Miért Fibonacci-számok?

A növényi szimmetriákról

Levélrendeződés és Fibonacci-számok

Közismert tény, hogy a növények felépítésében számos szabályos szerkezet figyelhető meg.[1] Ezek közül az egyik legfontosabb a levelek elhelyezkedésével kapcsolatos. Egy növény szárán vagy virágján a szomszédos levelek sok esetben spirál alakú mintákat rajzolnak ki. Első ránézésre rendszerint két spirálsorozat figyelhető meg, melyek ellenkező irányban futnak, s meredekségük különböző. Az egyik szélsőséges esetben a fonalak hengerpaláston helikálisan tekeredtek fel (*1/a ábra*), a másikban pedig sík korong felületen futnak (*1/b ábra*). Rendszerint e két elrendeződés keveredése fordul elő (*1/c ábra*).

A szabályosságra vonatkozó megfigyelés legáltalánosabban a következőképpen foglalható össze: a spirális (helikális) levélelhelyezkedést mutató növények nagy többségében — mintegy 90%-ában — *a megfigyelt spirálok (helixek) száma Fibonacci-szám,* vagyis az 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... sorozat egyik eleme. E sorozatra az jellemző, mint azt könnyen ellenőrizhetjük, hogy az n-edik Fibonacci-szám, F_n az előző kettő összege, tehát $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, *s a két kezdő elem mindegyike egy :* $F_0 = F_1 = 1$. *Az első ránézésre szembeötlő kétfajta spirál száma* általában *két szomszédos Fibonacci-szám,* F_n és F_{n+1}. Az *1/b* (ill. *2/a*) *ábrán* például 34 (balra hajló) és 55 (jobbra hajló).

A jelenséget a legtöbb növénytankönyv, sőt geometriakönyvek is említik, s kiterjedt irodalma van a növényi szimmetriák általános rendszerezésének is. Sokáig nem volt azonban ismeretes semmilyen egyszerű magyarázat a Fibonacci-számok fellépésére, míg a göttingai Max Planck Intézet két kutatójának, *P. Richter*nek és *R. Schrammer*nek az elmélete ismertté nem vált. Az alábbiakban az ő gondolatmenetüket vázoljuk.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy adott levélelrendeződésben nemcsak kétfajta spirál figyelhető meg. A *2/b ábrán* például más irányban kötöttük össze a szomszédos elemeket, mint a *2/a ábrán,* s így két újabb spiráltípust kaptunk, s ezek száma is Fibonacci-szám. Általában, ha az elsődleges spirálok száma F_n, F_{n+1}, a másodlagosaké F_{n-1}, F_{n+2}, és megfigyelhető olyan spirálpár, melyek száma F_{n-2}, F_{n+3} és a többi.

A magyarázatnak nem elég tehát a két elsődleges spirálra szorítkoznia, hanem azt kell megértenünk, hogy tetszőleges spirálpár elemeinek száma mindig Fibonacci-szám.

Fibonacci-számok és aranyszög

Régi megfigyelés, hogy ha a növények leveleit keletkezésük sorrendjében megszámozzuk, s a növekedés tengelyének irányából nézünk a kialakult elrendeződésre, akkor a szomszédos indexű levelek közötti átlagos szög általában 137° körüli értéknek adódik (*3. ábra*). Ez jó közelítéssel az aranyszög $\Phi = 360° \cdot (3 - \sqrt{5})/2$, vagyis az a (kisebbik) szög, amely a teljes 360°-os szöget az aranymetszés szerint osztja. Más szavakkal: 360° úgy aránylik a nagyobbik szöghöz, (360° − Φ)-hez, mint az utóbbi magához Φ-hez.

Tehát

$$\frac{360°}{360° - \Phi} = \frac{360° - \Phi}{\Phi}$$

vagyis Φ a

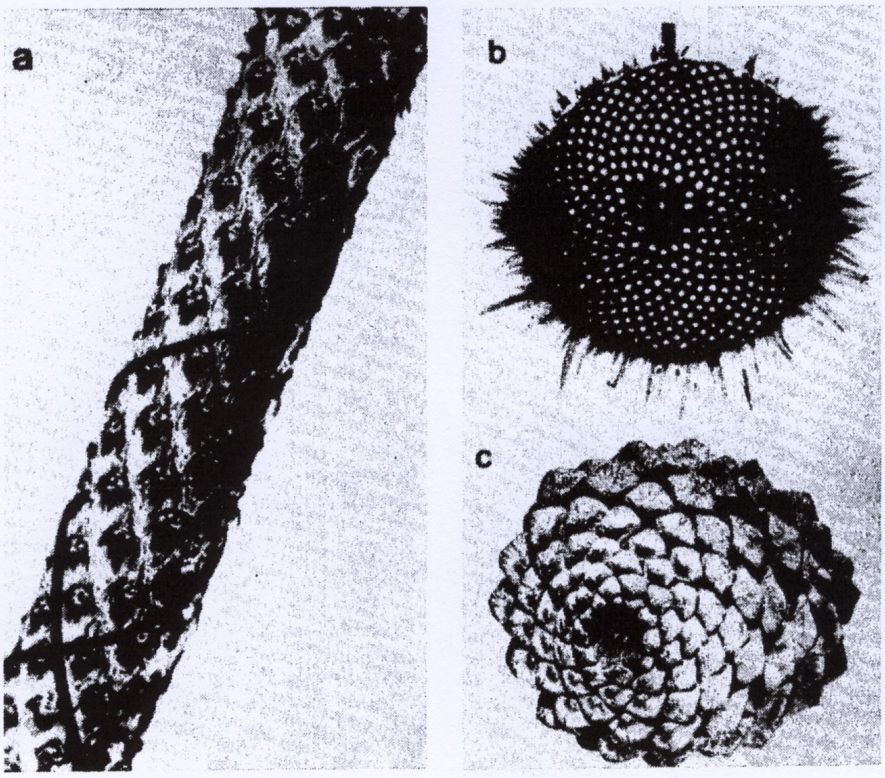
$$\Phi^2 - 3 \cdot 360° \Phi + (360°)^2 = 0$$

másodfokú egyenlet (kisebbik) gyöke.

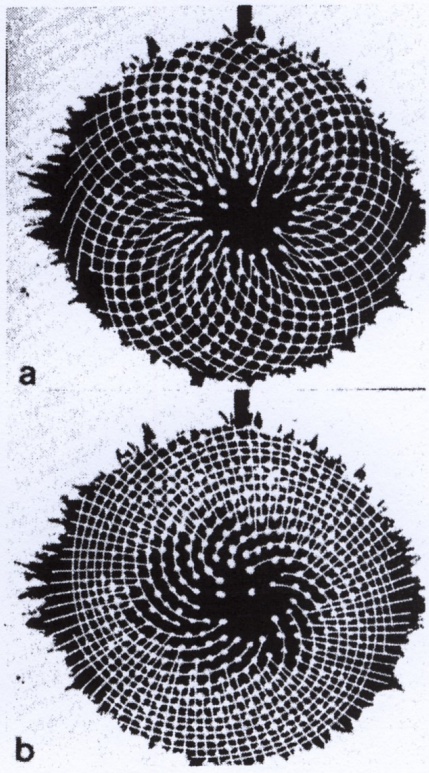
Az aranyszög gyakori előfordulása növényi struktúrákban régóta ismeretes, általában azonban matematikai véletlennek tekintették.[2] *P. Schuster* és *R. Schrammer* most egyszerű számítógépes eljárással kimutatta, hogy *az aranyszög jelenlétéből következik, hogy a megfigyelt spirálok száma Fibonacci-szám.*

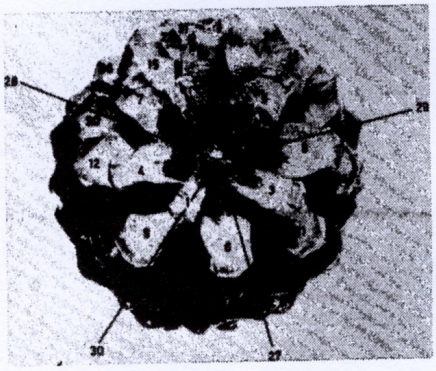
A kétdimenziós elrendezés a következőképpen modellezhető. Legyen a nulladik

1/a ábra. Helikális levélelrendeződés fenyőágon. A berajzolt fekete vonalak két fő helixvonulatot mutatnak. 1/b ábra. Sík spirálszerkezet virágon (bogáncs) 1/c Fenyőtoboz (alulnézetben)



2 ábra. Az 1/b ábra virágja a spirálok berajzolása után a) elsődleges spirálok: számuk 34 ill. 55; b) másodlagos spirálok: számuk 21, ill. 89





3. ábra. Fenyőtoboz levelei s az általuk bezárt szögek

levél koordinátája adott derékszögű koordináta-rendszerben $x_0 = r_0$, $y_0 = 0$. A következő levél a feltevés szerint az origó körüli Φ szögelfordulással jelenik meg, s mivel lassú növekedés is történik, már nem r_0 *távolságra, hanem valamilyen* Δr értékkel messzebb, tehát az $x_1 = (r_0 + \Delta r)\cos\Phi$, $y_1 = (r_0 + \Delta r)\sin\Phi$ koordinátájú pontban. A második levél szögelfordulása már 2Φ, távolsága az origótól $r_0 + 2\Delta r$, általában az n-edik levél szögelfordulása $n\Phi$, távolsága $r_0 + n\,\Delta r$.

A levelek tehát rendre az

$$x_n = (r_0 + n\Delta r)\cos n\Phi,$$
$$y_n = (r_0 + n\Delta r)\sin n\Phi$$

koordinátájú pontokban jelennek meg. Az első néhány száz pontot felrajzolva szabályos elrendeződést kapunk. (A koordinátatengelyeket célszerű elhagyni, mert rontják a kép áttekinthetőségét.) A pontokat különböző módon összekötve különféle spirálpárok rajzolódnak ki, s amennyiben Φ a fent megadott aranyszög, e spirálok száma a számítógépes szimuláció szerint mindig Fibonacci-szám (*4. ábra*), sőt a legkönnyebben megfigyelhető spirálok száma két szomszédos Fibonacci-szám. Mindez független a növekedés sebességére jellemző Δr paraméter értékétől. Az azonban, hogy az elsődleges spirálok száma éppen melyik Fibonacci-pár, már függ Δr-től. *Gyors növekedés* esetén *alacsony* Fibonacci-számok jellemzők az elsődleges spirálpárra (*4/a ábra*), *lassú növekedés* esetén *pedig magas* Fibonacci-számok (*4/b ábra*). Mindez összhangban van azzal a ténnyel is, hogy összetett virágok peremén, ahol a növekedés lassúbb, magasabb Fibonacci-számú spirálok a szembeszökőek, mint középen.

Ezek után az sem meglepő, hogy hasonló következtetés igaz a helikális levélrendeződésre is. Amennyiben az egymás után megjelenő levelek a tengely irányából nézve rendre a Φ aranyszöggel elforgatott helyzetekben jelennek meg, a pontok összekötésekor kapott spirálok száma mindig Fibonacci-szám, az elsődleges spirálpár száma két szomszédos Fibonacci-szám, s lassú növekedéskor magas Fibonacci-számok adják meg az elsődleges spirálok számát.

Az eddigieket tehát a következőképpen foglalhatjuk össze: Ha elfogadjuk, hogy az egymás után kialakuló levelek aranyszögnyi elfordulással jelennek meg, akkor *ebből az egyetlen feltevésből* a geometria törvényei szerint már következik, hogy a kialakuló spirálok (helixek) száma Fibonacci-szám.

Aranyszög és formakialakulás

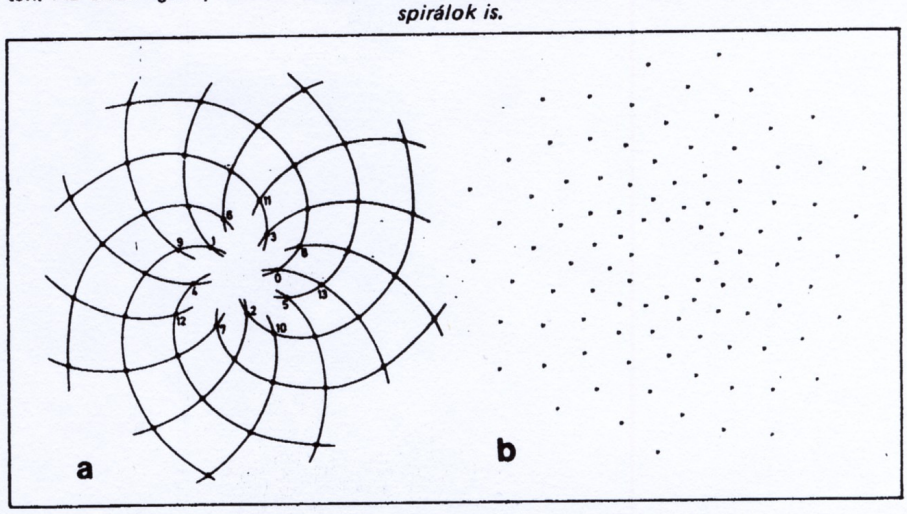
Ezzel az önmagában is érdekes geometriai ténnyel azonban nem elégedhetünk meg, hanem meg kell vizsgálnunk, milyen *természettudományos* elvből következhet az aranyszög megjelenése a levélelrendeződésben.

Az, hogy a megtermékenyített petesejtből hogyan alakul ki sorozatos differenciálódás után az adott külső megjelenésű élőlény, a biológia egyik legalapvetőbb kérdése. A külső alak leírása hihetetlen mennyiségű adatot igényel, egyetlen levél esetén például a levélszőrök elhelyezkedésének vagy az érhálózat lefutásának megadását is. A mindehhez szükséges teljes információ jóval meghaladja a DNS-molekula teljes kapacitását. Az utóbbi évek kutatási eredményei világossá tették, hogy nincs is szükség annak feltételezésére, hogy minden apró-cseprő adatot a DNS-molekula tárol. Az alakfejlődés (morfogenezis) ugyanis spontán struktúraképződés következménye.

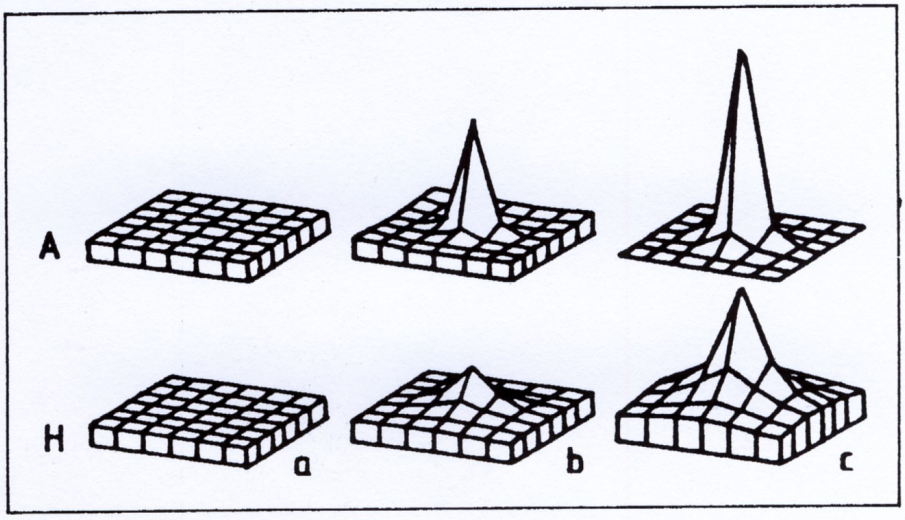
A morfogenezis *Gierer* és *Meinhardt* által bevezetett és széleskörűen elfogadott elmélete szerint adott alakzat, esetünkben a levelek kialakulásának megértéséhez elegendő annyit föltenni, hogy a DNS két anyag szintézisét kódolja. Az egyik, az aktivátor a levél kialakulását segíti, a másik, az inhibitor gátolja. E két vegyület egymással bonyolult módon reakcióba lép, s az adott felületen diffundál. E két hatás eredményeként szabályos térbeli struktúrák alakulhatnak ki, amennyiben a gátló anyag gyorsabban képes diffundálni, mint az aktivátor.

Az *5. ábra* a modell számítógépes szimulációjának bemutatásával érzékelteti, hogyan lehetséges stabil aktivátorcsúcs kialakulása. Kezdetben kismértékű véletlen aktivátorfelhalmozódás történik a tartomány közepe táján. Ennek következtében gyors aktivátor-(*A*) és inhibitor-(*H*) terme-

4. ábra. Az (*) rekurzió által generált pontok a) feltüntettük az első néhány pont indexét, valamint az elsődleges spirálpárt (számuk: 8, ill. 13). A szomszédos pontok viszonylag távoliak: lassú növekedés b) A pontok elrendeződése gyorsabb növekedés esetén. Az elsődleges spirálok száma 13. ill. 21. Könnyen megfigyelhetők a 8, ill. 34 számú spirálok is.



5. ábra. Aktivátorcsúcs megjelenése a Gierer—Meinhardt modellekben



lés indul meg. Mivel azonban az inhibitor gyorsabban diffundál, a tartomány szélén nagyobb az inhibitorkoncentráció, mint az aktivátoré. Itt alig lesz aktivátortermelés. Ilyen módon tehát középen éles aktivátorcsúcs stabilizálódik. Ennek fontos következménye, hogy a csúcs körüli tartományban az inhibitor dominál. Más szavakkal: ha kialakult valahol egy levél, akkor azt tiltott sáv veszi körül, ahol újabb levél nem fejlődhet ki (*6. ábra*). A következő levél így csak adott távolsággal odébb jelenhet meg. A gátlás erőssége az idő múlásával természetesen csökken.

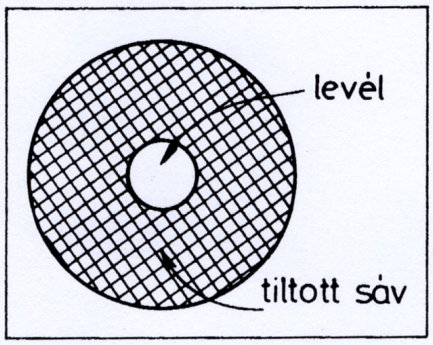
P. Richter és R. Schrammer ezen tulajdonság alapján az alábbi egyszerű gondolatmenettel mutatják ki, hogyan következhet az aranyszög megjelenése a levélelrendeződésben.

A helikális esetet vizsgálva a levelek felülnézetben kör mentén foglalnak helyet. Amennyiben spirális növekedésben megjelenő néhány szomszédos levelet tekintünk, közelítőleg ezek is egy kör kerülete mentén helyezkednek el. A szomszédos levelek közötti kölcsönhatás megértéséhez tehát elegendő körkörös elrendeződést vizsgálnunk. Az első levél megjelenése után — a gátlás következtében — a második a lehető legtávolabb fejlődik ki, tehát 180°-os szögelfordulással[3] (*7. ábra*). A harmadik levélnek a másodiktól távol kell kerülnie, de nem lehet az elsőhöz sem túlságosan közel, hiszen az akörüli gátlás — ha csökkent mértékben is — de még jelen van. Az, hogy az 1—2 tengely melyik oldalán jelenik meg a levél, vagyis milyen irányítottságú lesz a spirál, véletlen fluktuációk következménye. A negyedik levél helyzete azután már még összetettebb hatás eredménye: legerősebb a harmadiktól való „taszítás", de nem lehet a levél túlságosan közel a másodikhoz sem, s még az első is kifejt valamelyes gátló hatást.[4] Feltesszük, hogy ez utóbbi az ötödik levél megjelenésekor már teljesen elhanyagolható, vagyis minden levél helyzetének kialakulásában az előző három játszik csak szerepet. A megfigyelések szerint az első levelek kifejlődése után stacionárius helyzetnek kell kialakulnia, vagyis az egymás utáni levelek akkor már azonos szögelfordulással követik egymást (*8. ábra*).

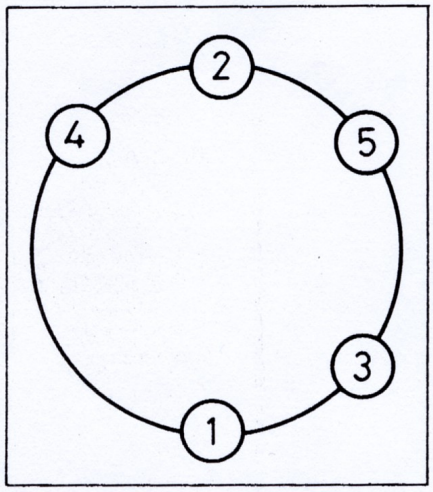
Mivel az új levelek körülbelül azonos időnként jelennek meg, s a gátlás erőssége időben közel exponenciálisan csökken, a korábbi levelek hatása mindig adott szorzófaktorral kisebb. Ha tehát az n-edik levélre az utolsó előtti [az $(n-1)$-edik] által kifejtett gátlás erőssége i, az $(n-2)$-ediké i_{n-2}, az $(n-3)$-adiké i_{n-3}, akkor adott időpontban i úgy aránylik i_{n-2}-höz, mint az i_{n-2} aránylik i_{n-3}-hoz, azaz

$$\frac{i}{i_{n-2}} = \frac{i_{n-2}}{i_{n-3}}$$

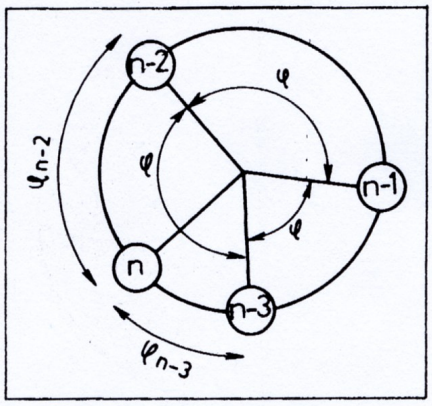
Érvelésünk szerint a levelek közötti szög éppen a gátlás erősségével arányos. Az n-edik és $(n-1)$-edik levél közötti φ-szög tehát úgy aránylik az $(n-1)$-edik és az $(n-2)$-edik közötti φ_{n-2} szöghöz, ahogy φ_{n-2} a $(n-2)$-edik levél és az $(n-3)$-adik közötti φ_{n-3}-hoz:



6. ábra. Tiltott sáv kialakult levél körül



7. ábra. Az első néhány levél elrendeződése



8. ábra. Stacionárius levélelrendeződés

$$\frac{\varphi}{\varphi_{n-2}} = \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-3}}$$

A *8. ábrá*ról leolvasható, hogy ha az egymás után megjelenő levelek közötti szög mindig φ (stacionárius állapot), akkor

$$\varphi_{n-2} = 360° - 2\varphi,$$
$$\varphi_{n-3} = 3\varphi - 360°.$$

Ezt a fenti aránypárba behelyettesítve φ-re

$$\varphi^2 - 3 \cdot 360°\varphi + (360°)^2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel φ-nek 360°-nál kisebbnek kell lennie, innét következik, hogy a stacionárius állapotra jellemző φ-szög éppen az *aranyszög,* hiszen — mint láttuk — φ egyenlete megegyezik a most kapottal.

Gondolatmenetünk alapja annak elfogadása volt, hogy a kialakult levél körül gátolt tartomány jelenik meg, s ez alapvetően befolyásolja az ezután következő levelek elhelyezkedését. Lényeges feltevés volt, hogy adott levél esetén elegendő az előző három hatását figyelembe venni. Ez egyben az eredmény érvényességi körét is megszabja.[5] Amennyiben ugyanis időben lassabban lecsengő gátlásról van szó, akkor a négy, esetleg öt lépéssel korábban kialakult levelek hatása sem hanyagolható el. Ez azután az aranyszögtől különböző stacionárius szöget eredményez, s ilyen módon lehetővé válik a kevésbé általános — a Fibonacci-félétől eltérő — elrendeződések leírása is.

TÉL TAMÁS

IRODALOM

[1.] **E. Strasburger et. al** (szerk.) **Lehrbuch der Botanik,** Stuttgart, G. Fischer, 1978.

[2.] **H. S. M. COXETER: A geometriák alapjai,** Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[3.] **BÉRCZI SZANISZLÓ: Rácsok forgásfelületeken, avagy növényi szimmetriák.** Fizika 1978, (Abonyi I. szerk.).

[4.] **P. H. RICHTER, R. SCHRAMMER: Naturwissenschaften** 65. 319. 1978.

[5.] **D'ARCY THOMPSON: On Growth and Form,** Cambridge Univ. Press, 1942.

[6.] **H. HAKEN: Synergetics, An Introduction,** Spingerverlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[7.] **Nemlineáris rendszerek: Struktúrák kialakulása és káosz.** ELTE Fizikus Diákkör, 1973.

[8.] **A. GIERER, H. MEINHARDT: Kybernetik** 12. 30, 1972.

[9.] **SZÉKELY J. GÁBOR: Aranymetszés.** Természet Világa, 1983. 7. sz.

[10.] **HARASZTY szerk.: Növényrendszertan és növényélettan.** Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[11.] **HERMANN WEYL: Szimmetria.** Gondolat könyvkiadó, Budapest, 1982.

[12.] **BÉRCZI SZANISZLÓ: Növényi szimmetriák.** Fizikai Szemle, 1976. 2. sz.

JEGYZETEK

[1] Az állati test ill. függelékeinek formasajátosságaiban (pl. csigaház, a csavarodott szarv) is van törvényszerűen ismétlődő fajspecifikus szabályszerűség.

[2] A levélállás-szabályszerűséget D'Arcy Thompson (1942) nyomán fillotaxis-nak, az említett aranyszöget divegencia-szögnek nevezi a botanikai szakirodalom.

[3] A két szomszédos egymást követő levélkezdemény között eltelt időt a botanikusok plasztochron fogalommal jelölik.

[4] A „taszítás" elmélet mellett a szakkönyvek említik a „rendelkezésre álló tér elméletét", amely Hofmeister (1865) nevéhez fűződik.

[5] A cikkben tárgyalt, Gierer és Meinhardt elméletre alapozott újabb Richter—Schrammer-féle magyarázat is természetesen még csak hipotézis. Mellette a végső szót csak perdöntő bizonyítékok feltárása után mondhatjuk ki.