tartják, a külső hengergyűrűt pedig melegen. Ezek képviselik egy bolygó sarki ill. egyenlítői tartományait. A közbenső hengergyűrű ekkor az egyik oldalról melegített, s másiktól hűtött tartomány, s a benne elhelyezkedő folyadék mozgását rendszerint a légkör modelljének tekintik. A forgatás szögsebessége, vagy a hőmérsékletkülönbség függvényében vizsgálható, mikor válik a hengerszimmetrikus áramlás instabillá. Ez egyrészt a baroklin instabilitás kísérleti megvalósítását jelenti elhanyagolható β hatás esetén (hiszen az aljzat vízszintes), másrészt pedig a globális légkörzés általános tulajdonságainak felderítését is szolgálja.



6.24 ábra: A baroklin instabilitás kimutatásának forgóhengeres kísérleti elrendezése és jellemző adatai.

Kísérleti paraméterként változtatható az Ω szögsebesség, a ΔT hőmérsékletkülönbség, a folyadék H mélysége és a közbenső hengergyűrű L szélessége (6.24 ábra). Az eredményeket dimenziótlan kombinációk függvényében érdemes megadni, hogy az áramlások hasonlósági törvényei szerint rögtön leolvasható legyen jelentésük a környezeti jelenségek szempontjából is. A Rossby-számban megjelenő U sebességet célszerű a külső paraméterekkel kifejezni. A termikus áramlás erősségének (6.64) becslése alapján képzett Rossby-szám (most $f_0 = 2\Omega$)

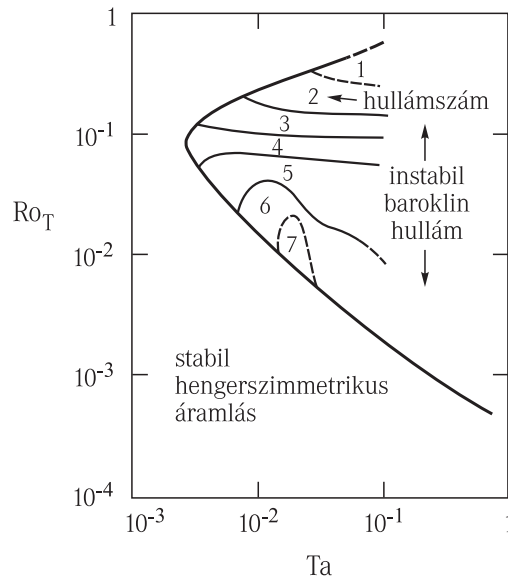
$$Ro_T \equiv \frac{g\alpha\Delta T H}{(2\Omega)^2 L^2}, \quad (6.102)$$

az ún. termikus Rossby-szám. A másik fontos dimenziótlan paraméter a forgatás erősségét mérő

$$Ta \equiv \frac{\Omega^2 L}{g} \quad (6.103)$$

Taylor-szám.⁷ A Ro_T és Ta paraméter tipikus értéke 10 cm-es L szélességgel és H mélységgel, 10 fok hőmérsékletkülönbséggel és percenkénti 3 fordulattal ($\Omega = 0,3 \text{ s}^{-1}$) számolva 0,5, ill. 10^{-3} . Érdeemes felhívni a figyelmet arra, hogy a geosztrófikus leírásban használt dimenziótlan paraméterekkel összevetve a termikus Rossby-szám a (6.37) Burger-számnak felel meg, hiszen $g\alpha\Delta T/H$ a Brunt-Väisälä-frekvencia négyzetét adná, ha a hőmérsékletgradiens függőleges irányú lenne. A belső Rossby-sugár $L \cdot Bu$ -ként becsülhető⁸.

A kísérletek eredményei a $Ta-Ro_T$ paramétersíkon a 6.25 ábrával foglalhatók össze. A vastag vonal a stabil forgásszimmetrikus termikus áramlás tartományát választja el a hullámszerű viselkedéstől, ahol a termikus áramlás már instabil. Ez a vonal tehát a baroklin instabilitás határgörbéje. A baroklin hullámok tartományában feltüntettük azt is, hogy hány hullámhossz jelenik meg a hengergyűrűben. A megfigyelt baroklin hullámok nem kis amplitudójú lineáris rezgések, hanem nagy amplitudójú nemlineáris mozgások. Az instabilitás következtében időben eleinte növekvő amplitudót a véges geometria megállítja. A hullámhossz az L vastagsággal arányos annak megfelelően, hogy a belső Rossby-sugár is közelítőleg L . Sokszor felismerhető egy meanderező központi jet. Erősebb forgatásokra a végállapot mindig az, hogy nagy ciklonális és anticiklonális örvények szakadnak le, melyek száma időben változatlan (6.26 ábra).



6.25 ábra: A forgóhengeres kísérlet eredménye a Taylor-szám és a termikus Rossby-szám által definiált $Ta-Ro_T$ paramétertéren.

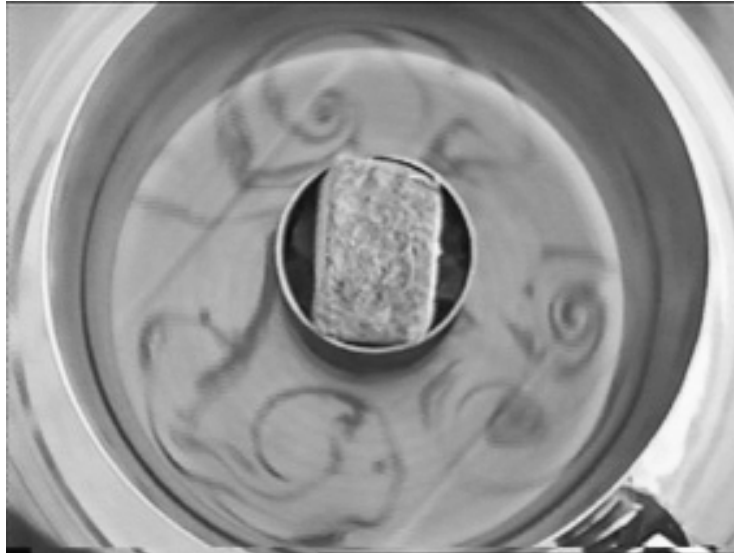
A véges geometria stabilizálja a kis hőmérsékletkülönbséghez tartozó termikus áramlást. Adott hőmérsékletkülönbség mellett a forgatási sebesség növelése a 6.25 ábra $Ta-Ro_T$ síkján egy -1 meredekségű egyenesen lefelé történő elmozdulásnak felel meg. Az egyenes annál feljebb fut, minél nagyobb ΔT . Azt látjuk, hogy a létrejövő instabilitás során leggyorsabban növekvő hullámok hossza (azaz a megfigyelt hullámhossz) csökken Ω növelésével. Ez összhangban van a

⁷A Taylor-szám leggyakrabban használt definíciója $Ta = \Omega^2 L^4 / \nu^2$, vagyis az ΩL kerületi sebességgel képzett Reynolds-szám négyzete. Esetünkben a Taylor-szám logaritmus lesz lényeges, s ez a kétféle értelmezésben egy konstans különbséget jelent csak.

⁸A Ta Taylor-szám az ΩL sebességgel képzett külső (1.27) Froude-szám négyzetének felel meg.

vízszintesen korlátlan kiterjedésű közegre vonatkozó egyszerű megfontolás eredményével, miszerint (l. (6.83)) $\lambda_c \sim R' \sim 1/|\Omega|$. A nagy külső hőmérsékletkülönbség hatására kialakuló baroklin hullámok hatékony hőcserét hoznak létre, s a folyadék belsejében megnövelik a lokális sűrűségkülönbséget az alsó és felső rétegek között. Az $R' \approx NH/2|\Omega|$ belső Rossby-sugár olyan nagyvá válhat, hogy az instabil, $\lambda_c \sim R'$ hosszúságú hullámok már egyszer sem férnek rá a gyűrűre, s ezzel megszűnik az instabilitás. Ez történik a vastag görbe felső ága mentén.

A globális légkörzés szempontjából a kísérletben a kis Taylor-számoknál tapasztalt viselkedés megfelel a földi alacsony szélességi körök (az Egyenlítő) mentén kialakuló stabil zonális áramlásoknak, hiszen itt a Coriolis-paraméter kicsi. Másrészt ugyanez a tartomány jellemzi a lassan forgó bolygók (pl. Vénusz) légkörét, ahol a baroklin instabilitás nem játszik szerepet. A mérsékelt égövi tipikus hőmérsékletkülönbségek a Földön jóval nagyobbak, mint a szubtrópusiak. Mivel az átlagos Coriolis-paraméter is ugyanezt a tendenciát mutatja e két tartományban, bennük a termikus Rossby-szám (Burger-szám) azonos nagyságrendű, a Taylor-szám viszont nem. A szubtrópusiból a mérsékeltégövi zónába való átlépés a kísérletben tehát a $Ro_T \approx$ állandó vonal menti jobbra haladásnak felel meg. Az eredmény jól mutatja, hogy a baroklin instabilitás és a nagy amplitudójú baroklin hullámok megjelenése a földi viszonyok között elkerülhetetlen a közepes szélességeken.



6.26 ábra: A baroklin instabilitás következtében kialakuló tipikus áramlási kép a forgóhengeres kísérletben. A megfestett tartomány kezdetben egy körgyűrű, s az hasad fel ciklonális és anticiklonális örvényekre az instabilitás hatására.

7. fejezet

Turbulencia

A turbulencia olyan áramlás, mely térben is és időben is véletlenszerű, rendezetlen. A sebességtér ilyenkor minden megfigyelési skálán és időben is olyan gyorsan változik, hogy az átlagértékétől való eltérések, a fluktuációk részletei nem ismerhetők meg, célszerű azokat véletlen változóknak tekinteni. A fluktuációk ráadásul nem kicsik, a turbulencia alapvetően nemlineáris jelenség. Ebben a témakörben ezért az alapegyenletek analitikus megoldása reménytelen, ismereteink elsősorban kísérleti megfigyeléseken, numerikus szimulációkon, és dimenziós megfontolásokon alapulnak.

A turbulencia a nagyon gyors áramlások, ill. erősen fűtött közegek jellemzője. A turbulencia feltételének pontosabb megfogalmazását kapjuk a dimenziótlan számok segítségével: áramló homogén közegben a Reynolds-számnak, fűtött közegben pedig a Rayleigh-számnak igen nagyoknak kell lennie:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1, \quad \text{vagy} \quad Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa} \gg 1.$$

A turbulencia ezért azon folyamat végeredményének is tekinthető, melynek során a folyadékot egyre gyorsabban áramoltatjuk, vagy egyre erősebben fűtjük. E folyamatban az egyszerűbb áramlási formák sorra vesznek el stabilitásukat. A rendszer különböző instabilitásokon megy keresztül a turbulencia eléréséig, melyek lehetnek pl. a Kelvin-Helmholtz-instabilitás, a Rayleigh-Bénard-instabilitás, vagy forgatott és fűtött közegben a baroklin instabilitás. A turbulencia tehát egyfajta végállapot, a folyadékmozgás legbonyolultabb állapota, melyhez igen nagy energiabefektetés szükséges, és ezért extrém dimenziótlan számokkal jellemezhető. Ennek ellenére a természetben a turbulencia igen gyakori, így például alapvető szerepet játszik a szennyezések terjedése során, a planetáris határretegben, vagy az óceáni keveredési rétegben. A környezeti áramlásokat kis skálán, a néhány méteres távolságokon megfigyelve, azok mindig turbulensnek bizonyulnak. Ebben a véletlenszerű folyadékmozgásban mindhárom térbeli irány lényeges szerepet játszik, háromdimenziós turbulenciáról van szó (7.1 ábra). A nagy vízszintes távolságokon viszont, mint láttuk, az áramlások gyakorlatilag kétdimenziósak. A turbulencia jellege alapvetően függ a dimenziószámtól: A háromdimenziós turbulens folyadék "zubog", sok kis örvény figyelhető meg benne. A kétdimenziós viszont ehhez képest simán változik, de véletlenszerűen: nagyméretű örvények jellemzik és a körülöttük megfigyelhető "szálas" szerkezetek (7.12, 7.13 ábra). A turbulencia harmadik fajtája a geosztrofikus turbulencia (7.17 ábra), amely a kétdimenziós eset kiterjesztése olyan áramlásokra, melyekben a forgatás és a görbület (β -hatás) is szerepet játszik. Végsősoron tehát mind a légkör, mind az óceánok nagyskálájú rendezetlen mozgása geosztrofikus turbulencia (1., 2. ábra).

A turbulenciával járó rendezetlen térbeli áramlás erős keveredést okoz, mely felerősíti a közeg viszkozitását, hővezetését és a diffúziós folyamatokat. A nyugvó aljzat felletti határretegben a ν , κ és D transzportegyütthatók a náluk sok nagyságrenddel nagyobb ν_{turb} , κ_{turb} és D_{turb} turbulens paraméterekkel helyettesíthetők (7.2 ábra), melyek függetlenek a molekuláris értékektől! A fallal párhuzamos sebesség abszolútértéke univerzális magasságfüggést mutat. Ez a Kármán Tódor által leírt logaritmikus sebességprofil minden turbulens határretegben előfordul (7.3 ábra).

A légköri planetáris határrétegben a legkülönbözőbb vegetációs és domborzati fedettségek mellett pontos mérések bizonyítják érvényességét.

A közeg stabil rétegzettsége a turbulencia kialakulását megnehezíti, hiszen függőleges keveredés csak akkor alakulhat ki, ha az egymás fölötti folyadékrétegek \bar{u} átlagsebessége elegendően különböző. A háromdimenziós turbulencia kialakulásának feltétele rétegzett közegben az, hogy a

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2}$$

Richardson-szám kisebb legyen egy egységnyi kritikus értéknél. Ez a feltétel teljesül a felemelkedő meleg termikekben. Felszállás közben ezért a környező levegő besodródik a termikbe és jól elkeveredik. A termik egyre nagyobb és egyre sűrűbb lesz, s eközben sebessége lassul (7.4 ábra).

A termikekkel rokon jelenség a vulkánból felszálló füst, ill. a gejzírekből vagy a kéményekből kiáramló meleg levegő mozgása. Összefoglaló néven a pontszerű forrásból folyamatosan kiáramló könnyű közeg feláramlása a csóva (plume). Az állandó besodródás miatt a csóva egyre szélesebb, sűrűsége növekszik, sebessége viszont csökken (7.5 ábra). Rétegzett közegben nem emelkedhet tetőzetesen magasra, ugyanis a növekvő sűrűség egyszer eléri az éppen aktuális környező sűrűséget, és az emelkedés megszűnik. Ez magyarázza, hogy a kitörésben feláramló vulkáni hamu és gázok, vagy a kéményfüst gyakran meglepően rövid emelkedés után megáll, s ott vízszintes síkban szétterül (7.6 ábra). A jelenséget mindenképpen figyelembe kell venni a kéményből kiáramló szennyezések káros hatásának megítélésakor.

A τ_0 nyírásnak kitett rétegzett turbulens határrétegben egy új távolság jelenik meg, az

$$L_M = -\frac{\rho_0 c_p u^{*3}}{g\alpha Q}.$$

Monyin–Obukhov-hossz, ahol Q a függőleges hőáram, c_p az állandó nyomáson mért fajhő, és $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$ egy jellegzetes sebesség. L_M értéke mind az óceáni keveredési rétegben, mind a planetáris határrétegben néhányszor 10 m. Ez az a hossz, melyen belül a nyírás hatása jelentős. Az óceáni keveredési réteg teljes vastagsága ezért L_M -mel arányos, s ebből következik, hogy szél-nyírás jelenlétében a rétegvastagság a besodródás miatt időben lassan nő (7.8 ábra). A planetáris határréteg a légköri L_M -nél jóval vastagabb. Felső részét, ahol a nyírás nem játszik szerepet, a termikek feláramlása jellemzi. Ezek homogenizálják a sűrűséget, és hosszan tartó fűtés esetén a teljes határréteg vastagsága időben nő (7.9 ábra).

A határreteken kívül, az energiabetáplálási helytől távol a turbulencia homogén és izotróp. Ilyenkor a turbulencia különböző méretű, elhaló, és állandóan újrakeletkező örvények kölcsönható rendszerének tekinthető. Jellemzésére az $E(k)$ energiaspektrumot használjuk, melynek értéke a k hullámszámú, azaz $l \sim 1/k$ méretű örvények mozgási energiájával arányos. Elegendően nagy Reynolds-számok esetén az energiaspektrum hatványfüggvény alakú:

$$E(k) \sim k^{-m},$$

ahol az m kitevő pozitív.

A háromdimenziós turbulenciában a nagy örvények egyre kisebbekre bomlanak (7.10 ábra). Ennek következtében az energia a nagy, betáplálási mérettől a kis méretek felé áramlik. A folyamatot az $m = 5/3$ Kolmogorov-féle exponens jellemzi (7.11 ábra). Az örvények bomlása egy alsó határ, az l_d disszipációs hossz eléréséig tart, mely az óceánban és a légkörben is néhány mm.

A kétdimenziós turbulenciában az örvényesség megmaradása a bomlást megakadályozza. Ott fordított a helyzet: a kis örvények összeolvadnak és egyre nagyobbakká nőnek (7.14 ábra). Az energia egyre nagyobb méretű struktúráknak adódik át szintén az $m = 5/3$ exponenssel. Ugyanakkor az örvényesség az egyre kisebb méretek irányába áramlik. Az ehhez tartozó spektrum $m = 3$ kitevőjű

(7.15 ábra). Az l_d disszipációs hossz a természetes közegek kétdimenziós turbulenciájában néhány méter.

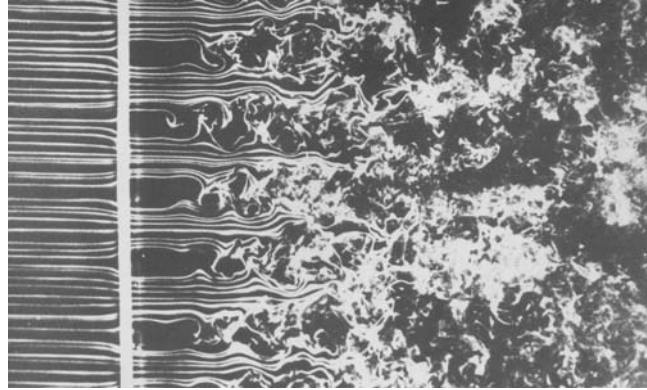
A forgatott sekély közegre jellemző geosztrofikus turbulencia is kétdimenziós jellegű. Az energiabetáplálási mechanizmus legtöbbször a jól ismert baroklin instabilitás, melynek jellegzetes mérete a belső Rossby-sugár (7.16 ábra). Az örvények növekedése a β -effektus miatt azonban csak az

$$L_R = \sqrt{\frac{u'}{\beta}}$$

Rhines-féle hossz eléréséig történik, ahol u' a sebességfluktuációk jellegzetes értéke. Ilyen maximális méretű örvényre lehet példa a Jupiter légkörében a Vörös Folt (7.17 ábra). A további fejlődés során az örvények megnyúlnak, majd Rossby-hullámokat bocsátanak ki, melyekből a szélességi körök mentén áramló zonális övek, jetek jönnek létre. Ez az óriásbolygók légkörében meg is figyelhető (7.17 ábra). Mindez azért nem jelenik meg a földi áramlásokban, mert a Rhines-hossz és a belső Rossby-sugár összemérhető, azaz az energia nagy méretek irányába történő áramlása a Földön nem fejlődhet ki.

7.1 Az átlagolt hidrodinamikai egyenletek

A turbulens áramlásban a sebességtér egy jelentős összetevője állandóan változtatja irányát és nagyságát (7.1 ábra). Mivel e fluktuációkról nem rendelkezhetünk elég információval, célszerű azokat egy átlag körül kialakuló véletlen változóknak tekinteni, és azok tulajdonsága alapján az átlagokra vonatkozó hidrodinamikai egyenleteket felírni.



7.1 ábra: A rögzített rácson átáramló folyadék a rácsmögött turbulenssé válik, mozgásában egyre több véletlen elem figyelhető meg. A rácstól elegendően nagy távolságban a turbulencia statisztikus tulajdonságai függetlenek a rácstól, a turbulencia homogén és izotróp. A képen az áramlás balról jobbra történik [Van Dyke].

Bontsuk fel a folyadékmozgásra jellemző valamely $A(\mathbf{r}, t)$ mennyiséget (mely lehet pl. valamilyen sebességkomponens, a nyomás, a hőmérséklet, stb) ugyanezen mennyiség $\bar{A}(\mathbf{r}, t)$ átlagára és az átlagtól való eltérést jelölő $A'(\mathbf{r}, t)$ fluktuációra. Az átlagot úgy képezzük, hogy $N \gg 1$ mérést végzünk hasonló körülmények mellett, s az adott helyen és pillanatban mért mennyiségek számtani közepét képezzük: $\bar{A}(\mathbf{r}, t) = (1/N) \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{r}, t)$, ahol i az egyes mérések sorszáma. Ez az ún. *sokaságátlag*. A definíció alapján

$$A(\mathbf{r}, t) = \bar{A}(\mathbf{r}, t) + A'(\mathbf{r}, t), \quad (7.1)$$

és a fluktuációk átlaga zérus:

$$\overline{A'(\mathbf{r}, t)} = 0. \quad (7.2)$$

Mivel a differenciálás és a sokságtalag képzése egymással felcserélhető lineáris művelet, az átlagolt egyenletek lineáris tagjai ugyanolyan formában érvényesek, mint az eredeti mennyiséget tartalmazók. Így például:

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad (7.3)$$

azaz az időderivált átlaga azonos az átlag időderiváltjával. Hasonlóan, a $\text{div} \mathbf{v} = 0$ összenyomhatatlansági feltételből azt kapjuk, hogy mind az átlagsebesség, mind a fluktuációk divergencia-mentesek:

$$\text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \text{div} \mathbf{v}' = 0. \quad (7.4)$$

Merőben más a helyzet a nemlineáris kifejezésekben. Tekintsük az A mennyiség teljes időderiváltjának advektív tagját, azaz a

$$(\mathbf{v} \text{grad}) A = \sum_j (v_j + v'_j) \frac{\partial (A + A')}{\partial x_j} \quad (7.5)$$

kifejezést. A vesszős és vesszőtlen tényezők szorzatát tartalmazó tagok átlaga (7.2) alapján zérus, ezért

$$\overline{(\mathbf{v} \text{grad}) A} = (\bar{\mathbf{v}} \text{grad}) \bar{A} + \sum_j \overline{v'_j \frac{\partial A'}{\partial x_j}}. \quad (7.6)$$

Mivel azonban $\text{div} \mathbf{v}' = 0$, az utolsó tag úgy is írható, mint a $\overline{v'_j A'}$ korreláció deriváltja. Az általános szabály az, hogy az advektív derivált átlaga

$$\overline{(\mathbf{v} \text{grad}) A} = (\bar{\mathbf{v}} \text{grad}) \bar{A} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A' v'_j}. \quad (7.7)$$

Az átlagos advektív deriválthoz tehát járulékot ad az $\overline{A' \mathbf{v}'}$ korrelációs vektor divergenciája is.

Fontos következmény adódik ebből a (1.23) Navier–Stokes-egyenlet átlagos alakjára. A sebesség i komponensére vonatkozó egyenletben az $A = v_i$ megfeleltetéssel

$$\overline{(\mathbf{v} \text{grad}) v_i} = (\bar{\mathbf{v}} \text{grad}) \bar{v}_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j}. \quad (7.8)$$

Az i -edik komponens átlagára vonatkozó egyenlet ezért (az egyszerűség kedvéért homogén, nem forgatott közeget tekintünk)

$$\frac{d}{dt} \bar{v}_i = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \right) \equiv \frac{1}{\rho_0} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\sigma}_{ij}, \quad (7.9)$$

ahol a fluktuációkkal korrigált átlagos feszültségtenzor

$$\bar{\sigma}'_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho_0 \overline{v'_i v'_j}. \quad (7.10)$$

Itt $\lambda = \nu \rho_0$ a dinamikai viszkozitás, az első két tag az átlagértékekkel képzett szokásos feszültség, az új,

$$-\rho_0 \overline{v'_i v'_j} \quad (7.11)$$

tag pedig az ún. *Reynolds-féle feszültség*. A fluktuációk jelenléte tehát módosítja a feszültségtenzort, s az új tag *független az anyagi paramétereiktől*. Elsősorban a nemdiagonális $i \neq j$ elemek

a fontosak, mert ezek a nyírás megváltozását jelentik, míg az $i = j$ elemek a nyomáshoz adnak járulékot. A Reynolds-féle tag esetenként lényegesen nagyobb is lehet, mint a nemturbulens járulékok. Érdemes megjegyezni, hogy a $\rho_0 \overline{v'_i v'_j}$ mennyiség úgy is értelmezhető, mint a j irányú $\rho_0 v'_j$ impulzus i irányba haladó $\rho_0 v'_i v'_j$ áramának átlaga (vagy fordítva).

Tekintsük most a hővezetési egyenlet átlagát ($A = T$). Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \bar{T} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{v'_j T'} \right), \quad (7.12)$$

ahol κ a hődiffúziós állandó. A fluktuációk tehát megváltoztatják a hővezetési egyenlet jellegét is: Az átlagos hőmérséklettel kapcsolatos $-\rho_0 c_p \kappa \text{grad} \bar{T}$ hőáram mellet, megjelenik a $\rho_0 c_p \overline{\mathbf{v}' T'}$ turbulens hőáram is (mely arányos a hőmennyiségnek a \mathbf{v}' sebességfluktuáció okozta áramával).

Amennyiben valamilyen koncentráció, pl. az S sótartalom diffúzió révén terjed szét, akkor a hagyományos $-D \text{grad} \mathbf{S}$ diffúziós áramhoz hozzáadódik a $\overline{\mathbf{v}' S'}$ turbulens diffúziós áram is:

$$\frac{d}{dt} \bar{S} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} - \overline{v'_j S'} \right). \quad (7.13)$$

Mindkétfajta turbulens áram nagyságában jóval meghaladhatja a hagyományos áramokat: a turbulencia tehát jelentősen felgyorsíthatja a keveredési folyamatokat.

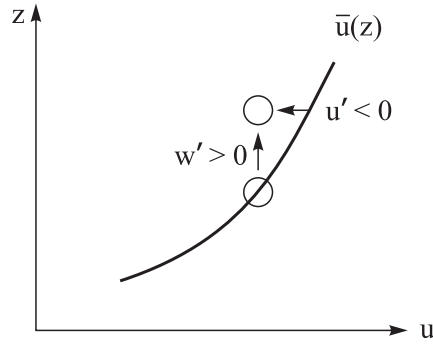
Összefoglalva, a turbulens fluktuációk miatt az advektív derivált nemlinearitásából következően az átlagos térmennyiségekre vonatkozó egyenletekben megjelenik ezen térmennyiségek fluktuációi szorzatának átlagértéke, a korreláció. Ahhoz, hogy az egyenletek egyértelműen megoldhatók legyenek, szükségünk van a korrelációk egyenleteire. Ezek a hidrodinamikai egyenletek beszorzásával átlagolás után egyszerűen megkaphatók, de bennük a háromszoros szorzatok átlagértéke, a hármas korrelációk lépnek fel. Így az egyre magasabb rendű korrelációk végtelen hierarchiáját kapjuk, mely jól mutatja, hogy a turbulencia teljes leírása csak a fluktuációk statisztikájának pontos ismeretében lenne lehetséges. A gyakorlatban kezelhető egyenleteket csak akkor kapunk, ha feltételezhetjük, hogy egy bizonyos rend fölött a korrelációs függvények mind kifejezhetők alacsonyabb rendűekkel. Ha ez igaz, akkor sikerült a hierarchiát egy véges szinten lezárni. Ez az ún. *lezárási* (closure) *probléma*. Az, hogy milyen lezárás alkalmazható, függ attól is, hogy a folyadék mely tartományát vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy a határretegben már az elsőrendű lezárás (a kétszeres korreláció visszavezetése az átlagértékre) is hasznos közelítést ad.

7.2 A turbulens határreteg

Tekintsünk egy falhoz közeli turbulens áramlást! Legyen a fal az x, y síkban, és tegyük fel, hogy az átlagos áramlás a fallal párhuzamos. Ezért a $v_z \equiv w$ átlagos sebesség eltűnik, a fluktuációk viszont bármilyen irányúak lehetnek, tehát mind $v'_x \equiv u'$, mind $v'_y \equiv v'$, mind $v'_z \equiv w'$ előfordul. Ugyanakkor viszont az átlagsebességek növekednek a faltól távolodva (azaz z növekedésével). Ha egy folyadékelem felfelé mozdul el, vagyis w' fluktuációja pozitív, akkor új helyén vízszintes sebessége az ottani átlagsebességnél kisebb lesz, sűrűdés révén fékezi a folyadékot és így általában negatív előjelű u', v' fluktuációt hoz létre. Hasonlóan, ha lefelé mozdul el, vagyis $w' < 0$, akkor a környező folyadékot gyorsítja, és ott pozitív u', v' fluktuáció alakul ki. Átlagosan tehát a függőleges és a vízszintes irányú sebességfluktuációk *antikorreáltak* a határretegben, azaz korrelációjuk negatív:

$$\overline{w' u'} < 0, \quad \overline{w' v'} < 0. \quad (7.14)$$

A (7.11) Reynolds-féle feszültség tehát pozitív, a turbulencia növeli a feszültséget, a viszkozitást.



7.2 ábra: A sebességfluktuációk korrelációja negatív a határrétegben. Az $\bar{u}(z)$ átlagos sebességprofil szerint az x irányban áramló közegben a $w' > 0$ függőleges sebességfluktuáció okozta elmozdulás után a folyadékkelem a helyi átlagsebességnél lassabban mozog, a környező folyadékot lassítja és $u' < 0$ negatív vízszintes fluktuációt hoz létre. Az $\overline{w'u'} < 0$ korreláció a feszültséget jelentősen megnöveli. Első közelítésben ez egy $\nu_{turb} \gg \nu$ turbulens viszkozitás bevezetésével vehető figyelembe.

Mivel az antikorrreláció megszűnik, ha az átlagsebesség z irányban homogén, célszerű feltételezni, hogy a Reynolds-feszültségek arányosak a megfelelő átlagsebesség függőleges deriváltjával:

$$-\overline{w'u'} \sim \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad -\overline{w'v'} \sim \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}. \quad (7.15)$$

Izotróp sík lap esetén az arányossági tényező független attól, hogy melyik komponensről van szó, ezért az \mathbf{u} vízszintes síkbeli sebességre, ill. fluktuációira nézve általánosan írható, hogy

$$-\overline{w'\mathbf{u}'} = \nu_{turb} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}, \quad (7.16)$$

ahol a $\nu_{turb} > 0$ arányossági tényező az ún. turbulens viszkozitás (angolul eddy viscosity). A tapasztalat szerint a Reynolds-feszültség ezen kifejezése jó első közelítés. A turbulens viszkozitás *független* a ν molekuláris viszkozitástól. A ν_{turb} mennyiséget az egész áramlás határozza meg, függhet ezért pl. a z magasságtól. Tipikus értéke azonban mindig több nagyságrenddel meghaladja a ν molekuláris viszkozitását. A légkörben $\nu_{turb} = 1 - 10 \text{ m}^2/\text{s}$, az óceánban pedig $\nu_{turb} = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ (a 10^{-5} , ill. 10^{-6} nagyságrendű molekuláris értékekkel szemben, l. 14.1 táblázat).

A (7.16) turbulens viszkozitási közelítéssel a keresztkorrelációkat visszavezettük az átlagsebességek deriváltjaira, és ezzel a határrétegbeli átlagolt Navier–Stokes-egyenletet lezártuk. Ráadásul ez ugyanolyan alakúnak adódott, mint a nem átlagolt egyenlet, csak benne a molekuláris és a turbulens viszkozitás összege lép fel. Az utóbbi nagy értéke miatt ez annak felel meg, hogy az eredeti egyenletben a $\nu \rightarrow \nu_{turb}$ helyettesítést hajtjuk végre, ahogyan azt az Ekman-féle határréteg tárgyalásakor tettük a 4.1 fejezetben.

Alulról melegített közegben, melyben a hőmérséklet felfelé csökken, a fluktuáció miatt kialakuló $w' > 0$ feláramlás a folyadékot hidegebb környezetbe juttatja, melyet ezért felmelegít: $T' > 0$. A $\overline{w'T'}$ korreláció ilyenkor pozitív. Általánosan is írhatjuk a (7.16) közelítés szellemében, hogy

$$-\overline{w'T'} = \kappa_{turb} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (7.17)$$

ahol $\kappa_{turb} \gg \kappa$ a turbulens hődiffúziós együttható (l. 14.1 táblázat).

Hasonlóan, egy adott anyag, pl. sótartalom szempontjából inhomogén közegben

$$-\overline{w'S'} = D_{turb} \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (7.18)$$

ahol $D_{turb} \gg D$ a turbulens diffúziós együttható (a só molekuláris diffúziós állandója pl. vízben $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$). Mivel a turbulens transzport nem az anyagi állandóktól függ, hanem magától az áramlástól, a transzport együtthatók azonos nagyságrendűek. Sokszor jó közelítéssel igaz, hogy $\nu_{turb} = \kappa_{turb} = D_{turb}$.

7.3 A logaritmusos sebességprofil

Megvizsgáljuk, hogy egy fal közvetlen közelében zajló turbulens áramlásra milyen átlagos sebességeloszlás jellemző. Vízsintes síkbeli átlagos áramlást vizsgálunk, melyben az áramlási sebesség \bar{u} nagysága csak a z magasságtól függ. A falhoz elegendően közel, vagyis olyan tartományban, ahol a z magasság sokkal kisebb a határreteg D vastagságánál, a sebességről feltehető, hogy nem függ a határreteg felső peremén érvényes u_∞ sebességtől. Az $\bar{u}(z)$ sebesség, vagy z szerinti deriváltja ekkor csak a z koordinátától, a ν kinematikai viszkozitástól, a ρ_0 sűrűségtől, és a fal felszínén ható τ_0 nyírástól függhet. Mivel a tömeg mértékegységét csak ρ_0 és τ_0 tartalmazza, ezért ez a két mennyiség csak a τ_0/ρ_0 hányados formájában fordulhat elő. E hányados négyzetgyöke sebesség mértékegységű, az

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \quad (7.19)$$

mennyiség az ún. *súrlódási sebesség*. A $\tau_0 = 0,1 \text{ N/m}^2$ tipikus szélnyírási erősségből a levegőben $u^* = 30 \text{ cm/s}$, az óceánban pedig $u^* = 1 \text{ cm/s}$ a súrlódási sebesség.

A határreteg felső peremétől távol az \bar{u} átlagsebesség magasság szerinti deriváltja tehát csak u^* , ν és z függvénye lehet:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = f(u^*, \nu, z), \quad (7.20)$$

ahol f egyelőre tetszőleges függvény.

A fal egészen keskeny kis környezetén kívül a turbulens fluktuációk miatt a molekuláris viszkozitás, mint az előző fejezetben láttuk, nem játszik szerepet. Itt tehát a ν -függés nem léphet fel, a $d\bar{u}/dz$ derivált csak u^* és z függvénye lehet. Ezekből 1/idő dimenziójú mennyiség csakis egyféleképpen képezhető, azaz

$$\frac{d\bar{u}}{dz} \sim \frac{u^*}{z}. \quad (7.21)$$

A dimenziótlan arányossági tényezőt az $1/K$ alakban szokás írni, ahol K a Kármán-féle konstans, melynek értéke a mérések szerint $K = 0,41$. (Kármán Tódor (1881-1963) magyar származású fizikus, a turbulencia kutatója, a repüléstudomány meghatározó alakja.) A fentiekből az átlagos sebesség magasságfüggése

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{K} \ln z + \text{konstans}. \quad (7.22)$$

Ez a *logaritmusos sebességprofil*, mely műszaki problémákban (pl. vízvezetékekben), és természetes közegekben egyaránt kialakul.

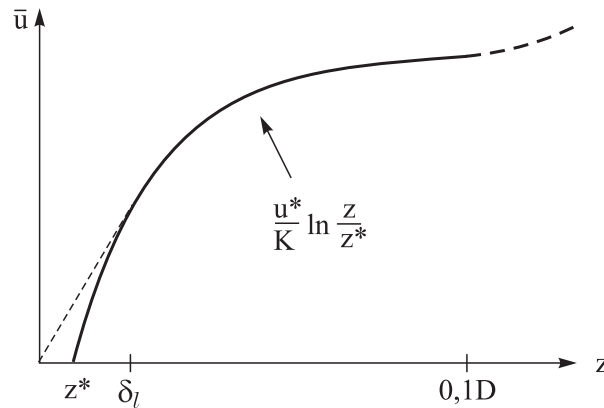
Ugyanakkor a fal közvetlen közelében ν lényeges, hiszen a peremfeltétel szerint ott $\nu \rho_0 d\bar{u}/dz = \tau_0$, melyből

$$\bar{u}(z) = \frac{z\tau_0}{\nu\rho_0}, \quad \text{vagy} \quad \frac{\bar{u}(z)}{u^*} = \frac{zu^*}{\nu}. \quad (7.23)$$

Ez egyben azt is mutatja, hogy a zu^*/ν kombináció dimenziótlan, egyfajta lokális Reynolds-szám, ν/u^* pedig egy hosszúságdimenziójú mennyiség. A fenti lineáris profil általában a $\delta_\nu = 10 \nu/u^*$ távolságig érvényes. A határretegnek ez, a falhoz igen közeli tartománya a *viszkózus alréteg*, δ_ν

pedig az alréteg vastagsága. Ez mind a légkörben, mind az óceánban kb. 1 mm-nek adódik, az alréteg tehát valóban igen keskeny.

Az alrétegen kívül a (7.22) logaritmikus sebességprofil érvényes, mely univerzális abban az értelemben, hogy sem a molekuláris paramétereiktől, sem a határreteg felső peremén érvényes sebességtől nem függ. Ez a tartomány elméletileg a $z \ll D$ távolságokra korlátozódik, de a megfigyelések szerint a határreteg 10 százalékáig is jó közelítéssel érvényben marad. A faltól távolabb a sebességeloszlás már u_∞ -tól is függ, és nem univerzális. A forgatott közegek határretegében itt válik lényegessé az Ekman-spirál elfordulása is.



7.3 ábra: A logaritmikus sebességprofil: a vízszintes átlagsebesség $\bar{u}(z)$ nagyságának magasságfüggése a turbulens határretegben. A δ_ν vastagságú viszkózus alrétegben lineáris a magasságfüggés. A határreteg D vastagságának alsó 10 százalékán túl az univerzális logaritmikus alak érvényét veszti. Durva felület esetén a viszkózus alréteg nem alakulhat ki. z^* ekkor az a szint, ahol a sebesség eltűnik. Értéke a felület érdességét jellemzi.

A határreteget létrehozó fal nem mindig sima. Gyakran előfordul, hogy a felület kidudorodásai összemérhetők vagy nagyobbak a viszkózus alréteg vastagságánál. Jó példa erre a planetáris határreteg, melyben az alsó falat pl. a domborzat vagy a vegetáció jelenti. A felületi szabálytalanságok mögött örvények keletkeznek, melyek a viszkózus alréteget *lerombolják*. Durva felületek esetén ezért a (7.23) lineáris profil egyáltalán nem alakulhat ki, az áramlás még a fal közvetlen közelében sem függ az anyagi paramétereiktől. Ilyenkor a logaritmikus sebességprofil a határreteg alján mindenütt érvényes. Az átlagos sebesség nyilván eltűnik valahol a felületi akadályok között. A (7.22)-ban fellépő konstans éppen azt mutatja meg, hogy ez milyen z^* magasságban történik. A durva felületekre vonatkozó logaritmikus sebességprofil tehát

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{K} \ln \frac{z}{z^*}, \quad \text{ha } z \geq z^*. \quad (7.24)$$

A z^* távolság a felület durvaságára jellemző ún. *érdességi paraméter*. A (7.24) eloszlás a határreteg-meteorológiában alapvető szerepet játszik. A légkör alsó, kb. 100 méteres rétegében érvényességét nagy pontossággú mérések bizonyítják. A z^* érdességi paraméter értéke alacsony bokrok esetén 20 cm, magas fűre 2 cm, alacsony fűre 5 mm, vízfelszín felett pedig kb. 1 mm.

7.4 Turbulencia rétegzett közegekben

A közegek stabil rétegződése a turbulencia kialakulását megnehezíti, hiszen ekkor a spontán hidrodinamikai mozgások kétdimenziósak. A térbeli turbulencia kialakulásához függőleges

keverés szükséges. Ehhez, az eddig vizsgált homogén közegekkel szemben, most munkát kell végezni. A munka a gravitáció ellenében történik annak érdekében, hogy a sűrűbb folyadékot magasabb, a könnyebbet pedig alacsonyabb szintre juttassuk. A potenciális energia növeléséhez szükséges energia csakis a folyadék átlagos mozgási energiájából adódhat. Turbulencia ezért rétegzett (fűtetlen) közegben csak akkor alakulhat ki, ha az egymás feletti folyadékrétegek *különböző* vízszintes sebességgel mozognak, s ez a nyírás elegendően erős.

A pontos feltétel megtalálása érdekében tekintsünk két egymás feletti h vastagságú folyadék-réteget, melyek eltérő vízszintes sebességgel mozognak. Legyen az alsó réteg $\rho_0 + \Delta\rho$, a felső kissé hígabb, ρ_0 sűrűségű. Válasszuk meg koordináta-rendszerünket úgy, hogy a felső réteg $\Delta U/2$, az alsó $-\Delta U/2$ sebességgel mozogjon. Ha a két réteg teljesen elkeveredik, akkor az átlagsebesség nulla lesz, az átlagsűrűség pedig $\rho_0 + \Delta\rho/2$. Az egységnyi vízszintes felület feletti $2h(\rho_0 + \Delta\rho/2)$ tömeg súlypontja h magasságban van, mely $2gh^2(\rho_0 + \Delta\rho/2)$ potenciális energiának felel meg. A kezdeti potenciális energia a $h(\rho_0 + \Delta\rho)$ tömeg $h/2$, ill. a $h\rho_0$ tömeg $3h/2$ magasságban levő súlypontjai miatt $gh^2(2\rho_0 + \Delta\rho/2)$. A potenciális energia tehát növekedett, méghozzá a $gh^2\Delta\rho/2$ értékkel. Ugyanakkor a kezdeti $(\rho_0 + \Delta\rho)h(\Delta U)^2/8$ és $\rho_0h(\Delta U)^2/8$ kinetikus energia zérusra csökkent. A mozgási energia változása a sűrűségkülönbség csekélyisége miatt jó közelítéssel $\rho_0h(\Delta U)^2/4$. A folyamat csak akkor lehetséges, ha a kinetikus energia változása fedezni tudja a helyzeti energiáját, vagyis ha

$$(\Delta U)^2 > 2h \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g. \quad (7.25)$$

Turbulens keveredés a teljes $2h$ vastagságú rétegben tehát akkor történhet, ha a h távolságra eső vízszintes sebességkülönbség négyzete meghaladja a jobboldali értéket. Erősebb rétegződést csak erősebb nyírás képes turbulenssé tenni.

Elegendően kis rétegvastagságok esetén $\Delta U/h$ az $\bar{u}(z)$ átlagsebesség, $\Delta\rho_0/h$ pedig a $\bar{\rho}(z)$ sűrűség magasság szerinti deriváltját adja. A turbulencia feltéte tehát a fentiek szerint megfogalmazható a

$$Ri \equiv \frac{N^2}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2} \quad (7.26)$$

Richardson-szám (L. F. Richardson (1881-1953) angol meteorológus, a turbulencia és az időjáráselőrejelzés első jelentős kutatója) segítségével, ahol N az (5.4) Brunt-Väisälä-frekvencia és $d\bar{u}/dz$ a vízszintes átlagsebesség gradiense. A Richardson-szám tehát

$$Ri = \frac{\text{átlagos helyzeti energianövekmény}}{\text{átlagos mozgási energiavesztés}}. \quad (7.27)$$

A turbulencia rétegzett közegben akkor alakul ki, ha a Ri Richardson-szám kisebb egy Ri_c kritikus értéknél,

$$Ri < Ri_c, \quad (7.28)$$

ahol Ri_c egységnyi nagyságrendű szám. A Richardson-szám lényeges szerepet játszik a sztratifikált turbulencia elméletében. Értéke instabil rétegzettség esetén negatív, hiszen akkor N^2 -et formálisan negatívnak kell tekinteni.

Egy H vastagságú rétegzett közegben, melyre ΔU sebességkülönbség jellemző, a Richardson-szám becsülhető a

$$Ri_0 \equiv \frac{g'H}{(\Delta U)^2} \quad (7.29)$$

globális Richardson számmal (l. (7.25)), ahol $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ a redukált gravitációs gyorsulás. Ez a szám lényegében egy belső Froude-szám négyzetének a reciproka, de ezt a Froude-számot nem az átlagsebességgel, hanem a sebességkülönbségek átlagával kell képezni. A globális Richardson-szám értéke mind az óceáni keveredési rétegben, mind a planetáris határrétegben 1 körüli. E

rétegek általános állapota tehát közel van ahhoz, hogy háromdimenziós turbulencia kialakulhasson bennük.

Megjegyezzük, hogy a $Ri_0 \approx 1$ feltételből a kevert réteg vastagságára

$$H \approx \frac{(\Delta U)^2}{g'} \quad (7.30)$$

adódik. Ez teljes összhangban van a Kelvin–Helmholtz-instabilitás (5.90) kritikus hullámhosszára kapott feltétellel, amennyiben felhasználjuk, hogy az instabilitás kifejlődése után az örvények által megkevert, tehát turbulenssé vált réteg vastagsága jól becsülhető a kritikus hullámhosszal.

7.5 Könnyű közegek turbulens áramlása

A turbulencia kifejlődéséhez nemcsak erős sebességyírás, hanem jelentős felhajtóerő is vezethet. Tipikusan ez a helyzet az alulról erősen fűtött folyadékban. A környezeti áramlásokban tipikus adatokkal láttuk, hogy a Ra Rayleigh-szám igen nagy (10^{16} körüli), a rendszerek messze túl vannak az első konvekciós instabilitáson, mely még szabályos áramlásokra vezetne. Ilyenkor a konvekció szabálytalan, turbulens feláramlásokkal társul. Ezek jellegzetes formája a *termik* (5.44, 5.45 ábra), mely kezdetben kis kiterjedésű, és a környezeténél könnyebb folyadékkelem (pl. melegebb levegőcsomag). Miután hirtelen elválik a kiindulási szintről, a termik emelkedése olyan gyors, hogy mozgása során peremén nagy örvények keletkeznek. Ezek a környező sűrűbb közeg egy részét beáramoltatják a termik belsejébe, a nagy örvények belül kisebbeket hoznak létre, és így az egész termik jól kevertté válik. Ez az állandó *besodródás* (entrainment) arra vezet, hogy a termik egyre nagyobb és egyre sűrűbb lesz, vagyis feláramlási sebessége lassul. A mozgás alapvető energiaforrása a sűrűségkülönbségből adódó felhajtóerő.

A termikekkel rokon jelenség a vulkánból felszálló füst, ill. a gejzírekből vagy a kéményekből kiáramló meleg levegő mozgása. Összefoglaló néven ezeket *turbulens csóvának* (plume) nevezzük¹. Ezek a termikekhez hasonlóan, mozgásuk kezdetén igen kis kiterjedésűek, forrásuk pontszerűnek tekinthető, de azokkal ellentétben itt a könnyű anyag utánpótlása állandóan biztosított. A besodródás itt is alapvető szerepet játszik, és ezért minden csóva felfelé szélesedik és ezzel párhuzamosan közege egyre sűrűbbé válik.

A termikek és a plume-ok mozgásának megértésében meglepően hatékonyak az egyszerű dimenziós megfontolások, melyeket a két esetre külön-külön mutatunk be.

7.5.1 Termikek

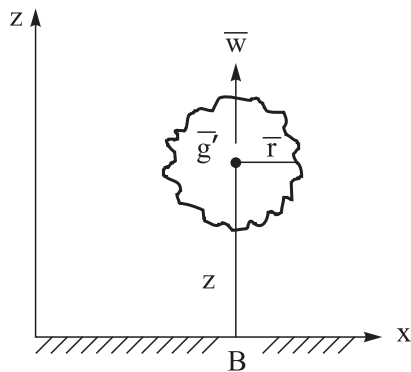
A termik mozgásának alapvető paramétere a kezdeti állapotban érvényesülő felhajtóerő. Kezdetben a ρ_0 környezeti sűrűségnél $\Delta\rho_0$ sűrűséggel hígabb V_0 kiindulási térfogatú folyadékra a B fajlagos felhajtóerő értéke

$$B \equiv g'_0 V_0, \quad (7.31)$$

ahol a g'_0 a kezdeti $g\Delta\rho_0/\rho_0$ redukált gyorsulás. A 0 indexet arra használjuk, hogy megkülönböztessük a kezdeti (a $z = 0$ szinten érvényes) értéket a mozgás során felvettől. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a környezet sűrűsége állandó, a külső közeg nem rétegzett.

Első közelítésben a termiket állandó sűrűségű gömbnek tekintjük, melynek helyzetét középpontja z magasságával jellemezzük. Keressük, hogy a termik átlagos \bar{r} sugara, \bar{w} feláramlási sebessége, és közegének \bar{g}' redukált gyorsulása (vagyis a pillanatnyi sűrűség) hogyan változik a mozgás során (7.4 ábra).

¹Ha a kiáramlás jelentős kezdősebességgel történik, akkor turbulens jet-ről beszélünk



7.4 ábra: Az emelkedő termik legfontosabb paramétereit. Az emelkedési magasság az idő négyzetgyökével nő: $z \sim t^{1/2}$, mert felszállás közben egyre több sűrű anyag kerül a termikbe besodródás révén.

Ezek a mennyiségek a z magasságon kívül csak az egyetlen releváns paramétertől, a B fajlagos felhajtóerőtől függhetnek. (A teljes $\rho_0 B$ felhajtóerő azért nem jelenhet meg bennük, mert a meghatározandó mennyiségek egyike sem hordoz tömeg mértékegységet.) A dimenzióanalízis szellemében feltételezzük, hogy a keresett mennyiség a B és a z hatványait tartalmazza, tehát $B^a z^b$ típusú, legalábbis, ha z nagyobb egy meghatározott értéknél. Mivel B mértékegysége m^4/s^2 , a szorzat mértékegysége $m^{(4a+b)}s^{-2a}$. Az \bar{r} átlagos sugár méter egységű, mely csak úgy lehetséges, ha $a = 0, b = 1$, vagyis a pillanatnyi sugár arányos a termik középpontjának a magasságával:

$$\bar{r} \sim z. \quad (7.32)$$

A w emelkedési sebesség m/s egységű, amelynek $a = 1/2, b = -1$ felel meg, azaz

$$\bar{w} \sim \frac{B^{1/2}}{z}. \quad (7.33)$$

Végül hasonlóan kapjuk, hogy a redukált gyorsulás

$$\bar{g}' \sim \frac{B}{z^3}. \quad (7.34)$$

Az eredmény azt fejezi ki, amit a besodródás jelensége alapján vártunk: a termik sugara emelkedése során nő, de közben sűrűségkülönbsége csökken és ezért egyre nehezkesebben emelkedik. A z -függés pontos alakját a dimenzióanalízis mutatja meg. Ezek szerint pl. a sebesség éppen fordítottan arányos a magassággal. Vegyük észre, hogy a pillanatnyi magassággal számolt (7.29) globális Richardson-szám, melyben a vízintes sebességeltérés nagyságrendjét \bar{w} -gal becsüljük, azaz

$$Ri_0 = \frac{\bar{g}'z}{\bar{w}^2} \quad (7.35)$$

független a magasságtól. Ez azt jelenti, hogy ha a Richardson-szám kezdetben a kritikus érték alatt volt, akkor az is marad, azaz a turbulencia feltétele az emelkedés során végig teljesül. Mivel $\bar{w} \sim 1/\bar{r}$, ebből az is következik, hogy a $B = \bar{g}'\bar{r}^3$ fajlagos felhajtóerő is állandó, s ez igazolja utólag, hogy jogos a B mennyiséget magasságtól független paraméternek tekinteni.

A fenti eredményekből az időfüggés is következik. Mivel a z magasságban levő részecske w emelkedési sebessége egyben a z időderiváltja, a hatványmegoldások körében (7.33) csak úgy teljesülhet, ha

$$z \sim \bar{r} \sim \sqrt{t}, \quad \bar{w} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (7.36)$$

Ez azt jelenti, hogy az a magasság, melybe a termik elegendő hosszú idő után eljuthat, az idő négyzetgyökével nő.

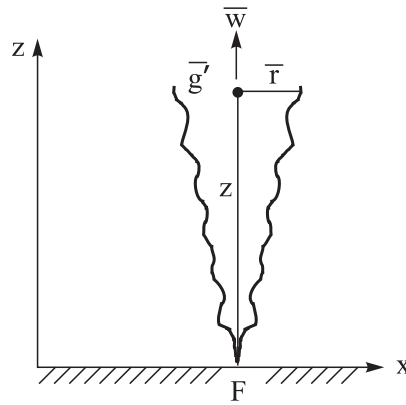
7.5.2 Turbulens csóvák (plume-ok)

Az állandó betáplálás miatt a releváns paraméter most az *időegységre eső* felhajtóerő, vagyis a

$$F \equiv g'_0 Q_0 \quad (7.37)$$

felhajtóerő-fluxus, ahol Q_0 a forrásból időegységenként kiáramló könnyű folyadék térfogata. A külső közeg sűrűségét először ismét térben állandónak gondoljuk.

A forrásból kiáramló folyadék folytonos csóvát alkot, melynek \bar{r} átlagos vastagsága a z magassággal változik. Az \bar{r} sugarú korongon belül feltesszük, hogy a \bar{w} átlagos feláramlási sebesség és a sűrűség is állandó. Az utóbbiból képezzük a \bar{g}' lokális redukált gyorsulást (7.5 ábra).



7.5 ábra: A kisméretű forrásból felszálló turbulens csóva (plume) legfontosabb paraméterei. A besodródás miatt a csóva felfelé vastagodik, a benne mozgó folyadékelemek lassulnak és sűrűsödnek. Homogén környezetben a csóva tetszőleges magasságig eljuthat.

Ezek a mennyiségek a z magasságon kívül csak az F felhajtóerő-fluxus függvényei. Mivel F mértékegysége m^4/s^3 , a dimenzióanalízis \bar{w} és \bar{g}' esetén a termikekétől eltérő eredményre vezet. Azt adja, hogy

$$\bar{r} \sim z, \quad (7.38)$$

$$\bar{w} \sim \frac{F^{1/3}}{z^{1/3}}, \quad (7.39)$$

$$\bar{g}' \sim \frac{F^{2/3}}{z^{5/3}}. \quad (7.40)$$

A besodródás miatt a plumok vastagsága is nő a magassággal, sebességük és redukált gyorsulásuk csökken, de a termikekénél lassabban. A (7.35) globális Richardson-szám most a plum mentén állandó, s ez ekvivalens azzal, hogy $F = \bar{g}' \bar{w} \bar{r}^2$ is állandó. A $Q = w r^2$ térfogati sebesség viszont a besodródás miatt $z^{5/3}$ szerint nő.

A (7.39) összefüggés az egyes változók időfüggésére most azt adja, hogy

$$z \sim \bar{r} \sim t^{3/4}, \quad \bar{w} \sim \frac{1}{t^{1/4}}. \quad (7.41)$$

A plume-ban levő folyadékelemek emelkedési magassága tehát az eltelt idő háromnegyedik hatványával arányos. Ebből érdekes összefüggés következik a csóva alakjára egyenletes erősségű vízszintes szélben. Mivel a részecske x koordinátája ekkor lineárisan függ az időtől, a csóva alakját a

$$z \sim x^{3/4} \quad (7.42)$$

fekvő parabola adja.

Homogén közegben a csóva elvileg tetszőleges magasságokba is eljuthat, hiszen a redukált gyorsulás mindig pozitív, a felhajtóerő sohasem tűnik el egészen. Rétegzett közegben a jelenség alapvetően különböző. Stabil rétegzettség esetén a külső közeg sűrűsége csökken a magassággal, és ezért a besodródás miatt sűrűsödő plume egyszercsak eljut egy olyan magasságba, ahol sűrűsége megegyezik a környezetével, azaz, ahol emelkedése *megáll*. Ez drasztikus eltérés a homogén közegbeli viselkedéshez képest, és magyarázza azt, hogy a felszálló füst megáll és adott (sokszor meglehetősen alacsony) szinten terjed szét a légkörben (7.6, 7.7 ábra)



(a)



(b)

7.6 ábra: Stabilan rétegzett közegben a csóva emelkedése a forrás fölött nem sokkal megszűnik, mert a besodródás miatt sűrűsödő anyag gyorsan eléri a felfelé híguló környezet sűrűségét. a) Kéményből felszálló füst szélben [www.badpets.net/Album]. b) A Redoubt vulkán (Alaszka) 1989. december 15-i kitörésének por-, és hamufelhője [volcanoes.usgs.gov/Images/Jpg/Redoubt/dds39_063_small.jpg].

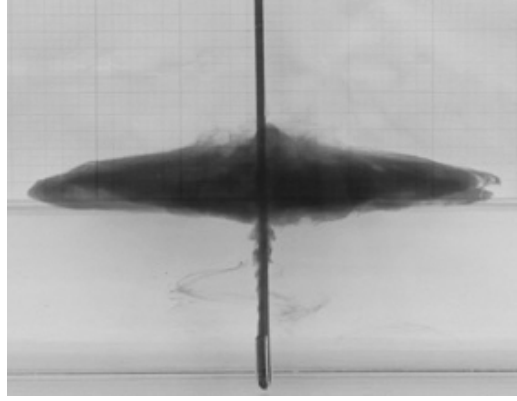
Állandó rétegzettség esetén a h maximális emelkedési magasság könnyen megbecsülhető. Ez a mennyiség az F fluxuson kívül az N Brunt–Väisälä-frekvenciától is függ. A dimenzióanalízis szerint

$$h \sim \frac{F^{1/4}}{N^{3/4}}. \quad (7.43)$$

Figyelemreméltó, hogy az emelkedési magasság igen gyengén függ a fluxustól. Kétszeres magasság eléréséhez az F mennyiséget 16-szorosára kell növelni!

7.6 A turbulens határréteg rétegzett közegben.

A határrétegben a τ_0 nyírási feszültség mindig lényeges szerepet játszik. A hozzá tartozó jellegzetes sebesség a (7.19) súrlódási sebesség. Rétegzett közegben a ΔU sebességkülönbség



7.7 ábra: Egyenletesen rétegzett közegben felszálló turbulens csóva laboratóriumban. A megfestett édesvíz emelkedése néhány cm után megszűnik.

hatására a turbulencia (7.30) szerint a

$$\frac{\rho_0(\Delta U)^2}{g\Delta\rho} \quad (7.44)$$

vastagságú rétegre terjed ki. A határrétegben ΔU jellegzetes értéke a súrlódási sebesség, az $u^*\Delta\rho$ mennyiség pedig értelmezhető a turbulens sűrűségfluktuációk $\overline{w'\rho'}$ függőleges áramaként. A határrétegben a keveredési vastagság jellegzetes értéke ezért az

$$L_M \equiv \frac{\rho_0 u^{*3}}{K g \overline{w'\rho'}}. \quad (7.45)$$

Ez az ún. *Monyin–Obukhov-hossz* (melynek fontosságát A. S. Monyin és A. M. Obukhov szovjet óceanográfusok mutatták ki 1954-ben). Itt a K Kármán-féle konstans történeti okokból jelenik meg. Az L_M mennyiség az a mélység, melyre az u^* nagyságrendű sebességgel jellemzett örvények hatása kiterjed.

Amennyiben a sűrűségfluktuáció a hőmérsékletváltozás következménye, $\overline{w'\rho'} = -\alpha\rho_0\overline{w'T'}$ (α a hőtágulási együttható), a Monyin–Obukhov-féle hossz úgy is írható, mint

$$L_M \equiv -\frac{u^{*3}}{Kg\alpha\overline{w'T'}} = -\frac{\rho_0 c_p u^{*3}}{Kg\alpha Q}. \quad (7.46)$$

Az utolsó egyenlőségben $Q = \rho_0 c_p \overline{w'T'}$ a függőleges turbulens hőáram, c_p az állandó nyomás melletti fajhő. Instabil, azaz felfelé csökkenő hőmérsékletű közegben a hőáram pozitív. A Monyin–Obukhov-hossz tehát stabil rétegzettség mellett pozitív, egyébként negatív előjelű.

A planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben a $c_p/(\sqrt{\rho_0}\alpha)$ paraméterkombináció közel azonos, a Monyin–Obukhov-hossz tehát mind az óceáni, mind a légköri határrétegben azonos nagyságrendű. Tipikus értékük néhányszor tíz méter.

A rétegzettség miatt a sebességprofil valamelyest eltér a logaritmikustól. Az átlagos \bar{u} sebesség deriváltja ekkor ugyanis (7.21) helyett a

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u^*}{z} \phi\left(\frac{z}{L_M}\right) \quad (7.47)$$

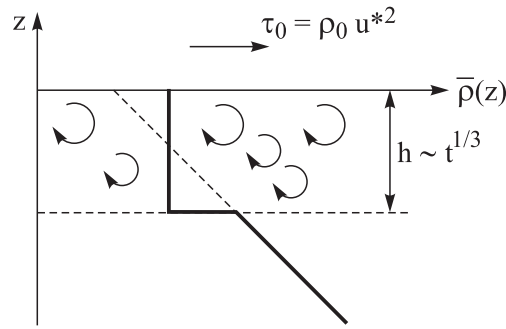
alakban írható, ahol megjelent a probléma z/L_M új dimenziótlan paramétere (ϕ ennek megfelelően egy dimenziótlan függvény). Amennyiben z kicsi, a ϕ függvény sorbafejthető, és vezető rendben

$\phi = (1 + c_1 z/L_M)/K$, ahol c_1 konstans. Integrálás után

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{K} \left(\ln \frac{z}{z^*} + c_1 \frac{z}{L_M} \right). \quad (7.48)$$

Ez a rétegzett határrétegekre jellemző ún. log-lineáris sebességprofil. A rétegzettségéből adódó korrekció ellenkező előjelű stabil és instabil rétegzettség esetén. A tapasztalat szerint c_1 pozitív, mely azt jelenti, hogy instabil rétegzettség $L_M < 0$ esetén a sebesség lassabban változik a logaritmikusnál, mert a függőleges keveredés erősebb, mint a semleges esetben. Ez a tendencia valóban megfigyelhető a planetáris határrétegben.

A Monyin–Obukhov-hossz segítségével meghatározhatjuk azt is, hogyan változik az óceáni keveredési réteg h vastagsága időben. Feltesszük, hogy a folyadék kezdetben stabilan rétegzett, és az N Brunt–Väisälä-frekvencia jellemzi. Az idő múlásával a szélnyírás miatt egyre nagyobb h vastagságú réteg válik jól kevertté, azaz homogén sűrűségűvé (7.8 ábra).



7.8 ábra: Az óceáni keveredési réteg h vastagsága a szélnyírás hatására nő, mert a turbulens örvények által okozott besodródás révén egyre mélyebb szintekig homogenizálódik az eredetileg egyenletesen rétegzett közeg.

A (7.45) Monyin–Obukhov-hosszban w' becsülhető a réteg $dh/dt \equiv \dot{h}$ növekedési sebességével, ϱ' pedig a Brunt–Väisälä-frekvencia alapján (l. (5.5)) $\varrho' = \varrho_0 N^2 h/g$. Feltételezve, hogy h arányos L_M -mel,

$$h \sim \frac{\varrho_0 u^{*3}}{N^2 h \dot{h}}, \quad (7.49)$$

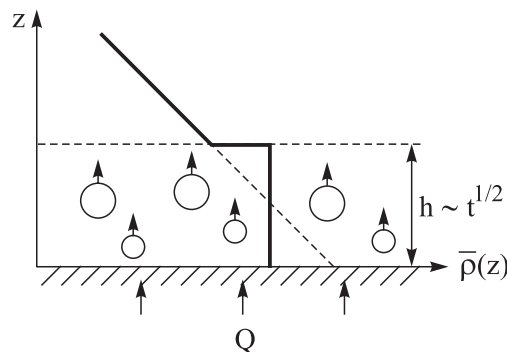
melyből $\dot{h} \sim h^{-2}$. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása az idő köbgyökével arányos, azaz

$$\boxed{h \sim \frac{u^*}{N^{2/3}} t^{1/3}.} \quad (7.50)$$

A keveredési réteg vastagsága az idő egyharmadik hatványával nő, annál gyorsabban, minél nagyobb a sűrűlási sebesség és minél kisebb a Brunt–Väisälä-frekvencia.

A planetáris határrétegnek csak egy *alréteget* definiálja a Monyin–Obukhov-hossz. A $z < |L_M|$ tartományban az ún. *kényszerített* konvekció zajlik, melyben a nyírásnak is jelentős szerepe van. A Monyin–Obukhov-hossznál jóval magasabb rétegekben, ahol $z \gg |L_M|$, a nyírás már elhanyagolható, és a konvekció hasonló jellegű, mint a nem nyírt közegekben, ún. *szabad* konvekció. Ez az a tartomány, melyet a termikek jellemeznek. Ennek megfelelően a planetáris határréteg teljes h vastagsága más módon változik, mint a keveredési rétegé (7.9 ábra).

Ezt abból becsülhetjük meg, hogy Q hőárammal fűtött egységnyi alapterületű közeg t idő alatt Qt hőt vesz fel, mely kifejezhető az ennek következtében kialakuló ΔT hőmérsékletváltozással is: $Qt \sim \varrho_0 c_p h \Delta T$. A hőmérsékletkülönbség $\Delta \varrho_0 = \alpha \varrho_0 \delta T$ sűrűségkülönbségnek felel meg.



7.9 ábra: A földfelszín gyors nappali felmelegedése következtében a turbulens határreteg alulról fűtött közegnek tekinthető. A felszálló termikek hatására egyre mélyebb szintekig homogénizálódik az eredetileg egyenletesen rétegzett közeg. A planetáris határreteg h vastagsága ezért időben nő.

Mivel a kezdeti N Brunt–Väisälä-frekvencia adott, $N^2 \sim g\alpha\Delta T/h$ ahol h a planetáris határreteg vastagsága. Ezek szerint $\Delta T \sim h$, tehát a vastagság négyzete arányos az idővel. Ebből

$$h \sim \left(\frac{\alpha g Q}{\rho_0 c_p N^2} \right)^{1/2} t^{1/2} \sim \frac{(\alpha g \overline{w'T'})^{1/2}}{N} t^{1/2}. \quad (7.51)$$

A teljes planetáris határreteg tehát gyorsabban változik, mint a keveredési réteg. Az időfüggés ugyanolyan típusú, mint az izolált termikek által homogén közegben elért szintmagasságé (l. 7.36). A változási sebesség egyenesen arányos a hőáram négyzetgyökével, és fordítva a Brunt–Väisälä-frekvenciával.

7.7 Homogén, izotróp turbulencia

A falaktól, akadályoktól, hőforrásoktól távol a turbulens fluktuációk a helytől és az iránytól is függetlenek, a turbulencia homogén és izotróp. Ekkor az összes nemdiagonális Reynolds-feszültség és az átlagos turbulens hőáram is zérus: $\overline{v'_i v'_j} = 0$, ha $i \neq j$, és $\overline{v'_i T'} = 0$ minden i -re. A sebesség \mathbf{v}' turbulens fluktuációit a $\overline{\mathbf{v}'^2} = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ szórásnégyzet jellemzi. Ezt célszerű felbontani a különböző hullámszámokból adódó járulékokra, és azt írni, hogy

$$\overline{\mathbf{v}'^2} = \int E(k) dk. \quad (7.52)$$

Mivel \mathbf{v}'^2 a mozgási energiával arányos, az $E(k)$ mennyiség neve az *energiaspektrum*. Az $E(k)\Delta k$ mennyiség jelenti a k és $k + \Delta k$ hullámszámtartományba eső perturbációk átlagos energiáját. Mivel Δk arányosnak vehető k -val, $E(k)$ az $l \sim 1/k$ méretű örvények átlagos kinetikus energiája, osztva az k hullámszámmal. A turbulencia izotróp mivolta abban is tükröződik, hogy az E mennyiség nem függ a hullámszámvektor irányától: az energiaspektrum csak a hullámszám k abszolútértékének függvénye.

Az energiaspektrum központi szerepet játszik a turbulencia jellemzésében. Általános alakja hatványfüggvény:

$$E(k) \sim k^{-m}, \quad (7.53)$$

ahol m pozitív szám. A kitevő konkrét értéke és a hatványalak érvényességi tartománya függ a közeg dimenziójától és attól is, hogy forgatott rendszerről van-e szó. Ezért, mielőtt az energiaspektrumot meghatároznánk, felsorolunk néhány olyan tulajdonságot, mely mindenfajta homogén és izotróp turbulens rendszerre jellemző.

A tapasztalat szerint

- A turbulencia egymásba ágyazott, hosszú életű örvények egymásra épülő rendszere, *hierarchiája*. Az örvények nemlineáris kölcsönhatásuk miatt idővel instabillá válnak, felbomlanak, de helyükön újak képződnek.
- Az *energiabetáplálás makroszkópikus skálán* történik, és valamilyen $l_0 \sim 1/k_0$ méretű örvényeket hoz létre (k_0 az ilyen örvények hullámszáma). Ha pl. a turbulenciát rács kelti, akkor l_0 a rácsávolság (7.1 ábra). Általában l_0 összemérhető a teljes L lineáris mérettel, de annál néhány nagyságrenddel kisebb is lehet. A betáplált energia a viszkozitás miatt disszipálódik, és ezért bizonyos idő után beállhat egy stacionárius állapot, azaz a fluktuáló mennyiségek statisztikai jellemzői, pl. szórásai időfüggetlenné válnak.
- Az $l \sim 1/k$ méretű örvény *karakterisztikus ideje* az örvény

$$\tau_l = l/v' \sim \frac{1}{kv'} \quad (7.54)$$

körülfordulási ideje. Itt v' az örvény két széle közötti átlagos sebességkülönbség nagysága, azaz a $k \sim 1/l$ hullámhosszhoz tartozó sebességfluktuációk szórása. A v' jellegzetes sebesség tehát az l méret függvénye.

- A viszkozitásból adódó disszipatív *csillapítási idő*, a Navier–Stokes-egyenlet $\nu \Delta \mathbf{v}$ tagjából adódóan minden sebességkomponensre

$$\tau_d = \frac{1}{\nu k^2} \sim \frac{l^2}{\nu}. \quad (7.55)$$

A kétfajta jellegzetes idő hányadosa

$$\frac{\tau_d}{\tau_l} = \frac{lv'}{\nu}, \quad (7.56)$$

mely nem más, mint az l méretű örvény Reynolds-száma a v' sebességfluktuációval képezve. A teljes turbulens folyamat Re Reynolds-számát az energiabetáplálásra jellemző lineáris mérettel definiáljuk, azaz

$$Re \equiv \frac{l_0 v'_0}{\nu}, \quad (7.57)$$

ahol v'_0 az l_0 hullámhosszhoz tartozó sebességfluktuáció. Mivel ez a Reynolds-szám mindig nagy, sok olyan örvény létezik, melyekre $\tau_d \gg \tau_l$.

- Az l_d *disszipációs hossz* az a távolság, ahol a körülfordulási idő és a disszipációs idő azonossá válik:

$$l_d = \frac{\nu}{v'}. \quad (7.58)$$

Az ehhez a távolsághoz tartozó Reynolds-szám egységnyi. Ez a hossz tekinthető a legkisebb örvények méretének. Ezen a skálán igaz, hogy a $\nu \Delta v'$ viszkózus gyorsulás összemérhető a v'^2/l nagyságrendű advektív gyorsulással. A viszkozitás tehát csak az l_d skálán (vagyis a $k_d \sim 1/l_d$ disszipációs hullámszámnál) válik lényegessé. Ennél kisebb távolságokon a mozgási energia hővé alakul, az áramlás lamináris, örvények nincsenek jelen.

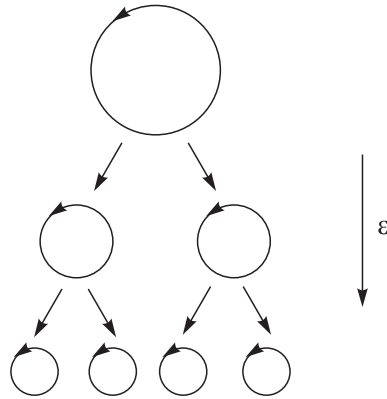
- A $L \gg l \gg l_d$ tartomány belsejében ezért létezik az l örvényméretnek egy széles tartománya, melyben az örvények körbefordulási ideje sokkal kisebb a disszipációs időnél, azaz, melyben az örvények gyakorlatilag ideálisoknak, a folyadék pedig *súrlódásmentesnek* tekinthető. Az ilyen örvényekre az Euler-egyenlet érvényes, és ennek megfelelően a rendszer energiája

megmarad. Az adott l méretű örvények energiája ezért egyszerűen átadódik a más méretű örvényekre. Ennek jellegzetes ideje is a τ_l körülfordulási idő. Ebben a tartományban a mozgási energia különböző méretű örvényeken, veszteség nélkül folyik át. Ez a jelenség az *energiakaszád*, az a hullámszám tartomány pedig, melyben érvényes, az ún. *tehetetlenségi tartomány*.

A felsorolt tulajdonságok, elsősorban az energiakaszád jelensége központi fontosságú a turbulencia megértésében. Az $E(k)$ energiaspektrum alakja a dimenzióra jellemző vonások beépítése után a fentiekből egyszerű megfontolással adódik.

7.7.1 Háromdimenziós turbulencia

A hétköznapi tapasztalat, pl. a csapból gyorsan kiömlő víz megfigyelése is azt sugallja, hogy a térbeli turbulens áramlásokban nagy örvények *kisebbekre* bomlanak (7.10, 7.1 ábra). A pontosabb vizsgálat is alátámasztja, hogy az energia a *nagy örvényekből a kisebbek felé áramlik*.



7.10 ábra: A háromdimenziós turbulenciában a nagy örvények egyre kisebbekre esnek szét. A rajtuk átfolyó ε energiafluxus az l_d disszipációs hosszának megfelelő legkisebb örvényméret eléréséig állandó. Az ábra adott előjelű örvényeket mutat, az ellenkező forgásúak természetesen hasonlóan bomlanak.

Ebben az ún. *direkt* energiakaszádban az energia a kis hullámszámoktól a nagyok felé halad. Mivel azonban a teljes energia megmarad, az időegység alatt átadott energiának, az ún. energiafluxusnak állandónak kell lennie, legalábbis a disszipációs hullámszám $k_d \sim 1/l_d$ eléréséig. Az összenyomhatatlanság miatt tekinthetjük az egységnyi tömegre eső mozgási energia fluxusát is, mert az is állandó. Jelölje ε ezt a fajlagos energiafluxust, melynek mértékegysége m^2/s^3 . Ha az energiabetáplálás a k_0 hullámszámon történik, akkor az annál jóval nagyobb hullámszámokra a turbulencia már homogénnek és izotrópnak tekinthető, és az energia megmarad a k_d disszipációs hullámszám eléréséig. A tehetetlenségi tartomány tehát

$$k_0 \ll k \ll k_d. \quad (7.59)$$

Mivel egy l méretű örvény a sebességfluktuációkból adódó v'^2 energiáját a τ_l körbefordulási idő néhányszorosa alatt adja le, az ε energiafluxus becsülhető mint

$$\varepsilon \sim \frac{v'^2}{l/v'} = \frac{v'^3}{l}. \quad (7.60)$$

A tehetetlenségi tartományban ε állandó, ezért az l méretű örvények sebessége és kiterjedése a

$$v' \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \sim (\varepsilon/k)^{1/3} \quad (7.61)$$

kapcsolatban vannak egymással. A disszipációs hosszt definiáló (7.58) összefüggésbe ezt behelyettesítve $l_d \sim \nu/(\varepsilon l_d)^{1/3}$, s innét

$$l_d \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (7.62)$$

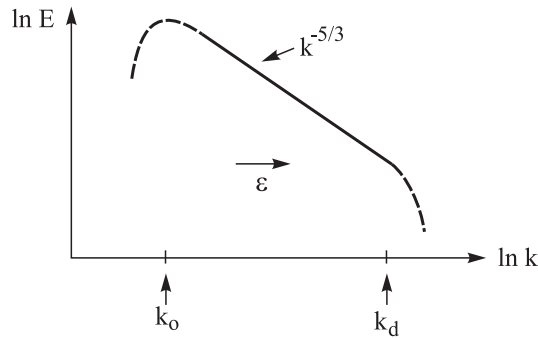
Ez a Kolmogorov-féle hossz, vagy Kolmogorov-mikroskála (A. N. Kolmogorov szovjet matematikus, aki a háromdimenziós turbulencia leírását 1941-ben alkotta meg). Laboratóriumi körülmények között ε értéke $100 \text{ m}^2/\text{s}^3$, s ezzel a disszipációs hossz mind vízben, mind levegőben $0,01 \text{ mm}$ körüli. A légkörben és az óceánban az energiafluxus kisebb (az időskálák nagyobbak), $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^3$, melyhez mm nagyságrendű mikroskála tartozik. Azt látjuk tehát, hogy a disszipáció még makroszkópikus, de nagyon kis távolságokon válik csak lényegessé! Mivel a gerjesztés lineáris mérete legalább 1 m (a környezeti áramlásokban több km is lehet), a (7.59) tehetetlenségi tartomány ennek megfelelően sok nagyságrendet foglal magába.

Az örvények kinetikus energiája (7.61) szerint $v^2 \sim (\varepsilon/k)^{2/3}$, az egységnyi hullámhosszra eső energia pedig v^2/k nagyságrendű. Ennek megfelelően az (7.52)-vel definiált energiaspektrum

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (7.63)$$

Ez a híres *Kolmogorov-spektrum*, melyet a mérések is alátámasztanak² (7.11 ábra). Összehasonlításként érdemes megemlíteni, hogy egy termodinamikai egyensúlyban lévő rendszerben (pl. ideális gázban) a k hullámszámhoz tartozó kinetikus energia k^2 -tel arányos, ezért az $E(k)$ energiaspektrum a hullámszámnak mindenképpen pozitív hatványa. A kapott negatív kitevő azt mutatja, hogy a turbulens áramlás a termikus egyensúlytól igen távol esik.

Az energiaspektrum a betáplálási hullámszám környékén természetesen eltér a fenti hatványalaktól, hiszen ott a turbulencia nem homogén és izotróp. Ugyanígy eltér a $k_d \sim 1/l_d$ Komogorov-hullámszámnál nagyobb tartományban, ahol a disszipáció miatt az energiafluxus már nem állandó.



7.11 ábra: A háromdimenziós turbulencia energiaspektruma. k_0 és $k_d \sim (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ az energiabetáplálási és a disszipációs (Kolmogorov-) hullámszám. A $k^{-5/3}$ hatványviselkedés a $k_0 \ll k \ll k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A tehetetlenségi tartomány hosszát az l_0/l_d hányados jellemzi. A Reynolds-szám (7.57) értékét és az energiafluxus (7.60) kifejezését használva azt kapjuk, hogy

$$\frac{l_0}{l_d} \sim Re^{3/4}. \quad (7.64)$$

²A $-5/3$ -os értéktől alig eltérő kitevővel.

A hossz tehát a Reynolds-szám pozitív hatványával arányos, a tehetetlenségi tartomány tehát a $Re \gg 1$ esetben igen széles (a Reynolds-szám tipikus laboratóriumi értéke 10^6 , környezeti értéke pedig 10^{12}). A disszipációs hossznál kisebb skálán az áramlás egyszerű, ahol újabb örvény már nem keletkezik, ezért az ilyen kis távolságon néhány adat is elég a sebességtér jellemzéséhez. Minden örvény meghatározása újabb adatokat igényel. Ezért $(l_0/l_d)^3$ -nal arányos a turbulencia leírásához szükséges változók száma. A turbulens viselkedés tehát

$$Re^{9/4} \quad (7.65)$$

-nel arányos számú közönséges differenciálegyenlettel írható le, s ez a szám a $Re \rightarrow \infty$ határesetben végtelenhez tart.

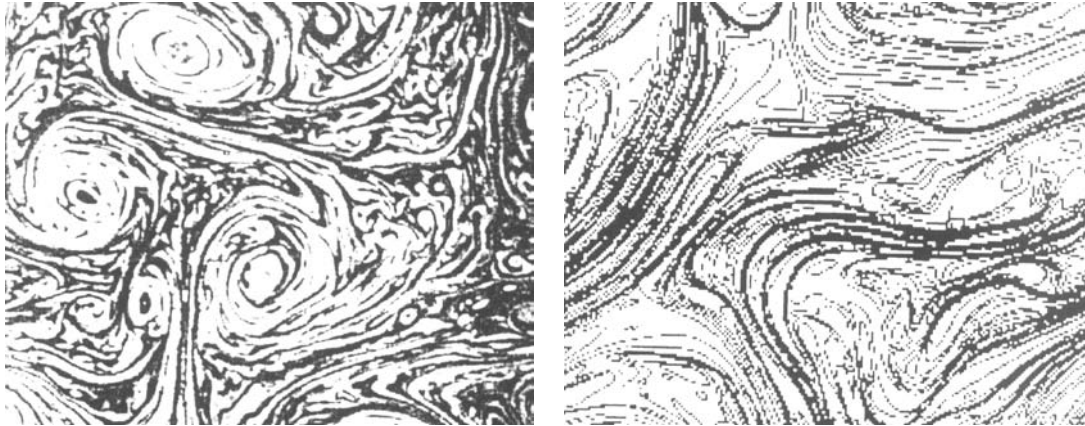
Az örvények körülfordulási ideje tekinthető az adott méretű objektumok *előrejelezhetőségi* idejének is, hiszen néhány körülfordulás után az örvény átadja energiáját és megszűnik. A fentiekből az l hullámhosszhoz tartozó előrejelzési idő

$$\tau_l \sim \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}. \quad (7.66)$$

A nagyobb objektumok hosszabb ideig jelezhetők előre. A légköri $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$ -nel számolva $l = 1\text{m}$ -re 10 s, az 1 km-es skálán pedig 100 s adódik. A planetáris határrétegbeli háromdimenziós turbulencia néhány napra pontos előrejelzése tehát reménytelen. A laboratóriumi érték sokkal rövidebb: az 1 m-es skálán 0,1 s.

7.7.2 Kétdimenziós turbulencia

A kétdimenziós áramlásokban fellépő turbulencia alapvetően különbözik a háromdimenzióstól. Ez jól látható pl. a mozgó szappanhártyában megfigyelt mintázatokban is (7.12 ábra). Ugyanakkor az időjárási helyzetet mutató műholdfelvételek is elsősorban a kétdimenziós turbulencia jellegzetességeit mutatják (7.13 ábra).



(a)

(b)

7.12 ábra: Kétdimenziós turbulencia áramló szappanhártyában. a) Nagy örvények. b) Az örvények közötti szálas szerkezet [Tabeling].

Az eltérés egyik fontos oka, hogy kétdimenzióban az \mathbf{u} síkbeli sebességvektor $\zeta \equiv \text{rot}_z \mathbf{u}$ örvényessége ideális folyadékban a mozgás során *megmarad*. Ebből következik, hogy az *ensztrófiának* nevezett ζ^2 négyzetes örvényesség is megmarad. A új megmaradási tétel miatt a folyadék



7.13 ábra: A Föld sugaránál jóval kisebb skálán a környezeti áramlások a kétdimenziós turbulencia jellegzetességeit mutatják: nagy örvények a Kanári-szigetek mögött a felhőkben kirajzolódó Kármán-féle örvénysorokban (2000. április 24.). A kép jobb oldalán Afrika nyugati partvonala látható [daac.gsfc.nasa.gov/CAMPAIGN_DOCS/OCDST/vanKarman_vortices.html].

számára mintegy kevesebb lehetőség marad, mozgása korlátozottabb. A kétdimenziós turbulencia ezért szelídebb, mint a háromdimenziós. Ez természetesen nem zárja ki azt, hogy a kétdimenziós turbulencia is erősen véletlenszerű és nemlineáris jelenség.

A teljes ensztrófia megmaradásából következik, hogy a ζ' örvényességfluktuációkból alkotott $\overline{\zeta'^2}$ mennyiség, azaz a fluktuációkból adódó átlagos ensztrófia is megmarad ideális folyadékban. A mozgási energia spektrumához hasonlóan definiálható egy $Z(k)$ ensztrófiaspektrum a

$$\overline{\zeta'^2} = \int Z(k)dk \quad (7.67)$$

összefüggéssel. Itt $Z(k)\Delta k$ jelenti a k és $k + \Delta k$ hullámszámtartományba eső perturbációk átlagos ensztrófiáját. Mivel az örvényesség a sebesség deriváltját tartalmazza, az ensztrófia és az \mathbf{u}^2 kétdimenziós sebességfluktuációk $E(k)$ energiaspektruma között fennál a

$$Z(k) = k^2 E(k) \quad (7.68)$$

kapcsolat.

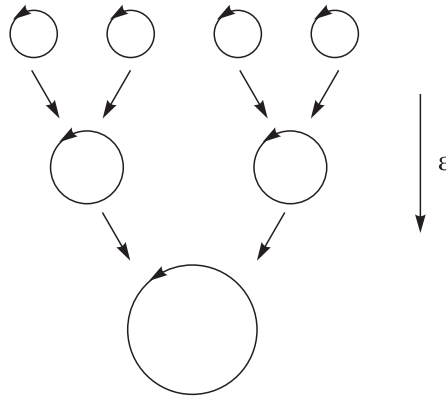
A két mennyiség együttes megmaradása új helyzetet teremt. Tételezzük fel, hogy a k_0 hullámszámnál betáplált energia két hullámszámtartományba, a $k_1 < k_0$ és a $k_2 > k_0$ hullámszámú örvények környékére tevődik át. Meg szeretnénk tudni, hogy melyik örvény energiája és ensztrófiája nagyobb. A megmaradási feltételekből (azonos Δk -kat választva)

$$\begin{aligned} E(k_0) &= E(k_1) + E(k_2), \\ Z(k_0) &= k_0^2 E(k_0) = k_1^2 E(k_1) + k_2^2 E(k_2) = Z(k_1) + Z(k_2). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Ebből

$$E(k_1) = \frac{k_2^2 - k_0^2}{k_0^2 - k_1^2} E(k_2). \quad (7.70)$$

Ha például $k_1 = k_0/2$ és $k_2 = 2k_0$, akkor $E(k_1) = 4E(k_2)$ és $Z(k_1) = Z(k_2)/4$. A $k_1 = k_0/n$ és $k_2 = nk_0$ esetben ($n > 1$) $E(k_1) = n^2E(k_2)$ és $Z(k_1) = Z(k_2)/n^2$. Az energia nagy része tehát a *kisebb* hullámszámok felé, az ensztrófia pedig főleg a *nagyobb* hullámszámok felé adódik át. A kétdimenziós turbulencia alapvető vonása, hogy az örvények nem kisebbekre szakadnak, az energia ezért nem az egyre kisebb örvények felé halad, hanem az örvények spontán módon *összeolvadnak* és ezzel a nagy energiasűrűségű tartományok az egyre nagyobb skálák felé tolódnak. Itt a viszkozitás hatása lényegtelen. Az örvényekben ugyanakkor enyhe a nyírás, a nagy örvények kevés ensztrófiát tartalmaznak. A nyírás az örvények peremén erős, ahol kevés a mozgási energia, és ezek a tartományok az örvények növekedése miatt egyre kisebbekké válnak, miközben ensztrófiájuk nő. Összefoglalva, a *kis örvények nagyobbakká egyesülnek*, míg az örvényesség a köztük levő nyírási tartományra szűkül (7.14 ábra). Ezért jellemző a kétdimenziós turbulenciára a nagy örvények és a köztük levő szálas szerkezetek megjelenése, mely szappanhártya kísérletekben is jól megfigyelhető (7.12b ábra).



7.14 ábra: A kétdimenziós turbulenciában a kis örvények egyre nagyobbakká olvadnak össze. A rajtuk átfolyó ε energiafluxus állandó. Az ábra adott előjelű örvényeket mutat, az ellenkező forgásúak természetesen hasonlóan egyesülnek.

A kétdimenziós turbulenciában *két* tehetetlenségi tartomány alakul ki, az energiabetáplálási hullámszám két oldalán:

$$1/L \ll k \ll k_0, \quad k_0 \ll k \ll k_d. \quad (7.71)$$

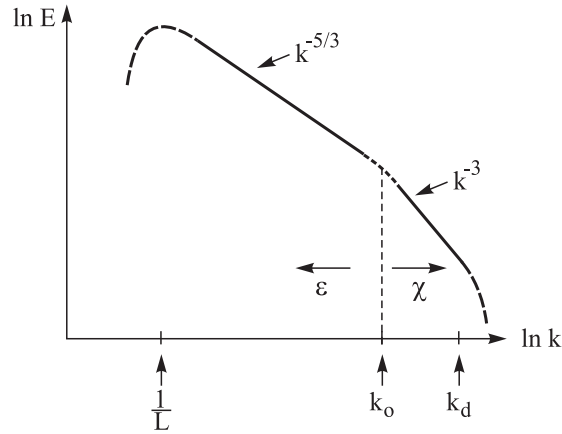
A kisebb hullámszámokhoz tartozóban történik az *inverz energiakaszád*, melynek során az energiafluxus állandó, de az energia most a nagyobb méretek irányába halad. A nagy hullámszámok tartományában az ensztrófia bomlik a nagyobb méretektől a kisebbek irányába, itt egy (direkt) *ensztrófiakaszád* figyelhető meg.

Az inverz energiakaszádhoz tartozó $E(k)$ spektrum ugyanazzal a gondolamenettel határozható meg, mint a háromdimenziós turbulenciában. Ezért (7.63) itt is érvényes, azaz az energiaspektrum kitevője $m = 5/3$, de az inverz energiakaszád a teljes L lineáris méret és az l_0 energiabetáplálási hossz között figyelhető meg (7.15 ábra).

Az ensztrófiakaszád során az ensztrófiaátadás állandó, legalábbis a disszipációs hossz eléréséig, ugyanakkor az energiafluxus elhanyagolható. Jelölje χ az *ensztrófiafluxust*, azaz az időegység alatt átadott ensztrófiát. Laboratóriumi kísérletekben $\chi = 0,1 - 1 \text{ s}^{-3}$, a légkörben pedig $\chi = 10^{-15} \text{ s}^{-3}$.

Mivel az örvényesség karakterisztikus értéke $u'/l \sim 1/\tau_l$, ahol u' a kétdimenziós sebességfluktuációk szórása az l hosszon, és az ensztrófiatartalom a τ_l idő alatt átadódik, írhatjuk, hogy

$$\chi \sim \frac{u'^3}{l^3}. \quad (7.72)$$



7.15 ábra: A kétdimenziós turbulencia energiaspektruma. k_0 és $k_d \sim (\chi/\nu^3)^{1/6}$ az energiabetáplálási, ill. a disszipációs hullámszám. Az energiakaszád $k^{-5/3}$ hatványviselkedése a $1/L \ll k \ll k_0$, az ensztrófiakaszád jellemző k^{-3} alak pedig a $k_0 \ll k \ll k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A tehetetlenségi tartományban χ állandó, ezért az ensztrófiakaszádban

$$u' \sim \chi^{1/3} l \sim \chi^{1/3} k^{-1}, \quad (7.73)$$

azaz a sebesség egészen másképpen függ a mérettől, mint az energiakaszádban. Az energiaspektrum most is u'^2/k nagyságrendű, melyből

$$E(k) \sim \chi^{2/3} k^{-3}. \quad (7.74)$$

Az ensztrófiakaszádban tehát az energiaspektrum jóval meredekebb, kitevője $m = 3$. Ez az eredmény is jól egyezik a kísérleti tapasztalattal. A két kaszkád jelenlétének a felismerése, ill. a spektrumok meghatározása R. Fjortoft norvég meteorológus (1953), ill. R. H. Kraichnan amerikai (1967) és G. K. Batchelor angol (1969) fizikus nevéhez fűződik.

Érdeemes hangsúlyozni, hogy mindkét tehetetlenségi tartomány csak akkor létezik, ha az energiabetáplálás $l_0 \sim 1/k_0$ lineáris mérete jóval kisebb a teljes L hosszánál, és ugyanakkor sokkal nagyobb az l_d disszipációs hosszánál. Attól függően, hogy l_0 értéke mekkora, az egyik vagy másik spektrum elnyomódhat. Ha például l_0 közel esik a teljes L mérethez, akkor az inverz kaszkád nem alakul ki.

A (7.58) disszipációs hosszra most (7.61) alapján $l_d \sim \nu/(\chi^{1/3} l_d)$, s ebből

$$l_d \sim \left(\frac{\nu^3}{\chi} \right)^{1/6}. \quad (7.75)$$

Az atmoszférában a disszipációs hossz 1 – 10 m-nek adódik, a laboratóriumban pedig 1 mm-nek.

Mivel az ensztrófiafluxus a betáplálási skála adataival a $\chi \sim u_0'^3/l_0^3$ összefüggésben van, az ensztrófiakaszád tehetetlenségi tartományának hossza

$$\frac{l_0}{l_d} \sim Re^{1/2}. \quad (7.76)$$

A turbulenciában résztvevő szabadági fokok száma $(l_0/l_d)^2$ -vel becsülve

$$\sim Re. \quad (7.77)$$

Az enyhébb Reynolds-szám függés is arra utal, hogy a kétdimenziós turbulencia szelídebb, mint a háromdimenziós.

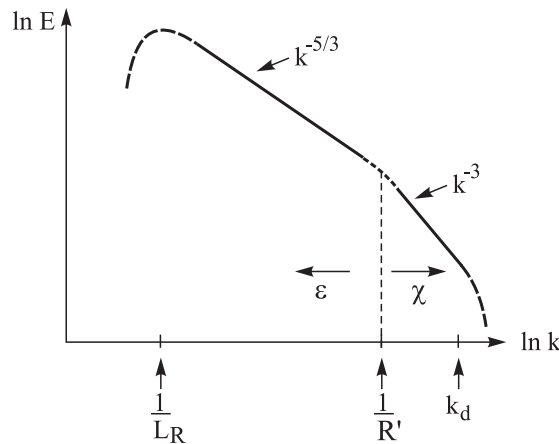
A fentiekből az l hullámszámhoz tartozó előrejelzési idő

$$\tau \sim \chi^{-1/3}, \quad (7.78)$$

mely most független az objektumok hosszától. A laboratóriumi előrejelzési idő 1 s körüli. A légköri ensztrófiafluxus értékét felhasználva néhány napos előrejelzési idő adódik, összhangban a meteorológiai gyakorlattal. A kétdimenziós turbulencia tehát jobban megjósolható, mint a háromdimenziós, és éppen ez a tulajdonság teszi lehetővé a (néhány napra) sikeres időjáráselőrejelzést.

7.7.3 Geosztrofikus turbulencia

A nagyskálájú környezeti áramlásokat a sekélyfolyadék egyenletek (ill. az ebből következő kvázigeosztrofikus egyenlet) jó közelítéssel leírják. Ezekben előfordul ugyan gyenge fel- vagy leáramlás, a dinamika mégis a kétdimenziós viselkedéssel rokon, mert a $q = H(\zeta + f)/h$ potenciális örvényesség megmaradó mennyiség. Turbulens esetben ennek q' fluktuációkból képezhető a $\overline{q'^2}$ potenciális ensztrófia, ill. ennek $Z(k)$ spektruma. A második megmaradó mennyiség jelenléte ugyanazt a megkötést jelenti, mint a kétdimenziós turbulencia esetén. Ezért a környezeti, geosztrofikus turbulenciában is kettős kaszkád lehet jelen: egy inverz energiakaszkád és egy direkt potenciális ensztrófiakaszkád. A megfelelő spektrumok alakjai is ugyanazok: az elsőben $m = 5/3$ az exponens, a másodikban $m = 3$ (7.16 ábra).



7.16 ábra: A geosztrofikus turbulencia energiaspektruma. $k_0 \approx 1/R'$ és $k_d \sim (\chi/\nu^3)^{1/6}$ a baroklin instabilitás energiabetáplálási hullámszáma, ill. a disszipációs hullámszám. Az energiakaszkád $k^{-5/3}$ hatványviselkedése az $1/L_R \ll k \ll 1/R'$ (L_R a Rhines-hossz), az ensztrófiakaszkádot jellemző k^{-3} alak pedig a $1/R' \ll k \ll k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A természetben a geosztrofikus turbulenciát a baroklin instabilitás gerjeszti. Mivel annak jellegzetes hullámhossza az R' belső Rossby sugár, az energiabeviteli távolságskála most $l_0 \sim R'$, vagyis a hullámszám $k_0 \sim 1/R'$. Az ennél kisebb távolságokon az ensztrófiakaszkád zajlik, a nagyobb távolságokon viszont az örvények egyre nagyobbakká történő összeolvadása figyelhető meg.

A görbület, a β -hatás miatt azonban a növekvő örvények nem növekedhetnek a bolygó sugarának eléréséig, hanem a szélességi körök mentén megnyúlnak, és egy kritikus méret elérése után

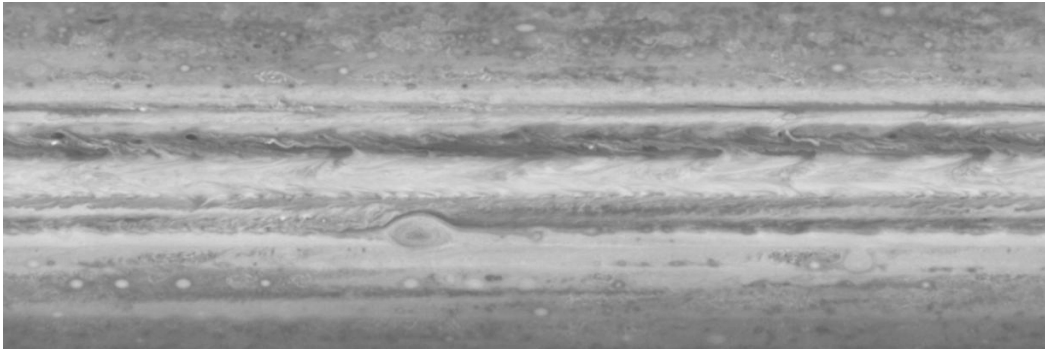
nagy amplitudójú nemlineáris Rossby-hullámokba mennek át. Ez a méret az

$$L_R \equiv \sqrt{\frac{u'}{|\beta|}} \quad (7.79)$$

Rhines-féle skála (1975), ahol $u' \equiv \sqrt{\mathbf{u}'^2}$ a kétdimenziós sebesség szórása³.

Az l méretű örvény $k \sim 1/l$ hullámszámával kialakuló, $|\omega_0| = \beta/k$ frekvenciájú x -irányban haladó, zárt felszínű Rossby-hullám (l. (3.35)) periódusideje $T \sim 1/(l\beta)$. Amennyiben ez sokkal nagyobb az örvény $\tau_l \sim l/u'$ élettartamánál, akkor nincs idő Rossby-hullámok keltésére. Ha viszont $T < \tau_l$, akkor a nagy turbulens örvényekből Rossby-hullámok válnak le. Ennek feltétele $l > L_R$. A Rhines-skála az a legkisebb hullámhossz, mellyel Rossby-hullámok megjelenhetnek. A turbulens energia tehát az L_R -nél nagyobb skálán hullámkeltésre fordítódik, azaz ott az energia kicsatolódik a turbulenciából. Az inverz kaszkád tehát az $1/L_R$ hullámszámnál *megszűnik*.

A geosztrofikus turbulenciára az egészen nagy skálán a szélességi körök mentén elnyúló hullámzónák, jetek jellemzők, melyek vízszintes kiterjedése L_R (7.17 ábra). Ezzel a tulajdonsággal összhangban vannak az óriásbolygók, a Jupiter vagy a Szaturnusz atmoszférájának felső, néhányszor 10 km vastagúnak becsült aktív felső rétegében megfigyelhető zonális jetek. A Jupiter esetében közepes szélességeken a β -paraméter $\beta_J = 2\Omega_J \sin(\pi/4)/R_F = 2 \cdot 10^{-12} \text{ 1/(ms)}$. A $u' = 100 \text{ m/s}$ átlagos sebességszórással $L_{R,J} = 7000 \text{ km}$.



7.17 ábra: A Jupiter légkörében megfigyelhető zonális áramlások és a (Föld-méretű) Nagy Vörös Folt a geosztrofikus turbulencia jellegzetességeit mutatják [antwrp/gsf.nasa.gov/apod/ap010215.html].

Ugyanakkor az örvények egyesülési és növekedési tendenciája a Nagy Vörös Folt (7.17 ábra) magyarázatául is szolgálhat: az úgy tekinthető, mint az összeolvadt örvények végállapota (melyből még éppen nem keletkezett Rossby-hullám). Az óriásbolygók atmoszférája tehát a mindkét kaszkádot tartalmazó geosztrofikus turbulencia természetben előforduló példái.

A földi viszonyok között a Rhines-skála a légkörben 1000, az óceánban pedig 100 km nagyságrendű ($u' = 10$ ill. $0,1 \text{ m/s}$ és $\beta = 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$). A belső Rossby-sugar és dimenziótlan számok segítségével a Rhines-skála a következőképpen fejezhető ki:

$$L_R = R' \sqrt{\frac{Fr'^2}{RoBe}}, \quad (7.80)$$

³Az u' helyett a U átlagsebességgel képzett hasonló távolság fellépet már a zonális áramlásokban kialakuló struktúrák jellemző méreteként (l. 3.7, 3.10, 10.1 fejezet)

ahol Fr' az u' -vel képzett belső Froude-szám, Ro a Rossby-szám, Be pedig a dimenzótlan β paraméter. Mivel a Földön $Fr' \sim Ro \sim Be$, a Rhines-féle hossz óhatatlanul a belső Rossby-sugár nagyságrendjébe esik. Ezért az inverz kaszkád nem tud kifejlődni. A légkörben a belső Rossby-sugár amúgyis összemérhető a Föld sugarával, ráadásul a domborzati viszonyok is erős perturbációs szerepet játszanak, így az óriásbolygókra jellemző zonális áramlások nem figyelhetők meg. A földi körülmények között a geosztrofikus turbulenciát az ensztrófiakaszkád dominálja. A nagy örvények, ciklonok, anticiklonok, óceáni gyűrűk a belső Rossby-sugár gerjesztési skáláján kialakulnak, de összeolvadásukra helyhiány vagy a peremfeltételek miatt a Földön nincs mód.

A geosztrofikus turbulencia (a turbulencia többi fajtájával együtt) ma is igen aktívan kutatott terület. Számos kérdés vár még tisztázásra, mint például a belső hullámokkal és azok megtörésével való kapcsolat, vagy a domborzati egyenetlenségek hatása.

II. rész

Kiegészítő olvasmányok

8. fejezet

Forgatott homogén közegek áramlása

8.1 Az örvényvektor egyenlete

A forgatott folyadék Navier-Stokes-egyenlete alapján érdemes levezetnünk az $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot}\mathbf{v}$ örvényvektor időfejlődésére vonatkozót, hiszen abban a nyomás és a külső erő nem jelenik már meg. A $(\mathbf{v}\text{grad})\mathbf{v} \equiv \text{grad}v^2/2 + \text{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ azonosság felhasználásával az (1.23) egyenlet a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{v} - \text{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gz\right) + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (8.1)$$

alakot ölti. Az egyenlet rotációját véve:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \text{rot}[(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{v}] = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.2)$$

Mivel a forgatás $\boldsymbol{\Omega}$ frekvenciája időben állandó, az idő-, és térbeli deriválásakor az örvényvektorhoz hozzáadhatjuk $2\boldsymbol{\Omega}$ -t. Ezért érdemes bevezetni az $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényességet (melyet néha abszolút örvényességnek is hívnak), mint az $\boldsymbol{\omega}$ relatív örvényesség és a $2\boldsymbol{\Omega}$ Coriolis-paraméter összegét:

$$\boldsymbol{\omega}_T \equiv \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}. \quad (8.3)$$

Az örvényességi egyenlet a teljes örvényességre vonatkozó formában jelenik meg:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_T}{\partial t} + \text{rot}[\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{v}] = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}_T. \quad (8.4)$$

Ennek fontos következménye, hogy $\boldsymbol{\omega}_T$ -re minden érvényes, ami a laboratóriumi hidrodinamikában az ottani teljes örvényességre, $\boldsymbol{\omega}$ -ra érvényes volt.

Furcsának tűnhet, hogy $\boldsymbol{\omega}$ -hoz a forgatási szögsebesség kétszerese adódik hozzá. Ennek oka az, hogy $\text{rot}\mathbf{v}$ szemléletes jelentése a folyadékkal merev testként együtt forgó test szögsebességének a kétszerese. (Ha $1/2 \text{rot}\mathbf{v}$ -t tekintenénk örvényességnek, akkor ahhoz csak $\boldsymbol{\Omega}$ adódna hozzá.)

Az $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\text{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\text{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a}\text{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\text{div}\mathbf{a}$ azonosságot és az összenyomhatatlanságot felhasználva:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_T\text{grad})\mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}_T. \quad (8.5)$$

Ebből a relatív örvényvektorra:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\text{grad})\mathbf{v} + 2(\boldsymbol{\Omega}\text{grad})\mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.6)$$

Az (1.30) dimenziótlánítás után:

$$Ro \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = Ro(\boldsymbol{\omega} \text{grad})\mathbf{v} + 2(\mathbf{n} \text{grad})\mathbf{v} + \frac{Ro}{Re} \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.7)$$

A gyors forgatásnak megfelelő $Ro \ll 1$ határesetből egységnyi hidrodinamikai gyorsulásokat feltételezve $(\mathbf{n} \text{grad})\mathbf{v} = 0$ adódik, mely szerint $\partial w / \partial z = 0$. Az (1.48) Taylor–Proudman-tétel tehát következik az örvényvektor dinamikájából is.

A (8.5) alakból leolvasható, hogy ideális folyadékban történő *kétdimenziós* áramlásban az $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényesség megmaradó mennyiség. Ha ugyanis a sebességvektor az (x, y) síkban fekszik, akkor az örvényvektor z irányú, éppúgy mint a forgatás szögsebessége. Ezért az $(\boldsymbol{\omega}_T \text{grad})$ operáció z szerinti deriválást tartalmaz, de ha a sebesség nem függ z -től, akkor ez zérust eredményez. A teljes örvényvektor ζ_T függőleges komponensére ezézt

$$\frac{d\zeta_T}{dt} = \nu \Delta \zeta_T. \quad (8.8)$$

Kétdimenziós súrlódásmentes áramlásban tehát a teljes örvényvektor ζ_T függőleges komponense állandó:

$$\zeta_T \equiv \zeta + 2\Omega = \text{konst.} \quad (8.9)$$

Ez azt jelenti, hogy ha együtt mozgunk a folyadékreszecsékkel, akkor ζ -t időtől függetlennek találjuk. A (2.21) potenciális örvényesség megmaradása ennek a tulajdonságnak a kiterjesztése sekély, s ezért közel kétdimenziós folyadéokra.

Végül megadjuk a (8.8) örvényegyenlet kifejezését az áramlási függvénnyel:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \Delta \psi = \nu \Delta^2 \psi. \quad (8.10)$$

Itt fölhasználtuk, hogy minden síkbeli összenyomhatatlan áramláshoz tartozik egy (1.52) áramlási függvény, melyből az örvényesség a $\zeta = \Delta \psi$ összefüggés alapján kapható meg. A (2.49) kvázigeosztrofikus egyenlet a kétdimenziós örvényegyenlet általánosítása.

8.2 A cirkuláció változása

A hagyományos hidrodinamikában az (8.4), (8.5) típusú egyenletből következik a cirkuláció megmaradása elhanyagolható viszkozitás esetén. Most figyelembe vesszük, hogy nem ω , hanem az $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényesség marad meg. Az $\boldsymbol{\omega}_T$ -hez tartozó teljes Γ_T cirkulációt úgy kapjuk mint $\boldsymbol{\omega}_T$ felületi integrálját. Az viszont kifejezhető a sebesség zárt görbére vett integráljával, a Γ relatív cirkulációval is:

$$\Gamma_T \equiv \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\omega}_T d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{A} + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} ds + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A} \equiv \Gamma + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}. \quad (8.11)$$

Itt \mathcal{A} egy tetszőleges (egyszeresen összefüggő) tartomány a folyadékban, \mathcal{C} az \mathcal{A} perem-görbéje, \mathbf{A} pedig a tartomány $\boldsymbol{\Omega}$ -ra merőleges síkra eső vetületének területe. Egy forgatott ideális folyadékban a Γ_T teljes cirkuláció állandó:

$$\frac{d\Gamma_T}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0. \quad (8.12)$$

Ez a szokásos cirkulációtétel általánosítása forgatott közegre. Egyben azt is megadja, hogy mennyire változik a relatív cirkuláció. Ennek mértéke arányos a forgatás erősségével és az \mathbf{A}

terület időbeli változásával:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2\Omega \frac{dA}{dt}. \quad (8.13)$$

Ez Bjerknes tétele homogén folyadéokra (V. Bjerknes (1862-1951), norvég meteorológus, a meteorológia tudományának egyik megalapítója). Ha a vizsgált kontúr úgy mozog, hogy merőleges vetületének területe csökken, akkor pozitív forgatási irány esetén a Γ cirkuláció nő, és fordítva, összhangban az 1.3 ábra kvalitatív képével. A (8.13) cirkulációtétel tehát a Coriolis-hatás egyik hidrodinamikai következménye.

9. fejezet

A sekélység hatása

9.1 Kvázigeosztrofikus dinamika a sekélyfolyadék egyenletekből

A szabad felszínű sekély folyadék (2.11)-(2.13) egyenletei írhatók, mint

$$\frac{du}{dt} = +2\Omega v - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (9.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u - g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (9.2)$$

$$\frac{d}{dt}(\eta - d) = -H \operatorname{div} \mathbf{u} - (\eta - d) \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (9.3)$$

A lapos aljzathoz, $d = 0$ -hoz tartozó geosztrofikus egyensúlyban a bal oldalak eltűnnek, stationárius áramlás alakul ki. Feltevéseink szerint d és η Rossby-szám rendű, s jelenlétükben lassú időfüggő viselkedés figyelhető meg, melyhez Ro rendű sebességdivergencia tartozik. Ezért az $(\eta - d) \operatorname{div} \mathbf{u}$ tag másodrendűen kicsi és elhanyagolható. Mivel a sebességek időderiváltjai is kicsik, használhatjuk bennük az \mathbf{u} és η közötti (2.24) kapcsolatot. Így az első két egyenlet átrendezésével

$$u = -\frac{g}{2\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{(2\Omega)^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (9.4)$$

$$v = \frac{g}{2\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{(2\Omega)^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (9.5)$$

Ez a sebesség első, nemgeosztrofikus korrekciót is tartalmazó kifejezése, mellyel

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{g}{(2\Omega)^2} \frac{d}{dt} \Delta \eta. \quad (9.6)$$

A mélység (9.3) egyenletébe helyettesítve

$$\frac{d}{dt}(\eta - d - R^2 \Delta \eta) = 0. \quad (9.7)$$

A zárójelben álló kifejezés a Rossby-számmal arányos, ezért használhatjuk a geosztrofikus határesetben érvényes $\eta = (2\Omega/g)\psi$ kapcsolatot (l. (2.25)), mellyel

$$\frac{d}{dt}(R^{-2}\psi - \Delta\psi - \frac{2\Omega}{H}d) = 0. \quad (9.8)$$

A teljes időderiváltban szereplő u , v tényezőket az áramlási függvénnyel kifejezve, a (2.49) kvázigeosztrofikus egyenlethez jutunk. Ez tehát a potenciális örvényesség megmaradásának közvetlen felhasználása nélkül is következik a sekélyfolyadék egyenletekből. A gyorsan forgatott határesetben a teljes egyenletrendszer és a megmaradási tétel ugyanarra a skalár egyenletre vezet.

9.2 Hullámok döntött aljzatú sekély folyadékban

Megvizsgáljuk, milyen lineáris hullámok alakulhatnak ki sekély forgatott folyadékban, ha annak aljzata egyenletes lejtésű az y irányban: $h = \eta + H - \gamma y$ és a γ dőlésszög kicsi. A (2.13) kontinuitási egyenlet a másodrendűen kicsi ηu , ηv tagok elhanyagolása után

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(H - \gamma y)u}{\partial x} - \frac{\partial(H - \gamma y)v}{\partial y} = -(H - \gamma y)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma v - (H - \gamma y)\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (9.9)$$

Mivel γ kicsi, a γy elhanyagolható H mellett, s így a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \gamma v \quad (9.10)$$

lineáris egyenlethez jutunk. A vízszintes sebességkomponesre vonatkozó egyenletek nem függenek a mélységtől, ezért (2.52), (2.53) továbbra is érvényesek. Az $(\mathbf{u}, \eta) = (u_0, v_0, \eta_0) \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$ alakot behelyettesítve ismét (2.55), (2.56)-et kapjuk, de a harmadik egyenlet

$$i\omega_0 \eta_0 = H(ik_x u_0 + ik_y v_0) + \gamma v_0 \quad (9.11)$$

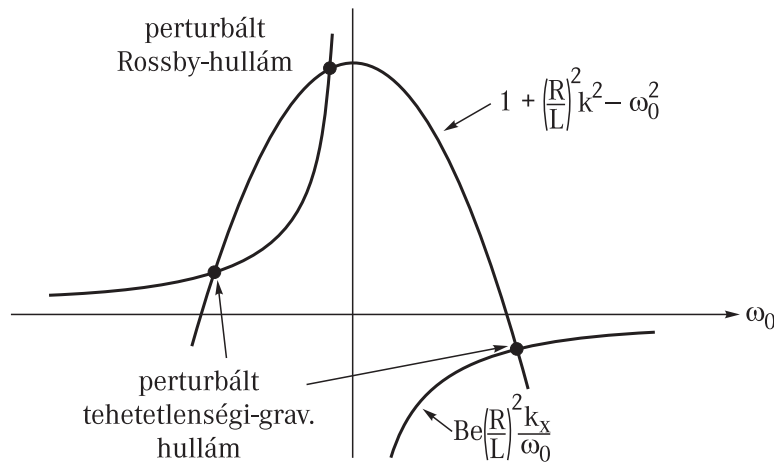
lesz. Nemtriviális megoldás akkor létezik, ha ω_0 -ra fennál a

$$-\omega_0^2 + (2\Omega)^2 + gHk^2 + \frac{\gamma g^2 \Omega}{\omega_0} k_x = 0 \quad (9.12)$$

összefüggés. Ez egy harmadfokú egyenlet, ezért a folyadékban három különböző hullám létezhet. Érdekes a hullámfrekvenciát $2|\Omega|$ egységeiben mérni. A dimenziótlan frekvencia (melynek nagysága a hullám Rossby-száma) kielégíti a

$$-\omega_0^2 + 1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 k^2 = -Be \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{k_x}{\omega_0} \quad (9.13)$$

egyenletet, ahol R a (2.46) Rossby-sugár, Be a (3.18) topografikus paraméter, és k az $1/L$ egységekben mért dimenziótlan hullámszám. A megoldás legegyszerűbben a jobb és a bal oldal grafikus ábrázolásával szemléltethető.



9.1 ábra: Hullámok nem nagyon gyorsan forgatott lejtős aljzatú sekély folyadékban; a (9.13) egyenlet grafikus megoldása. A parabola a bal oldal, a hiperbola a jobb oldal ω_0 -függését mutatja rögzített k, k_x mellett. A metszéspontok adják a lehetséges diszperziós relációkat.

Lejtős aljzat, azaz $Be \neq 0$ esetén nem kapjuk vissza a tehetetlenségi-gravitációs hullámok (2.59) diszperziós relációját, mert γ értéke módosítja azt. Enyhe meredekség, $Be \ll 1$ esetén azonban nagyságrendi szétválás figyelhető meg a megoldásokban. Ilyenkor ugyanis létezik megoldás egységnyi nagyságrendű ω_0 -lal, s ekkor a jobb oldal kicsi. Az ω_0 tengelyhez közeli két metszéspont közel van a parabola tengelymetszeteihez, melyek (2.59)-nak felelnek meg. Ugyanehhez az esethez tartozik egy 1-nél sokkal kisebb ω_0 is, mely Be rendű, úgyhogy a bal oldalon ω_0^2 csak kis korrekciót jelent. Ez a megoldás közel esik a Rossby-hullámok (2.45) diszperziós relációjához. Nagyobb meredekség esetén a lejtős aljzat által módosított tehetetlenségi-gravitációs hullámokat, ill. a tehetetlenségi mozgás által perturbált Rossby-hullámokat kapunk. Túl nagy meredekség mellett viszont, amikor $Be \approx 1$ ez a megkülönböztetés már nem értelmes: még a leghosszabb periódusidejű megoldást sem lehet Rossby-hullámnak tekinteni, mert dimenziótlan frekvenciája egységnyi.

9.3 Szolitonok és a KdV-egyenlet

A szolitonokat az ún. Korteweg-de Vries-egyenlet, röviden a KdV-egyenlet írja le (melyet D. J. Korteweg és G. de Vries 1895-ben vezetett le). Ez az $\eta(x, t)$ felszíni alak dinamikáját adja meg a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \left[c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2H} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] = 0 \quad (9.14)$$

formában, ahol a felső előjel a jobbra haladó hullámhoz tartozik, és $c_0 = \sqrt{gH}$ a lineáris hullámok (2.60) terjedési sebessége. A sebességeloszlás vezető rendben az

$$u(x, t) = \pm \frac{g}{c_0} \eta(x, t) \quad (9.15)$$

összefüggésből kapható.

Tekintsük először a KdV-egyenlet lineáris változatát, melyben a harmadik tagot elhagyjuk. Az $\eta = \eta_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ helyettesítéssel az

$$\omega_0 = \pm c_0 k_x \left(1 - \frac{1}{6} (k_x H)^2 \right) \quad (9.16)$$

diszperziós relációt kapjuk. Ez eltér a nem forgatott sekély folyadéokra jellemző $\omega_0 = \pm c_0 k_x$ eredménytől. A zárójelben megjelenő tag mutatja, hogy a KdV-egyenletben az ε mélységi arányban (melynek most $\varepsilon = k_x H$ felel meg) nemcsak vezető rendig megyünk el, hanem megtartjuk az első lényeges korrekciót is. Mivel az eljárás részletes bemutatása hosszabb terjedelmet igényelne, a KdV-egyenlet levezetését nem adjuk meg, csak eredményként értelmezzük, s tulajdonságait tárgyaljuk. A KdV-egyenlet lineáris hullámai tehát *diszperzívek*, melyekben egy kezdeti hullámcsomag szétfolyik, ahogyan az 1.17 ábra mutatja.

A KdV-egyenlet nemlineáris (harmadik) tagja az advektív gyorsulás ($\mathbf{u} \text{grad}$) \mathbf{u} következménye és azért jelenik meg, mert véges amplitudójú hullámokat tanulmányozunk, melyekben a sebesség, ill. a felületi alakváltozás nem infinitezimálisan kicsi. Tekintsük most a KdV-egyenletet a diszperziót okozó utolsó tag nélkül. A

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \left[c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2H} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0 \quad (9.17)$$

egyenlet rendelkezik azzal az érdekes tulajdonsággal, hogy az

$$\eta(x, t) = F \left(x \mp c_0 \left(1 + \frac{3\eta}{2H} \right) t \right) \quad (9.18)$$

kifejezés bármilyen $F(x)$ függvényalakkal megoldása. Ez a nemlineáris egyenlet *hullámtörést* ír le, ugyanis a nagyobb amplitúdójú hullámok gyorsabban mozognak, s ezért egy kezdeti kidudorodás a haladás irányában való feltorlódáshoz, s azután átcsapáshoz vezet, ahogy a sekély partra kifutó vízhullámokon is megfigyelhető (9.2 ábra).



9.2 ábra: A hullámtörés mechanizmusa: a kezdeti egyszerű felületi kidudorodás aszimmetrikussá válik, s a hullámmaximum egy idő után megelőzi a hullám elejét. Ez az instabil állapot a hullám megtörését eredményezi. Az ábra három egymást követő időpontbeli állapotot mutat.

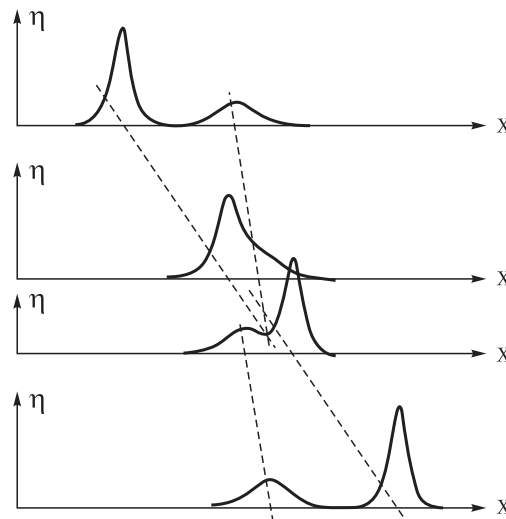
A teljes KdV-egyenletben mind a diszperziót, mind a nemlinearitást kifejező tag jelen van. A végés η_0 hullámmaximum miatt a nemlinearitásból adódó kompaktságra törekvés és a diszperzió miatti szétfolyási tendencia egymással verseng, s végeredményben közel kiegyensúlyozza egymást: a nemlineáris tagban szereplő η/H dimenziótlan amplitudó ugyanolyan (ε^2) rendű, mint a diszperzív korrekció. A szolitonok létezése tehát annak tulajdonítható, hogy enyhén diszperzív közegben a gyenge nemlinearitás éppen kompenzálhatja a diszperzió hatását. A KdV-egyenlet ezt az egyensúlyt fejezi ki.

A (9.14) egyenlet jobbra haladó szolitonmegoldása

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0}{\operatorname{ch}^2 [(x - ct)/l]} \quad (9.19)$$

alakú, ahol (2.66) és (2.67) a szoliton sebessége és félszélessége. A balra haladó szolitonhullámban $-ct$ helyett ct áll.

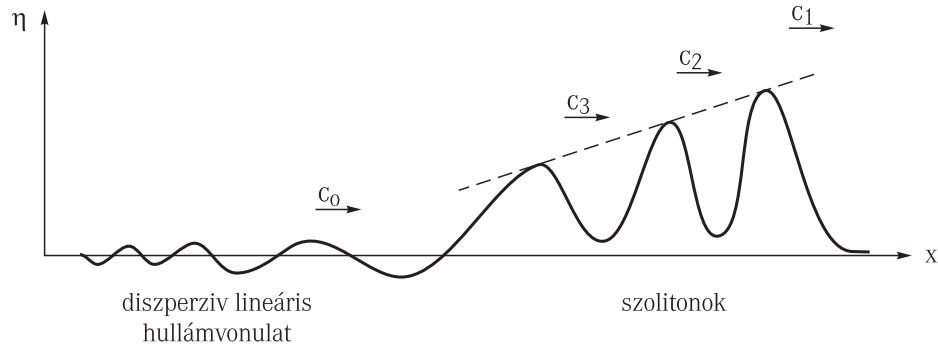
Az alábbiakban összefoglaljuk a KdV-egyenlet megoldásainak további fontos tulajdonságait.



9.3 ábra: Két szoliton kölcsönhatása. Mindkét szoliton jobbra halad az x tengely mentén, ezért a nagyobb utóléri a kisebbet, s kétszoliton állapotba kerülnek. Ennek felbomlása után elegendő hosszú idővel eredeti alakjuk és sebességük helyreáll. Az egymás alatti ábrák egyre későbbi időpontoknak felelnek meg. A szaggatott vonalak a kezdeti és végállapot sebességének megfelelő mozgás pályáját mutatják. Az ütközés pillanatában ezek nem esnek egybe, mely mutatja, hogy fáziseltolódás történt.

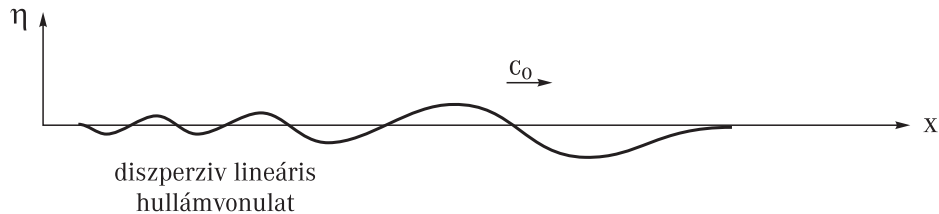
(A) Két szoliton találkozáskor átfed, kölcsönhat, s egy bonyolult kétszoliton alakot vesz fel (mely szintén egzakt megoldása a KdV-egyenletnek). Véges idő után azonban különválnak, s miután elegendően eltávolodtak, visszanyerik eredeti alakjukat, s ezért sebességüket is. A kölcsönhatás egyedüli maradványa egy fázistolás: a nagyobb szoliton kissé előre, a kisebb kissé hátra tolódik ahhoz képest, ahol kölcsönhatás nélkül lettek volna. (9.3 ábra). A fázistolás jól látszik akkor is, ha az (x, y) síkon mozgó kétdimenziós szolitonok találkoznak¹. Az átfedő részen jól megfigyelhető a fázistolás (l. 2.24 ábra).

(B) Elegendően lokalizált kezdeti felszíni kidudorodásból mindig kialakul legalább egy szoliton. Magasabb kidudorodás esetén több, de mindig véges számú szoliton jön létre, melyek mind különbözőek. Az eltérő sebességek miatt a több szolitonból álló vonulatok előbb-utóbb nagyság szerint rendeződnek, a legnagyobb vezet a sort. Ekkor már mindegyik alakja (9.19) típusú, s a maximumok burkolója egy egyenes metén fekszik. A szolitonvonulatot rendszerint egy kis amplitudójú hullámvonulat követi. Mivel ennek diszperziós relációja (9.16), csak a leghosszabb ($k_x \approx 0$) hullám halad c_0 sebességgel, a többiek ennél is lassabban. A lineáris hullámvonulat tehát egyre jobban lemarad (9.4 ábra).



9.4 ábra: Általános kezdeti kidudorodásból kialakuló hullámvonulat elegendően hosszú idő eltelte után (a függőleges skála torzított). A sort a legnagyobb szoliton vezet, a többiek (mind más magasságú) nagyságrendben követik, s a kis amplitudójú hullámvonulat zárja. Ez egyre jobban szétfolyik, s lemarad a szolitonoktól. Az utóbbiak burkulója (szaggatott vonal) mindig egyenes.

(C) Kezdeti felszíni behorpadás ($\eta(x, 0) < 0$) esetén szolitonok *nem* keletkeznek. Negatív szoliton tehát nem létezik. Ekkor csak a kis amplitudójú lineáris hullámvonulat alakul ki (annak amplitudója időben csökken), mely a c_0 sebességnél nem haladhat gyorsabban (9.5 ábra).



9.5 ábra: Általános kezdeti behorpadásból kialakuló hullámvonulat. Szolitonot nem tartalmazhat, csak kis amplitudójú, szétfolyó hullámok jelennek meg.

A (B), (C) tulajdonságok megérthetők abból az érdekes kapcsolatból, mely a KdV-egyenlet által leírt nemlineáris folyamat és a kezdeti $\eta(x, 0)$ felületalak által definiált kvantummechanikai

¹A szolitonok síkbeli mozgását a $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + 6f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ Kadomcev–Petviasvili-egyenlet írja le.

szórásprobléma között fennáll. A szolitonok paraméterei leolvashatók a $-\eta(x, 0)$ görbe, mint potenciálvölgy kötött állapotainak ismeretében, míg a kis amplitudójú hullámok a szabad állapotoknak felelnek meg. Ennek pontos megfogalmazásához érdemes áttérni az

$$f(r, \tau) = \frac{3}{2H}\eta(x, t) \quad (9.20)$$

új dimenziótlan felszíni formára, ahol

$$r \equiv \frac{x - c_0 t}{H}, \quad \tau \equiv \frac{c_0 t}{6H} \quad (9.21)$$

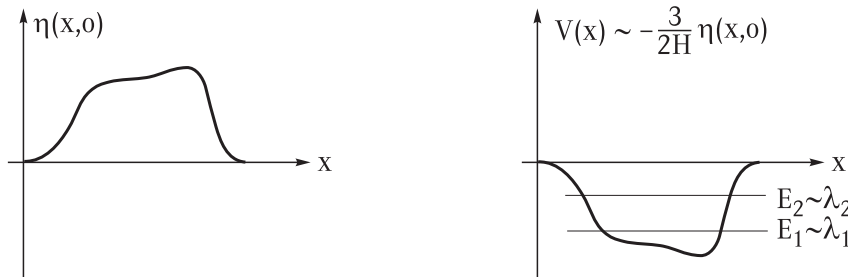
a c_0 sebességgel mozgó koordinátarendszerbeli dimenziótlan távolság, ill. a dimenziótlan idő. (A $3/2$ és 6 -os faktorok használatát csak az eredmény áttekinthetőbb alakja indokolja). Így a

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} = 0 \quad (9.22)$$

dimenziótlan KdV-egyenletre jutunk. Az ún. inverz szórási transzformáció segítségével megmutatható, hogy az $f(r, 0)$ kezdeti alakhoz tartozó szolitonok számát és adatait a

$$-\frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - f(r, 0)\Psi(r) = \lambda \Psi(r) \quad (9.23)$$

egyenlet kötött állapotai határozzák meg. Ez a $-f(r, 0)$ potenciálvölgyben mozgó részecske dimenziótlan Schrödinger-egyenlete, melynek sajátenergiája λ . A kötött állapotokhoz negatív sajátértékek tartoznak (l 9.6 ábra)².



9.6 ábra: A kezdeti felszíni alak (bal oldal) és a kvantummechanikai sajátértékprobléma (jobb oldal) kapcsolata. A kezdeti felszínalak ellentettjének megfelelő potenciálgödör kötött állapotainak sajátenergiái határozzák meg a szolitonok adatait (pl. a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ dimenziótlan amplitudókat).

A kialakuló szolitonok N száma azonos a kötött állapotok számával. Az n -edik kötött állapot λ_n sajátértékével az n -edik szoliton alakja az

$$f_n(r, \tau) = \frac{2|\lambda_n|}{\text{ch}^2\left(\sqrt{|\lambda_n|}(r - 4|\lambda_n|\tau - r_n)\right)}, \quad (9.24)$$

$n = 1, \dots, N$, dimenziótlan alakban adható meg. Itt r_n a szoliton fázisa. A sajátenergia az amplitudót, a sebességet és a szélességet is meghatározza. Szoliton tehát csak olyan kezdőfeltételekhez

²A $V(x)$ potenciálban mozgó m tömegű részecske E energiához tartozó sajátértékegyenletéből a fenti alakot az $r = x/H$ dimenziótlan távolság és a $\hbar^2/(2mH^2)$ egységekből mért energiák ($-f(r, 0) = 2mH^2V(rH)/\hbar^2$ és $\lambda = 2mH^2E/\hbar^2$) használatával kapjuk.

tartozhat, melyeknek potenciálgödör felel meg, mert potenciálhegy esetén nem létezik kötött állapot.

A dimenziós alakra áttérve azt kapjuk, hogy amikor a szolitonok már jól elkülönülnek, akkor alakjuk

$$\eta_n(x, t) = \frac{4|\lambda_n|H}{3\text{ch}^2\left(\sqrt{|\lambda_n|/H^2}(x - c_n t - r_n H)\right)}. \quad (9.25)$$

Az n -edik szoliton tehát

$$c_n = c_0 \left(1 + \frac{2}{3}|\lambda_n|\right) \quad (9.26)$$

sebességgel halad. Mivel ez arányos az amplitudóval, a szolitonok burkolója minden pillanatban egyenes.

Laboratóriumi körülmények között szolitonot gyakran egy hosszú kád végében keltenek egy, az átlagos vízszintnél magasabbra töltött rekesz falának kihúzásával. (Az eddigiekből világos, hogy egy alacsonyabb vízszintű zsilip megnyitásával szoliton nem keletkezik.) A kezdeti felszínalak ilyenkor jó közelítéssel vízszintes, ezért a kezdőfeltétel egy derékszögű potenciálgödört definiál. Mivel az elmélet nagy kiterjedésű közegre vonatkozik, ki kell használnunk, hogy a kád függőleges fala szimmetriatengely. Ezért, ha a zsilip vízszintes mérete b , akkor a gödör szélességét dimenziótlan egységben $2b/H$ -nak kell tekinteni, s ha a szintemelkedés h_0 , akkor a potenciálgödör mélységét $h_0/2$ -vel kell meghatározni. A kvantummechanikából ismert, hogy a b/H félszélességű, $-u_0$ dimenziótlan mélységű gödörben³ a kötött állapotok száma $[\sqrt{u_0}2b/(\pi H)] + 1$, ahol a szögletes zárójel az egészrészt jelöli. A h_0 szintemelkedésű b szélességű zsilip kinyitásakor tehát H mélységű folyadékban

$$N = \left[\sqrt{6 \frac{h_0}{H} \frac{b}{\pi H}} \right] + 1 \quad (9.27)$$

szoliton keletkezik.

A KdV-egyenlet által kifejezett egyensúly nemcsak az eddig vizsgált jelenségre érvényes, hanem minden egydimenziós gyengén diszperzív és nemlineáris hullámra, kis viszkozitású közegben. Így a KdV-egyenlet írja le a rétegzett folyadékokban kialakuló belső szolitonokat is (l. 7.15 fejezet).

³A $-V_0$ mélységű, a félszélességű potenciálgödörbeli kötött állapotok száma $\left[\sqrt{2ma^2V_0/\hbar^2} \right] + 1$.

10. fejezet

A görbület hatása

10.1 Nyugati peremáramlatok a kvázigeosztrofikus egyenletből

Kvázigeosztrofikus közelítésben a potenciális örvényesség megmaradását kifejező hidrodinamikai egyenlet stacionárius változata egyenletes aljzat és vízszintes felszín esetén (3.51) alapján

$$U \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad (10.1)$$

ahol ψ' az $u_0 = U, v_0 = 0$ zonális háttéráramlástól való eltérést írja le. Itt a nemlineáris tagokat elhagytuk, de utólag meggyőződhetünk róla, hogy ennek az egyenletnek megtalált megoldása az egzakt (3.58) nemlináris egyenlet megoldása is. A teljes áramlási függvény $\psi = \psi' - Uy$.

Az eltérést leíró ψ' -nek el kell tűnnie $x \rightarrow \infty$ -re, s a part mentén érvényes $u \equiv 0$ peremfeltétel akkor teljesül, ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0, \quad \text{vagyis} \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y} \Big|_{x=0} = U. \quad (10.2)$$

Keressük ezért a megoldást a

$$\psi'(x, y) = U y g(x) \quad (10.3)$$

alakban, ahol $g(0) = 1$ és $g(\infty) = 0$. A (10.1) -ből g -re kapott differenciálegyenlet $g''' = -(\beta/U)g'$. Ennek kívánt megoldása $g(x) = \exp(-x/\Delta)$, ahol Δ a (3.55) karakterisztikus hosszúság ($U/\beta < 0$). A teljes áramlási függvény ezért

$$\psi = -U y (1 - e^{-x/\Delta}), \quad (10.4)$$

melyből a két sebességkomponens

$$u = U(1 - e^{-x/\Delta}), \quad v = -U \frac{y}{\Delta} e^{-x/\Delta}. \quad (10.5)$$

Az exponenciális lecsengés miatt a háttéráramlástól való eltérés csak a part körüli néhányszor Δ vastagságú rétegben jelentős, ahol észak-déli áramlás alakul ki, mely az $x = y = 0$ torlópontról távolodva erősödik $|y|$ -kel. Ez azonban nem vezet a vastagság szélesedéséhez.

A potenciális örvényesség a mozgás során valóban állandó. Az örvényesség ugyanis $\zeta = \Delta \psi = -\beta y \exp(-x/\Delta)$, azaz $\zeta + \beta y = \beta y (1 - \exp(-x/\Delta)) = -\psi \beta / U$. Mivel az áramvonalak mentén ψ állandó, a teljes örvényesség is az.

Ha az áramlás a parttól elfelé irányul, azaz $U/\beta > 0$, akkor a Δ paraméter helyett a λ_c hullámhossz (3.41) jelenik meg. Az áramlási függvény és a sebességkomponensek:

$$\psi = -U y \left[1 - \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda_c} \right) \right], \quad (10.6)$$

$$u = U \left[1 - \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda_c} \right) \right], \quad v = U \frac{2\pi y}{\lambda_c} \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda_c} \right). \quad (10.7)$$

Érdekes megfigyelni, hogy a zonálisra merőleges v sebesség y -nal erősödik. Ez kvalitatíven megfelel a Golf-áramlat azon tulajdonságának, hogy északi peremén a meanderezés erősebb, ott könnyebben szakadnak le gyűrűk.

10.2 Egyenlítői dinamika

10.2.1 Az egyenlítői β -sík és Rossby-sugár

Az Egyenlítőn ($\varphi = 0$) az f Coriolis-paraméter (3.4) szerint eltűnik. Az $f \sim y$ lineáris közelítés a 10 fokos szélességig néhány százalékos hibával érvényes. Azt írhatjuk tehát, hogy az Egyenlítő környékén (az $y_0 = 0$, x_0 tetszőleges origójú koordinátarendszerben) a Coriolis-paraméter

$$f = \beta_E y, \quad (10.8)$$

ahol

$$\beta_E \equiv \pm \frac{2\Omega_F}{R_F} = \pm 2,3 \cdot 10^{-11} 1/(\text{ms}) \quad (10.9)$$

az ún. egyenlítői β -paraméter, s az alsó előjel a déli félgömbre vonatkozik. A vízszintes síkbeli sebesség a sekélyfolyadék egyenletek szerint

$$\frac{du}{dt} = \beta_E y v - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (10.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta_E y u - g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (10.11)$$

s a (9.3) kontinuitási egyenlet változatlan alakban érvényes. Az egyenlet matematikai struktúrájában új vonás, hogy linearizált változata nem állandó együtthatós.

Egyszerűen megbecsülhető annak a sávnak az R_E távolsága, melyen kívül az f_0 -közelítés már érvényes lehet, azaz ahol már visszatérhetünk az eddig vizsgált mérsékeltégövi hidrodinamikához. E tartományon kívül a (3.13) Rossby-sugár már nyilván értelmezhető, s R_E az a karakterisztikus hossz, melyre a Rossby-sugár megegyezne az Egyenlítőtől mért távolsággal: $R_E = \sqrt{gH}/(|\beta_E|R_E)$. Ebből

$$R_E \equiv \frac{(gH)^{1/4}}{|\beta_E|^{1/2}} = \sqrt{\frac{c_0}{|\beta_E|}}, \quad (10.12)$$

ahol $c_0 = \sqrt{gH}$ a nem forgatott sekély folyadék hullámsebessége. Az R_E távolságot szokás egyenlítői Rossby-sugárnak nevezni. Az Egyenlítőhöz R_E -nél közelebb eső szélességeken a sekély folyadék egyenletek (10.10), (10.11) alakja használandó. Az egyenlítői β -paraméter értékével R_E nagysága 3000 km-nek adódik az óceánban. A rétegzettség ezt az értéket egy nagyságrenddel csökkenti, mellyel R_E 2 – 3 foknyi szélességeknek felel meg.

10.2.2 Egyenlítői Kelvin-hullámok

Az egyenlítői sekélyfolyadék egyenleteknek létezik olyan lineáris hullám megoldása, mely észak-déli sebességgel nem jár, tehát mintha az Egyenlítő merev falként viselkedne az ilyen

mozgások szempontjából. A hullámot x irányban haladó síkhullámnak feltételezve, a megoldást $(u, v, \eta) = (u_0(y), 0, \eta_0(y)) \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban keressük, ahol az amplitudók y -függése egyelőre határozatlan. A vízszintes aljzatú közegben a H átlagos mélység körül linearizált (10.10), (10.11), (9.3) egyenletekbe helyettesítve az

$$i\omega_0 u_0 = ik_x g \eta_0, \quad (10.13)$$

$$\beta_E y u_0 = -g \eta_0', \quad (10.14)$$

$$i\omega_0 \eta_0 = ik_x H u_0 \quad (10.15)$$

összefüggéseket kapjuk, ahol a vessző az y szerinti deriválást jelöli. Az első és harmadik egyenletből: $\omega_0^2 = g H k_x^2$, az elsőből $u_0 = k_x g \eta_0 / \omega_0$. Ezeket a másodikba helyettesítve $\eta_0' = -(\beta_E k_x / \omega_0) y \eta_0$. Ennek megoldása y^2 -ben exponenciális függvény. Fizikailag értelmes, az Egyenlítőől távolodva lecsengő megoldást csak akkor kaphatunk, ha β_E és ω_0 előjele azonos. Ebből

$$\omega_0 = \pm c_0 k_x, \quad (10.16)$$

ahol a negatív előjel továbbra is a déli féltékére vonatkozik, és

$$\eta_0 \sim e^{-y^2/(2R_E^2)}. \quad (10.17)$$

A hullám tehát a szokásos Kelvin-hullámokhoz hasonlóan lecseng, éppen az R_E egyenlítői Rossby-sugár távolságán, de a lecsengés most négyzetesen függ az y távolságtól. Az ilyen egyenlítői Kelvin-hullám *mindkét féltéken keletre halad*, s mivel nem diszperzív, energiája is ebbe az irányba halad.

10.2.3 Egyenlítői Poincaré- és Rossby-hullámok

Ha nem tesszük fel, hogy az észak-déli sebesség eltűnik, a linearizált (10.10), (10.11), (9.3) egyenletek megoldása kereshető az $(u, v, \eta) = (u_0(y), v_0(y), \eta_0(y)) \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban, ahol az amplitudók y -függése most is egyelőre határozatlan. A vízszintes aljzatú közegben a H átlagos folyadékvastagság körül linearizálva az

$$i\omega_0 u_0 - \beta_E y v_0 = ik_x g \eta_0, \quad (10.18)$$

$$i\omega_0 v_0 + \beta_E y u_0 = -g \eta_0', \quad (10.19)$$

$$i\omega_0 \eta_0 + H v_0' = ik_x H u_0 \quad (10.20)$$

egyenleteket kapjuk. A harmadikból

$$\eta_0 = \frac{H}{\omega_0} (k_x u_0 + i v_0'). \quad (10.21)$$

Ezt (10.18)-be helyettesítve

$$u_0 = -i \frac{\beta_E \omega_0 y v_0 - c_0^2 k_x v_0'}{\omega_0^2 - c_0^2 k_x^2}. \quad (10.22)$$

Itt fel kell tennünk hogy $\omega_0^2 \neq c_0^2 k_x^2$. Ezt (10.21)-ba helyettesítve, a felszíni alak amplitudóját is kifejezzük az y irányú sebességgel:

$$\eta_0 = -i H \frac{\beta_E k_x y v_0 - \omega_0 v_0'}{\omega_0^2 - c_0^2 k_x^2}. \quad (10.23)$$

Mindez (10.19) alapján a

$$-v_0'' + \frac{y^2}{R_E^4} v_0 = \left(\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\beta_E k_x}{\omega_0} - k_x^2 \right) v_0 \quad (10.24)$$

megszorítást jelenti a v_0 amplitudóra. Ha a távolságot R_E egységekben mérjük és mindkét oldalt osztjuk 2-vel, akkor

$$-\frac{1}{2} v_0'' + \frac{1}{2} y^2 v_0 = \frac{R_E^2}{2} \left(\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\beta_E k_x}{\omega_0} - k_x^2 \right) v_0. \quad (10.25)$$

Ez a harmonikus oszcillátor Schrödinger-egyenlete¹. Mivel lecsengő megoldásokat keresünk, a peremfeltétel az, hogy v_0 -nak $|y| \rightarrow \infty$ esetén el kell tűnnie. Ezzel az analógia teljes: a jobb oldalon a v_0 előtt fellépő konstansnak a harmónikus oszcillátor dimenziótlan sajátenergiájának kell lennie. Ez az n kvantumszámú állapotban $n + 1/2$. Az egyenlítői hullámok tehát az $n = 0, 1, \dots$ természetes számokkal megkülönböztethetők. Az n -edik hullám diszperziós relációját az

$$\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\beta_E k_x}{\omega_0} - k_x^2 = (2n + 1) R_E^{-2} \quad (10.26)$$

egyenlet határozza meg. Az ehhez tartozó $v_0(y)$ amplitudó a kvantummechanikai analógai alapján

$$v_0(y) = e^{-y^2/(2R_E^2)} H_n \left(\frac{y}{R_E} \right), \quad (10.27)$$

ahol $H_n(z)$ az n -edik Hermite-polinom.

Az $n = 0$ indexű esetet kivéve a hullámok két családra bomlanak. Egyikükben a frekvencia sokkal nagyobb β_E/k_x -nél. Ekkor a β_E -vel arányos tag a diszperziós relációban elhanyagolható,

$$\omega_0^2 = \frac{(2n + 1)c_0^2}{R_E^2} + gHk_x^2 = (2n + 1)c_0|\beta_E| + c_0^2 k_x^2 = c_0|\beta_E|(1 + 2n + (R_E k_x)^2). \quad (10.28)$$

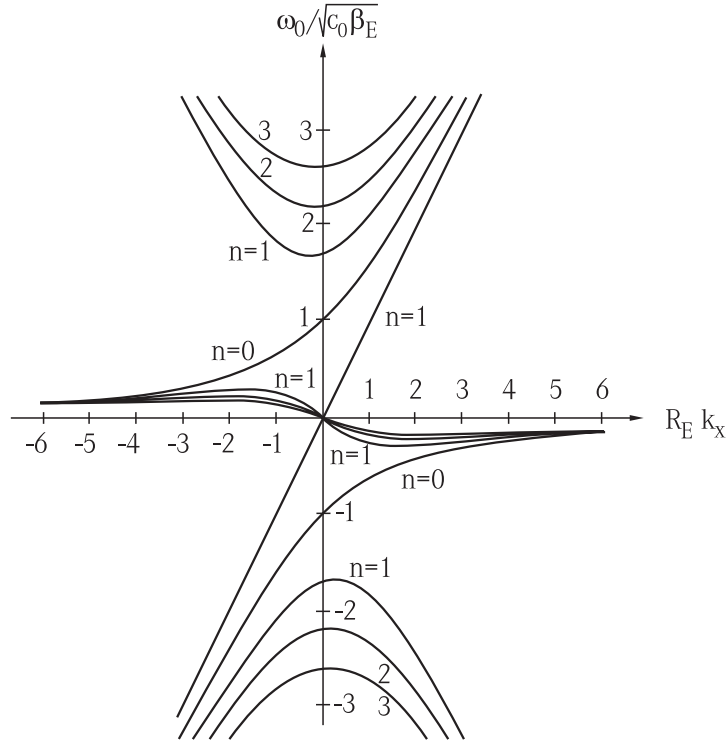
Ez ugyanolyan típusú mint az f_0 -sík Poincaré-hullámaié (l. (3.14)), ezért ezt a családot egyenlítői tehetetlenségi hullámoknak hívják. Érdemes megfigyelni, hogy annak ellenére, hogy f_0 nem létezik, megjelent egy frekvencia dimenziójú mennyiség, $\sqrt{c_0|\beta_E|}$. Ez annak az időnek a reciproka, mely alatt a felszíni hullámok az R_E Rossby-sugárnyi távolságot befutják. A növekvő n indexű Poincaré-hullámok diszperziós relációja egyre nagyobb frekvenciáknál kezdődik (l. 10.1 ábra).

A másik hullámcsaládban a frekvencia sokkal kisebb $c_0 k_x$ -nél. Ekkor az ω_0^2 -es tag hanyagolható el (10.26)-ben, és

$$\omega_0 = -\beta_E \frac{k_x}{k_x^2 + (2n + 1)R_E^{-2}} = \mp \sqrt{c_0|\beta_E|} \frac{R_E k_x}{1 + 2n + (R_E k_x)^2}. \quad (10.29)$$

Mivel ez ugyanolyan típusú mint (3.35), az ilyen hullámokat egyenlítői Rossby-, vagy egyenlítői planetáris hullámoknak nevezzük. Ezek, az elnevezés ellenére nem feltétlenül kvázigeosztrofikus hullámok, hiszen a $k_x = R_E^{-1}$ hullámszámmal pl. a $\beta_E R_E/(2n + 2)$ frekvencia társul, mely kis n -ekre összemérhető az $y = R_E$ szélességhez tartozó Coriolis-paraméterrel. A két hullámcsalád frekvenciája ennek ellenére jól szétválik. A Poincaré-hullámok minimális és a Rossby-hullámok maximális frekvenciájának aránya $2(2n + 1)$, mindig nagyobb, mint 6.

¹A $V = (1/2)m\omega^2 y^2$ potenciálban mozgó m tömegű, E energiájú részecske Schrödinger-egyenlete $-\Psi'' + (m^2\omega^2/\hbar^2)y^2\Psi = [(2m)/\hbar^2]E\Psi$. A sajátértékspektrum $E = \hbar\omega(n + 1/2)$. A (10.24) egyenlettel való összehasonlításból látszik, hogy az R_E Rossby-sugár $\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ -nak, azaz a kvantummechanikai probléma természetes távolságegységének felel meg, melyhez $\hbar\omega$ energiaegység tartozik.



10.1 ábra: Az egyenlítői hullámok diszperziós relációja az északi féltekén. A tehetetlenségi-gravitációs és a Rossby-hullámoknak az $n = 1, 2, \dots$ egész számokkal jellemzett spektruma létezik. Az $n = 0$ indexhez egy kevert planetáris-gravitációs hullám tartozik. A Kelvin-hullám az $n = -1$ választásnak feleltethető meg.

Az $n = 0$ indexű hullám különleges, mert mindkét családhoz tartozik egyszerre. Ekkor a (10.26) diszperziós reláció írható mint $(\pm\omega_0/c_0 + k_x)(\pm\omega_0/c_0 - \beta_E/\omega_0 - k_x) = 0$. Mivel az első tényező a levezetésben használt feltevés szerint nem lehet nulla, az $n = 0$ módus diszperziós relációját a

$$\pm \frac{\omega_0}{c_0} - \frac{\beta_E}{\omega_0} = k_x \quad (10.30)$$

feltétel adja. Ez nagy frekvenciákra $|\omega_0| \approx c_0 k_x$ alakú, míg kicsikre $\omega_0 \approx -\beta_E/k_x$. Ez a hullám bizonyos hullámszámokra gravitációs, másokra pedig Rossby-szerű, ezért kevert planetáris-gravitációs hullámnak nevezik. Mivel a (10.26) diszperziós reláció a formális $n = -1$ választással a (10.16) összefüggést adja, a Kelvin-hullámok is beleilleszthetők ebbe az egyesített tárgyalásba.

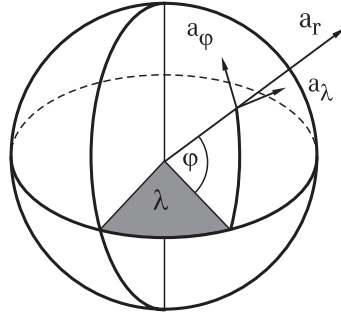
A 10.1 ábra diszperziós relációjáról leolvasható az alacsony frekvenciájú egyenlítői hullámok visszaverődési törvénye észak-déli partvonalon. A mindig kelet felé haladó Kelvin-hullámok a keleti peremen történő visszaverődés után ugyanolyan frekvenciájú hosszú Rossby-hullámokká válnak, melyek az energiát nyugat felé szállítják. A nyugati peremen történő ütközéskor a Rossby-hullám most nemcsak rövid Rossby-hullámként verődhet vissza, hanem hosszú Kelvin-hullámként is. Ez egyben gyengíti a rövidhullámú zavarok felhalmozódását a nyugati perem mentén, vagyis a nyugati peremáramlatot. Ugyanakkor a keleti peremen való ütközéskor a sarok felé haladó Kelvin-hullám is keletkezhethet, s így az egyenlítői hullámok összenergiája csökkenhet². Az egyenlítői hullámok, visszaverődésük és egymásba alakulásuk fontos szerepet játszik az El Nino-jelenségkörben.

²Erre nincs mód a nyugati peremen, mert ott az észak-déli part menti Kelvin-hullámok csak az Egyenlítő felé közeledhetnek, s az ottani energiát csak növelhetik.

10.3 Gömbi hidrodinamika

10.3.1 Gyorsulások gömbi koordinátákban

Először meghatározzuk, hogyan fejezhető ki egy *nem* forgatott gömbön mozgó test gyorsulása pillanatnyi gömbi (λ, φ, r) koordinátaival (10.2 ábra) és azok időderiváltjaival.

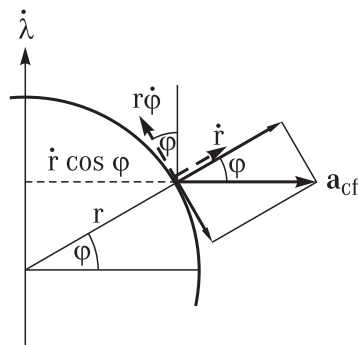


10.2 ábra: A gyorsulásvektor komponensei a gömbi rendszerben.

A ϕ irányú komponens mindkét féltéken akkor pozitív, ha a közelebbi sarok felé mutat. Mint minden vektormennyiséget, a gyorsulást is kelet-nyugati, észak-déli és sugárirányú komponensekre bontjuk $\mathbf{a} = (a_\lambda, a_\varphi, a_r)$. Célszerű a testet követő gyorsuló koordinátarendszerben dolgoznunk, ahol természetesen tehetetlenségi erők is hatnak. Az itt fellépő \mathbf{a}_{cf} centrifugális, \mathbf{a}_C Coriolis-, és \mathbf{a}' transzlációs gyorsulásból (az utóbbi abból adódik, hogy a test általában nem mozog egyenletesen a gömbi koordinátarendszerben), a nyugvó gömbön érzékelhető gyorsulás

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' - \mathbf{a}_{cf} - \mathbf{a}_C. \quad (10.31)$$

A mozgást gondolatban felbontjuk három független komponensre: egy észak-déli tengely körüli, $\dot{\lambda}$ pillanatnyi szögsebességű forgásra, egy, az Egyenlítő síkjában fekvő tengely körüli, $\dot{\varphi}$ pillanatnyi szögsebességű forgásra, miközben a középponttól mért r távolság állandó, és egy \dot{r} sebességű radiális mozgásra, melynek során a tengelyek irányítottsága nem változik (λ és φ állandó).



10.3 ábra: Az észak-déli tengelyű, $\dot{\lambda}$ szögsebességgel forgó koordinátarendszerben fellépő centrifugális erő, és komponensei. A szaggatott vektorok a forgó rendszerben észlelt sebességkomponenseket jelölik.

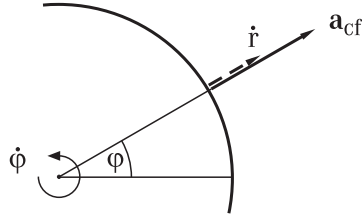
Az észak-déli tengely körül $\dot{\lambda}$ szögsebességgel forgó rendszerben $r \cos \varphi \dot{\lambda}^2$ centrifugális gyorsulás hat a testre, melynek r - és φ -komponensei (10.3 ábra) $r \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2$, ill. $\mp r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda}^2$. A test relatív sebessége ebben a rendszerben a φ irányban $r \dot{\varphi}$, a radiális irányban \dot{r} . A sebességvektor tehát az észak-déli tengellyel párhuzamos síkban fekszik, s ezért a Coriolis-gyorsulásnak csak

λ -irányú komponense van: $2\dot{\lambda}r\dot{\varphi}\sin\varphi - 2\dot{\lambda}\dot{r}\cos\varphi$. Ezzel társul egy ugyanilyen irányú, $r\cos\varphi\ddot{\lambda}$ nagyságú transzlációs gyorsulás. Az inerciarendszerbeli \mathbf{a} gyorsuláshoz adódó járulékok tehát

$$(r\cos\varphi\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi), \pm r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\lambda}^2, -r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2). \quad (10.32)$$

Az Egyenlítő síkjában fekvő, $\dot{\varphi}$ szögsebességgel forgó rendszerben $r\dot{\varphi}^2$ nagyságú, sugár irányú centrifugális gyorsulás hat a testre (10.4 ábra). A test relatív sebessége ebben a rendszerben az r irányban \dot{r} , a λ irányban $r\cos\varphi\dot{\lambda}$. A Coriolis-gyorsulásnak tehát csak φ irányú komponense létezik, s az $\mp 2\dot{r}\dot{\varphi}$. Ezzel társul egy φ irányú, $r\ddot{\varphi}$ nagyságú transzlációs gyorsulás. A járulékok az inerciarendszerbeli \mathbf{a} gyorsuláshoz most

$$(0, \pm(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}), -r\dot{\varphi}^2). \quad (10.33)$$



10.4 ábra: Az egyenlítői síkban fekvő, $\dot{\varphi}$ szögsebességű koordinátarendszerben fellépő centrifugális erő. A szaggatott vektor a forgó rendszerben észlelt sebességnek a rajz síkjába eső komponensét mutatja. A másik komponens párhuzamos a forgástengellyel és ezért nem ad járulékokat a Coriolis-gyorsuláshoz.

A \dot{r} sebességű radiális mozgás következik forgásból származó tehetetlenségi erők nem lépnek fel, a transzlációs gyorsulás \ddot{r} , s a járulékok

$$(0, 0, \ddot{r}). \quad (10.34)$$

Minhárom járulékokat figyelembe véve kapjuk, hogy a gyorsulás kifejezése a gömbi koordinátákkal és azok deriváltjaival

$$a_\lambda = r\cos\varphi\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi), \quad (10.35)$$

$$a_\varphi = \pm(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\lambda}^2), \quad (10.36)$$

$$a_r = r\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2. \quad (10.37)$$

A második deriváltak mellett megjelennek az első deriváltak szorzatait tartalmazó tagok is.

Érdekes összehasonlítani a gyorsulásokat a

$$\mathbf{v} = (r\cos\varphi\dot{\lambda} \equiv u, \pm r\dot{\varphi} \equiv v, \dot{r} \equiv w) \quad (10.38)$$

sebességvektor időderiváltjaival. Ezek

$$\frac{du}{dt} = r\cos\varphi\ddot{\lambda} + \dot{r}\cos\varphi\dot{\lambda} - r\sin\varphi\dot{\lambda}\dot{\varphi} = r\cos\varphi\ddot{\lambda} + \frac{uw}{r} \mp \frac{uv}{r}\operatorname{tg}\varphi, \quad (10.39)$$

$$\frac{dv}{dt} = \pm(r\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}) = \pm r\ddot{\varphi} + \frac{vw}{r}, \quad \frac{dw}{dt} = \ddot{r}. \quad (10.40)$$

A gyorsulások tehát az

$$a_\lambda = \frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\operatorname{tg}|\varphi|, \quad (10.41)$$

$$a_\varphi = \frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r} \operatorname{tg}|\varphi|, \quad (10.42)$$

$$a_r = \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} \quad (10.43)$$

összefüggésben állnak a sebességek időderiváltjával. A köztük fellépő különbség a sebességek szorzatait tartalmazó ún. *metrikus gyorsulás*, mely a koordinátarendszer görbülségének következménye.

10.3.2 Hidrodinamika a forgó Földön

A gömbi gyorsulások levezetése után visszatérünk a forgó Földhöz, és az azon zajló áramlásokhoz. Az Euler-egyenletben a gyorsulások sebességderiváltakkal megadott fenti alakját használjuk. A d/dt mennyiség természetesen a teljes deriváltat jelöli. A külső erőként figyelembe vesszük a folyadékrészecskékre ható Coriolis-erőt, s a helyi gravitációs erőt. A jobb oldalon a nyomásgradienst a lokális (x, y, z) koordináták szerinti deriváltakkal fejezzük ki. Az egyenlet összenyomhatatlan folyadékra tehát

$$\frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \operatorname{tg}|\varphi| = fv - 2\Omega_y w - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10.44)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r} \operatorname{tg}|\varphi| = -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (10.45)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -2\Omega_y u - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (10.46)$$

Itt f az (3.4) Coriolis-paraméter, Ω_y a Föld forgási szögsebességének (3.3) észak-déli komponense. Az egyenlet azt mutatja, hogy a teljes Földre kiterjedő hidrodinamikai mozgások leírásában a metrikus gyorsulásokat is lényegesek.

Vizsgáljuk most meg, mikor lehet ezeket a tagokat elhanyagolni. Ehhez dimenziótlanítjuk az egyenleteket. A vízszintes koordinátákat L , a függőlegest H egységekben mérjük, a karakterisztikus vízszintes sebességet U -nak, a függőlegest UH/L -nek, a jellegzetes dinamikai nyomást $\rho_0 |f_0| UL$ -nek tekintjük. A folyadék korlátos mélységét kihasználjuk abban, hogy a metrikus gyorsulásokban szereplő r távolságot a Föld R_F sugarával közelítjük. Az egyszerűség kedvéért csak a közepes szélességekre vonatkozó alakot vizsgáljuk. A dimenziótlan egyenlet így

$$Ro \frac{du}{dt} + Ro \frac{L}{R_F} (\varepsilon uw - uv \operatorname{tg}|\varphi|) = \frac{f}{|f_0|} v - \frac{2\Omega_y}{|f_0|} \varepsilon w - \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (10.47)$$

$$Ro \frac{dv}{dt} + Ro \frac{L}{R_F} (\varepsilon vw + u^2 \operatorname{tg}|\varphi|) = -\frac{f}{|f_0|} u - \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (10.48)$$

$$Ro \varepsilon^2 \frac{dw}{dt} - Ro \frac{L}{R_F} \varepsilon (u^2 + v^2) = -\frac{2\Omega_y}{|f_0|} \varepsilon u - \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (10.49)$$

Itt ε a H/L mélységi arányt jelöli. Ha most figyelembe vesszük azt is, hogy a folyadék sekély: $\varepsilon \ll 1$, sok tag kiesik. Az utolsó egyenlet a hidrosztatikai közelítésbe megy át és Ω_y eltűnik a vízszintes sebességkomponensek egyenletéből. Releváns paraméterként megmarad viszont az L/R_F hányados, a lineáris kiterjedés viszonya a Föld sugarához. Ha ez nagyon kicsi, akkor visszakapjuk a 3.2 fejezetben tárgyalt f_0 -sík közelítést. A $\operatorname{tg}\varphi$ -vel arányos tagok akkor is elhanyagolhatók, ha L/R_F véges, pl. 0.1 körüli, de a Rossby-szám kicsi, hiszen az együtthatója ekkor két kis szám szorzata. Ugyanezkor jogos viszont megtartani az $f/|f_0| = \pm(1 + Be y)$ alakban az y -nal arányos tagot. A kvázigeosztrofikus közelítés tehát konzisztens a 3.3 fejezetben bevezetett β -sík közelítéssel, azaz ilyenkor a Föld görbületéből adódó legfontosabb járulék valóban a Coriolis-paraméter lineáris helyfüggése. A metrikus gyorsulások elhanyagolhatók, azaz használhatjuk a lokális derékszögű koordinátarendszert.

11. fejezet

A viszkozitás hatása

11.1 Ekman-transzport az alsó határrétegben

Érdemes megvizsgálni, hogy a viszkozitás következtében milyen mértékű az izobárokra merőleges, tehát a geosztrofikustól eltérő anyagmozgás a *teljes* határrétegben. Definiáljuk ezért az

$$\mathbf{S} = \int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) dz \quad (11.1)$$

Ekman-transzportot. Az Ekman-transzport és a határréteg D vastagságának hányadosa a határrétegbeli átlagos sebesség. Az integrál felső határát kényelmi okokból vesszük végtelennek. A sebességnövekmény nagyságának a magassággal történő exponenciális lecsengése miatt az integrál a $z = D$ szint fölött már gyakorlatilag nem ad járulékot. A (4.14) egyenletet integrálva, a (11.1) definíció alapján kapjuk, hogy

$$f \mathbf{n} \times \mathbf{S} = -\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (11.2)$$

Kihasználtuk, hogy a felső határon a sebesség belesimul a geosztrofikusba, s hogy a geosztrofikus sebesség független a magasságtól. A sebesség z szerinti deriváltja az alaplapon (4.26) szerint ismert, s ezzel

$$f \mathbf{n} \times \mathbf{S} = -\frac{\nu}{\delta} (\mathbf{u}_g \pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g). \quad (11.3)$$

Mivel $\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{S} = -\mathbf{S}$, az Ekman-transzport

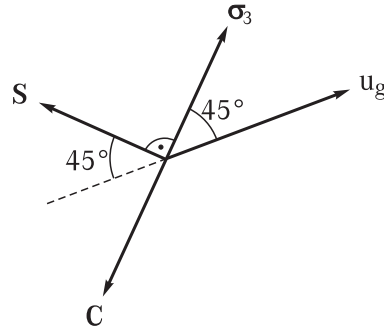
$$\mathbf{S} = \frac{\nu}{f\delta} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_g \mp \mathbf{u}_g) = (-u_g \mp v_g, -v_g \pm u_g) \frac{\delta}{2}, \quad (11.4)$$

hiszen $\nu/f = \pm\delta^2/2$. A felső előjel ismét az északi félgömbnek felel meg. Az eredmény azt mutatja, hogy az Ekman-transzport mindig *135 fokos szöget* zár be a geosztrofikus áramlás irányával, s az északi (déli) féltekén attól balra (jobbra) mutat (11.1 ábra). Az a meglepő tulajdonság, hogy az Ekman-transzport szöge éppen 45 fok a negatív geosztrofikus sebességhez képest, érthetővé válik, ha észrevesszük, hogy a (11.2) egyenlet jobb oldalán $-\sigma_3/\rho_0$ áll, ahol σ_3 a folyadék által az aljzat vízszintes síkjára ható nyírási feszültség. Ezzel

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\rho_0 f} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma}_3 = \frac{1}{\rho_0 f} (-\sigma_{3,y}, \sigma_{3,x}). \quad (11.5)$$

Az Ekman-transzport tehát éppen merőleges a nyírási vektorra. Ennek azért kell így lennie, mert a teljes határrétegben a sebesség-eltéréssel kapcsolatos Coriolis-erőnek kompenzálnia kell a viszkozitásból adódó eredő erőt. Az utóbbi nem más, mint a folyadékokra alul ható erő, azaz az

aljzatra ható nyíróerő ellentettje (11.1 ábra). A nyíróerő viszont (4.26) szerint 45 fokot zár be a geosztrofikus sebességgel¹.



11.1 ábra: Az Ekman-transzport az alsó határrétegben 45 fokos szöget zár be a geosztrofikus sebesség ellentettjével. Az \mathbf{u}_g geosztrofikus sebesség, a \mathbf{S} Ekman-transzport és az aljzat által a folyadékra ható $-\sigma_3$ nyíróerő elhelyezkedése az (x, y) síkon olyan, hogy eredőjük nulla legyen. Az ábra az északi féltekére jellemző irányítottságot mutatja. A \mathbf{C} vektor az Ekman-transzportnak megfelelő átlagos sebességnövekményre ható Coriolis-erőt jelöli, mely merőleges magára az Ekman-transzportra.

11.2 A Stommel-modell

H. M. Stommel amerikai oceanográfus (1920-1992, a Golf-áramlat első részletes elméletének kidolgozója, a modern oceanográfia egyik megalapozója) nevéhez fűződik az a felismerés, hogy a nyugati peremáramlatok véges méretének kialakulásában alapvető szerepe van az alsó határrétegnek is. Az ott kialakuló feláramlás w_+ erőssége ugyanis függ a geosztrofikus örvényességtől. Mivel az az áramvonalak elkanyarodása miatt a medence nyugati peremén nagy érték is lehet, az alsó határréteg itt nem hanyagolható el. Valóban, ha a feláramlási sebesség magasság szerinti deriváltját a $\partial w / \partial z = (w_- - w_+) / H$ alakban írjuk, akkor látszik, hogy elegendően nagy ciklonális örvényesség esetén a w_+ olyan nagy negatív szám lehet, hogy a derivált előjelet vált a csak a felső határréteg hatását figyelembe vevő leíráshoz képest. Ekkor a Sverdrup-transzport is előjelet vált, s észak felé történő áramlást ír le. Ez történik a nyugati peremáramlat kialakulási helyén. Mivel most w_+ nem zérus, a peremáramlat vastagsága is véges értéknek adódik.

A (4.54) egyenlet általánosítása tehát

$$v_g \beta = f \frac{w_- - w_+}{H} = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\rho_0 H} \mp \frac{1}{t_0} \zeta g. \quad (11.6)$$

Itt t_0 a (4.35) felpörgetési idő.

A Ψ mélységi áramlási függvényre vonatkozó egyenlet ezért

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\beta \rho_0} - \frac{1}{t_0 |\beta|} \Delta \Psi. \quad (11.7)$$

A nyugati perem közelében lényegesek a kelet-nyugati irányú változások, míg az észak-déliek mindenütt gyengék. Ezért azt várjuk, hogy az x szerinti deriváltak dominálnak, s ezért a Laplace-operátor az x szerinti második deriválttal helyettesíthető:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{t_0 |\beta|} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\beta \rho_0}. \quad (11.8)$$

¹Ez az eredmény azonos a felső határrétegbeli Ekman-transzportot a szélnyírás erősségével megadó (4.42) alakkal (l. ?? fejezet), ha azt is a folyadékban fellépő nyírással, tehát $-\boldsymbol{\tau}$ -val fejezzük ki.

A jobb oldal $d\tau_x/dy$ -nal arányos, és csak y -tól függ. A megoldást a $\Psi = -g(x) d\tau_x/dy/(\beta\rho_0)$ alakban keresve a $g' + g''/(\tau_0|\beta|) = 1$ egyenlet adódik. Ennek olyan megoldása, melyre a perem a $\Psi = 0$ értékhez tartozik, vagyis, $g(0) = g(L_x) = 0$,

$$g(x) = x - L_x \frac{(1 - e^{-t_0|\beta|x})}{(1 - e^{-t_0|\beta|L_x})} \approx x - L_x(1 - e^{-x/\Delta}). \quad (11.9)$$

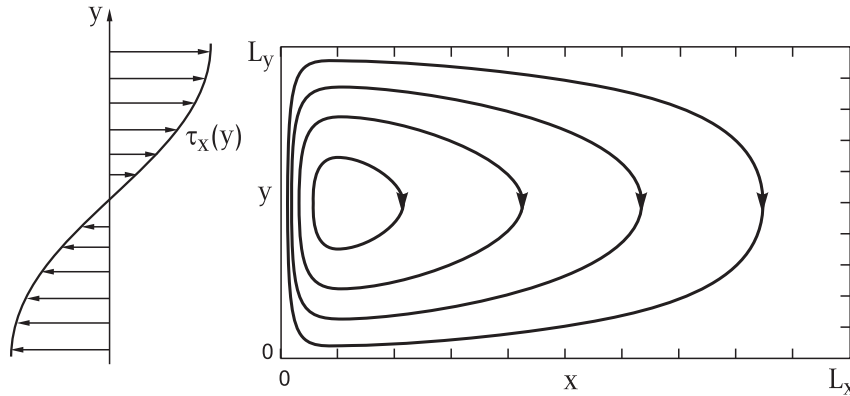
A közelítésben felhasználtuk, hogy $t_0|\beta|L_x \gg 1$. Így jó közelítéssel

$$\Psi(x, y) = \frac{d\tau_x}{dy} \frac{1}{\beta\rho_0} (L_x(1 - e^{-x/\Delta}) - x). \quad (11.10)$$

Itt

$$\Delta = \frac{1}{t_0|\beta|} = \frac{|f/2|\delta}{H|\beta|} = \frac{\sqrt{|f/2|\nu}}{H|\beta|} = \frac{|f|}{|\beta|} \sqrt{\frac{Ek}{2}} \quad (11.11)$$

a nyugati peremáramlat karakterisztikus szélessége (11.2 ábra). Az alsó határréteg hatása az $x < 3\Delta$ tartományban lényeges, hiszen (11.9) szerint itt történik meg az $u = 0$ peremfeltételhez szükséges átmenet. A Stommel-modell tehát mintegy felbontja a peremáramlatok partra merőleges kiterjedését. Adatainkkal $\Delta \approx 10\text{km}$ adódik, azaz az áramlat szélessége kb. 30 km, jó egyezésben a megfigyeléssel. Fenti közelítésünk, miszerint $L_x/\Delta \gg 1$ tehát jogos volt. Hasonlóan látható be az is, hogy a megoldásban az y szerinti második deriváltak elhanyagolhatóak az x szerintiéket mellett.



11.2 ábra: A Stommel-modell áramlási képe az 4.13 ábrához is használt nyírás-eloszlással.

Az áramlás sebességkomponensei:

$$u = -\frac{\tau_0\pi^2}{\beta\rho_0 L_y^2 H} (L_x(1 - e^{-x/\Delta}) - x) \cdot \cos \frac{\pi y}{L_y},$$

$$v = \frac{\tau_0\pi}{\beta\rho_0 L_y H} \left(\frac{L_x}{\Delta} e^{-x/\Delta} - 1 \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{L_y}. \quad (11.12)$$

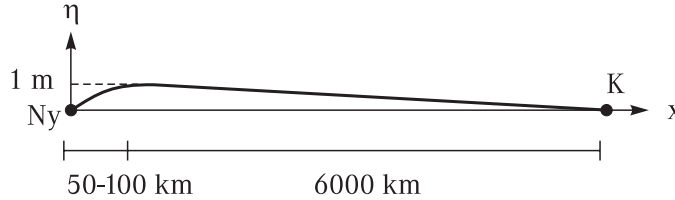
A nyugati peremtől távol a sebességek gyakorlatilag megegyeznek az előző fejezet egyszerű modelljéből kapottakkal. A lényeges eltérés az $x < \Delta$ tartományban jelentkezik. Itt pl. a v sebességkomponens első tagja L_x/Δ -szor, azaz mintegy 600-szor nagyobb a másodikonál (s egyben az egyszerű modellre jellemző értéknél). A part mentén ezért közel m/s nagyságrendű sebességek lépnek fel a peremáramlatban. A megoldás leírja azt a tapasztalati tényt is, hogy a peremáramlatok erőssége kialakulásuk után a haladási irányban nő (a szinusz függvény növekvő) a medence közepéig.

Az origóbeli torlódási pont környékén

$$\Psi(x, y) = y \text{ konstans } (1 - e^{-x/\Delta}), \quad (11.13)$$

ugyanolyan típusú, mint a tehetetlenségi határreteget leíró (10.6) eredmény. A nyugati peremáramlások kialakulásának tehát vannak mind a surlódástól független, mind az Ekman-határretegből adódó okai. Mindkettő egyértelműen mutatja a β hatás fontosságát. Az egyesített megközelítésben a nemlineáris tagokat is figyelembe kellene venni, melyek a nyugati parttól való elkanyarodást követő meanderező mozgást is leírják a 3.15 ábrával összhangban.

Annak fényében, hogy geosztrofikus egyensúlyban az áramlási függvény arányos a felszín η alakjával, a következő kvalitatív képet alakíthatjuk ki. Egy óceáni medence kelet-nyugati hosszmeteszében a nyugati perem mellett viszonylag gyors átlagos felszínemelkedés történik, mely azután nagyon lassan csökken le a peremen felvett értékre a keleti oldalon (11.3 ábra). A gyors szintemelkedés nyugati peremáramlat megjelenésével jár együtt, a 2.6a ábra tehát a nyugati perem körüli lokális viselkedésnek felel meg.



11.3 ábra: Egy óceáni medence átlagos felszíni alakjának kelet-nyugati keresztmetszete a közepes szélességeken (sematikus rajz). A vízfelszín a nyugati perem néhányszor 10 km-es sávban (a nyugati peremáramlat vastagságában) emelkedik, utána igen lassan csökken. Az anticiklonális áramlásokra jellemző felszíni kidudorodás tehát a β -hatás és a surlódás miatt erősen aszimmetrikusan helyezkedik el.

11.3 A viszkózus folyadék kvázigeosztrofikus egyenlete

Az alsó határretegbeli Ekman-pumpálás (4.3.2 fejezet) mindig az örvényesség időbeli relaxációját eredményezi, a felszíni nyírási örvényesség pedig előjelének megfelelő örvényességet kelt (4.4.3 fejezet). Ezek a hatások a potenciális örvényesség időbeli fejlődését is meghatározzák. Amennyiben a teljes h mélység csak keveset tér el a H átlagos mélységtől, amint azt a kvázigeosztrofikus közelítés amúgyis megköveteli, a potenciális örvényesség forrása jó közelítéssel

$$\frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\beta \rho_0 H} - \frac{\zeta_g}{t_0}. \quad (11.14)$$

Itt megtartjuk a geosztrofikus örvényességet, hiszen a megmaradási tételhez adódó első korrekciót keressük. A $q = (\zeta + f)H/h$ potenciális örvényességet a 4.11 fejezetben látottak szerint közelítve és a ψ geosztrofikus áramlási függvénnyel kifejezve, a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta y + \frac{f_0 d}{H} \right) = \frac{\text{rot}_z \boldsymbol{\tau}}{\beta \rho_0 H} - \frac{\Delta \psi}{t_0} \quad (11.15)$$

alakot kapjuk. Itt R a (2.46) a Rossby-sugár, d pedig a domborzati alak. Ez a viszkózus esetben a β síkon érvényes kvázigeosztrofikus egyenlet². Egyszerű óceánmodellünk, ill. a Stommel-modell ennek az egyenletnek a stacionárius és linearizált változatai a $t_0 = \infty$ ill., $t_0 =$ véges közelítésben.

A dimenziótlan kvázigeosztrofikus egyenlet³

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - \left(\frac{Fr}{Ro} \right)^2 \psi + \frac{d}{Ro} \right) + \frac{Be}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Sh}{Ro} \text{rot}_z \tau - \frac{\sqrt{Ek/2}}{Ro} \Delta \psi, \quad (11.16)$$

ahol Be a (3.18) β -paraméter, és Sh a (4.47) dimenziótlan nyírásérősség. Két kvázigeosztrofikus áramlás akkor lehet hasonló, ha Froude-számuk, domborzatuk, és β paraméterük mellett Ekman-számuk és dimenziótlan nyírásérősségük Rossby-számhoz viszonyított nagysága is azonos.

11.4 A viszkozitás hatása a Rossby-hullámokra

A felülről nem nyírt folyadékban kialakuló kis amplitudójú planetáris Rossby-hullámok egyenlete (11.15) szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{t_0} \Delta \psi. \quad (11.17)$$

Itt az egyszerűség kedvéért a szabad felszín és a domborzat hatását elhanyagoltuk. Ennek $\psi' = \psi_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_y y)$ alakú megoldására azt találjuk, hogy a hullám ω_0 frekvenciája komplex,

$$\omega_0 = -\frac{\beta k_x}{k^2} + i\Gamma, \quad (11.18)$$

ahol a csillapítási tényező⁴

$$\Gamma = \frac{1}{t_0}. \quad (11.19)$$

A Rossby-hullámok élettartama tehát hullámhosszuktól függetlenül a felpörgetési idő. Ez a légkörben néhány nap, az óceánban több hét. A légköri élettartam jól megfelel az időjárás átlagos változási idejének a mérsékelt égövben, mely ismét alátámasztja azt a képet, hogy a Rossby-hullámok az időjárásváltozás fő hordozói.

A (3.48) domborzati alak által gerjesztett kis amplitudójú Rossby-hullámok az $u_0 = U, v_0 = 0$ háttéráramlás körül linearizált kvázigeosztrofikus

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \frac{1}{t_0} \Delta \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{U f_0}{H} \frac{d}{dx} d(x) \quad (11.20)$$

egyenlet megoldásai. A csak x -koordinátától függő stacionárius áramlást az

$$U \frac{d^3 \psi'}{dx^3} + \frac{1}{t_0} \frac{d^2 \psi'}{dx^2} + \beta \frac{d \psi'}{dx} = -\frac{U f_0}{H} \frac{d}{dx} d(x) \quad (11.21)$$

egyenlet határozza meg. A megoldást a $\psi' = \psi_0 \exp(-ikx)$ komplex alakban keresve, melyhez a $d = AH \exp(-ikx)$ domborzati függvényt választjuk, azt kapjuk, hogy

$$\psi_0 = \frac{f_0 A}{k^2 - k_c^2 + i \frac{k}{t_0 U}}, \quad (11.22)$$

²Ha az oldalsó peremfeltételek kielégítése érdekében megtartjuk a sekélyfolyadék közelítésben amúgy elhanyagolható viszkozitási tagot, akkor a jobboldalon megjelenik a $\nu \Delta^2 \psi$ kifejezés is. A nyírásmentes, nem forgatott esetben így visszkapjuk a kétdimenziós folyadék (8.10) örvényességi dinamikáját.

³Ha a szokásos viszkozitási tagokat is megtartjuk, akkor a jobboldalon megjelenik a $\Delta^2 \psi / Re$ kifejezés is, ahol Re az (1.28) Reynolds-szám.

⁴A hagyományos viszkozitásból megtartása mellett $\Gamma = t_0^{-1} + \nu k^2$ adódna, a második tag azonban elhanyagolható $1/t_0$ mellett.

ahol $k_c = \sqrt{\beta/\bar{U}}$. Az amplitudó abszolútértéke

$$|\psi_0| = \frac{f_0 A}{\sqrt{(k^2 - k_c^2)^2 + \frac{k^2}{t_0^2 \bar{U}^2}}} \quad (11.23)$$

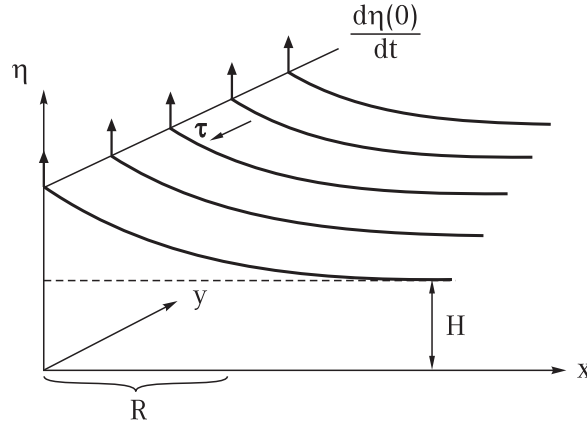
tehát még a k_c rezonancia hullámszámnál is véges a viszkozitás következtében (l. 3.12 ábra).

Ez analóg a gerjesztett oszcillátor esetével, hiszen az (11.21) egyenlet a (3.54) megfeleltetéssel ekvivalens a gerjesztett, lineárisan csillapított harmonikus oszcillátor egyenletével melyben $1/(t_0 \bar{U})$ játssza a súrlódási együttható szerepét.

Az áramlási függvény maximális értéke $|\psi_0|_{max} = U A f_0 t_0 / k_c$. Az ennek megfelelő legnagyobb Észak-déli sebesség $|\psi_0|_{max} \cdot k_c$ -vel becsülhető, melyre a (4.35) behelyettesítésével az $U A / \sqrt{E k / 2}$ kifejezést kapjuk. Az ismert légköri és óceáni Ekman-szám értékekkel ez már a mélység 1 százalékának megfelelő domborzati amplitudók mellett eléri a háttéráramlás U sebességét, vagyis a gerjesztett Rossby-hullám által létrehozott észak-déli sebesség erőssége összemérhetővé válhat a háttéráramlásával.

11.5 Viharhullámok

Állandó, erős szelekkel járó viharok jelentős, közel állandó erősségű nyírást fejtenek ki a tengerek felszínére. Ha a szél valamely partvonal mentén fúj, mely tőle az északi féltekén jobbra, a délin balra esik, akkor a Coriolis-erő következtében kialakuló transzport a part felé irányul. Időben egyre növekvő mennyiségű víz torlódik fel a part mentén (11.4 ábra), viharhullám (storm surge) alakul ki, mely komoly károkat okozhat.



11.4 ábra: A viharhullám a part felé irányuló áramlás miatt kialakuló vízszintemelkedés, mely a parttal párhuzamosan fújó szél nyíróereje és a Coriolis-hatás következtében alakul ki. Az északi féltekén a viharhullámoknak kitett partok a szél haladási irányának jobb oldalára esnek. Egyenletes fújó szél időben egyenletesen emelkedő vízszintet és egyenletesen erősödő parttal párhuzamos áramlást okoz, miközben a partra merőleges áramlás időfüggetlen. A viharhullám hatása a part Rossby-sugár nagyságú környezetére korlátozódik.

A jelenség egyszerűen leírható a szélnyírással gerjesztett (4.49) sekélyfolyadék egyenletekkel. Tegyük fel, hogy a partvonal észak-déli irányú, a szél északról fúj, s konstans $\tau_y = -\tau_0 < 0$ nyírási feszültséget fejt ki a vízfelszínre. Az áramlási sebességek olyan kicsik, hogy a nemlineáris tagok elhanyagolhatók. Mivel a vízszintemelkedés rendszerint nem túl nagy kiterjedésű, jogosan használjuk az f_0 -sík közelítést. A linearizált sekélyfolyadék egyenletek az északi féltekén ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_0 v - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -f_0 u + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau_0}{\rho_0 H}, \quad (11.24)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (11.25)$$

A nyírás állandó, ezért a probléma eltolásinvariáns az y -tengely mentén. Feltehetjük tehát, hogy minden változó csak a kelet-nyugati x koordinátától függ: $\eta = \eta(x, t)$, $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$. A hidrodinamikai gyorsulás a parttal párhuzamos irányban nem lehet nulla, mert ott állandó erő hat. Az arra merőleges áramlás viszont lehet stacionárius. Az u komponens időbeni állandóságát feltételezve: $u = u(x)$, a kontinuitási egyenletből azt kapjuk, hogy η időben lineárisan változik, a v komponens egyenletéből pedig azt, hogy v is. A nyírás tehát egyenletesen erősíti a parttal párhuzamos áramlást és egyben időben *állandó* szintemelkedést okoz. A lineáris időfüggés leválasztásával közönséges differenciálegyenletrendszerrel kapunk, mely az $u(x=0) = 0$ peremfeltétellel megoldható. A teljes megoldás:

$$u = -\frac{\tau_0}{f_0 \rho_0 H_1} \left(1 - e^{-x/R} \right), \quad v = -\frac{\tau_0 t}{\rho_0 H} e^{-x/R}, \quad (11.26)$$

és

$$\eta = \frac{\tau_0 t}{R f_0 \rho_0} e^{-x/R}. \quad (11.27)$$

Itt megjelent a $R = \sqrt{gH}/f_0$ Rossby-sugár, s ez határozza meg a partra merőleges térbeli lecsengetést (11.4 ábra). A kelet-nyugati sebességkomponens amplitudóját a nyírás, az észak-déliét és a szintemelkedését viszont a τt nyírási impulzus szabályozza. A szintemelkedés sekély folyadékban a leggyorsabb, hiszen ott a Rossby-sugár kicsi. Viharos szélben $\tau_0 = 2 \text{ N/m}^2$, mellyel $H = 50$ m-es vízmélységben a part menti szintemelkedés $d\eta(x=0)/dt = 8 \text{ m/nap(!)}$, összhangban a megfigyelt sebességekkel. Természetesen a szelek erőssége változik, s feltételek ezért csak néhány óráig állandóak, de még ezalatt is több méteres szintemelkedés történhet. Ha a szélerősségben térbeli periodicitás is megfigyelehető a part mentén, akkor a szélnyírás Kelvin-hullámokat kelt, melyek amplitudója időben nőhet.

12. fejezet

Rétegzett közegek áramlása

12.1 Állóhullámok, tólengések (seiche)

Szellökések vagy egyéb periodikus külső hatás következtében hosszú tavakban, öblökben, vagy fjordokban belső állóhullámok (és ezek külső változatai is) kialakulhatnak. Az ilyen mozgásokat tólengésnek (seiche) nevezzük. Tipikus amplitúdójuk legfeljebb méter nagyságrendű (a Balatonon 10 cm), lassan csillapodnak, s élettartamuk több nap is lehet. Ezek formálisan a k_x és $-k_x$ hullámszámú vízszintesen haladó hullámok szuperpozíciói a sekély vízben. A hidrodinamikai változók tehát ideális folyadékban

$$\begin{aligned}(\eta(x, t), \chi(x, t)) &= (\eta_0, \chi_0) \cos k_x x \cdot \sin \omega_0 t, \\(u_1(x, t), u_2(x, t)) &= (u_{10}, u_{20}) \sin k_x x \cdot \cos \omega_0 t\end{aligned}\tag{12.1}$$

alakúak, ahol a frekvencia továbbra is valamelyik lehetséges terjedési sebesség és a k_x hullámszám szorzata, és a (5.59), (5.60) egyenleteknek is fenn kell állnia a valós amplitúdókra. A medence véges L lineáris kiterjedése azonban megszabja a lehetséges k_x értékeket, s ezzel a lehetséges frekvenciákat is.

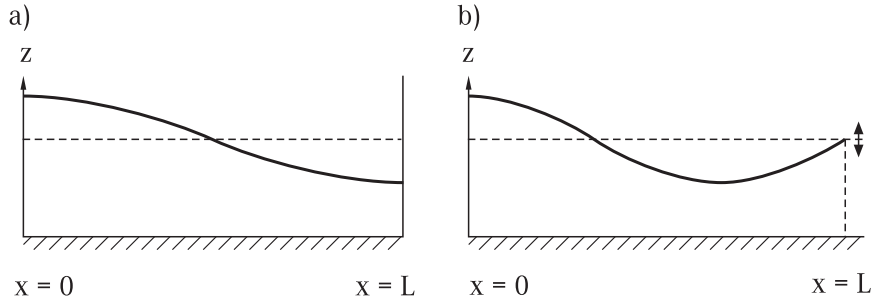
Zárt medence (tó) esetén a teljes sebességnek mindkét végen el kell tűnnie, s ez csak úgy lehetséges, ha a medence hossza a félhullámhossz egész számú többszöröse: $k_x L = j\pi$, $j = 1, 2, \dots$. A feltétel ugyanaz, mint egy zárt csőbeli hanghullámok esetén. Ebből a lehetséges állóhullám frekvenciák $c_n \pi j / L$, ahol az n index 1 vagy 0, attól függően, hogy belső vagy külső hullámról van szó¹. A lehetséges periódusidők ezért

$$T_j^{(n)} = \frac{2L}{c_n j}, \quad j = 1, 2, \dots\tag{12.2}$$

A leghosszabb periódusú ($j = 1$) állóhullám tehát olyan haladó hullámokból áll össze, melyek a medencét oda-vissza éppen egy periódus alatt járják be (12.1a ábra). Egy 10 km hosszú tóban a leghosszabb állóhullám periódusideje $T_1^{(n)} = 2 \cdot 10^4 / c_n$ másodperc, ha a sebességet m/s-ban adjuk meg. Két egyforma, 10 m mély rétegből álló, $g' = 2 \cdot 10^{-3}$ m/s² redukált gravitációs gyorsulással jellemzett tóban $c_0 = 14$ m/s és $c_1 = 0,1$ m/s. A periódusidők ezért $T_1^{(0)} = 24$ perc és $T_1^{(1)} = 56$ óra. A belső állóhullám több mint két nagyságrenddel lassabb a külsőnél.

Ha a medence félig nyitott, mely pl. sekély torkolati öblöknek felel meg, akkor a teljes sebességnek csak az egyik végen kell eltűnnie, a másik végen lehet maximális. Ez azt jelenti, hogy a negyed hullámhossz, vagy ennek páratlan többszörösei férhetnek csak rá a medence hosszára

¹Folytonos rétegzettség esetén n más értékeket is felvehet hiszen tetszőleges számú normálmóddussal létezik.



12.1 ábra: Állóhullámok (seichek) medencékben. a) Zárt medence, a leghosszabb állóhullám ($j = 1$). b) Nyitott medence peremén ható gerjesztés hatására kialakuló állóhullám. A medence hossza közel esik a $j = 2$ rezonancia hosszhoz. Az ábrák felületi alakot mutatnak, mely lehet akár a belső elválasztó felületé, akár a külső felszíné.

(mint a félig nyitott csövekben kialakuló hanghullámok esetén). A lehetséges frekvenciák ezért ekkor

$$T_j^{(n)} = \frac{2L}{c_n(j - 1/2)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.3)$$

Az állóhullámokat külső periodikus hatás gerjesztheti is (12.1b ábra). Ez legtöbbször az árapály, mely periodikus felszíningadozást határoz meg a nyílt peremen. Legyen a nyitott vég az $x = L$ helyen, ekkor tehát az ω frekvenciájú külső gerjesztés azt jelenti, hogy a peremen

$$(\eta(L, t), \chi(L, t)) = (\eta_L, \chi_L) \sin \omega t \quad (12.4)$$

adott valamilyen véges η_L, χ_L amplitudókkal. A (12.1) megoldással ez csak akkor fér össze, ha a frekvencia és a hullámszám között fennál a sekély folyadéokra jellemző $\omega = c_n k_x$ összefüggés, és ha

$$(\eta_0, \chi_0) = (\eta_L, \chi_L) \frac{1}{\cos k_x L}. \quad (12.5)$$

A k_x hullámszámot a gerjesztési frekvencia szabja meg a $k_x = \omega/c_n$ összefüggés szerint. Ez mutatja, hogy bizonyos medenceméreték esetén rezonancia alakulhat ki. Ekkor a medence belsejében létrejövő hullámok sokkal nagyobb amplitudójúak, mint a gerjesztés, hasonlóan a hangtani rezonancia esetéhez. Ideális folyadékban az η_0, χ_0 amplitudó formálisan végtelenné válhat, ha $k_x L = (j - 1/2)\pi$, vagyis, ha a negyed hullámhossz páratlan számszor fér rá a medence hosszára. Ez éppen az a feltétel, hogy a gerjesztés ω periódusa megegyezzen a lehetséges $2\pi/T_j^{(n)}$ tölengési frekvenciák valamelyikével. A rezonanciahossz tehát

$$L_j^{(n)} = \frac{c_n(j - 1/2)\pi}{\omega}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

Az árapály félnapos periódusidejével, $\omega = 1,5 \cdot 10^{-4}$ 1/s-mal számolva, a legkisebb ($j = 1$) rezonanciahossz méterben mérve $L_1^{(n)} = 10^4 c_n$. A fenti medence-adatokkal a külső és a belső rezonancia hossz $L_1^{(0)} = 140$ km és $L_1^{(1)} = 1$ km-nek adódik. Érdeemes hangsúlyozni, hogy ez csak szükséges feltétel, hiszen a teljes rezonanciához a felszín- és sebességamplitudóknak is megfelelő arányban kell állniuk (??) szerint. Ezért a rezonancia pontos beállása még ideális esetben is valószínűtlen, de fokozott árapály-hullámozás több torkolati öbölben is megfigyelhető. Természetesen arról sem szabad megfeledkezni, hogy 100 km kiterjedésű tavak esetén a Coriolis-hatás már nem hanyagolható el.

12.2 Kettős diffúziós konvekció

12.2.1 Általános megfontolások

A folyadék sűrűsége nemcsak a hőmérsékletnek lehet függvénye, hanem valamilyen oldott anyag koncentrációjának is. Gyakran a nagyobb koncentráció sűrűbbé teszi a közeget, tehát ellenkező hatással van a sűrűsége, mint a hőmérséklet. Általában kettős diffúziós konvekcióról beszélünk, ha az áramlás két különbözőképpen diffundáló fizikai mennyiség térbeli változásának hatására indul be, és e két mennyiség ellenkező módon befolyásolja a sűrűséget. Az alapvetően új jelenség az, hogy az egyes komponensek eltérő diffúziós sebessége miatt felfelé *csökkenő* sűrűségeloszlás is lehet *instabil*. Ez meglepően hangzik, hiszen az egyszerű konvekció esetében egyetlen komponens (a hő) diffúziója még a felfelé sűrűsödő közeg stabilizálására is képes viszkozitás jelenlétében.

A két komponens lehet két különböző anyag (pl. cukor és só) koncentrációja, de a környezeti áramlások szempontjából legfontosabb alkalmazás a tengervízé, melyre a hőmérséklet és a sótartalom van ellenkező hatással. Ebben a speciális esetben termohalin (hőmérséklet és sótartalom által hajtott) konvekcióról beszélünk. Noha jelölésünkkel ehhez az esethez igazodunk, fontos hangsúlyozni, hogy az alapjelenségek minden kettős diffúziós folyamatra hasonlóak. A légkörben például a vízpáratartalom lehet a hőmérséklethez társuló másik komponens.

Az új dinamikai mennyiség a S sókoncentráció vagy szalinitás. Ez a dimenziótlan változó ezrelékben adja meg, hogy egy kg sós vízben hány kg só van feloldva. Légköri nyomáson a tengervíz átlagos sótartalma 35g/kg, vagyis a szalinitás $S = 35$ ezrelék. A felszínen $S = 36$, s legnagyobb értékét a keveredési tartomány alsó határán veszi fel, ahol 36.5 körüli, s a termoklin zona aljáig visszaesik az $S = 35$ értékre. A sós víz állapotegyenlete jó közelítéssel

$$\varrho = \varrho_0 (1 - \alpha(T - T_0) + \gamma(S - S_0)). \quad (12.7)$$

Itt γ a hőtágulási együttható analogonja, s azt adja meg, hogy mennyit nő a sűrűség az $S_0 = 35$ referenciaértéktől vett egységnyi szalinitásnövekmény hatására. Értéke tengervízre $\gamma = 7 \cdot 10^{-4}$. Egy százaléknyi szalinitásváltozás 7 ezreléknyi sűrűségváltozásra vezet.

A tengervíz (12.7) állapotegyenlete alapján magyarázható a sótartalom- és hőmérsékletkülönbségek által hajtott mélyóceáni áramlás, a termohalin vízkörzés kialakulása. Az egész Atlanti-óceánban erősebb a párolgás mint a többi medencében², ezért a víz sótartalma itt a legnagyobb. Amikor ez az amúgyis sós víz az Északi-sark környékére érve a felszínen lehűl, akkor sűrűsége már meghaladja a mélyebb szinteken levőét, s ezért lassan süllyed. Ez a hatás mozgatja az ún. nagy óceáni szállítószalagot, mely a mélyre került vizet először a Déli-sark, majd onnét az Egyenlítő környékére sodorja, ahol az ismét a felszínre kerül. Az áramlás nagyon lassú, a felszínre kerülésig ezer év is eltelhet, de olyan nagy mennyiségű vizet mozgat, hogy alapvetően meghatározza a Föld hőháztartását, s ezzel éghajlatát.

Mivel a hőtágulás és a koncentráció hatása ellenkező előjelű, a legérdekesebb kettős diffúziós esetek akkor adódnak, amikor mind a hőmérséklet-, mind a koncentráció-eloszlás azonos tendenciát mutat a magasság függvényében, mert ilyenkor gyengítik egymás hatását.

A jelenség megértéséhez hangsúlyozandó, hogy a sókoncentráció maga is aktív változó, hiszen az $S'' = S - S_0$ szalinitásváltozás tér- és időfüggő, s kielégíti a

$$\frac{dS''}{dt} = \kappa_S \Delta S'' \quad (12.8)$$

²Ennek oka az, hogy az Amerikai kontinens felől érkező levegő a Sziklás-hegységen és más hegyvonulatokon átkelve nedvességének jelentős részét elveszti, s ugyanakkor az Afrika felől érkező levegő is igen száraz.

diffúziós egyenletet, ahol κ_S a só vízre vonatkozó diffúziós állandója. Természetesen az (5.108) hődiffúziós egyenlet is érvényben van, a két komponens diffúziója tehát verseng egymással. Az instabilitás kialakulását elősegíti, hogy a só diffúziója sokkal lassabb a hő diffúziójánál:

$$\kappa_S \ll \kappa. \quad (12.9)$$

A konkrét számérték vízben $\kappa_S = 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, tehát a hődiffúzió mintegy százszor gyorsabb. A teljes sűrűségváltozáshoz a (12.7) állapotegyenlet szerint most mindkét komponens ad járulékot:

$$\frac{\varrho''}{\varrho_0} = -\alpha T'' + \gamma S''. \quad (12.10)$$

A teljes hidrodinamikai egyenletrendszer a következő alfejezet mutatja be.

Az edény alja és teteje közötti jellegzetes ΔS sótartalomkülönbséghez is hozzárendelhető egy dimenziótlan szám, az

$$Rs = \frac{g\gamma\Delta S H^3}{\nu\kappa}, \quad (12.11)$$

szalinitási Rayleigh-szám. Jelentése

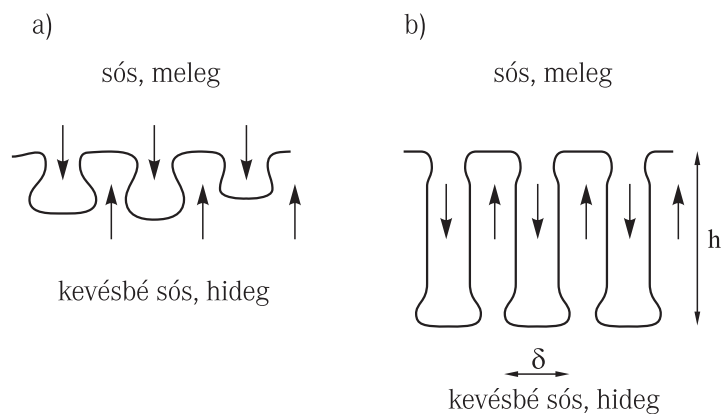
$$Rs = \frac{\text{szalinitási felhajtóerő}}{\text{viszkózus erő}}. \quad (12.12)$$

A ΔS sótartalomkülönbség és Rs definíció szerint akkor pozitív, ha alul sósabb a folyadék. Az (5.110) Rayleigh-szám jelentése most annyiban módosul, hogy az csak a hőmérsékletkülönbségből adódó felhajtóerőt tartalmazza. Az áramlásmentes állapot valamilyen Ra_c, Rs_c kritikus értéknél szűnik meg, de az igazán érdekes konvekciós formák ennél jóval nagyobb értékekre alakulnak ki, s ott függetlenek a peremfeltételektől.

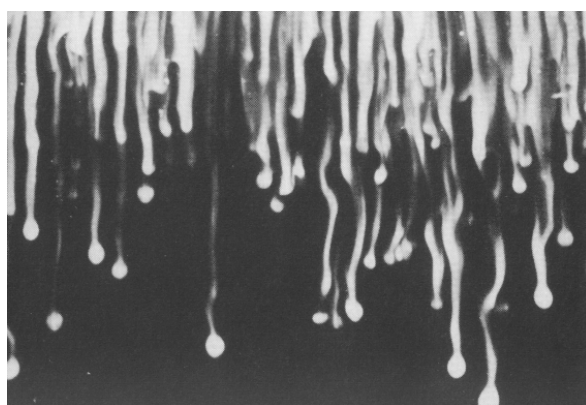
A konvekciós folyamat függ viszont attól, hogy melyik komponens a destabilizáló. Vizsgáljuk először, mi történik, ha meleg és sós folyadék kerül fölültre, $Ra, Rs < 0$, de a sűrűség maga fölfelé csökken. A hőmérséklet okozta sűrűségváltozás szempontjából ez stabil eloszlás, tehát a só a destabilizáló tényező. Mivel a sódiffúzió nagyon lassú, egy folyadékelem úgy tekinthető, mintha vékony hártáival lenne körülvéve, mely sócserét nem, csak hőcserét enged meg. A felső helyzetből kissé lefelé mozdított folyadékelem tehát lehűl, de sótartalma nem változik, ezért környezeténél nehezebb lesz, s tovább süllyed. Hasonló okokból az alulról felfelé elmozdított folyadékelem emelkedik. Az eredeti, negatív gradiensű sűrűségeloszlás tehát a sótartalombeli inhomogenitás miatt instabil. Laboratóriumi megfigyelések mutatják, hogy a konvekció ún. só-ujjak megjelenésével jár, melyek lassan lefelé nyúló keskeny sós nyalábok, s közöttük a kevésbé sós víz áramlik felfelé (12.2 ábra). A só-ujjak kialakulása lassú folyamat, mely csak gyakorlatilag nyugvó, vagy egyenletesen mozgó közegben mehet csak végbe.

Egyszerű megfontolással becslés adható a ΔS szalinitáskülönbség hatására kialakuló sós ujjak δ vastagságára, pontosabban vastagságuk és hosszuk δ/h arányára. A közel stacionárius áramlásban az (5.108) hődiffúziós egyenlet advectiv deriváltja, melyben a függőleges áramlással kapcsolatos járulék a jelentős, azonos nagyságrendű a diffúziós taggal: $W/h \approx \kappa/\delta^2$, ahol W a só-ujjak átlagos süllyedési sebessége. A viszkózus erő becslésében felhasználtuk, hogy az ujjak δ vastagsága lényegesen kisebb h hosszuknál. Az ujjak és a mellettük levő föláramló tartomány hőmérséklete közel azonos, ezért a felhajtóerő elsősorban a ΔS sótartalom-különbségből adódik. Ezt kell kompenzálnia a viszkózus erőnek, mely elsősorban a függőleges irányú sebességek okozta nyírásból adódik: $g\gamma\Delta S \approx \nu W/\delta^2$. Mindkét feltételt összevetve

$$\frac{\delta}{h} \sim \left(\frac{\kappa\nu}{g\gamma\Delta S h^3} \right)^{1/4}. \quad (12.13)$$



12.2 ábra: Só-ujjak képződése. a) Kezdeti fázis. b) Kifejlett állapot.



12.3 ábra: Ha hideg vízre enyhén sós vizet rétegzünk, akkor rövid időn belül néhány mm vastag só-ujjak képződnek.

Ha az ujjak hossza $h = 10$ cm és 1 ezreléknyi a só-tartalom-különbség, akkor δ milliméter nagyságrendűnek adódik, a kísérletekkel összhangban (12.3 ábra).

Folytonos rétegzettség esetén a $\gamma g \Delta S / h$ mennyiség tekinthető az $N^2 = -g \Delta \rho / (\rho_0 h)$ Brunt-Väisälä-frekvencia négyzetéhez a só-tartalomkülönbségből adódó járuléknak. E járulék abszolútértéke azonban ugyanolyan nagyságrendű, mint a teljes N^2 , hiszen a só-tartalom-, és a hőmérsékletkülönbség összemérhető sűrűségváltozást okoz. Ezért (12.13) alapján írható, hogy

$$\delta \sim \left(\frac{\kappa \nu}{N^2} \right)^{1/4}. \quad (12.14)$$

Az $N = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ értékével δ néhány cm-nek adódik.

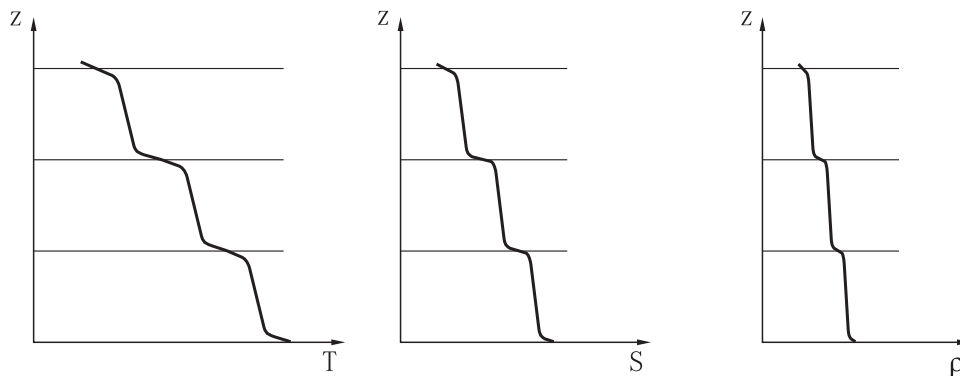
A só-ujjak képződéséhez szükséges feltételek többféleképpen is megvalósulhatnak tengerekben. A napsugárzás hatására a felső vízréteg a trópusokon erősen felmelegszik, de a párolgás miatt só-tartalma is feldúsul. Hasonlóan, melegebb sós víz kerülhet felülre hideg folyótorkolatok környékén, ahol az édesvíz a tengerfenékre folyik rá. A megfigyelések szerint a tengeri só-ujjak vastagsága néhány cm, hosszuk 30 cm és 1 m között van. Az ujjak jelentős só- és hőáramot biztosítanak a fölöttük és alattuk elhelyezkedő folyadékrétegek között. A só-ujj képződés kezdeti szakaszához hasonló folyamatok zajlanak le az ún. mammatusz felhőkben, melyekben bugyrok kialakulása figyelhető meg a felhőszint alatt (12.4 ábra), néha pl. az üllő felhők alsó határán is.

A másik érdekes eset az, amikor a meleg és sós folyadék kerül alulra, $Ra, Rs > 0$, de a teljes sűrűség továbbra is felfelé csökken. Ilyenkor nyilván a hőmérséklet a destabilizáló tényező.



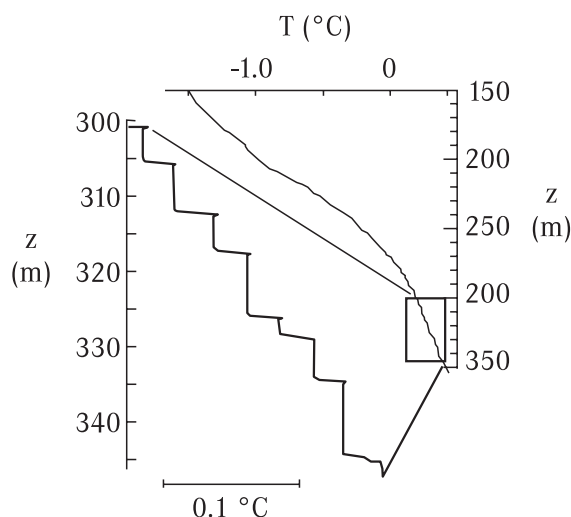
12.4 ábra: Mammatusz felhők alacsony felhőréteg alján ujjasodásra utalnak [www-loa.univ-lille1.fr/~vanb/Nuages/mammatus_dark.gif].

Ha egy kis folyadékelemet eredeti helyzetéből felfelé mozdítunk ki, akkor ritkább közegbe kerül, tehát visszaindul kiindulási helye felé. Hővezetés hiányában (a sódiffúzió amúgy is elhanyagolható) mozgása harmonikus rezgés a Brunt–Väisälä-frekvenciával. Hővezetés jelenlétében azonban kitérése során még le is hűl, azaz súlyosabb lesz, mint az ideális esetben. Ezért a folyadékelem egyre nagyobb amplitudóval rezeg kiindulási helyzete körül. E kettős diffúziós instabilitás miatt bonyolult áramlás alakul ki. A kísérleti tapasztalat szerint a végállapot az, hogy a folyadék rétegekre bomlik. Ennek következtében a hőmérséklet-, sótartalom- és sűrűségeloszlás lépcsőzetes (12.5 ábra). A sűrűség átlagos gradiense határozottan kisebb, mint a két diffundáló komponensé, hiszen azok ellenkező hatással vannak a sűrűségre. Mindhárom eloszlás a rétegek belsejében közel állandó, köztük pedig erős gradienssel rendelkezik. Egy-egy rétegben termikus konvekció zajlik (általában a rendezetlen termikus változatban), s teszi itt közel homogénné az egyes eloszlásokat. Másszóval az alulról történő fűtés beindítja a termikus konvekciót, de a stabilizáló sótartalomeloszlás megakadályozza, hogy az az egész folyadékrétegre kiterjedjen, s csak többé-kevésbé független rétegekre korlátozza. A lépcsőzetes hőmérsékleteloszlást tengeri megfigyelések bizonyítják (12.6 ábra). Itt a lépcsők vastagsága 10 – 40 m, a köztük elhelyezkedő erős gradiensű átmeneti réteg néhányszor 10 cm vastag, s bennük rendszerint so-ujjak képződnek.



12.5 ábra: Rétegeképződés: Az eredetileg felfelé egyenletesen csökkenő hőmérséklet- és sótartalom hatására a kettős diffúziós instabilitás miatt közel homogén vízszintes rétegek alakulnak ki, melyekben termikus konvekció zajlik.

Egy szorosan kapcsolódó jelenség a jégtömb olvadása a nála ΔT -vel magasabb hőmérsékletű,

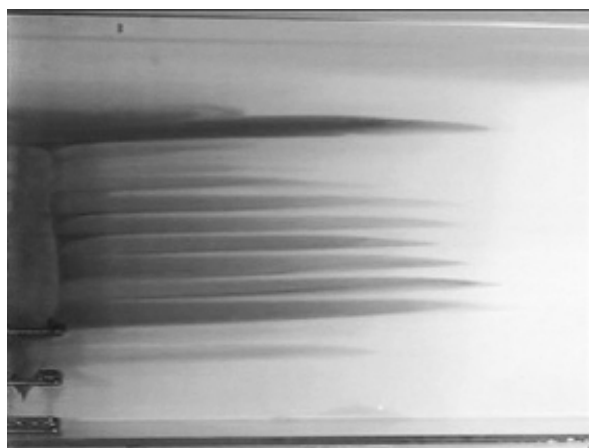


12.6 ábra: Jég réteg alatti tengervízben megfigyelt lépcsőzetes hőmérsékleteloszlás.

sótartalom által stabilan rétegzett folyadékba. Ez a folyamat zajlik a jéghegyek olvadásakor (melyek édesvízi jégből képződnek). A felolvadt édesvíz szabályosan elhelyezkedő vízszintes rétegekben terjed szét (melyek között a meleg sós víz a jégtömb felé áramlik). A folyamatban létezik egy természetes távolságskála, az a távolság, mellyel a ΔT hőmérsékletkülönbségű víz feljebb emelkedne az adott rétegzettségű folyadékban. A sós folyadék hőmérsékletére melegedett édesvíz relatív sűrűsége $\alpha\Delta T$ -vel csökken, s ez a sűrűség a $\Delta S/H$ szalinitásgradiensű folyadékban d elmozdulással feljebb található. Tehát $\alpha\Delta T = \gamma\Delta S d/H$, melyből $d = \alpha\Delta T H / (\gamma\Delta S)$. Az olvadásakor megfigyelt d rétegvastagság ezzel a hosszúsággal arányos, tehát a relatív vastagság

$$\frac{d}{H} \sim \frac{\alpha\Delta T}{\gamma\Delta S} = \frac{Ra}{Rs}. \quad (12.15)$$

20 fokos hőmérsékletkülönbség és 40 ezrelékes szalinitáskülönbség esetén az Ra/Rs arány 1/14, azaz 20 cm vastag folyadékban a rétegtávolság mintegy 3cm (12.7 ábra).



12.7 ábra: Édesvízű jégtömb olvadása sógradienssel sztratifikált szobahőmérsékletű vízbe. Az olvadt víz néhány cm távolságra elhelyezkedő rétegekben terjed szét.

12.2.2 A kettős diffúziós konvekció egyenletei

A hőmérsékletingadozást a jellegzetes ΔT hőmérsékletkülönbség egységében, a nyomást a $\rho_0 U^2$ egységben mérve, és a hővezetés által megszabott $U = \kappa/H$ sebességgel a

$$\mathbf{v} \rightarrow \frac{\kappa}{H} \mathbf{v}, \quad T'' \rightarrow \Delta T T'', \quad S'' \rightarrow \Delta S S'', \quad p'' \rightarrow \rho_0 \frac{\kappa^2}{H^2}, \quad t \rightarrow \frac{H^2}{\kappa} t \quad (12.16)$$

átskálázást használjuk. Az utolsó kifejezés azt jelenti, hogy az időegység a hődiffúziós idő. Ezzel az (5.14) Navier–Stokes-egyenlet, az (5.108) hődiffúziós és a (12.8) sódiffúziós egyenlet a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad} p'' + Ra Pr T'' \mathbf{n} - Rs Pr S'' \mathbf{n} + Pr \Delta \mathbf{v}, \quad (12.17)$$

$$\frac{dT''}{dt} = \Delta T'', \quad (12.18)$$

$$\frac{dS''}{dt} = \frac{\kappa_S}{\kappa} \Delta S'' \quad (12.19)$$

alakot ölti. Itt \mathbf{n} a függőleges egységvektor, és megjelent a

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (12.20)$$

Prandtl-szám, a kinematikai viszkozitás és a hődiffúziós állandó hányadosa. A Prandtl-szám természetes közegeinkre egységnyi rendű, vízben 7, levegőben 0,7 (a földköpenyben viszont 10^{23}).

A Navier–Stokes-egyenlet rotációját véve kapjuk az $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot} \mathbf{v}$ örvényvektor egyenletét. A 8.1 fejezetben látottakat megismételve

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \text{grad}) \mathbf{v} + Ra Pr \mathbf{n} \times \text{grad} T'' - Rs Pr \mathbf{n} \times \text{grad} S'' + Pr \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (12.21)$$

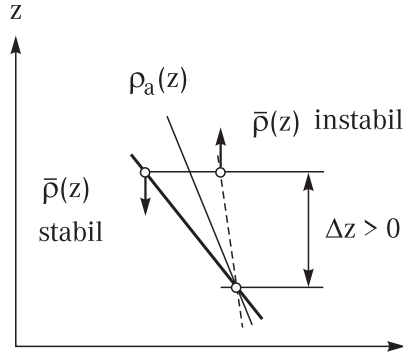
A hőmérséklet- és szalinitáskülönbség örvényességet kelt, s végül ez indítja be a konvekciót. Innét látszik, hogy legalábbis lineáris közelítésben a Pr Prandtl-szám csak az időfüggést befolyásolja. Ezért nem jelenik meg a konvekció kialakulásának feltételében. A termikus konvekció egyenleteit az $S'' \equiv 0$ határesetben kapjuk.

12.3 A potenciális sűrűség és potenciális hőmérséklet

Jelentős, több kilométeres mélység- vagy magasságkülönbségeket vizsgálva, mind a nyugvó levegő, mind a nyugvó víz sűrűsége érzékelhetően függ a függőleges koordinátától. A lehetséges egyensúlyi rétegzettségék között kitüntetett szerepet játszik a $\rho_a(z)$ sűrűségeloszlás, az ún. adiabatikus sűrűségeloszlás (12.8 ábra). Ez a közeg olyan ideális termodinamikai egyensúlyi állapotának felel meg, melyben a folyadékrészek bármely csekély elmozdulása hőátadás nélküli. Ilyenkor tehát az egész közeg *entrópiája*, pontosabban entrópiásűrűsége állandó. Ebben a termodinamikai értelemben globális egyensúlyi állapotban két folyadékrész felcserélése nem vezet semmilyen makroszkopikus mozgáshoz. Az adiabatikus eloszlás tehát megadja, hogy a közeg valamely térfogatelemének sűrűsége hogyan változik, ha azt gravitációs térben más szintre juttatjuk hőközlés nélkül.

Az adiabatikus sűrűségeloszlás a $dp = -\rho g dz$ hidrosztatikai egyenletből kapható meg, felhasználva, hogy nyomás- és sűrűségváltozások között az adiabatikus (állandó entrópiához tartozó) állapotegyenlet teremt kapcsolatot. A dp nyomásváltozást az ennek megfelelő sűrűségváltozással helyettesítve: $dp = (\partial p / \partial \rho)_a d\rho_0$, azt kapjuk, hogy az adiabatikus sűrűséggradiens azon a szinten, ahol a sűrűség értéke ρ

$$\frac{d\rho_a(z)}{dz} = -\rho g \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_a = -\frac{\rho g}{c^2}. \quad (12.22)$$



12.8 ábra: A rétegzettség stabilitásának feltétele összenyomható közegben. A sűrűséggradiens abszolútértékének az adiabatikus eloszlás gradiensénél (vékony vonal) nagyobbak kell lennie (vastag vonal). A szaggatott vonal instabil rétegzettséghez tartozik.

A megjelölt parciális derivált az adiabatikus kompresszibilitás és a sűrűség szorzata, mely egyben a közegbeli c hangsebesség reciprokának négyzete. A légkörben az adiabatikus sűrűséggradiens felszíni értéke $0,1 \text{ kg/m}^3$ kilométerenként, az óceánban 4 kg/m^3 kilométerenként.

Hidrodinamikai folyamatok következtében természetesen az adiabatikustól eltérő $\bar{\rho}(z)$ rétegzett eloszlás is kialakulhat. Ennek stabilitása egyszerűen meghatározható a $\rho_a(z)$ -vel történő összehasonlításból. Ha a $\bar{\rho}(z)$ eloszlás nagyobb gradiensű (12.8 ábra vastag vonal), akkor a rétegzettség stabil, hiszen adott pontból a folyadékelemet felfelé mozdítva, annak sűrűsége $\rho_a(z)$ szerint csökken, azaz nagyobb lesz új környezete sűrűségénél. Elengedés után a folyadékelem visszaindul eredeti helyzete felé. A $\bar{\rho}(z)$ -nél kevésbé meredekebb eloszlás esetén fordított a helyzet (12.8 ábra szaggatott vonal), az ilyen sztratifikáció instabil, nem marad fenn. Ebből az is következik, hogy a $\rho_a(z)$ adiabatikus eloszlás hidrodinamikai szempontból marginális stabilitású.

A stabilitás erőssége most is a Brunt–Väisälä-frekvencia segítségével adható meg, a konkrét alak azonban eltér (5.4)-től, hiszen az adiabatikus sűrűségváltozást is figyelembe kell venni. Az 5.1 fejezetben alkalmazott gondolatmenetet megismételve, a $\bar{\rho}(z)$ rétegzettség esetén a $z + \Delta z$ szintre juttatott részecskére ható felhajtóerő abból adódik, hogy a részecske sűrűsége az új szinten $\rho_a(z + \Delta z)$, a környezeté viszont $\bar{\rho}(z + \Delta z)$. A felhajtóerő által okozott gyorsulás

$$g \frac{\bar{\rho}(z + \Delta z) - \rho_a(z + \Delta z)}{\bar{\rho}(z)} \approx g \frac{1}{\bar{\rho}(z)} \left(\frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} - \frac{d\rho_a(z)}{dz} \right) \Delta z. \quad (12.23)$$

Ha a sűrűség felfelé gyorsabban csökken, mint az adiabatikus, akkor akármilyen irányú is a Δz kitérés, a gyorsulás mindig vele ellentétes. Így kis kitérésekre harmonikus rezgés alakul ki az $N(z)$ Brunt–Väisälä-frekvenciával, ahol

$$N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \left(\frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} - \frac{d\rho_a(z)}{dz} \right) = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \left(\frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} + \frac{\bar{\rho}g}{c^2} \right). \quad (12.24)$$

A második átalakításban felhasználtuk az adiabatikus gradiens (12.22) alakját. Az 5.1 fejezetben kapott (5.4) kifejezés tehát a teljesen inkompresszibilis (végtelen hangsebességű) határesetnek felel meg. Laboratóriumi kísérletekben az mindig jó közelítés, mert az ott előállított sűrűséggradiensek jóval nagyobbak az adiabatikusnál. Általában igaz, hogy a közeg összenyomhatósága miatt a Brunt–Väisälä-frekvencia kisebb annál, amit teljes összenyomhatatlanságot feltételezve kapnánk.

Konkrét példaként tekintsük az ideális gáz esetét, mely a száraz légkör igen jó leírásának bizonyul. Az adiabatikus állapotegyenlet

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (12.25)$$

ahol $\gamma = c_p/c_v$ a két fajhő hányadosa, p_0 a felszíni nyomás, ρ_0 pedig a felszíni sűrűség. A (12.22) egyenlet segítségével az adiabatikus gradiens

$$\frac{d\rho_a}{dz} = -\frac{\rho^2 g}{\gamma p}. \quad (12.26)$$

Ennek számértéke valóban $0,1 \text{ kg/m}^3$ a felszínen.

A Brunt–Väisälä-frekvencia a (12.24) összefüggés alapján számolható. Annak érdekében, hogy elkerüljük az adiabatikus gradiens levonását, érdemes bevezetni egy olyan új sűrűségfogalmat, mely a valódi és az adiabatikus eloszlásnak megfelelő sűrűség különbségével arányos. Tekintsük az ideális gáz

$$\sigma \equiv \rho \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-1/\gamma} \quad (12.27)$$

ún. *potenciális sűrűségét*. A (12.25) állapotegyenletből ez éppen a ρ_0 referenciasűrűség. A potenciális sűrűség tehát az a sűrűség, melyet akkor kapunk, ha az adott p nyomású, ρ sűrűségű gázt *adiabatikusan* a p_0 referencianyomású állapotba hozzuk. Közvetlen behelyettesítéssel látszik, hogy a Brunt–Väisälä-frekvencia kifejezhető, mint

$$N^2(z) = -\frac{g}{\sigma(z)} \frac{d\sigma(z)}{dz}. \quad (12.28)$$

Az ideális gáz Brunt–Väisälä-frekvenciáját tehát a sztratifikációhoz tartozó potenciális sűrűség logaritmikusan deriváltja határozza meg. A rétegzettség akkor stabil, ha a potenciális sűrűség csökken a magassággal, s akkor marginális, ha a potenciális sűrűség állandó. A potenciális sűrűség tehát természetes általánosítása a hagyományos sűrűségnek összenyomható közegekre.

Mivel a hőmérséklet könnyebben mérhető mennyiség, mint a sűrűség, érdemes átírni a fenti összefüggéseket a \bar{T} egyensúlyi hőmérsékleteloszlás gradiensére. Az ideális gáz általános állapotegyenlete szerint

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (12.29)$$

ahol $R = c_p - c_v$ a gázállandó. A levegő állandó nyomáson mért fajhője $c_p = 7/2R = 1010 \text{ J/(kg fok)}$. A (12.29) állapotegyenlet segítségével az egyensúlyi sűrűséggradiens $d\bar{\rho}/dz = d\bar{p}/dz(1/RT) - d\bar{T}/dz(p/RT^2)$, ahol \bar{p} a $\bar{\rho}$ sűrűséghez tartozó nyomáseloszlás. A nyomásgradienst a hidrosztatikai egyensúlyból kifejezve: $d\bar{\rho}/dz = -\bar{\rho}g$, s mivel $(\partial\rho/\partial p) = 1/(\gamma RT)$, a Brunt–Väisälä-frekvencia (12.24) alakjára azt kapjuk, hogy

$$N^2(z) = \frac{g}{\bar{T}(z)} \left(\frac{d\bar{T}(z)}{dz} - \frac{g}{c_p} \right). \quad (12.30)$$

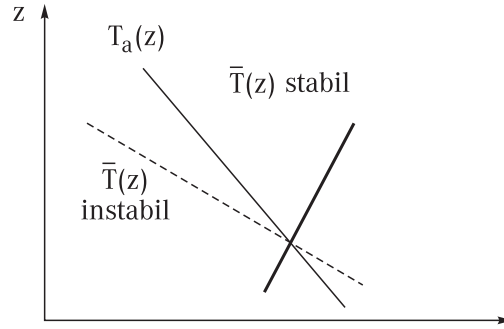
Innét leolvasható, hogy az adiabatikus hőmérsékletgradiens ideális gázra

$$\frac{dT_a}{dz} = -\frac{g}{c_p}. \quad (12.31)$$

Ennek számértéke a légkör hétköznapi tapasztalatból ismert kilométerenkénti 10 fokos adiabatikus hőmérsékletgradiensét adja. A rétegzés akkor stabil, ha a hőmérsékletgradiens ennél kevésbé negatív (12.9 ábra vastag vonal). Ekkor ugyanis a felfelé mozdított légsomag hidegebb és ezért sűrűbb lesz, mint környezete, s ezért magától lefelé mozdul. Vegyük észre, hogy az izoterm atmoszféra is stabil. A felfelé melegedő levegőoszlop (inverziós réteg) még stabilabb.

Az adiabatikus gradiens explicit levonása helyett ismét érdemes egy új, hőmérséklet jellegű mennyiséget bevezetni, a

$$\theta \equiv T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma-1} \quad (12.32)$$



12.9 ábra: A rétegzettség stabilitásának feltétele ieális gázban, a légkörben. A hőmérséklet-gradiensnek az adiabatikus gradiensnél (vékony vonal) nagyobbak kell lennie (vastag vonal), s lehet pozitív is. A szaggatott vonal instabil rétegzettséghez tartozik.

potenciális hőmérsékletet. Ez az a hőmérséklet, melyet akkor kapunk, ha az adott p nyomású, T sűrűségű gázt *adiabatikusan* a p_0 referencianyomásra hozzuk. Közvetlen behelyettesítéssel kapjuk, hogy a Brunt–Väisälä-frekvencia kifejezhető az egyensúlyi $\bar{\theta}(z)$ potenciális hőmérséklettel:

$$N^2(z) = \frac{g}{\bar{\theta}(z)} \frac{d\bar{\theta}(z)}{dz}. \quad (12.33)$$

Az eredmény következik abból is, hogy a potenciális sűrűség és potenciális hőmérséklet szorzata (12.34) és (12.37) szerint $\sigma\theta = p_0/R = \text{állandó}$. A rétegzettség akkor stabil, ha a közeg potenciális hőmérséklete nő a magassággal, s marginális, ha a potenciális hőmérséklet helyfüggetlen. A 12.1 táblázat a hagyományos és a potenciális mennyiségek tipikus légköri eloszlását mutatja.

z (km)	$\bar{\rho}$ (kg/m ³)	$\bar{\sigma}$ (kg/m ³)	\bar{T} (fok)	$\bar{\theta}$ (fok)	\bar{p} (kPa)
0	1.22	1.22	15	15	100
2	1.01	1.18	2	20	80
4	0.82	1.15	-11	27	62
6	0.66	1.13	-24	36	47
8	0.53	1.09	-37	43	36
10	0.41	1.05	-50	55	26

12.1 táblázat: A sűrűség, hőmérséklet, potenciális változataik és a nyomás magasságfüggése száraz levegőben. A potenciális hőmérséklet nő, annak ellenére, hogy a hagyományos hőmérséklet csökken a magassággal. Ez a légkör stabilitását fejezi ki.

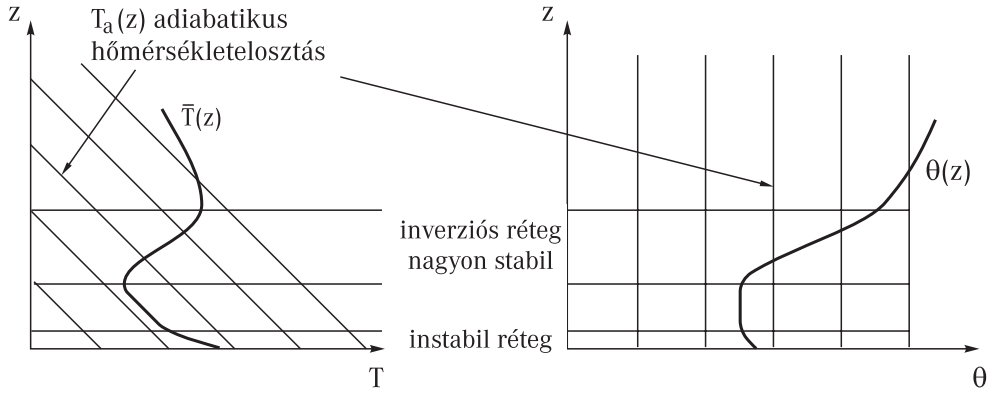
Mind a potenciális sűrűség, mind a potenciális hőmérséklet bevezetése olyan új állapotjelzőkre vezet, melyek adiabatikus változásokban állandók. A $(\bar{\rho}, z)$, (\bar{T}, z) síkon ez olyan transzformációt jelent, mely az adiabatikus görbéket függőleges egyenesekbe viszi át. Különösen áttekinthető képre jutunk a hőmérséklet-inverzió esetében (12.10 ábra)

Általános közeg állapotegyenlete nem hozható olyan kompakt formára, mint az ideális gázé. Ilyenkor a potenciális sűrűség általános definíciója:

$$\bar{\sigma} = \bar{\rho}(p) - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\sigma} dp', \quad (12.34)$$

állandó entrópia mellett. A ρ sűrűségből tehát éppen az adiabatikus kompresszibilitással kapcsolatos járulékot vonjuk le, s ezzel eltávolítjuk a nyomásfüggést³. Mivel σ ismerete egyenértékű az

³A 5.2 és 5.13 ábrákon valójában a potenciális sűrűséget mutatják.



12.10 ábra: Az ideális gáz potenciális hőmérsékletére történő áttérés a \bar{T} , z sík olyan transzformációjának felel meg, mely az adiabatákat függőleges egyenesekbe viszi át. Az inverziós réteget mindkét ábrázolásban jelöltük.

entrópiasűrűség megadásával, a felírásban jelöltük, hogy az adabatikus deriválás állandó potenciális sűrűség melletti deriválásnak felel meg. A potenciális sűrűség továbbra is az a sűrűség, melyet a közeg felvesz, ha a p nyomású állapotából a p_0 nyomású állapotba adiabatikusan átvisszük. Az adiabatikus kompresszibilitás kapcsolatos a hangsebességgel, s ezért a potenciális sűrűség egyértelműen meghatározható a hangsebesség nyomásfüggésének ismeretében. A vízre vonatkozó eredmény pl. bonyolult közelítő kifejezésekkel is megadható. Mi itt táblázatos formában mutatjuk be a potenciális sűrűség eloszlását egy példán (12.2 táblázat).

A potenciális sűrűség általános kifejezését a mélység szerint deriválva és (12.22)-t használva

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dz} \left(1 + \int_{p_0}^p \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\sigma} dp' \right) = \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} + \bar{\rho}g \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_a. \quad (12.35)$$

Mivel a bal oldali zárójelben (12.34) szerint a sűrűség potenciális sűrűség szerinti $(\partial \bar{\rho} / \partial \bar{\sigma})_p$ deriváltja áll állandó nyomás mellett, a (12.24) Brunt–Väisälä-frekvencia négyzetére azt kapjuk, hogy

$$N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \frac{d\bar{\sigma}(z)}{dz}. \quad (12.36)$$

A Brunt–Väisälä-frekvencia frekvencia négyzete tehát mindig arányos a potenciális sűrűség gradiensével. A $(\partial \rho / \partial \sigma)_p$ derivált általánosan nem adható meg expliciten, a konkrét közegtől függ. Víz esetén nem sokkal tér el 1-től. A táblázatból az is látszik, hogy a sűrűség és a potenciális sűrűség növekménye még 4 km mélységben sem nagyon különbözik.

A potenciális hőmérséklet általános definíciója analóg módon:

$$\theta = T(p) - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{\theta} dp', \quad (12.37)$$

állandó entrópia mellett. Ez a mennyiség a $(\partial T / \partial p)_a$ adiabatikus hőmérsékletgradiens nyomásfüggésének méréséből kapható meg bármely közegben. A vízre vonatkozó értékek a táblázatból leolvashatók. A potenciális hőmérséklet nem tartalmazza a hagyományos hőmérséklet nyomásból adódó járulékat, s ezért csak az entrópia függvénye. Általános közeg esetén már *nem* igaz, hogy a potenciális hőmérséklet és a potenciális sűrűség szorzata állandó. Sőt, a potenciális hőmérséklet gradiense *nem* kapcsolatos közvetlenül a Brunt–Väisälä-frekvenciával.

A potenciális hőmérséklet és a potenciális sűrűség egymástól nem függetlenek, ezért adott esetben el kell döntenünk, hogy melyik mennyiséggel dolgozunk. Mindenképpen a hagyományos sűrűség (vagy hőmérséklet) helyett választunk új változót. Akármelyiket választjuk is, az új

z (km)	$\bar{\rho} - \rho_0$ (kg/m ³)	$\bar{\sigma} - \rho_0$ (kg/m ³)	\bar{T} (fok)	$\bar{\theta}$ (fok)	\bar{p} (100 kPa)
0	25.4	25.4	7.5	7.5	1
1	32.1	27.4	3.2	3.1	1009
2	37.1	27.7	1.9	1.8	2025
3	41.7	27.8	1.7	1.4	3044
4	46.2	27.8	1.6	1.3	4068.

12.2 táblázat: A sűrűség, hőmérséklet, potenciális változataik és a nyomás jellegzetes mélységfüggése tengervízben (a sótartalom közel állandó). A ρ_0 sűrűség itt az édes víz 1 kg/m³ normál sűrűsége. A potenciális hőmérséklet gradiense nagyobb, mint a potenciális sűrűségé, de csak az utóbbi kapcsolatos a Brunt–Väisälä-frekvenciával.

mennyiséggel a rendszer *entrópiasűrűségét* mérjük. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a potenciális mennyiségek függenek a közegben elosztott anyagok koncentrációjától is, mint pl. a légkörben a vízgőztartalomtól, vagy a tengervízben a sótartalomtól. Jelenlétük fontossága érzékelhető abból, hogy a telített vízgőzt tartalmazó levegő hőmérsékletének csökkenési üteme nem 10 fok hanem csak 5 – 6 fok kilométerenként. Az entópiasűrűséggel való kapcsolat tehát csak állandó koncentrációk esetén közvetlen.

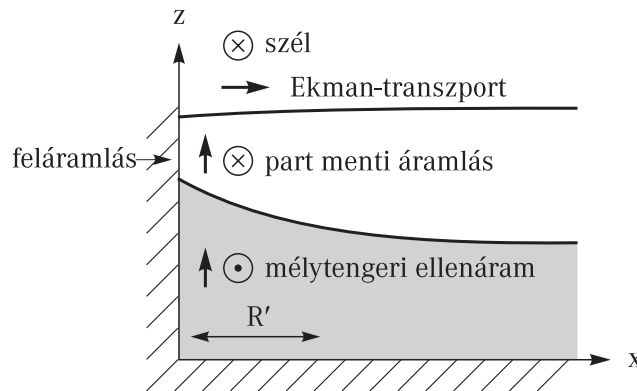
A potenciális termodinamikai mennyiségekre való áttérés sokszor hasznos a rendszer *dinamikája* szempontjából is. Az ideális áramlás során ugyanis hőátadás nem történik, s ezért az entrópia állandó. Az áramló közeg bármely részecskéjének potenciális sűrűsége vagy potenciális hőmérséklete ezért a mozgás során állandó, σ vagy θ tehát hidrodinamikai *mozgásállandók* mindaddig, amíg a disszipatív folyamatok elhanyagolhatók (és jelentős koncentrációváltozások, pl. csapadékképződés nem következik be). A nagyskálájú mozgások az állandó potenciális sűrűségű ill. potenciális hőmérsékletű felületek mentén történnek. Ezek a felületek természetesen nem mindig esnek egybe a lokális vízszintes felülettel, de térben lassan változnak. Így új megvilágítást nyer az a felismerés, hogy a nagyskálájú légköri és óceáni mozgások kétdimenziósak.

13. fejezet

A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadéokra

13.1 Partmenti feláramlások

Ha a partvonal mentén olyan szél fúj, melynek következtében az Ekman-transzport a partvonalra merőlegesen kifelé mutat, akkor feláramlás indul meg. Kétrétegű közegben ennek hatása sokkal nagyobb a belső felszín elmozdulására, mint a külső felszínére. Az egyszerűség kedvéért (az y tengely menti) függőleges partot, csak x -től függő áramlást és felszíni alakokat feltételezve (13.1 ábra), az egyenletek felírhatók. Új elem a felszíni szélnyírás, mely a szél irányára merőlegesen, azaz az északi féltéken ($f_0 > 0$) a pozitív y irányba mutat, s melyet térben és időben is állandónak tekintünk: $\tau_y \equiv \tau_0$. A 4.5 fejezetben látottak szerint ez a $\tau_0/(\rho_0 H_1)$ gyorsulás megjelenésére vezet a H_1 átlagos vastagságú felső szint v_1 sebességkomponensének egyenletében.



13.1 ábra: Part menti feláramlás a partra merőlegesen a tenger felé mutató nyírás esetén kétrétegű közegben az északi féltéken. Állandó nyírás esetén a belső felület időben egyenletesen emelkedik. Ezzel párhuzamosan a felső rétegben a széllel párhuzamos, alul ezzel ellentétes áramlás jön létre, mely időben szintén egyenletesen erősödik.

Feltéve, hogy az áramlás lassú, a teljes időderiváltakban az advektív tag elhagyható. Szélnyírás hiányában a folyadék nyugalmi állapotban van, a sebességek eltűnnek és a rétegvastagságok a konstans H_1 , H_2 értékek. A nyugalmi állapottól történő kis eltéréseket leíró (6.13) Euler-egyenletek

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = f_0 v_1 - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -f_0 u_1 + \frac{\tau_0}{\rho_0 H_1}, \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = f_0 v_2 - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = -f_0 u_2, \quad (13.2)$$

ahol a belső felszíni alak helyett a $h \approx H_1 - \chi$ felső rétegvastagságot használjuk. Ugyanebben a közelítésben a (6.14) kontinuitási egyenletek

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad -\frac{\partial h}{\partial t} = -H_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (13.3)$$

alakúak. Az Euler-egyenletek kivonásával az $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ relatív sebességre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +f_0 v - g' \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -f_0 u + \frac{\tau_0}{\rho_0 H_1}. \quad (13.4)$$

Ebből látszik, hogy a felső rétegvastagság egyenletében az átlagos rétegvastagságok harmonikus közepe jelenik meg:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (13.5)$$

Ez máris arra utal, hogy a problémában a (6.18) belső Rossby-sugár lesz a jellemző hosszúság-paraméter.

Az egyenletek hasonlóak a 11.5 fejezetben tárgyalt viharhullámokéhoz. Mivel a nyírás állandó, a hidrodinamikai gyorsulás a partvonal mentén nem nulla. Az arra merőleges áramlás viszont lehet stacionárius. Az u komponens időbeni állandóságát feltételezve, a kontinuitási egyenletből azt kapjuk, hogy h időben lineárisan változik, a v komponens Euler-egyenletéből pedig azt, hogy v is. A nyírás tehát egyenletesen erősíti a parttal párhuzamos áramlást (és a mélytengeri ellenáramlást) és egyben állandó belső szintemelkedést biztosít. A lineáris időfüggés leválasztásával közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk, mely az $u(x=0) = 0$ feltétellel megoldható. A teljes megoldás:

$$u = \frac{\tau_0}{f_0 \rho_0 H_1} \left(1 - e^{-x/R'}\right), \quad v = \frac{\tau_0 t}{\rho_0 H_1} e^{-x/R'}, \quad (13.6)$$

$$h = H_1 - \frac{\tau_0 t}{R' f_0 \rho_0} \frac{H_2}{H} e^{-x/R'}. \quad (13.7)$$

A térbeli lecsengést a belső Rossby-sugár határozza meg, a kelet-nyugati sebességkomponens amplitudóját a nyírás, az észak-déliét és a szintemelkedését pedig a τt nyírási impulzus. Átlagos $\tau = 0,1 \text{ N/m}^2$ nyírási erősség, $g' = 0,03 \text{ m/s}^2$ redukált gyorsulás és $H_1 = 100 \text{ m}$, $H_2 \gg H_1$ alsó mélység esetén a feláramlás dh/dt erőssége a part mentén 5 m naponként. Peru partjai mentén tipikusan felszálló áramlás figyelhető meg. A déli szél gyengülése miatt a hideg víz feláramlási erőssége csökkenhet. Az ezzel járó felmelegedés tekinthető az El Nino-jelenség kialakulásában az első lépésnek.

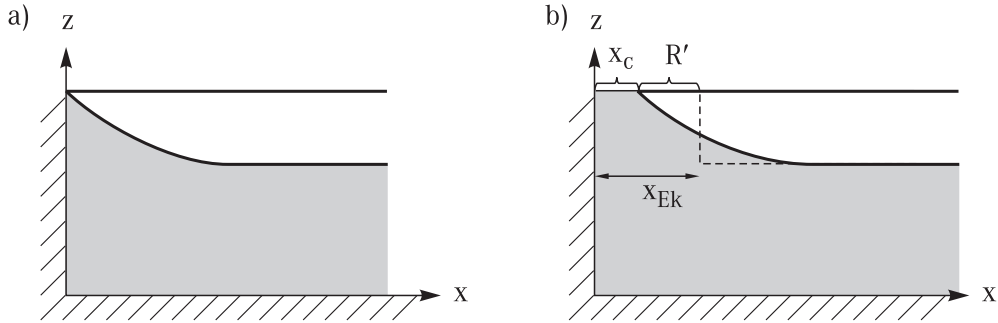
Annak ellenére, hogy az eredmény a lineáris közelítés keretén belül érvényes, érdemes első tájékozódásként hosszabb időkre is alkalmazni, amikor a belső felszíni elmozdulás már nem kicsi. Az elválasztó felület a függőleges part mentén állandóan emelkedik, míg egyszer eljut a külső felszínre (13.2a ábra). Ezután bekövetkezik az, hogy az alsó sűrű közeg a part mellett teljesen felszínre kerül, s a parttól valamilyen x_c távolságban *megjelenik egy front* (13.2b ábra). Ha a szél azután elül, a front stacionárius maradhat, hiszen éppen ez az exponenciálisan lecsengő alak megoldása a geosztrofikus egyenletnek is. Ekkor $h(x)$ a partvonal mellett formálisan negatív, s x_c -t az a feltétel határozza meg, hogy ott $h(x_c) = 0$. A (13.7) egyenletből a termoklin zónára jellemző $H_2 \approx H$ esetben

$$e^{x_c/R'} = \frac{\tau_0 t}{R' f_0 \rho_0 H_1}. \quad (13.8)$$

A Rossby-sugárhoz képest kis part menti x_c távolságokra

$$x_c = x_{Ek} - R', \quad (13.9)$$

ahol $x_{Ek} = \tau_0 t / (\rho_0 f_0 H_1)$ az ún. Ekman-elmozdulás, azaz az a távolság, melyet a nyírás által okozott $\tau_0 / (\rho_0 f_0 H_1)$ geosztrofikus sebességgel mozgó folyadék (l. 4.4, 4.5 fejezet) t idő alatt megtesz. Az eredmény arra utal, hogy a feláramlással kapcsolatos front úgy alakul ki, mintha először a part menti függőleges választófelület az x_{Ek} Ekman-elmozdulással odébbtolódna, s utána következne be a 6.7 fejezetben vizsgált geosztrofikus kiegyenlítődé (amikor is a front helyzete Rossby-sugárnyit mozdul a part felé).



13.2 ábra: Part menti feláramlás fázisai hosszú ideje egyenletesen fújó szél esetén. Eleinte a belső felszín csak keveset emelkedik (előző ábra). Később az elválasztó felület eléri a felszínt a partnál (a), majd attól eltávolodik. Ekkor a part mentén már hideg víz kerül el, s a felszínen megjelenik egy front. Úgy tekinthető, mintha a szél az x_{Ek} Ekman-távolságra toltta volna el a teljes felső réteget (szaggatott vonal), majd az a geosztrofikus egyensúly beállása során venné fel a part felé fokozatosan keskenyedő mélységi alakját.

Amennyiben a nyírás időben periodikus, de térben állandó, a feláramlás erőssége is periodikusan változik. Ha a nyírás térbeli periodicitást is mutat, akkor a feláramlás gerjesztett belső Kelvin-hullámok formájában jelenik meg a part belső Rossby-sugárnyit környezetében. Ha a gerjesztési frekvencia meghaladja a helyi f_0 Coriolis-paraméter értékét, akkor a válasz már nem marad lokalizált, hanem a parttól elszakadó belső Poincaré-hullámok gerjesztődnek.

13.2 A kvázigeosztrofikus egyenlet folytonos függőleges rétegzettségű közegben

A folytonos függőleges rétegzettségű folyadék felfogható sok keskeny, egyforma vastagságú réteg határeseteként. Egy tipikus közbenső réteget két alig különböző sűrűségű réteg vesz körül. Mivel a kétrétegű közelítésben ez egyik rétegre sem teljesül, ahhoz, hogy a folytonos eset szempontjából jellemző elrendezést kapjunk, legalább három réteget kell vizsgálnunk. Mint látni fogjuk, ez már elegendő ahhoz, hogy a határesetre pontosan következtethessünk.

Tekintsünk három, egyforma ΔH nyugalmi vastagságú folyadékréteget, melyek közül a legfelső ($i = 1$) ρ_0 , a középső ($i = 2$) $\rho_0 + \Delta\rho$, az alsó ($i = 3$) pedig $\rho_0 + \Delta\rho + \Delta\rho'$ sűrűségű. A függőleges irányban érvényesülő hidrosztatikai egyensúly miatt a nyomások az egyes rétegekben tetszőleges h_i , $i = 1, 2, 3$ pillanatnyi rétegvastagság esetén:

$$p = \rho_0 g(h_1 + h_2 + h_3 - z), \quad \text{ha } z > h_2 + h_3, \quad (13.10)$$

$$p = \rho_0 g h_1 + (\rho_0 + \Delta\rho) g(h_2 + h_3 - z), \quad \text{ha } h_2 + h_3 > z > h_3, \quad (13.11)$$

$$p = \rho_0 g h_1 + (\rho_0 + \Delta\rho) g h_2 + (\rho_0 + \Delta\rho + \Delta\rho') g(h_3 - z), \quad \text{ha } h_3 < z. \quad (13.12)$$

A teljes nyomást a nyugalmi esethez tartozó hidrosztatikaira (szögletes zárójel) és a dinamikai nyomásra bontva az egyes tartományokban:

$$p = \rho_0 g(h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H) + [\rho_0 g(3\Delta H - z)], \quad (13.13)$$

$$p = \varrho_0 g(h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H) + \Delta \varrho g(h_2 + h_3 - 2\Delta H) + [\varrho_0 g \Delta H + (\varrho_0 + \Delta \varrho)g(2\Delta H - z)], \quad (13.14)$$

$$p = \varrho_0 g(h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H) + \Delta \varrho g(h_2 + h_3 - 2\Delta H) + \Delta \varrho' g(h_3 - \Delta H) + [(2\varrho_0 + \Delta \varrho)g \Delta H + (\varrho_0 + \Delta \varrho + \Delta \varrho')(\Delta H - z)]. \quad (13.15)$$

Mivel a p' dinamikai nyomással képzett $p'g/(\varrho_0 f_0)$ adja a geosztrofikus egyensúly áramlási függvényét, az egyes rétegekben

$$\psi_1 = \frac{g}{f_0}(h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H),$$

$$\psi_2 = \frac{g}{f_0}(h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H) + \frac{\Delta \varrho g}{\varrho_0 f_0}(h_2 + h_3 - 2\Delta H), \quad (13.16)$$

és

$$\psi_3 = \frac{g}{f_0}(h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H) + \frac{\Delta \varrho g}{\varrho_0 f_0}(h_2 + h_3 - 2\Delta H) + \frac{\Delta \varrho' g}{\varrho_0 f_0}(h_3 - \Delta H). \quad (13.17)$$

Az alsó rétegvastagságok áramlási függvényrel kifejezett alakjai ebből:

$$h_3 - \Delta H = \frac{f_0 \varrho_0 \Delta H}{\Delta \varrho' g} \frac{\psi_3 - \psi_2}{\Delta H}, \quad (13.18)$$

és

$$h_2 - \Delta H = -f_0 \left(\frac{\varrho_0 \Delta H}{\Delta \varrho g} \frac{\psi_1 - \psi_2}{\Delta H} - \frac{\varrho_0 \Delta H}{\Delta \varrho' g} \frac{\psi_2 - \psi_3}{\Delta H} \right). \quad (13.19)$$

Megjelentek az áramlási függvény magasság szerinti diszkrét deriváltjai, az elsőtük álló tényezők pedig a szomszédos szintek közötti Brunt-Väisälä-frekvencia négyzetének reciprokait tartalmazzák. A tipikus középső szint potenciális örvényessége (6.71) szerint a kvázigeosztrofikus közelítésben

$$q_2 = \frac{\zeta_2 + f}{h_2} \Delta H = \frac{\zeta_2 + f}{\Delta H + h_2 - \Delta H} \Delta H = \zeta_2 + f - \frac{f_0}{\Delta H} (h_2 - \Delta H). \quad (13.20)$$

Mivel a $h_2 - \Delta H$ színtingadozás (13.19) szerint már két diszkrét derivált különbsége, s ez (13.20)-ban újabb átlagos távolsággal osztódik, a végeredményben kétszeres derivált szerepel. A folytonosan rétegzett határesetben a $\psi_i(x, y, t)$ áramlási függvények együttese az egyetlen $\psi(x, y, z, t)$ *mélységfüggő* áramlási függvénybe megy át. A folytonos rétegzettséghez tartozó potenciális örvényesség az áramlási függvényrel tehát a

$$q = \Delta \psi + f + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (13.21)$$

kapcsolatban áll. Itt a Laplace-operátor, mint általában a kvázigeosztrofikus közelítésben, csak a vízszintes koordinátákra hat.

Mivel bármelyik szintben a potenciális örvényesség mozgásállandó, $dq_i/dt = 0$, a magasságfüggő alakban a megmaradást a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\Delta \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (13.22)$$

összefüggés, a folytonosan rétegzett közeg kvázigeosztrofikus egyenlete fejezi ki.

A ψ áramlási függvény ismerete a teljes hidrodinamikai probléma megoldását jelenti. Az áramlási függvény az adott szintbeli dinamikai nyomással arányos:

$$p' = \rho_0 f_0 \psi, \quad (13.23)$$

éppúgy mint a homogén esetben, de most a nyomás magasságfüggést is mutat. A (6.24) hidrosztatikai egyenlet szerint az egyensúlyi sztratifikációtól mért ρ' sűrűségingadozás:

$$\rho' = -\frac{\rho_0 f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (13.24)$$

Az áramlási függvény magasság szerinti deriváltja tehát a sűrűségingadozást adja. Minden egyes rétegben a sekélyfolyadék tulajdonság miatt a feláramlási sebesség csak lineárisan függhet a magasságtól, s a réteg tetején mért sebesség éppen dh_i/dt -vel nagyobb, mint a réteg alján, ahol d/dt a kétdimenziós teljes időderivált. A (13.18)-(13.19) egyenletek összegéből látszik, hogy a középső szint tetején mért $d(h_2 + h_3)/dt$ sebesség az ottani áramlási függvény magasság és idő szerinti deriváltjával arányos. A függőleges sebesség tehát

$$w = -\frac{f_0}{N^2(z)} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (13.25)$$

A (13.24) egyenlettel összevetve ez éppen a (6.12) sűrűség egyenlet.

Vizsgáljuk meg, mik a kvázigeosztrofikus közelítés feltételeit! A potenciális örvényesség (6.71) kvázigeosztrofikus alakjában kifejezésre jut az a feltevés, hogy az elválasztó felületek $(h_i - \Delta H)/\Delta H$ relatív vastagságingadozása kicsi. A középső, $i = 2$ szinten ez a mennyiség a magasságfüggő áramlási függvény második z szerinti deriváltjával arányos, ezért állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett érvényesnek kell lennie az

$$\frac{|f_0|}{N^2} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll 1 \quad (13.26)$$

megszorításnak. A (13.24) egyenlet szerint ez ekvivalens a

$$\frac{g}{N^2 \rho_0} \left| \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right| \ll 1 \quad (13.27)$$

feltétellel. A Brunt–Väisälä-frekvencia (5.4) alakját felhasználva,

$$\left| \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right| \left| \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right| \ll 1. \quad (13.28)$$

Ez azt jelenti, hogy a dinamikai sűrűség magasság szerinti változásai sokkal kisebbek a nyugalmi sűrűséggradiensnél. Az állandó sűrűségű felületek csak keveset térhetnek el a vízszintes síktól. Mivel kvázigeosztrofikus közelítésben a relatív vastagságingadozás Rossby-szám rendű, azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right| \approx Ro \left| \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right|. \quad (13.29)$$

A $\Delta \rho'$ dinamikai sűrűségingadozásoknak a geosztrofikus dinamikában Rossby-számszor kisebbnek kell lenniük a $\Delta \bar{\rho}$ nyugalmi sűrűségváltozásnál ugyanazon a magasságkülönbségen.

Érdeemes a (13.22) egyenlet dimenziótlan alakját is megadni állandó N mellett. A vízszintes és függőleges távolságokat L , ill. H egységben, az időt L/U egységben mérve, és kihasználva, hogy az áramlási függvény dimenziója UL , azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \left[\Delta \psi + \frac{Be}{Ro} y + \frac{1}{Bu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (13.30)$$

Itt megjelent a (6.37) Burger-szám. Ennek szemléletes jelentése a potenciális örvényesség (13.21) alakjából olvasható le. Az utolsó tag a rétegvastagodásból, azaz a folyadékhangerek megnyúlásából adódó örvényességjárulék. Nagyságrendje $f_0^2 UL/(N^2 H^2)$. A ζ relatív örvényesség U/L rendű, így

$$Bu = \frac{N^2 H^2}{f_0^2 L^2} = \frac{\text{relatív örvényesség}}{\text{megnyúlási örvényesség}}. \quad (13.31)$$

A Burger-szám tehát a vízszintes síkbeli mozgásból és a függőleges megnyúlásból adódó örvényességek viszonyát méri. A kvázigeosztrofikus dinamikában mindkettő egyformán fontos, ezért

$$Bu \approx 1, \quad (13.32)$$

a már korábban (6.4 fejezet) is megfogalmazott feltétellel összhangban. Mivel $Be \equiv \beta L/f_0$ a dimenziótlan β paraméter, melyről már a 3.3 fejezetben feltettük, hogy Rossby-szám nagyságrendű, azt látjuk, hogy a (13.30) egyenlet minden tagja egységnyi. A földi viszonyokra a Burger-szám ténylegesen egység körüli, ezért a kvázigeosztrofikus egyenlet jó közelítéssel alkalmazható a nagyságú környezeti áramlások vizsgálatára. A homogén közegek esetéhez hasonlóan a leglassúbb mozgásokat írja le (melyek karakterisztikus ideje legalább néhány nap), tehát kiszűri a belső Poincaré-, ill. Kelvin-hullámokat.

13.3 Rossby-hullámok folytonos rétegzettség esetén

A kis amplitudójú Rossby-hullámok állandó Brunt-Väisälä-frekvencia esetén a linearizált (13.22) egyenlet, azaz a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \psi + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (13.33)$$

egyenlet megoldásai. Tekintsünk először egy felül merev lappal lezárt H mélységű folyadékot. A w függőleges sebességnek ekkor a $z = 0$ és a $z = H$ szinten is el kell tűnnie, mely a linearizált (13.25) egyenlet szerint csak akkor lehetséges, ha az áramlási függvény z szerinti deriváltja azonosan zérus mindkét peremen. Ez teljesül, ha az áramlási függvény magasságfüggését a $\cos(n\pi z/H)$ tényező adja, ahol $n = 1, 2, \dots$. Az x irányban haladó síkhullámot keresve, a teljes áramlási függvény ezért a $\psi_0 \cos(n\pi z/H) \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$ alakban írható. Itt n az egyes normálmódusokat különbözteti meg. Ezt (13.33)-be helyettesítve az

$$i\omega_0 \left(-k_x^2 - \frac{f_0^2}{N^2} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right) - i\beta k_x = 0 \quad (13.34)$$

feltételt kapjuk, melyből a diszperziós reláció

$$\omega_0 = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + \frac{f_0^2 \pi^2 n^2}{N^2 H^2}}. \quad (13.35)$$

Vegyük észre, hogy a nevezőben éppen a (6.33) n -edik Rossby-sugár jelenik meg, azaz

$$\boxed{\omega_0 = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + R_n'^{-2}}}. \quad (13.36)$$

Mindegyik hullámmódus sebessége negatív, s ez nyugatra mutató fázissebességnek felel meg. A hosszú hullámok ($k_x \rightarrow 0$) a leggyorsabbak, terjedési sebességük $-\beta R_n'^2$. Minél nagyobb n ,

annál több különböző sebességű vízszintes rétegre bomlik a hullám és annál *kisebb* a maximális sebessége. A legaktívabb módusok tehát a legalacsonyabb indexűek.

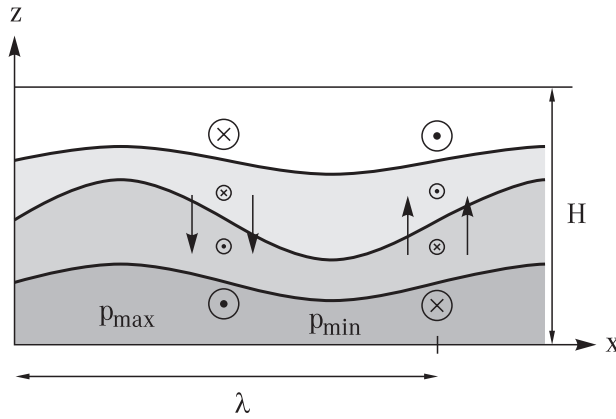
Az $n = 1$ módus hasonló a kétrétegű folyadék belső Rossby-hullámjához, csak benne a sűrűség folytonosan csökken felfelé (13.3 ábra). Érdekes felírni az egyes mennyiségek hely- és időfüggését ebben a módusban. Az áramlási függvény valós részének $\psi_0 \cos(\pi z/H) \cos(\omega_0 t - k_x x)$ alakjából, és a dinamikai nyomás (13.23) kifejezéséből

$$v = k_x \psi_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \sin(\omega_0 t - k_x x), \quad p' = \varrho_0 f_0 \psi_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \cos(\omega_0 t - k_x x). \quad (13.37)$$

A sűrűségingadozás és a feláramlási sebesség (13.24) és (13.25) alapján

$$\begin{aligned} \varrho' &= \frac{\varrho_0 f_0}{g} \frac{\pi}{H} \psi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \cos(\omega_0 t - k_x x), \\ w &= -\frac{f_0 \omega_0}{N^2} \frac{\pi}{H} \psi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \sin(\omega_0 t - k_x x). \end{aligned} \quad (13.38)$$

Ebből látszik, hogy a sebesség és a nyomás szélsőértékei negyed hullámhosszal eltolva követik egymást, a függőleges áramlás ott a legerősebb, ahol a vízszintes sebesség, de míg az utóbbi a felső, ill. alsó peremek körül a legnagyobb, addig a feláramlás a középszinten.



13.3 ábra: A belső Rossby-hullám szerkezete folytonos rétegzettségű közegben (az $n = 1$ módus). A vonalak állandó sűrűségű felületeket jelölnek.

Amennyiben a merev lap közelítést nem alkalmazzuk, a külső felszín mozoghat és ezért ott a függőleges sebesség nem lesz zérus. A korábban látott esetekhez hasonlóan az $n = 1, 2, \dots$ baroklin módusok jellege gyakorlatilag nem változik, diszperziós relációjuk (13.35) marad. Megjelenik ugyanakkor új módusként a szinte a teljes folyadék homogén közegként történő mozgása, a szabad felszíni Rossby-hullámok szabályai szerint (2.6 fejezet). Az ennek megfelelő barotróp módus diszperziós relációja az R külső Rossby-sugarat tartalmazza, tehát az $R_0 \equiv R$ választással illik a (13.36) sorozatba. Az óceáni Rossby-hullámok energiátranzportjának legalább 80 százalékát a barotróp és az első baroklin módus biztosítja.

Érdekes még megvizsgálni, mikor keletkezhetnek olyan Rossby-hullámok, melyek energiát szállítanak a felső légrétegekbe. Haladó hullámokat keresünk a $\psi_0 \exp(i\omega_0 t - ik_x x - ik_z z)$ alakban.

A (13.33) egyenlet megoldásából ekkor a diszperziós reláció

$$\omega_0 = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_z^2 \frac{f_0^2}{N^2}}. \quad (13.39)$$

Mivel a csoportsebességnek most van függőleges komponense is, az ilyen Rossby-hullámban az energia áramolhat felfelé.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy állandó háttéráramlás valamilyen $d(x)$ periodikus domborzat fölött kelthet-e olyan Rossby-hullámokat, melyek energiája felfelé halad és közben a hullám a domborzathoz rögzített koordinátarendszerben áll. A jelenség analóg a lee hullámokéval, de most a rétegzettségén kívül a forgásnak és a β -hatásnak is szerepe van. Mivel a Rossby-hullámok nyugatra mozognak, a háttéráramlásnak keletre haladónak kell lennie, ahhoz, hogy az eredő áramlás stacionárius lehessen. További feltétel, hogy az $\omega = 2\pi U/\lambda$ frekvencia, melyet az U sebességű áramlásnak a λ hullámhosszú domborzaton történő áthaladása definiál, egyezzen meg abszolútértékben a $k_x = 2\pi/\lambda$ hullámhosszal gerjesztett Rossby-hullám ω_0 frekvenciájával:

$$Uk_x = \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_z^2 \frac{f_0^2}{N^2}}. \quad (13.40)$$

Innét látszik, hogy a gerjesztett Rossby-hullám hullámszámvektorának k_z függőleges komponense kielégíti a

$$k_z^2 \frac{f_0^2}{N^2} = \frac{\beta}{U} - k_x^2 \quad (13.41)$$

egyenletet. Valódi felfelé terjedő hullám csak valós k_z -hez tartozhat, mely az északi féltekén csak

$$0 < U \leq U_c \equiv \beta \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2} \quad (13.42)$$

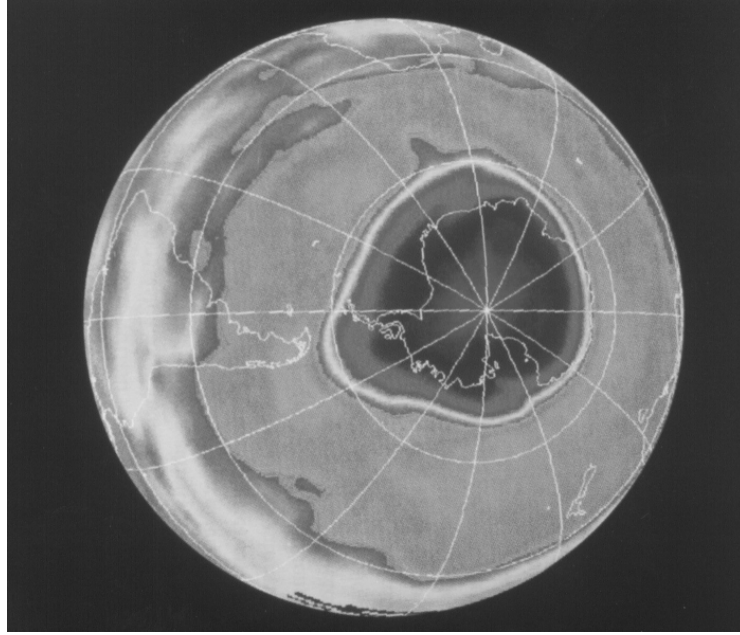
esetén, vagyis elegendően lassú áramlásokban lehetséges. Ilyenkor viszont a csoportsebesség vektora nyilván felfelé mutató komponenssel rendelkezik, hiszen a domborzat az energiaforrás. Ugyanez az eredmény a háttéráramlás rögzített sebesség esetén azt jelenti, hogy a domborzat hullámhosszának elegendően nagyoknak kell lennie, ki kell elégítenie a

$$\lambda \geq \lambda_c \equiv 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}} \quad (13.43)$$

feltételt. Felfelé energiát szállító Rossby-hullámokat csak hosszú domborzati periodicitások gerjeszthetnek. A nyugati szél ilyen függőleges irányú energiaszállítást is biztosító Rossby-hullámokat csak a Föld legnagyobb hegységei fölött képes kelteni. A kritikuskál rövidebb hullámhosszak esetén a domborzat által kiváltott áramlás a magassággal lecseng, hullám nem alakul ki.

A jelenség hasonló a lee hullámokhoz (l. 5.9 fejezet), de most fellép egy alapvető *aszimmetria*: csak nyugatról érkező áramlások gerjeszthetnek ilyen, energiaszállító Rossby-hullámokat. Ez a Föld forgásának újabb fontos megnyilvánulása.

Az energiaszállítási folyamatnak fontos következményei vannak a felső légkörre. A hegységek által keltett Rossby-hullámok a troposzféra felső határát is mozgásba hozzák, mely a fölötte elhelyezkedő sztratoszféra szempontjából tekinthető gerjesztésnek. Ahhoz, hogy az energia tovább is terjedhessen Rossby-hullám formájában felfelé, a sztratoszférán belül is nyugati szélre van szükség. Ha ez jelen van, akkor a sztratoszférában is fennmaradhat Rossby-hullám. Ennek tipikus példája az ún. *sarki örvény* (polar vortex), mely a sarok fölötti tartományt a közepes szélességeken 20-30 km magasságban körülfogó jet-szerű nagy Rossby-hullám (13.4 ábra). Sarki örvény mindig a téli sarok fölött jön csak létre, mert a sztratoszféra a nyári sarok fölött a legmelegebb, így a termikus áramlás csak a téli sztratoszférában vezet nyugati szélre. Ennek megfelelően a sarki örvény a kora nyári időszakban megszűnik, s csak a tél kezdetén jelenik meg újra az adott féltekén. Az ózonlyuk, a magaslégköri ózontartalom jelentős csökkenése a tél folyamán a sarki örvényben alakul ki. Az ózonhiányos levegő csak az örvény megszűnése után keveredhet el a teljes légkörben, mert a Rossby-hullámbeli gyors áramlás nehézzé teszi az anyagkicserélődést az örvény külseje és belseje között, amíg az örvény létezik.



13.4 ábra: Sarki örvény (fehér szélű tartomány) a Déli-sark fölött. A sarki örvény a sztratoszférában télen kialakuló Rossby-hullám. Ez erős horizontális áramlással jár, s ezért az örvény belsejében levő anyagok nehezen jutnak ki belőle. Az ózonhiány itt halmozódik fel az ózonlyuk formájában [Lang].

13.4 A baroklin instabilitás folytonos rétegzettségű közegben

Tekintsük kiindulási állapotnak a (6.63) termikus áramlást. Célszerű olyan koordinátarendszerben dolgoznunk, mely a középső folyadékréteg $U/2$ sebességével mozog. A rendszer szimmetriáját úgy vehetjük legjobban figyelembe, ha kivételesen a $z = 0$ értéket is ehhez a szinthez rögzítjük, azaz az aljzat a $z = -H/2$, a folyadékréteg teteje pedig a $z = H/2$ szinthez tartozik. A termikus áramláshoz a ψ' áramlási függvénnyel leírt kvázigeosztrofikus perturbációt adunk. A teljes áramlási függvény tehát $\psi = -U(z)y + \psi'$, ahol $U(z) = Uz/H$ a termikus áramlás sebessége. A (6.63) összefüggés formálisan érvényes, hiszen a sebességgradiens állandó, s a sebesség most is a $z = 0$ szinten tűnik el (csak ez a középszint). Mivel láttuk, hogy az instabilitás legalapvetőbb vonásai a β -hatás nélkül is megérthetőek, a folytonos leírásban az egyszerűség kedvéért az f_0 -sík közelítést használjuk és az északi féltékére szorítkozunk. A perturbáló hullámfüggvényben linearizált (13.22) kvázigeosztrofikus egyenlet ekkor, állandó Brunt–Väisälä-frekvencia esetén

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\Delta \psi' + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (13.44)$$

A merev lap közelítést választva, a peremfeltétel az, hogy a függőleges sebesség eltűnik mindkét határon, azaz $w = 0$ a $z = -H/2$ és $z = H/2$ szinten. A függőleges sebesség (13.25) kvázigeosztrofikus kifejezésének linearizált változata

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{dU}{dz} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right]. \quad (13.45)$$

Mivel a termikus áramlás lineáris magasságfüggésű, a sebesség z szerinti deriváltja az U/H állandó.

A termikus áramlás körüli síkhullámmegoldást, a baroklin hullámot $\psi' = \psi_0(z) \exp(i\omega_0 t - ik_x x)$, $k_x > 0$ alakban keresve, a potenciális örvényesség megmaradását kifejező (13.44) egyenletből

$$(\omega_0 - k_x U(z)) \left(-k_x^2 \psi_0 + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{d^2 \psi_0}{dz^2} \right) = 0. \quad (13.46)$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha a második zárójel eltűnik, melyből valós exponenciális megoldásokat kapunk az áramlási függvény magasságfüggésére a

$$\delta \equiv k_x \frac{N}{f_0} \quad (13.47)$$

paraméterrel. A függőleges irányban kialakuló lecsengést a δ együttható (imaginárius k_z) jellemzi. A két független exponenciális megoldás kombinációját érdemes hiperbolikus függvényekkel megadni:

$$\psi_0(z) = A \operatorname{sh}(\delta z) + B \operatorname{ch}(\delta z). \quad (13.48)$$

A magasságfüggés tehát más jellegű, mint a folytonos rétegzettségű közeg Rossby-hullámaiban (l. 6.3 fejezet).

Az A, B amplitudókat és a diszperziós relációt a $w = 0$ peremfeltételek határozzák meg. Az aljzaton

$$\left(\omega_0 + \frac{U k_x}{2} \right) \delta \left(A \operatorname{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - B \operatorname{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right) \right) + \frac{U k_x}{H} \left(-A \operatorname{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right) + B \operatorname{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right) \right) = 0. \quad (13.49)$$

A felső szinten

$$\left(\omega_0 - \frac{U k_x}{2} \right) \delta \left(A \operatorname{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right) \right) + \frac{U k_x}{H} \left(A \operatorname{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right) + B \operatorname{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right) \right) = 0. \quad (13.50)$$

Az amplitudók kiküszöbölésével az

$$\begin{aligned} & \left[\omega_0 R' + U \left(\frac{k_x R'}{2} - \operatorname{th}\left(\frac{k_x R'}{2}\right) \right) \right] \left[\omega_0 R' - U \left(\frac{k_x R'}{2} - \operatorname{cth}\left(\frac{k_x R'}{2}\right) \right) \right] + \\ & \left[\omega_0 R' - U \left(\frac{k_x R'}{2} - \operatorname{th}\left(\frac{k_x R'}{2}\right) \right) \right] \left[\omega_0 R' + U \left(\frac{k_x R'}{2} - \operatorname{cth}\left(\frac{k_x R'}{2}\right) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (13.51)$$

egyenletekre jutunk. Itt fölhasználtuk, hogy a δH dimenziótlan paraméter kifejezhető az (6.34) belső Rossby-sugár és a hullámszám szorzataként:

$$\delta H \equiv k_x R' \equiv \frac{k_x N H}{f_0}. \quad (13.52)$$

Az egyenletet átrendezve a diszperziós reláció:

$$\omega_0 = \pm k_x \frac{U}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{th}(k_x R'/2)}{k_x R'/2} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{cth}(k_x R'/2)}{k_x R'/2} \right)}. \quad (13.53)$$

Az ω_0/k_x terjedési sebesség tehát csak az U termikus áramlási sebességtől és a $k_x R'/2$ kombinációtól függ. Mivel a th függvény értéke mindig kisebb, mint az argumentuma, az első zárójel pozitív. A második azonban elegendően kis hullámszámokra negatív lesz.

A frekvencia akkor imaginárius, ha $k_x R'/2 < \operatorname{cth}(k_x R'/2)$, azaz ha $\delta H = k_x R' < 2,40$. Az instabilitás feltétele tehát $k_x < k_c$, ahol

$$k_c = 2,4 R'^{-1} \quad (13.54)$$

a kritikus hullámszám. A rendszer minden olyan perturbációra instabil, melynek hullámhossza

$$\lambda > \lambda_c = 2,62R' = 2,62\frac{NH}{f_0}, \quad (13.55)$$

vagyis a belső Rossby-sugár 2,62-szeresénél nagyobb. Az időben exponenciálisan növekvő megoldás (13.53) alsó előjeléhez tartozik az $\exp(st)$ alakban, ahol

$$s = \frac{f_0U}{NH} \sqrt{\left(\operatorname{cth}\left(\frac{k_x R'}{2}\right) - \frac{k_x R'}{2}\right) \left(\frac{k_x R'}{2} - \operatorname{th}\left(\frac{k_x R'}{2}\right)\right)} \quad (13.56)$$

az instabilitási exponens (13.5 ábra). Ez az exponens a

$$k^* R' = \delta^* H = 1,61 \quad (13.57)$$

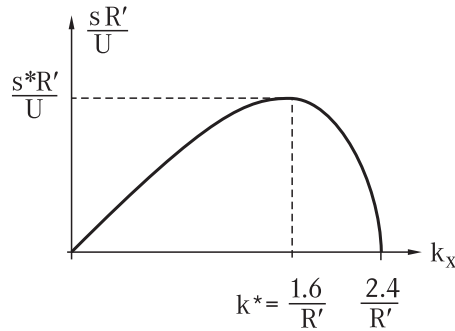
értéknél a legnagyobb¹, s a hozzá tartozó $\lambda^* = 2\pi/k^*$ hullámhossz

$$\lambda^* = 3,91 R' = 3,91 \frac{NH}{f_0}. \quad (13.58)$$

A leggyorsabban növekvő perturbáció hullámhossza tehát a belső Rossby-sugár mintegy négyszerese, azaz a légkörben kb. 4000 km, az óceánban 120 km. Az instabilitási exponens maximális, k^* -hoz tartozó értéke

$$s^* = 0,31 \frac{f_0U}{NH}. \quad (13.59)$$

Az ehhez tartozó kétszereződési idő a légkörben 4 nap, az óceánban 100 nap nagyságrendű. Fontos hangsúlyozni, hogy az instabil hullámok diszperziós relációjában a frekvencia tisztán képzetes (s valós). Ez azt jelenti, ezek a hullámok koordinátarendszerünkben állnak, azaz a Földhöz képest nyugvó rendszerben a termikus áramlás középszinten vett $U/2$ sebességével haladnak keletre.



13.5 ábra: A baroklin instabilitási exponens folytonos rétegzettségű közegben az f_0 sík közelítésben. Az instabilitási tartomány és a leggyorsabban növekvő hullám k^* hullámszáma nem függ a termikus áramlás sebességétől.

A fentiekből az instabil baroklin hullámok áramlási függvénye is meghatározható (az eredmény természetesen csak abban a kezdeti időszakban érvényes, amíg az amplitudó kicsi). A (13.49) egyenletből (13.53) felhasználásával az együtthatók aránya

$$\frac{B}{A} = \pm i \sqrt{\frac{(k_x R'/2) \operatorname{cth}(k_x R'/2) - 1}{1 - (k_x R'/2) \operatorname{th}(k_x R'/2)}}. \quad (13.60)$$

¹Mely a $\operatorname{th}x^* + \operatorname{cth}x^* = x^*(\operatorname{th}^2x^* + \operatorname{cth}^2x^*)$ egyenlet megoldásából adódik az $x^* \equiv k^* R'/2$ mennyiségre.

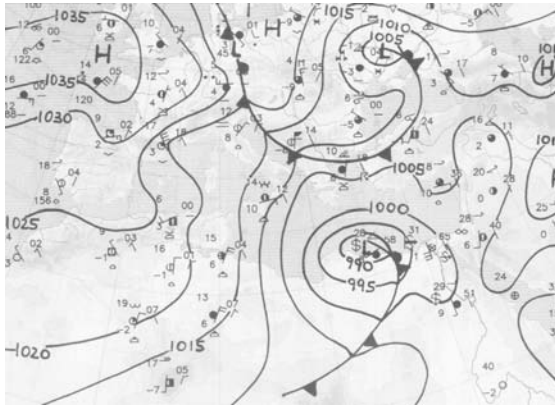
A leggyorsabban növekvő amplitudójú, (13.58) hullámhosszú hullámra a gyök éppen $\text{th}(k^* R'/2)$, azaz

$$B = -i A \text{th}\left(\frac{\delta^* H}{2}\right). \quad (13.61)$$

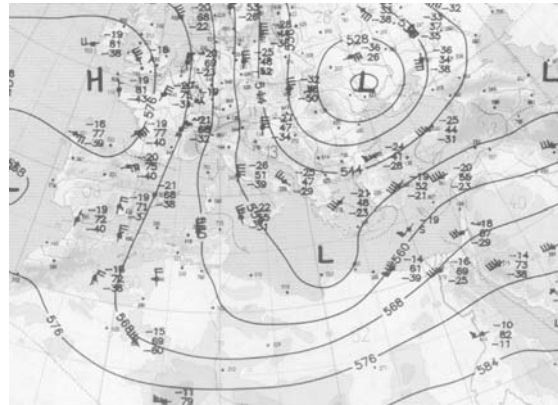
Ezzel az áramlási függvény:

$$\psi'(x, z, t) = \psi_0(z) e^{s^* t - ik^* x} = A e^{s^* t} \left(\text{sh}(\delta^* z) - i \text{th}\left(\frac{\delta^* H}{2}\right) \text{ch}(\delta^* z) \right) e^{-ik^* x}. \quad (13.62)$$

Fontos összefüggést kapunk, ha felhasználjuk, hogy a perturbáló áramlási függvény arányos a p' dinamikai nyomással (13.23). A leginstabilabb módusban a (13.62) kifejezést a felső ($z = H/2$) ill. az alsó ($z = -H/2$) szinten véve azt találjuk, hogy a $p'(H/2) = ip'(-H/2)$, azaz a nyomás mindkét peremen ugyanakkora nagyságú. A felső szinten az x -függés $\exp[-i(k^* x - \pi/2)]$, azaz ott a nyomás *negyed hullámhossznyi késésben* van a lentihez képest. Az izobárok tehát a termikus áramlás erősödésével ellentétes irányban dőlnek. Ez a magasságfüggés az instabil baroklin hullámok egyedi vonása. A ciklonok közepes (5 km) magassági szinten mért nyomásminimума a tapasztalat szerint valóban általában néhány száz km-rel nyugatabbra fekszik a felszíni alacsony nyomású középponttól (13.6 ábra).



(a)



(b)

13.6 ábra: Ciklonok a meteorológiai térkép különböző szintjein. a) Felszíni nyomáseloszlás. b) Az 500 hPa-os szinthez (kb. 5 km) tartozó szintvonalak. A nyomásminimum a magasabb légrétegben nyugatabbra esik [European Meteorological Bulletin, 1998. március 15., 12 óra, Deutscher Wetterdienst].

III. rész
Függelék

14. fejezet

Összefoglalás

14.1 A természetes közegek anyagi paramétereit

	ρ_0 kg/m ³	ν m ² /s	κ m ² /s		D m ² /s
VÍZ	10 ³	1,0 · 10 ⁻⁶	1,4 · 10 ⁻⁷	só:	1,5 · 10 ⁻⁹
LEVEGŐ	1,2	1,5 · 10 ⁻⁵	2,1 · 10 ⁻⁵	vízgőz:	2,4 · 10 ⁻⁵

	λ kg/(m s)	α 1/fok	c_p J/(kg fok)	c m/s
VÍZ	1,0 · 10 ⁻³	2,1 · 10 ⁻⁴	4,2 · 10 ³	1,5 · 10 ³
LEVEGŐ	1,8 · 10 ⁻⁵	3,4 · 10 ⁻³	1,0 · 10 ³	3,4 · 10 ²

14.1 táblázat: A víz és a levegő legfontosabb anyagi paramétereit légköri nyomáson és 20 fok hőmérsékleten. Az egyes mennyiségek rendre sűrűség, kinematikai viszkozitás, hődiffúziós állandó, diffúziós állandó, dinamikai viszkozitás, hőtágulási együttható, állandó nyomáson mért fajhő, hangsebesség.

14.2 A mozgásegyenletek

Alapegyenletek

Gravitációs erőterben lévő izotróp folyadékra, mely a függőleges (z) tengely körül Ω szögsebességgel forog, az együttforgó rendszerben az impulzustételt, a tömegmegmaradást, és a termodinamika főtételeiből következő hővezetést a következő hidrodinamikai egyenletek írják le:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} \right) = -\rho 2\Omega \mathbf{n} \times \mathbf{v} - \text{grad} p - \rho g \mathbf{n} + \lambda \Delta \mathbf{v} + \bar{\lambda} \text{grad} \text{div} \mathbf{v}, \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (14.2)$$

$$\frac{dT}{dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) T = \kappa \Delta T + \Phi. \quad (14.3)$$

Itt \mathbf{v} a háromdimenziós sebességvektor, függőleges komponense w , vízszintes komponensei u, v , \mathbf{n} a függőlegesen felfelé mutató egységvektor. ρ, p és T a sűrűséget, nyomást, ill. hőmérsékletet jelöli. g a gravitációs gyorsulás, λ és $\bar{\lambda}$ belső surlódási együtthatók, és κ a hődiffúziós állandó. A Φ mennyiség a viszkózus entrópiaprodukciónak adódó forrástagnak, mely rendszerint elhanyagolható a hővezetéssel kapcsolatos járulékok mellett. A peremfeltétel: a falakon \mathbf{v} felveszi a fal sebességét.

Összenyomhatatlan folyadékokban $\rho \equiv \rho_0$ és

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} = -2\Omega \mathbf{n} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p - g \mathbf{n} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (14.4)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (14.5)$$

$$\frac{dT}{dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) T = \kappa \Delta T + \Phi, \quad (14.6)$$

ahol $\nu = \lambda/\rho_0$ a kinematikai viszkozitás.

Ideális folyadékokban $\nu = 0, \kappa = 0, \Phi = 0$, hőközlés nem történik, ezért az entrópia megmarad a mozgás során. A peremfeltétel az, hogy a falra merőleges komponens tűnik csak el.

Boussinesq-közelítés

A ρ_0 átlagsűrűségtől és a T_0 átlaghőmérséklettől csekély ρ'' sűrűség-, és T'' hőmérsékleteltérést mutató közegben

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} = -2\Omega \mathbf{n} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p'' - g \frac{\rho''}{\rho_0} \mathbf{n} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (14.7)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (14.8)$$

$$\frac{dT''}{dt} \equiv \frac{\partial T''}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) T'' = \kappa \Delta T''. \quad (14.9)$$

Itt p'' a ρ_0 -hoz tartozó hidrosztatikus nyomástól mért eltérés. A hőtágulási egyenletből $\rho'' = -\alpha \rho_0 T''$, ahol α a hőtágulási együttható. Elhanyagolható hővezetés esetén (14.9) helyettesíthető a

$$\frac{d\rho''}{dt} \equiv \frac{\partial \rho''}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \rho'' = 0 \quad (14.10)$$

sűrűségegyenlettel.

Boussinesq-közelítés függőleges rétegzettségű ideális folyadékban

A $\bar{\varrho}(z)$ egyensúlyi sűrűségeloszlástól való csekély ϱ' sűrűségeltérésekre

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})\mathbf{u} = -2\Omega\mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\varrho_0}\text{grad}p', \quad (14.11)$$

$$\frac{dw}{dt} \equiv \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})w = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\varrho'}{\varrho_0}g, \quad (14.12)$$

$$\frac{d\varrho'}{dt} \equiv \frac{\partial\varrho'}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})\varrho' = -w\frac{d\bar{\varrho}}{dz} \equiv w\frac{\varrho_0 N^2(z)}{g}, \quad (14.13)$$

$$\text{div}\mathbf{v} = 0, \quad (14.14)$$

ahol p' a $\bar{\varrho}$ -hoz tartozó hidrosztatikus nyomástól mért eltérés, $\mathbf{u} \equiv (u, v)$ a síkbeli sebességvektor, és $N(z)$ a Brunt-Väisälä-frekvencia.

Boussinesq-közelítés sekély közegben

Az átlagos ϱ_0 -tól való csekély ϱ'' , T'' eltérésekre

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})\mathbf{u} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\varrho_0}\text{grad}p'' + \nu\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}, \quad (14.15)$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 = -\frac{\partial p''}{\partial z} - \varrho''g \quad (14.16)$$

$$\text{div}\mathbf{v} = 0, \quad (14.17)$$

$$\frac{dT''}{dt} \equiv \frac{\partial T''}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})T'' = \kappa\frac{\partial^2 T''}{\partial z^2}, \quad (14.18)$$

ahol $\mathbf{u} \equiv (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t))$ a vízszintes síkbeli sebességvektor, és $\varrho'' = -\alpha\varrho_0 T''$. Vízszintes aljzatú forgatott edényben $f \equiv 2\Omega$. Ha az egyenleteket egy bolygó felszínén kialakuló áramlások leírására alkalmazzuk a lokális koordinátarendszerben, akkor a görbület az $f \equiv f(y) \approx f_0 + \beta y$ Coriolis-paraméter használatával vehető figyelembe.

Függőleges rétegzettség esetén ideális folyadékban a $\bar{\varrho}(z)$ egyensúlyi sűrűségeloszlástól való ϱ' sűrűségeltérésekre

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})\mathbf{u} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\varrho_0}\text{grad}p', \quad (14.19)$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \varrho'g \quad (14.20)$$

$$\frac{d\varrho'}{dt} \equiv \frac{\partial\varrho'}{\partial t} + (\mathbf{v}\text{grad})\varrho' = -w\frac{d\bar{\varrho}}{dz} \equiv w\frac{\varrho_0 N^2(z)}{g}, \quad (14.21)$$

$$\text{div}\mathbf{v} = 0, \quad (14.22)$$

ahol p' a $\bar{\varrho}$ -hoz tartozó hidrosztatikus nyomástól mért eltérés és $\mathbf{u} \equiv (u, v)$ a síkbeli sebességvektor.

Sekélyfolyadék egyenletek

H vastagságú surlódásmentes homogén folyadék rétegben

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{grad})\mathbf{u} = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u} - g \text{grad}\eta, \quad (14.23)$$

$$\frac{dh}{dt} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad (14.24)$$

ahol $\mathbf{u} \equiv (u(x, y, t), v(x, y, t))$ a síkbeli sebességvektor, $\eta(x, y, t)$ a felszíni alak és $h(x, y, t) = H + \eta(x, y, t) - d(x, y)$ a teljes vízmélység ($d(x, y)$ a domborzat alakja). A w feláramlási sebesség a $\partial w / \partial z = -\text{div}\mathbf{u}$ egyenletből adódik.

Kétrétegű sekélyfolyadék egyenletek szélnyírással

τ külső felszíni vízszintes szélnyírás jelenlétében

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \text{grad})\mathbf{u}_1 = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1 - g \text{grad}\eta + \frac{\tau}{\rho_0 H_1}, \quad (14.25)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \text{grad})\mathbf{u}_2 = -f\mathbf{n} \times \mathbf{u}_2 - g \text{grad}\eta - g' \text{grad}\chi, \quad (14.26)$$

$$\frac{dh_i}{dt} \equiv \frac{\partial h_i}{\partial t} + \text{div}(h_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (14.27)$$

ahol \mathbf{u}_1 a felső, \mathbf{u}_2 az alsó közeg vízszintes síkbeli sebessége, η a külső, χ a belső elválasztó felület alakja. H_i az egyes folyadékrétegek átlagos mélysége. A pillanatnyi mélységek $h_1 = H_1 + \eta - \chi$, ill. $h_2 = H_2 + \chi - d$.

Kvázigeosztrofikus egyenlet homogén közegben

A geosztrofikus egyensúlytól kissé eltérő mozgásokra

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta y + f_0 \frac{d}{H} \right) = \frac{\text{rot}_z \tau}{\beta \rho_0 H} - \frac{\Delta \psi}{t_0} + \nu \Delta^2 \psi, \quad (14.28)$$

ahol $\psi(x, y, t)$ az áramlási függvény, $d(x, y)$ a domborzat, R a Rossby-sugár, $f_0 + \beta y$ a Coriolis-paraméter, és $t_0 = \sqrt{2H} / (\sqrt{\nu |f_0|})$ a felpörgetési idő.

Kvázigeosztrofikus egyenlet kétrétegű közegben

A H_1, H_2 átlagos vastagságú rétegre vonatkozó geosztrofikus egyenlet vízszintes aljzat esetén

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi_1 + \beta y - \frac{f_0^2}{g H_1} \psi_1 - \frac{f_0^2}{g' H_1} (\psi_1 - \psi_2) \right) = 0, \quad (14.29)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\Delta \psi_2 + \beta y + \frac{f_0^2}{g' H_2} (\psi_1 - \psi_2) \right) = 0, \quad (14.30)$$

ahol ψ_i az egyes rétegek áramlási függvénye, g' pedig a sűrűségkülönbséghez tartozó redukált gravitációs gyorsulás.

Kvázigeosztrofikus egyenlet függőleges rétegzettségű közegben

Mozdulatlan külső felszínű és vízszintes aljzatú ideális folyadékra

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\Delta \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (14.31)$$

ahol $\psi(x, y, z, t)$ az áramlási függvény, $N(z)$ a Brunt-Väisälä-frekvencia, és a Laplace-operátor csak a vízszintes koordinátákra hat.

14.3 Dimenziótlan számok

DIMENZIÓTLAN SZÁM	TIPIKUS ÉRTÉKE A FÖLDÖN LÉGKÖR ÓCEÁN	
Rossby-szám $Ro = \frac{U}{ f_0 L}$	0, 1	0, 1 – 0, 01
Reynolds-szám $Re = \frac{UL}{\nu}$	10^{13}	10^{11}
Froude-szám $Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$	0, 1	0, 1 – 0, 01
β -paraméter $Be = \frac{\beta L}{f_0}$	0, 1	0, 1 – 0, 01
Ekman-szám $Ek = \frac{\nu}{ f_0 H^2}$	10^{-4}	10^{-6}
Belső Froude-szám $Fr' = \frac{U}{NH} = \frac{U}{\sqrt{g'H}}$	10^{-1}	10^{-2}
Frekvencia-arány $Fn = \frac{N}{ f_0 }$	10^{-2}	10^{-3}
Burger-szám $Bu = \left(\frac{NH}{f_0L}\right)^2$	1	1 – 0, 1
Richardson-szám $Ri = \frac{N^2}{(d\bar{u}/dz)^2}$	1	1

14.2 táblázat: A környezeti áramlásokat jellemző legfontosabb dimenziótlan számok egy forgó bolygón. Az L vízszintes síkbeli lineáris méretet a bolygó R_B sugara felülről korlátozza. Az Ekman-számot a turbulens viszkozitással képeztük, a Richardson-szám értéke a határrétegre vonatkozik. Laboratóriumi mérésekben az $f_0 = 2\Omega_B \sin \varphi_0$ Coriolis-paraméter szerepét a forgatási szögsebesség kétszerese, 2Ω veszi át, a Be paraméter pedig az aljzat γ meredekségével adható meg: $Be = \gamma L/H$.

14.4 Közelítések

KÖZELITÉS NEVE	FELTÉTELE	ELHANYAGOLT JELENSÉG
Összenyomhatatlan	Áramlás lassabb a hangnál: $U \ll c$	Hang, lökéshullám
Ideális	Viszkozitás kicsi: $Re \ll 1$	Közegellenállás, szélnyírás
Sekély	Vízzintes méret nagy: $H \ll L$	Mélyvizi hullámok, erős feláramlások
Merev lap	Felszíni mozgás gyenge a belső mozgásokhoz képest	Felszíni hullámok, barotróp módusok
Geosztrofikus	Coriolis-erő és nyomás dominál: $Ro \rightarrow 0$	Időfüggő mozgások, hullámok
f_0 -sík	A bolygó görbülete nem lényeges: $\beta = 0$	Rossby-hullám, perem- áramlatok
β -sík	Kiterjedés kisebb a bolygó sugaránál, $\beta L \ll f_0$	Az egész bolygóra ki- terjedő mozgások
Kvázigeosztrofikus	Kis eltérés a geosztrofikustól $Ro \ll 1$	Gyors mozgások, Poincaré-, Kelvin-hullámok
Boussinesq	Kis sűrűség-ingadozás $\rho'' \ll \rho_0$	Nagy sűrűségváltozással járó folyamatok
Egyenletes rétegzettség	Állandó gradiens: $N = \text{konstans}$	Belső hullám elhajlása, törése, visszaverődése
Kétrétegű	Sűrűség eltérő konstans a két rétegben	Felfelé haladó belső hullámok, magasabb módusok
Redukált sekély- folyadék modell	A vastag réteg nem mozog	Ellenáramok, baroklin instabilitás

14.3 táblázat: A használt közelítések áttekintő táblázata

14.5 Hullámtípusok

HOMOGEN
SEKELY
NEM FORGATOTT

gravitációs:
 $\omega_0 = \pm c_0 k$
 $c_0 = \sqrt{gH}$

HOMOGEN
MELY

HOMOGEN
SEKELY
FORGATOTT

Poincaré:

$$\omega_0 = \pm \sqrt{f_0^2 + c_0^2 k^2}$$

perem mentén Kelvin:

$$\omega_0 = \pm c_0 k_x$$

Rossby (β -hatás):

$$\omega_0 = -\beta \frac{k_x}{k^2 + f_0^2/c_0^2}$$

tehetetlenségi:

$$\omega_0 = \pm f_0 \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$$

RÉTEGZETT	RÉTEGZETT	RÉTEGZETT
MÉLY	SEKÉLY	SEKÉLY
NEM FORGATOTT	NEM FORGATOTT	FORGATOTT

belső normálmódus:

$$\omega_0 = \pm c_n k$$

$$c_n \approx \sqrt{g'H}$$

belső Poincaré:

$$\omega_0 = \pm \sqrt{f_0^2 + c_n^2 k^2}$$

perem menti belső Kelvin:

$$\omega_0 = \pm c_n k_x$$

belső Rossby (β -hatás):

$$\omega_0 = -\beta \frac{k_x}{k^2 + f_0^2 / c_n^2}$$

belső:

$$\omega_0 = \pm N \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$$

14.4 táblázat: A környezeti áramlások legfontosabb lineáris hullámai és diszperziós relációik. k a vízszintes síkbeli hullámszám. A táblázat azonos szintjén levő hullámok hasonló jellegűek, noha fizikai eredetük nem feltétlenül azonos. c_n a belső hullámok n -edik normálmódusának terjedési sebessége. A Kelvin-, és Rossby-hullám esetén a kelet-nyugati (x) irányba haladó alakot, a tehetetlenségi és a belső hullám esetén az (x, z) síkban terjedő alakot adjuk meg. A Kelvin-hullám diszperziós relációjában a $+/-$ előjel az északi/déli féltekére vonatkozik, a többi kifejezés mindkét féltekén érvényes (s a \pm előjel különböző irányba haladó hullámokat jelöl). Laboratóriumiban az f_0 Coriolis-paraméter szerepét a forgatási szögsebesség kétszerese, 2Ω veszi át, a β paraméter pedig az aljzat γ meredekségével helyettesítendő: $\beta \rightarrow 2\Omega\gamma/H$.

14.6 Jellegzetes távolságok

TÁVOLSÁGOK	TIPIKUS ÉRTÉKEK A FÖLDÖN (km)	
	LÉGKÖR	ÓCEÁN
Ekman-réteg vastagság $D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{ f_0 }} = H \pi \sqrt{2Ek}$	1	0,04
Rossby-sugár $R = \frac{\sqrt{gH}}{ f_0 } = L \frac{Ro}{Fr}$	3000	1000
Belső Rossby-sugár $R' = \frac{NH}{ f_0 } = \frac{\sqrt{g'H}}{ f_0 } = L \frac{Ro}{Fr'}$	1000	100
Rhines-hossz $L_R = \sqrt{\frac{u'}{ \beta }}$	1000	100

14.5 táblázat: A környezeti áramlásokat jellemző legfontosabb távolság jellegű mennyiségek, melyek dimenziótlan számokkal kapcsolatosak. Az u' mennyiség a vízszintes síkbeli sebességfluktuációk jellegzetes értéke. Az Ekman-féle határréteg vastagságát a ν_{turb} turbulens viszkozitással képeztük. Laboratóriumiban az f_0 Coriolis-paraméter szerepét a forgatási szögsebesség kétszerese, 2Ω veszi át.

14.7 Irodalom

Általános hidrodinamika

- L. D. Landau, E. M. Lifsic, *Hidrodinamika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1980)
Budó Á., *Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965)
Nagy K., *Elméleti mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1985)
M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion* (The Parabolic Press, Stanford, 1982)
D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics* (Clarendon Press, Oxford 1988)
T. E. Faber, *Fluid Dynamics For Physicists* (Cambridge U. Press, 1995)
T. Liggett, *Fluid Dynamics* (McGraw-Hill, New York, 1994)
B. K. Shivamoggi, *Theoretical Fluid Dynamics* (J. Wiley, New York, 1998)
M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981)

Geofizikai folyadékdinamika

- A. E. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, (Academic Press, San Diego, 1982)
J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, (Springer, New York, 1979)
M. Ghil, S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1987)
R. Salmon, *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics* (Oxford U. Press, 1998)
J. S. Turner, *Bouyancy Effects in Fluids* (Cambridge U. Press, 1973)
J. E. Simpson, *Gravity Currents* (Cambridge U. Press, 1997)
C. J. Nappo, *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves* (Academic Press, San Diego, 2002)
L. H. Kantha, C. A. Clayson, *Small Scale Processes in Geophysical Fluid Dynamics* (Academic Press, San Diego, 2000)

Dinamikus meteorológia

- Götz G., Rákóczi F., *A dinamikus meteorológia alapjai* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1981)
Czelnai R., Götz G., Iványi Zs., *Bevezetés a meteorológiába II, A mozgó légkör és óceán* (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996)
Rákóczi F., *Életterünk a légkör* (Mundus Kiadó, Budapest, 1998)
Bérczi Sz., Hargitai H., Illés E., Kereszturi Á., Opitz A., Sik A., Weidinger T., *Bolygólégkörök atlasza* (Uniconstant, Budapest, 2002)
G. D. Roth, *Meteorológiáról mindenkinek* (Magyar Könyvklub, Budapest, 2000)
J. R. Holton, *An Introduction to Dynamic Meteorology* (Academic Press, San Diego, 1992)
M. L. Salby, *Fundamentals of Atmospheric Physics* (Academic Press, San Diego, 1996)
R. S. Scorer, *Environmental Aerodynamics* (E. Horwood Publishers, Westergate, 1978)
C. D. Ahrens, *Meteorology Today* (Brooks-Cole, Pacific Grove, 2000)
J. A. Day, V. J. Schaefer, *Clouds and Weather* (Houghton Mifflin Co., Boston, 1991)

Fizikai óceánográfia

- Czelnai R., *A világóceán* (Vince Kiadó, Budapest, 1999)
- G. L. Mellor, *Introduction to Physical Oceanography* (American Inst. of Physics Press, New York, 1996)
- J. A. Knauss, *Introduction to Physical Oceanography* (Prentice Hall, New Jersey, 1997)
- V. M. Kamenkovich, *Fundamentals of Ocean Dynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1977)
- P. H. LeBlond, L. A. Mysak, *Waves in the Ocean* (Elsevier, Amsterdam, 1978)
- A. C Duxbury, A. B Duxbury, *An Introduction to the World's Oceans* (W. C. Brown Publishers, Dubuque, 1997)

Geofizika

- P. Melchior, *The Physics of the Earth's Core* (Pergamon Press, Oxford, 1986)
- J. W. Chamberlain, *Theory of Planetary Atmospheres* (Academic Press, San Diego, 1978)
- K. R. Lang, *Sun, Earth and Sky* (Springer, Berlin, 1997)
- J. K. Beatty, C. C. Petersen, A. Chaikin, *The New Solar System* (Cambridge U. Press, 1999)
- T. L. McKnight, D. Hess, *Physical Geography* (Prentice Hall, New Jersey, 2000)

Turbulencia

- U. Frisch, *Turbulence, A tribute to A. N. Kolmogorov* (Cambridge U. Press, 1998)
- M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi (eds.), *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (North-Holland, Amsterdam, 1985)
- P. Tabeling, *Two-dimensional turbulence: a physicist approach*, Phys. Rep. **362**, 1-62 (2002)