

# A kaotikus advekció vizsgálata sekély tavakban a klímaváltozás figyelembevételével: módszertan és alkalmazás.

Pattantyús-Ábrahám Margit, Tél Tamás, Krámer Tamás, Józsa János

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék

1111. Budapest, Műegyetem rkp. 3. Km. f. 8., pattantyus@vit.bme.hu

## Kivonat:

Jelen cikk bemutatja a tavi keveredés-vizgálatra alkalmas Lagrange-szemléleten alapuló káoszelméleti módszereket, a véges méretű Ljapunov-exponenst (VMLE) és az általunk kifejlesztett nyomvonal-nyaláb módszert. Mindezeket numerikusan egy egyszerű geometriájú szélhajtotta modelltávon szemlélteti. Megvizsgálja továbbá, hogy hogyan változhatnak egy sekély tó keveredési viszonyai, ha pl. a klímaváltozás miatt módosul a vízszintje, vagy a tó felett kialakuló szélmezőt meghatározó szél felőli oldali területhasználat.

## Kulcsszavak:

sekély tavak víz-keveredése, klímaváltozás, Lagrange-féle leírású transzport, káosz, VMLE, nyomvonal-nyaláb.

## 1. Bevezetés

Napjainkban egyre több szó esik a klímaváltozásról. Ennek hatása nem kizárólagosan a troposzféra hőmérsékletének emelkedésében nyilvánul meg, hanem vele együtt az egész légkördinamika is értelemeszerűen megváltozik: ez egyrészt a csapadékot hozó ciklonok pályájának, intenzitásának, és adott térség feletti gyakoriságának megváltozását vonja maga után. Itt megállapítható, hogy a Magyarország csapadékmennyisége szempontjából fontosabb mediterrán eredetű ciklonok gyakorisága és intenzitása az elmúlt 45 évben csökkent. (Bartholy et al., 2006) Másrészt a térségünk időjárását meghatározó ún. makrocirkulációs helyzetek gyakoriságának változását is jelenti. Az elmúlt 120 évre vonatkozó kutatásaink azt mutatták, hogy a térségünkben csapadékkal járó helyzetek gyakorisága csökkent (Bartholy et al., 2007). Az IPCC<sup>1</sup> klíma-előrejelzése is hasonló tendenciákat tart valószínűnek a jövőben (IPCC, 2007). Azonban az eddigi tendenciák sem mentesek az ingadozásoktól. Valójában nem tudjuk azt sem pontosan megállapítani, hogy tényleges, ember okozta klímaváltozásról kell-e beszélnünk, vagy a Föld forgástengelyének, Nap-körüli pályájának lassú megváltozásából is adódó természetes, az elmúlt évezredekben is nyomon követhető éghajlat-ingadozásról.

Hidrológus szemmel talán nem is a klímaváltozást kiváltó okok a lényegesebbek, hanem annak hatásai. Az előrejelzések szerint éves szinten kevesebb csapadékra számíthatunk. Ha azonban kételkedünk a meteorológiai előrejelzések közül legnagyobb bizonytalansággal bíró csapadék-prognózisoknak elég belegondolnunk, hogy önmagában a közepes szélességeken tapasztalható magasabb átlagos hőmérséklet a potenciális párolgás növelésével módosítja a vízháztartási mérleget. A várható hatás tavaink vízszintjében is megjelenik.

Magyarországon a tavak nagy része sekély tónak tekinthető. Munkánk során mi is sekély tavakat vizsgáltunk. Ha egy sekély tó vízszintje változik, e változásnak a tóban a szélmeghajtás miatt kialakuló áramlási viszonyaira is hatással van. Ha az áramlási viszonyok változnak, akkor az egyrészt a hordaléktranszport, másrészt a tó keveredési viszonyainak megváltozását is maga után vonja. Ilyen jellegű változást pedig az elmúlt években is tapasztalhattunk mind a Balaton, mind a Velencei-tó esetén.

Nem csupán vízmérleg megváltozása nyomán bekövetkező vízszint-változás módosíthatja egy adott tó keveredési viszonyait. Jelentős hatása lehet a tópart borítottságában történő változásnak, például, ha korábbi nádas területek helyét beépítik, vagy a part menti fák eltűnnek. A szélfelőli oldali part borítottságának módosulása jelentősen befolyásolja a tó felett kialakuló szélmezőt, mivel a part-víz határán kialakuló belső határréteg a part érdesség-magasság megváltozása miatt eltérő lesz, és adott irányú és sebességű szél esetén a vizsgált tó más-keppen reagálhat (Józsa et al. 2007.).

Egy víztest fizikai keveredési tulajdonságait két folyamat, az advekció és a diffúzió határozza meg (Ottino, 1989). Ebben a tanulmányban csak a keveredés szempontjából effektívebb advekciót vesszük figyelembe. A vizsgált modellő esetén a diffúzió szerepéről bővebben a Pattantyús-Ábrahám et al. 2008. cikkben már írtunk. Időfüggő áramlások gyakran mutatnak kaotikus tulajdonságot, melyek leírására a Lagrange szemléletű leírás alkalmas (Ottino, 1989). Az egyszerű értelmezéshez egy egyszerű alakú tavat választottunk, melynek mélységviszonyai és kiterjedése nagyjából megegyezik a Fertőrákosi-öböl, vagy a Keszthelyi-öböl méreteivel. Így az azokban lezajló folyamatokra is adhatunk egy elsődleges becslést. Az eddigi elemzési módszerekhez képest, amelyekben szinte kizárólagosan a Fick-féle törvények szerint értelmezték a folyamatokat, a jelen tanulmányban az elkeveredést az advekció hatásaként értelmezzük és elemezzük. Ezt az egyszerűsített geometriájú tavat gerjesztjük hosszúidejű realiztikus, periodikusan változó széllel, és az így számított áramlásokban vizsgáljuk az advekció kaotikus tulajdonságait. Figyelembe vesszük a korábban említett klímaváltozási hatásokat is, nevezetesen a szignifikáns vízszintnövekedést vagy csökkenést – amin a valószínűsített nagy amplitúdójú változékonyság is értjük – melyet a kaotikus advekcióban beálló módosulásokban mutatjuk be. Érdekeséggé válhat továbbá, hogy hasonló mértékű változás következhet be tavakban akkor is, ha az uralkodó szelek felőli terep területhasználat, ezáltal a terep aerodinamikai érdessége jelentősen megváltozik (erdősítés, beépítés, művelési ág váltás, nádtelepítés, stb.) Cikkünk tehát mind a módszertan alapjait, mind annak egyszerű példán való alkalmazására, és egyúttal az éghajlatváltozás hatásainak kimutatásában való hasznosulására kíván iránymutatást lenni.

Munkánk során egy egyszerű, periodikusan változó irányú széllel hajtott sekély tó keveredési viszonyait vizsgáljuk különböző vízszintek és terepérdességi-viszonyok mellett. A bevezetést követően a második fejezetben az

<sup>1</sup> Intergovernmental Panel on Climate Change (Kormányközi Panel a Klímaváltozásról) Az ENSZ és a WMO által a klímaváltozás objektív vizsgálatára életre hívott szervezet, mely munkáját 2007-ben Béke Nobel-díjjal is jutalmazták.

alkalmazott tómodellt és a keveredés leírására kifejlesztett módszereket mutatjuk be. A harmadik fejezetben egyszerű vizsgáljuk, hogy mennyire realisztikus tómodellünk periodikus gerjesztése, másrészt végrehajtjuk a fenti szempontok szerinti esettanulmányokat végzünk. A negyedik fejezetben összegezzük eredményeinket.

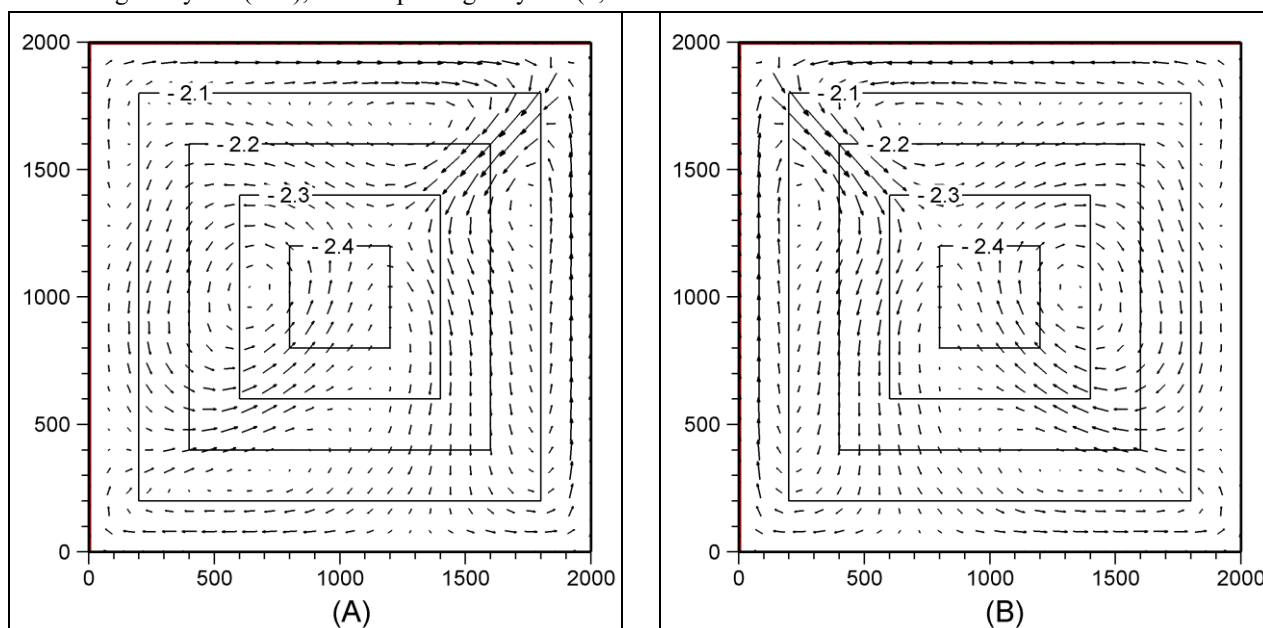
## 2. A hidrodinamikai modell, az alkalmazott módszerek

Tekintsünk egy egyszerű geometriájú tavat, melynek partvonala mentén nincsenek félszigetek, öblök. Mivel a szél keltette áramlás numerikus megoldására derékszögű rácshálón alapuló módszert alkalmazunk, a tó alakja az egyszerű peremkezelés érdekében legyen négyzet, elkerülve ezzel a lépcsős perem okozta numerikus nehézségeket a részecskepályák meghatározásánál. A bevezetőben említett öblök nagyságrendjében maradván a négyzet alakú tó parthosszait 2000 m-nek választottuk. Szintén a valóság egyszerűsített leképezéseként a tó a partvonala mentén legsekélyebb (2 m), és közepén legmélyebb (2,5

m). A medergeometriát a következő, csúcsára állított gúlaalakot megadó képlettel írjuk le:

$$h = 2,5 - \max \left\{ \left| \frac{x-1000}{2000} \right|, \left| \frac{y-1000}{2000} \right| \right\},$$

ahol  $h$  a víz mélysége méterben. Az említett öblökön túl hasonló geometriájúak halastavaink, és bányatavaink. A tavat – az egyszerű értelmezhetőség kedvéért – tisztán periodikusan változó, a térségünkben uralkodónak tekinthető északnyugati–északkeleti irányú széllel gerjesztjük. (Hirtelen ÉNy-ÉK-i szélfordulás Magyarországon általános hidegfrontok átvonulásakor.) A komponensenként 10 m/s sebességű szél 4 óráig fúj az egyik, majd 4 óráig a másik irányból (a szélfordulás után ennyi idő szükséges a modellnek egy állandósult áramkép eléréséhez), így egy periódus ideje  $T=8$  óra. A szélfordulások előtt fennálló, lényegileg már állandósult sebességmezőt az **1. ábrán** mutatjuk.



**1. ábra.** A modell tó medergeometriája (mélységvonalak), és sebességmezője az ÉK-ÉNy (A) illetve ÉNy-ÉK (B) szélfordulás pillanatában

A szélkeltette áramlások számítására a sekélyvízi egyenleteken alapuló kétdimenziós numerikus modellt használtunk. A vízszintet és a függély-középsébséget egy 50 m-es osztásközű rácsháló celláira, explicit véges differencia módszerrel számítottuk (Józsa and Krámer, 2002). Ezzel a modellel meghatározhattuk a tó Euler-szemléletű (tehát rögzített pontokra értelmezett) szél keltette áramlási sebességmező idősorát. Ezen a sebességmező idősorán kell nekünk a részecskepályát meghatározni a

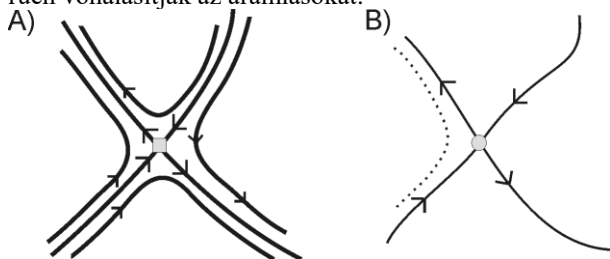
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

advekcio egyenlet alapján, ami egyúttal egy áttérést jelent az Euler-féleléről a Lagrange-féle szemléletre. Ezen egyenletnek – kivéve néhány speciális sebességeloszlás függvényt –, egyszerű alakja ellenére általános esetben nincs analitikus megoldása, így a megoldást numerikus módon keressük. Ehhez célszerűen negyed-rendű Runge-Kutta módszert alkalmaztunk, melyhez az Euler

rendszerű sebességmező celláiban bilineáris interpolációval közelítettük a sebességeket.

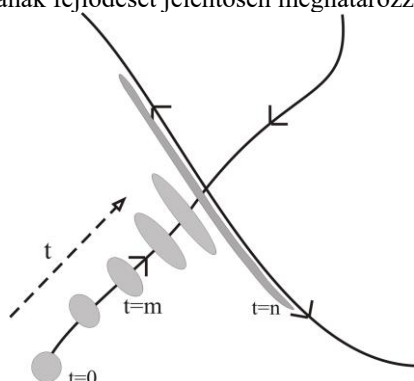
A Lagrange-rendszerű leírás lehetőséget biztosít a sodródó anyag szempontjából történő, szubsztanciális szemléletű keveredés-vizsgálatra. Euler-szemléletű leírásnál azokat a pontokat, ahol a sebesség zérus stagnációs pontoknak nevezzük. Ilyen pontok például a sebességfüggvény elliptikus, illetve hiperbolikus pontjai (**2./A ábra**). Ezeknek a pontoknak léteznek a Lagrange-féle leírásban analgonjai, az ún. fixpontok. Itt az anyagmozgás szempontjából ezek a pontoknak megkülönböztetett szerepük lesz, és fontos, hogy helyeik nem feltétlen esnek egybe az Euler-féle szemléletben meghatározott stagnációs pontokkal. Vizsgáljuk a hiperbolikus pontokat! Például a hiperbolikus stagnációs pontot euleri leírásban az áramvonalak metszéspontja adja meg, míg a Lagrange-szemléletű leírásban a hiperbolikus fixpont helyét az oda bemenő (ún. stabil sokaság) és azt elhagyó (ún. instabil sokaság) anyagi vonalak metszéspontja határozza meg

(2/B ábra). A Lagrange-i fixpont helye nem-permanens áramlásban az idővel változik. Mivel itt anyagi vonalakról van szó, a stabil sokaság egyik oldalán elhelyezkedő víz a sokaságot nem keresztezheti. Ezért a sokaságok egyfajta határvonalat képeznek, közelükben értelemszerűen vonalásítják az áramlásokat.



2. ábra. A) Euler-féle stagnációs pont (szürke négyzet), mint az áramvonalak metszéspontja. B) Lagrange-szemléltető hiperbolikus pont (szürke pötty) és sokaságai (szaggatott vonallal egy részecske pályáját jelöljük)

Egyetlen részecske mozgásának leírásával azonban az elkeveredés, hígulás folyamata nem fogható meg. Az elkeveredés leírásánál sokkal közelebb kerülünk akkor, ha részecskéket szimultán követve, egymástól való eltávolodásuk leírására összpontosítunk. Egy részecskefelhő követésén, és a fixponthoz való közeledésével bekövetkező alakváltozásán ezt szemlélteti a 3. ábra. A kezdetben kör alakú folt a stabil sokaság irányából közelíti a hiperbolikus pontot és annak közelébe érve megnyúlik az instabil irányok mentén. Ha a vizsgált vízrést a 3. ábrán látotthoz hasonlóan a stabil sokaság „kettévágja”, akkor ha a vízrész kettészölegesen kicsi is, az egymáshoz közeli, a stabil sokaság két oldalára eső vízrészecskék egymástól drasztikusan eltávolodnak. Ismert, hogy az eltávolodás mértéke a hiperbolikus fixpont közelében exponenciális (Tél és Gruiz 2003). Ha azonban a vízrész egészében a stabil sokaság egyik oldalára kerül, abban a fixponttól távolodva is közel maradnak egymáshoz a részecskék. Mindez egyúttal azt jelenti, hogy az elkeveredés nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre, nevezetesen a követett részecskék kezdeti elhelyezkedésére, ami a vízrész alakjának fejlődését jelentősen meghatározza.

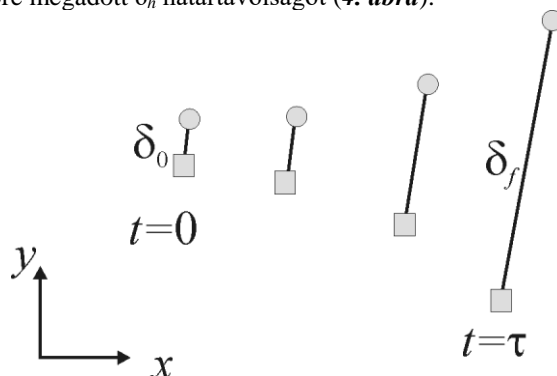


3. ábra. Kezdeti kör alakú folt megnyúlása a hiperbolikus pont környékén

A víztest keveredési viszonyainak fent említett is tulajdonságait is visszatükrözni képes leírási módszernek adódik az Aurell és társai (Aurell et al, 1996, 1997) által bevezetett Véges Méretű Lyapunov-Exponensek (VMLE, angolul FSLE: finite size Lyapunov-exponents) módszere. Itt egy kiválasztott tetszőleges vízrészecske szomszédjaitól való eltávolodásának mértékét az exponenciális jelleghez illeszkedve a következő képlet fejezi ki:

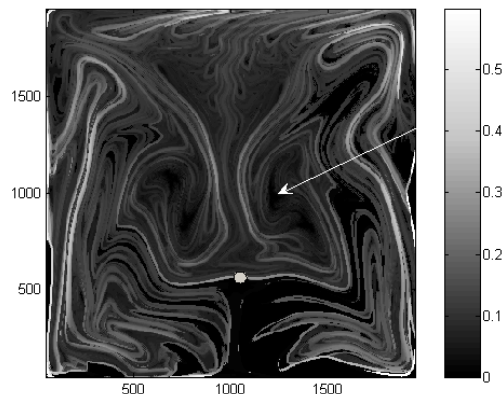
$$\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_o, \delta_h) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta_h}{\delta_o}$$

ahol  $\tau$  az az időtartam, amely alatt egy részecske szomszédjaitól vett távolsága a kezdeti  $\delta_o$  értékről eléri a az előre megadott  $\delta_h$  határtávolságot (4. ábra).



4. ábra. A VMLE számításának sematikus ábrája 1 részecskepárra

Ezt kiszámoljuk a tavon sodródó nagyszámú részecske esetére egy adott időpontra. Az eredmény így egy, a tavat lefedő VMLE eloszlás lesz. A nagy VMLE értékek gyorsan, kis értékek lassan távolodó, következésképpen hatékonyan illetve mérsékelten híguló részecskéket jelölnek. Ez az eljárás sekély tavak esetén jó kiértékelését adja az elkeveredés struktúrájának, amint azt Pattantyús-Ábrahám et al. 2006 megmutatta. Az 5. ábrán látható a vizsgált tavon a VMLE eloszlás az ÉK-ÉNy szélfordulás időpontjában. A világos színek jelzik a jól, sötétek a rosszul keveredő részeket. A jól keveredő részek vékony, kacsos sávokba rendeződnek. Ezek a sávok valójában a stabil sokaságokat rajzolják ki, ahonnan induló részecskék a hiperbolikus fixpontot elérhetik. Ezek a vonalak szinte az egész tavat behálózzák, így szinte mindenhol jó keveredést várhatunk.



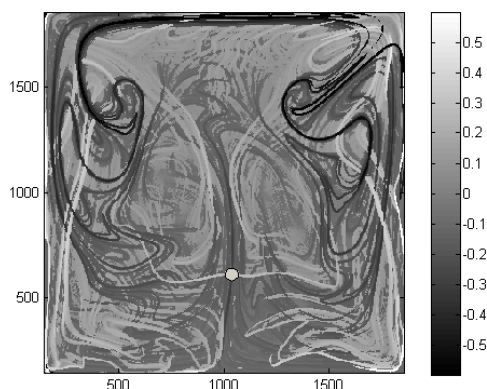
5. ábra. Az ÉK-ÉNy szélfordulás időpontjában vett VMLE [ $h^{-1}$ ] eloszlás a vizsgált modelltavon. Szürke pöttyel egy hiperbolikus fixpontot jelöltünk, a nyíl pedig egy rosszul keveredő részartományra mutat

A nagyobb értékhez köthető kacsok közt alacsonyabb értékű helyek találhatóak. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a jól és rosszul keveredő részek „váltogatják” egymást. Ezekon a területeken az, hogy egy adott részecske gyorsan eltávolodik-e a szomszédjaitól vagy sem, nagyon függ a kezdeti helyétől. Mégis, ha globálisan nézzük, ezeken a helyeken (ahol kacsos a VMLE eloszlás) találkozzhatunk a legnagyobb keveredéssel, hiszen hiába ma-

rad együtt a közeli szomszédjaival egy részecske, ha a kicsit távolabbi szomszédjai messze kerülnek tőle. Érdeemes megemlíteni, hogy ha ugyanabban az áramlásban a VMLE számításához szükséges részecskeszámot növeljük (vagyis javítjuk a felbontást), az eddig meglévő kacsok felszakadnak, és további, vékonyabb kacsok tűnnek fel. Az ilyen tulajdonsággal bíró területeket, ahol a szálas sokaságok az egész vízrészt behálózzák, a kezdeti helyre mutatott nagy érzékenység miatt kaotikusnak nevezhetjük.

Fontos a rosszul keveredő területek elkülönítés is. A vizsgált modelltőben ilyen terület például az **5. ábrán** nyíllal jelölt rész. Az ilyen területek a környezetükkel nem, vagy csak diffúzió által keveredhetnek. Ha ilyen területre kerül szennyeződés, az sokáig koncentráltan maradhat, annak ellenére, hogy az áramlással az egész sőtéttel jelölt terület mozoghat, és az alakja is változhat. Pontosabban: ez a terület mozog együtt az áramlással. Megfordítva: ha a kívül eső részt éri szennyezés, ez a belső vízrész, a külső területekkel való vízesere hiányában, sokáig érintetlen maradhat. Továbbá az is igaz, hogy egy ilyen víztérben való szennyezést a víztéren kívül indított semlegesítő anyaggal soha nem tudunk elérni.

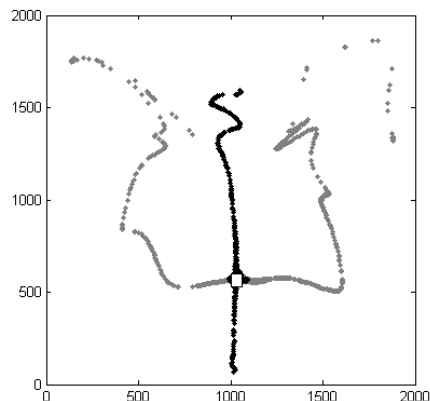
Ahhoz hogy a keveredés viszonyokról pontos képet kothassunk, érdemes megvizsgálni a VMLE eloszlást az inverz tavi áramlásmezőn is. Ezt úgy képezzük, hogy a sebesség-vektorokat ellentétes irányúra forgatjuk a nagyságuk megtartása mellett, illetve az így képzett sebességmezőket fordított sorrendbe tesszük. Ekkor a VMLE eloszlásban ott kapunk magas értékeket, ahol kezdetben egymástól távol lévő részecskék egymás közelébe kerülnek. Ha belegondolunk, épp az instabil sokaságok ilyen tulajdonságúak. Ha az eredeti és az inverz módon képzett VMLE értékeket együttesen ábrázoljuk, akkor a stabil és instabil sokaságok metszéspontjai megadják a keveredési tulajdonságokat alapvetően meghatározó hiperbolikus pontok helyeit (**6. ábra**).



**6. ábra.** Időben előre és hátra (inverz) módon számított ún. együttes VMLE eloszlás (Az inverz módon számított VMLE negatív értékekkel szerepel).

Szemléletes képet az időfüggő keveredésről az ún. lékelés módszerén (lásd Schneider et al. 2002.) alapuló általunk kidolgozott nyomvonal-nyaláb eljárás, mely során az áramlási tartományban képzeletben kijelölünk egy területet, és azon vízrészecskék kezdeti és vég pozícióját jelöljük meg, melyek e részterületen áthaladnak. Ekkor, ha a kijelölt terület tartalmaz hiperbolikus pontot, a kezdőpontok a stabil, a végpontok az instabil sokaságokat rajzolják ki. Minél

erősebb a tavi keveredés annál nagyobb területet fednek le a kijelölt rész felett áthaladó részecskék kezdő és végpontjai. Ha a kijelölt terület nem tartalmaz hiperbolikus pontot, akkor az eredmény nem lesz szálas-kacsos szerkezetű, a kiindulási és végállapotbeli pontok egymás közelében maradnak. A **7. ábrán** ilyen területnek az egyik hiperbolikus fixpont közeli környezetét választottuk. Itt is megjelennek a VMLE eloszlásban is tapasztalt kacsos alakzatok, akár a stabil, akár az instabil sokaságot nézzük.

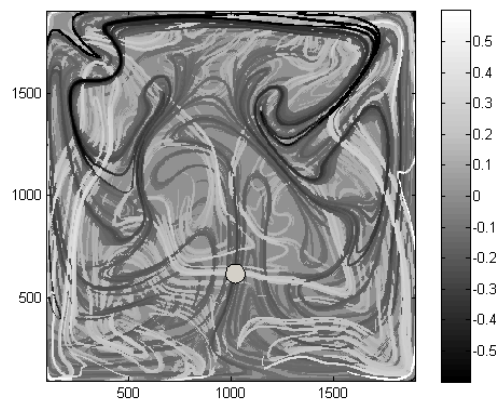


**7. ábra.** A kijelölt négyzet alakú résztartományon 8 szélperiódus alatt áthaladó részecskék kiindulási (szürke) és érkezési (fekete) pontjai (nyomvonal-nyaláb)

### 3. Hatásvizsgálatok

#### A periodikusság feltételezésének helyessége

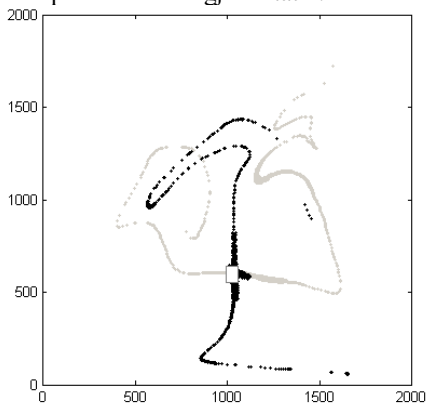
Elsőként vizsgáljuk meg, hogy mennyire helyes egy tisztán periodikusan változó széllel gerjesztett tavat vizsgálni, vagyis ha a periodikusságot elrontjuk, mennyire változnak a keveredési viszonyok jellemzői. Ehhez a szélfordulás periódus-idejét változtattuk véletlenszerűen, maximum a periódus-idő hosszának megfelelő mértékben. Vagyis egy ÉK-ÉNy-ÉK szélfordulás közt, az eredeti 8 óra helyett 4 és 12 óra közötti időtartamokat vettünk, véletlenszerűen. Hogy az eredeti, tisztán periodikus esettel összehasonlíthassuk, minden esetben a szélváltások időpontjában vizsgáltuk keveredési viszonyokat. Az eredmények a **8. ábrán** láthatók. A legfontosabb megfigyelhető tulajdonság, hogy a tiszta periodikusság megszűnése mellett a VMLE eloszlás szálas-kacsos szerkezete megmaradt. Ez a tulajdonság ugyanis nem a periodikusság, hanem az időfüggés miatt ilyen. A figyelmes szemlélő észrevehet némi módosulást nagy VMLE értékekkel jelzett kacsok futásában, de a fő struktúra nem mutat elterést.



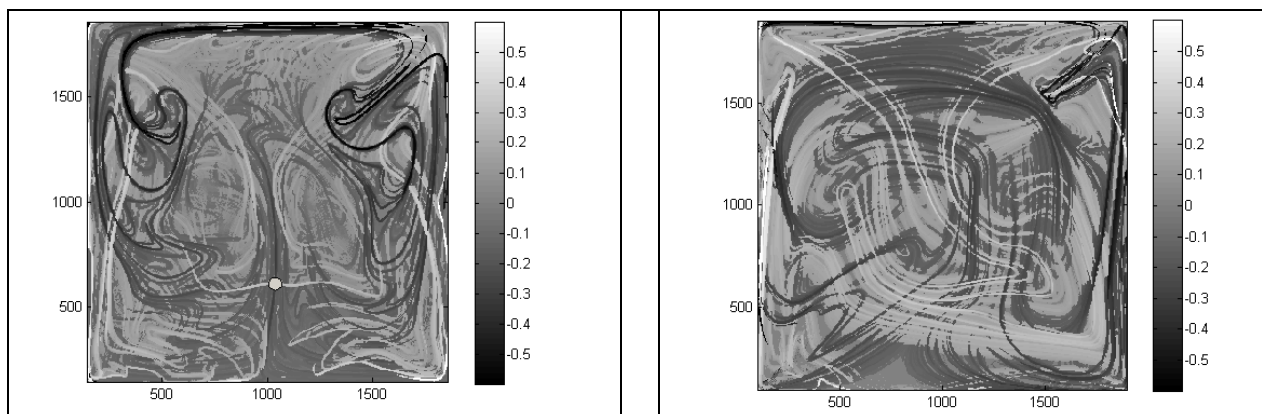
**8. ábra.** Véletlenszerű periódusidejű széllel gerjesztett tó VMLE eloszlása az ÉK-ÉNy szélfordulás pillanatában

Hasonló eredményt kapunk a nyomvonal-nyaláb vizsgálat esetén is (**9. ábra**). Megállapíthatjuk tehát, a tóban kiala-

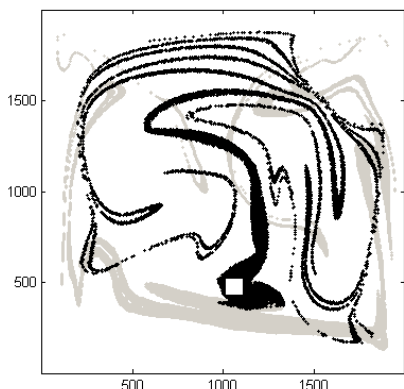
külő szálas-kacsos, a keveredést kormányzó mintázatot alapvetően a nem-permanens áramlási viszonyok okozzák, és nem az, hogy a gerjesztő szél tisztán periodikus, vagy véletlenszerű. A tisztán periodikus szélgerjesztés előnye viszont, hogy hatására elegendő számú ciklus után az áramlási mező is ezt a tiszta periodicitást fogja mutatni.



9. ábra. A kijelölt négyzet alakú résztartományon 8 szélperiódus alatt áthaladó részecskék nyomvonal-nyalábja. A kiindulási (szürke) és érkezési (fekete) helyek nem tisztán periodikus esetben



10. ábra. VMLE [ $h^{-1}$ ] eloszlás a referenciának tekintett (bal oldal) illetve az 1 m-rel csökkent vízszint esetén (jobb oldal).



11. ábra. A kijelölt négyzet alakú résztartományon 8 szélperiódus alatt áthaladó részecskék nyomvonal-nyalábja. A kiindulási (szürke) és érkezési (fekete) pontjai, alacsonyabb vízszint esetén jelöltük

Megfigyelhetjük, hogy a sokaságok a tó egyes részein sűrűn egymás mellett haladnak, úgymond felszakadoznak, és úgy kanyarognak, hogy egymással közel párhuzamosan futnak. Ezekon a területeken erős keveredést várunk. Ahol nagyok a VMLE értékek ott értelem szerűen egymástól kis távolságról induló részecskék gyorsan

### A vízszintváltozás hatása

Vizsgáljuk a keveredési viszonyokat abban az esetben, ha a tó vízszintje az előző fejezetben vizsgált – most referenciaként vett – tóhoz képest 1 m-rel csökken (ahogy az ilyen mértékű változást az elmúlt években mind a Balatonnál, mind a Fertő-tónál tapasztalhattuk) de a tó egyéb paramétere (mérete, a gerjesztő szél erőssége, periódusidő, stb.) nem változott. Ami ebben az esetben változik, az a mélység-egyenlőtlenségek mértéke, mégpedig a vízszint-csökkenéssel hangsúlyosabbá válna. Ez a változás szerepet játszik a köröző áramlások struktúrájának kialakulásában is. Ennek a változásnak a keveredésre gyakorolt hatását a VMLE módszerrel elemeztük. Az eredmény, – összehasonlítva a referencia tóval – a 10. ábrán látható, mindkét esetben az ÉK-ÉNy-i szélfordulás időpontjában szemléltetve a VMLE eloszlást. A kialakult VMLE kép, – hasonlóan az eredeti, 1 m-rel magasabb vízszintű tóéhoz –, szálas mintázat. Megfigyelhető mindazonáltal, hogy a nagy VMLE értékekhez tartozó szálas jórészt máshol futnak, mint a referencia tónál tapasztaltak, de továbbra is elmondhatjuk, hogy az egész tóban az advekciónak kaotikus jellegét mutat.

eltávolodnak. Mivel a magas és alacsony VMLE értékkel bíró helyek sűrűn váltják egymást, az eredmény – hasonlóan a referencia esethez – hatékony elkeveredés lesz.

A 11. nyomvonal-nyaláb ábra is az jelzi, hogy az alacsonyabb vízszintű tóban erősebb lesz a keveredés, mivel itt az eredeti esethez képest ugyanakkora idő alatt a az adott területen átfolyó részecskék kezdeti- és végállapotbeli helyeik nagyobb területet fednek le.

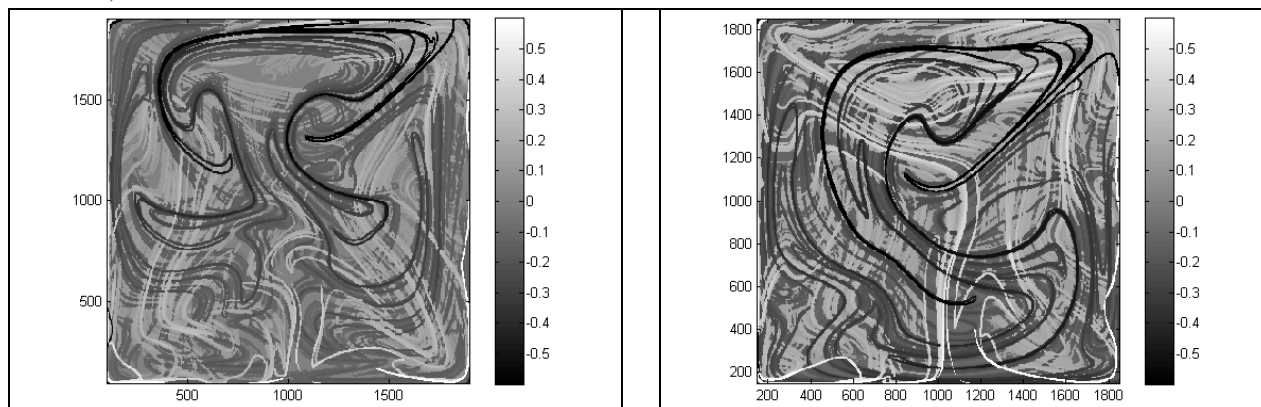
Látható, hogy gyengén keveredő részeket nem is tudunk tisztán elkülöníteni. Így gyanítható, hogy a teljes tó kaotikus jellegű, vagyis az adott paraméterek mellett nem alakulnak ki a környezetükkel nem keveredő, egybefüggően maradó részek. Hasonló módon lehetne azt is megvizsgálni, hogy mit okoz a tó vízszintjének hasonló mértékű növekedése.

### A szélfelőli terep területhasználatának megváltozása

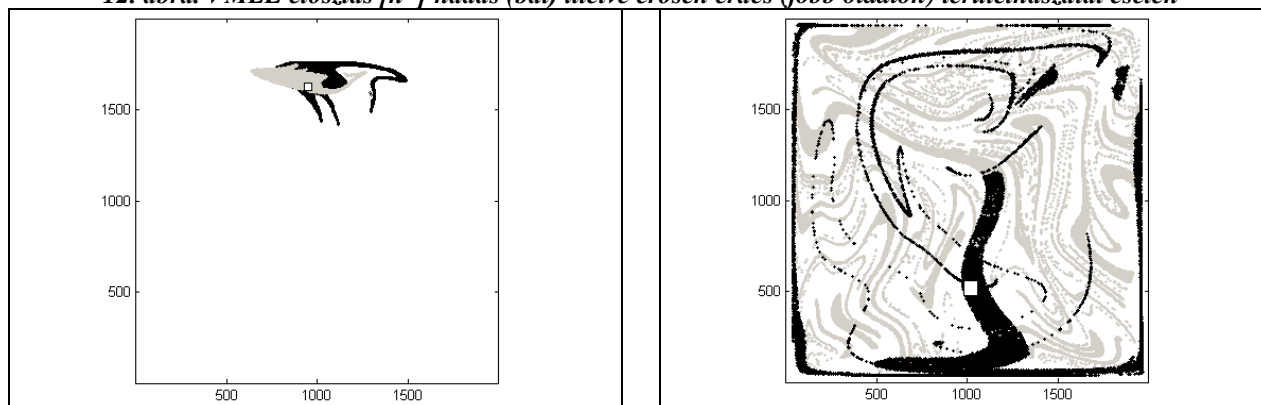
Vizsgáljuk meg, hogyan alakulnak a tó keveredési viszonyai, ha változás áll be a tavat környező terep területhasználatában! Ebből a szempontból elsősorban a szél felőli terep változása a fontos, hiszen az határozza meg, hogy a szél milyen alakú felszínközeli sebességprofillal fut a nyílt vízre. A nyílt vízben ugyanis a terepnél még erős hullámzás esetén is nagyságrendekkel kisebb aerodinamikai érdességet talál, a-

mi a felszínközeli szélprofil fokozatos átalakulását, és ezáltal a felszíni csúszató feszültség megváltozását eredményezi. A szél felőli terepen a referencia állapotban korábban sima partot tételeztünk fel. Ha a parton ennél magasabb növényzet található, akkor az ennek megfelelő aerodinamikai érdesség-magasság nagyobb lesz (esetünkben  $z_{0,1}=0,15$  m), és a tó felett kialakuló belső határreteg eltér a viszonylag sima, pl. alacsony fűvel benőtt tereppel övező tó feletti határretegtől. Ez a tó áramlási rendszerét is meghatározza (Józsa et al.2007).

A **12. ábrán** összehasonlítjuk a két különböző terepi érdesség-magasság esetén a tó felett kialakuló szélcsúszató feszültség elkeveredésre gyakorolt hatását, az együttes VMLE-closzolás segítségével. A  $z_{0,1}=0,15$  m-nél, mely nádborítású partnak felel meg, továbbra is szálas-kacsos szerkezetet mutat a VMLE kép (**12. ábra** baloldal), a nagy értékekhez társítható sokaságok azonban máshol találhatóak, mint a referencia esetben.



**12. ábra.** VMLE eloszlás [ $h^{-1}$ ] nádas (bal) illetve erősen érdes (jobb oldalon) területhasználat esetén



**13. ábra.** A kijelölt négyzet felett 8 periódus alatt áthaladó részecskék nyomvonal-nyalábjai. A kezdő (szürke) és végpontjait (fekete) nádas (bal) illetve erősen érdes (jobb oldalon) területhasználat esetén jelöltük

A magas fákkal, és épületekkel tarkított terepet nagyságrendileg  $z_{0,1}=0,50$  m értékű érdesség magassággal jellemezhetjük. **12. ábra** jobboldalán látható az együttes VMLE mező. A kialakuló szélcsúszató-feszültség egyenlőtlenebb lesz, ami a köröző áramlások erősödését vonja maga után, így az eredmény nagyobb VMLE értékeket mutat, mint az eredeti, **6. ábrán** tapasztaltak, illetve a nádas borítás esetén tapasztaltak. A sokaságok futása is sűrűbb szabdaltságú, mint a korábbi eseteknél. Az elkeveredés tehát nagyon intenzív, és rosszul keveredő rész-tartományt a tóban nem is találunk.

Ha a **13. ábrát** nézzük, láthatjuk a nádas, illetve érdeesebb területhasználat esetén a nyomvonal-nyaláb ábrát. A bal oldali ábra azt mutatja, hogy a részecskék hosszabb ideig együtt maradnak, hiszen itt nem tapasztaljuk a korábbi kacsos-szálas mintázatot, és a kiindulási és végpontok is közel maradnak egymáshoz. Ez az együtt maradás azonban nem örökérvényű, amint azt a dél és nyugat felé kiinduló kacsok is jelzik. Összességében azonban elmondhatjuk, hogy ebben az esetben találtunk olyan vízárszt, amely hosszabb ideig együtt mozog, és a

benne található szennyeződés sokáig, ebben a vízársztben maradhat.

A **13. ábra** mutatja a nagyobb terepérdességű esetét is. Láthatjuk, hogy a vizsgált 8 periódus alatt a kijelölt terület felett áthaladó részecskék kezdő és végpontjai az egész tavat bejárják, vagyis a keveredés igen erős. Ennyi idő alatt az eredeti tónál is csak pár rövid kacs megjelenését tapasztaltuk (lásd **7. ábra**). Ez az eredmény jól szemlélteti a keveredés erősödését. Egy esetleges szennyező-folt a tóban rendkívül gyorsan el tud terjedni, pusztán advekción miatt is. Meg kell jegyeznünk, hogy a környezetükkel nem keveredő tartományt már egyáltalán nem találhatunk a parti érdesség magasság növekedésével.

## 5. Összefoglalás

Munkánkban egy egyszerű geometriájú szélhajtotta modellő keveredési viszonyait vizsgáltuk időfüggő gerjesztés esetén. A keveredés-vizsgálathoz Lagrange-szemléletű leírást alkalmaztunk, amely alkalmas kaotikus tulajdonságok kimutatására. Az anyagtranszportot kormányzó hiperbolikus pontokat és sokaságokat a VM-

LE, és az általunk kifejlesztett nyomvonal-nyaláb módszerek segítségével határoztuk meg. Ez utóbbi egy kijelölt területen áthaladó részecskék kezdő és végállapotbeli helyeit jeleníti meg. Ha a kijelölt terület tartalmaz hiperbolikus pontot, akkor a kezdő (végállapotbeli) helyek a stabil (instabil) sokaságokat rajzolják ki. Nagy keveredés esetén e sokaságok a tó nagy részét behálózzák, gyenge keveredés esetén pedig egymáshoz közel maradnak. E két módszer segítségével a tavon belül elkülöníthetünk jól (kaotikus) illetve rosszul keveredő résztartományokat is.

Megvizsgáltuk, hogy mennyire elfogadható az a feltételezés, mely szerint a tavat gerjesztő szélmezőt periodikusnak vesszük. Eredményeink azt mutatják, hogy a kialakuló VMLE mintázat alapvetően nem a szél időbeli geometriájától függ, így az egyszerűbben kezelhető, periodikusnak vett széllel is a tóban kialakuló keveredési viszonyok tekintetében viszonylag pontos információkat kaphatunk

Kíváncsiak voltunk arra is, hogy hogyan módosulnak a tó keveredési viszonyai a klímaváltozás esetleges hatása-it is tekintetbe véve. Ezt a széleskörben elfogadott tanulmányok eredményei alapján a vizsgált tó vízszintjének csökkenésével vettük figyelembe. Ebben az esetben a meghajtó szél eloszlásának módosulása az áramképet módosítja, ami keveredési viszonyokban is változást okoz. Azt tapasztaltuk, hogy a szélfelőli terep érdessége megváltozásának jelentős hatása van a keveredési viszonyokra. Ha a terep érdesség simáról terep némileg érdekesebbre (nádas) változott, a tó keveredési viszonyait mutató képen időlegesen egy rosszul keveredő tartomány jelent meg. Ha a terep még érdekesebbé vált (fák megjelenésére, vagy beépítésre lehet ilyenkor gondolni), az így keletkező köröző áramlások tovább erősödtek, és ennek eredményeként az elkeveredés jóval hangsúlyosabbá

vált, mutatva hogy a kaotikus advekción kiterjedt a tó egészére.

### Köszönetnyilvánítás

Munkánkat a TÉT ESP 34/2006 projekt, Pattantyús-Ábrahám Margit kutatásait a Baden-Württemberg Tartományi Ösztöndíj segítette.

### Irodalom

- Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G., Vulpiani, A., Aug 1996. Growth of noninfiniteesimal perturbations in turbulence. *Physical Review Letters* **77** (7), 1262–1265.
- Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G., Vulpiani, A., 1997. Predictability in large: an extension of the concept of Lyapunov exponent. *Journal of Physics* **30**, 1–26.
- Bartholy J., Pongrácz R., Pattantyús-Ábrahám M., 2006. European cyclone track analysis based on ECMWF ERA-40 datasets. *International Journal of Climate* **26**, 1517–1527.
- Bartholy J., Pongrácz R., Pattantyús-Ábrahám M., 2007. A cirkulációs viszonyok változásának elemzése az atlanti-európai térségben. *Légtér* **52** (1), 18–24.
- IPCC, 2007. *The physical basis of climate change*. Technical report, IPCC Working Group
- Józsa, J., Krámer, T., 2002. *Hidroinformatika*. Jegyzet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék.
- Józsa, J., Milici, B., Napoli, E., 2007. Numerical simulation of internal boundary-layer development and comparison with atmospheric data. *Boundary-Layer Meteorology* **123**, 159–175.
- Ottino, J. M., 1989. *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport* Cambridge University Press
- Pattantyús-Ábrahám M, Tél T., Krámer T. és Józsa J., 2008. Mixing properties of a shallow basin due to wind-induced chaotic flow. *Advances in Water Resources* **31**, 525–534.
- Pattantyús-Ábrahám M., Tél T., Krámer T., Józsa J., 2006: Chaotic advection in surface flows: an analysis based on finite size Lyapunov exponents. In: *7th International Conference on Hydroinformatics*, HIC 2006, Nice, France (ISBN 81-903170-2-4) pp 558-565.
- Schneider, J., Tél, T., Neufeld, Z., 2002. Dynamics of “leaking” Hamiltonian systems. *Physical Review E* **66** (6), 066218
- Tél T. és Gruiz M., 2002. *Kaotikus dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest.
- A kézirat beérkezett: 2008. április 23.*

<b>PATTANTYÚS-ÁBRAHÁM MARGIT</b>	okl. meteorológus (2005), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszékének doktorandusza.
<b>TÉL TAMÁS</b>	okl. fizikus (1975), az MTA doktora (1990), az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszékének egyetemi tanára
<b>KRÁMER TAMÁS</b>	okl. építőmérnök (1981), PhD (2007), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszékének adjunktusa
<b>JÓZSA JÁNOS</b>	okl. építőmérnök (1981), az MTA doktora (2003), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszékének tanszékvezető egyetemi tanára

## The analysis of chaotic advection in shallow lakes considering the effect of climate change: methodology and application

*Pattantyús-Ábrahám, M. – Tél, T. – Krámer, T. – Józsa, J.*

**Abstract:** In this paper methods based on Lagrangian description and taken from the chaos theory are demonstrated which are suitable for analysing mixing properties like finite size Lyapunov exponent (FSLE) and streaklines. These methods are illustrated on a numerically modelled, wind-induced shallow lake with a simple geometry. The changes on the mixing properties caused by the modification of water level due to climate change or by the changes in the land usage around the lake are also shown.

**Keywords:** shallow lake mixing, climate change, Lagrangian transport, chaos, FSLE, streaklines