

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK ANIZOTROP KÖZEGEKBEN*

NAGY KÁROLY, TÉL TAMÁS

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

Bevezetés

Az átlátszó közegekben értelmezett fotonok fizikai sajátosságait tanulmányozva, foglalkoztunk az anizotrop közegekben terjedő elektromágneses síkhullámok klaszszikus elméletének egyes kérdéseivel, valamint a sugárzási tér kvantumelektrodinamikájával. A kvantumelméleti eredményeinket az Acta Phys. Hung.-ban megjelent dolgozatunkban [1] közöltük. E munkánk során kaptunk olyan eredményeket is a kristályoptika körében, amelyek a tankönyvekben nem szerepelnek, ezért magyar nyelvű közreadásukat indokoltnak találtuk.

1. A kristályoptika alapegyenletei és azok síkhullám megoldásai

Feltesszük, hogy az egész végtelen teret homogén, anizotrop közeg tölti ki, amelynek mágneses permeabilitása nem tér el lényegesen a vákuumbeli $\mu=1$ értéktől. A közeget elektromos szempontból az ε_{ik} dielektromos-együttható-tenzor jellemzi. Ez a tenzor szimmetrikus. Az elektromos indukcióvektor és az elektromos térerősség között a

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} E_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

anyagi egyenletek érvényesek. (A vektorok x, y, z komponenseit az index 1, 2, 3 értékeivel jelöljük.)

Mivel ε_{ik} szimmetrikus tenzor, található olyan koordinátarendszer, amelyben a vegyes indexű elemek eltűnnek, és csak a főátlóban állók különböznek zérustól:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{11} \equiv \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{22} \equiv \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_3.$$

Ebben az ún. dielektromos főtenzely-rendszerben az anyagi egyenletek:

$$D_i = \varepsilon_i E_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Az elektromágneses teret a

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3a)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (3b)$$

Maxwell-egyenletek írják le.

* Érkezett: 1981. dec. 8.

A továbbiakban ezeknek az alapegyenleteknek síkhullám-megoldását vizsgáljuk. A térmennyiségeket tehát a

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{D}_0 e^{i(\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 e^{i(\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

alakban keressük, ahol \mathbf{D}_0 , \mathbf{E}_0 és \mathbf{H}_0 konstans vektorok, \mathbf{k} a hullám hullámszámvektora, $\omega(\mathbf{k})$ pedig a frekvenciája. Könnyen látható, hogy a (3) Maxwell-egyenleteknek csak akkor lehetnek (4) alakú megoldásai, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\mathbf{D}_0 = -\frac{c}{\omega(\mathbf{k})} (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0), \quad (5a)$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\omega(\mathbf{k})} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0), \quad (5b)$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{D}_0) = 0 \quad (5c)$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0) = 0. \quad (5d)$$

Mivel \mathbf{D}_0 , \mathbf{E}_0 és \mathbf{H}_0 nem függhet k -tól, az (5a), (5b) egyenletekből következik, hogy $\omega(k)$ -nak arányosnak kell lennie \mathbf{k} abszolút értékével.

Azt írhatjuk tehát, hogy

$$\omega(\mathbf{k}) = v|\mathbf{k}|. \quad (6)$$

A (4) felírásából következik, hogy v a hullám terjedési sebessége, amely nem függ \mathbf{k} nagyságától. Az izotrop rendszerekkel ellentétben azonban v most függhet a hullám terjedési irányától, melyet a

$$\boldsymbol{\varkappa} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \quad (7)$$

egységvektor jelöl ki. Célszerű még bevezetni a

$$v = c/n \quad (8)$$

definícióval a közeg n (≥ 1) törésmutatóját. A fentiek értelmében tehát mind v , mind n függhet $\boldsymbol{\varkappa}$ -tól, ezt a függést azonban az egyszerű írásmód kedvéért nem fogjuk expliciten feltüntetni.

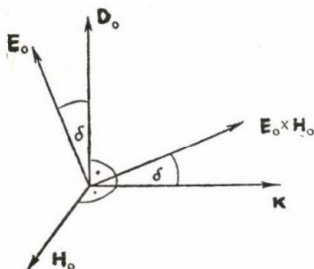
Az (5) egyenletekből közvetlenül leolvasható a bennük szereplő vektorok relatív térbeli elhelyezkedése, ugyanis

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_0 \perp \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{D}_0 \perp \boldsymbol{\varkappa}, \\ \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}_0 \perp \boldsymbol{\varkappa}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

\mathbf{E}_0 azonban nem merőleges $\boldsymbol{\varkappa}$ -ra. A térvektorok irányát az 1. ábra szemlélteti.

Az (5b) egyenlet (5a)-ba történő behelyettesítésével, valamint (6)–(8) felhasználásával a

$$\mathbf{D}_0 = n^2(\mathbf{E}_0 - \boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{E}_0, \boldsymbol{\varkappa})) \quad (10)$$



1. ábra. A $\boldsymbol{\varkappa}$ irányban terjedő síkhullám térerősség vektorainak térbeli elhelyezkedése anizotrop közegben

összefüggést kapjuk, ami a kristályoptika alapvető fontosságú egyenlete, ugyanis az (1) anyagi egyenlet segítségével \mathbf{E}_0 irányát és n nagyságát is meghatározza adott terjedési irány esetén. A következőkben végig a dielektromos főtengelyrendszerben fogunk dolgozni. Ekkor (1) a (2) egyenletre egyszerűsödik, s természetesen κ a hullám terjedésének irányát a főtengelyekhez képest adja meg.

A (10) egyenlet szokásos megoldási módja a következő [2, 3]. A (2) anyagi egyenlet felhasználásával (10) az alábbi alakba írható

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_0 = 0, \quad (11)$$

ahol az \mathbf{A} mátrix komponensei

$$A_{ij} = n^2(\delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j) - \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

A (11) egyenletnek triviálistól különböző megoldása csak akkor lehetséges, ha \mathbf{A} determinánsa eltűnik, vagyis, ha

$$n^4(\varepsilon_1 \kappa_1^2 + \varepsilon_2 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_3^2) - n^2[\kappa_1^2 \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \kappa_2^2 \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \kappa_3^2 \varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0. \quad (13)$$

Ennek az egyenletnek két valós pozitív gyöke van, ami azt jelenti, hogy adott terjedési irányhoz két különböző törésmutató, s (8) alapján két különböző fázissebesség tartozik. Adott κ irányban tehát két különböző sebességű síkhullám terjed. Az \mathbf{E}_0 térerősség-vektor lehetséges iránya a kapott törésmutató érték (11)-be történő behelyettesítése után határozható meg, a \mathbf{D}_0 eltolási vektor komponensei pedig \mathbf{E}_0 ismeretében (2)-ből olvashatók le. A kristályoptikával foglalkozó tankönyvekből ismeretes, hogy a két különböző törésmutatójú hullámhoz tartozó \mathbf{D}_0 vektorok merőlegesek egymásra [2, 3]. \mathbf{D}_0 lehetséges irányait nevezzük polarizációs irányoknak. Az anizotrop közegben terjedő elektromágneses hullámok tehát egymásra merőlegesen lineárisan polarizáltak. E két lehetséges polarizációt jelöljük felül elhelyezett a , ill. b indexszel, pl. $\mathbf{D}_0^a, \mathbf{D}_0^b$. A megfelelő fázissebességek

$$v^a = \frac{c}{n^a}, \quad v^b = \frac{c}{n^b}. \quad (14)$$

A (6) egyenletből látszik, hogy adott hullámhosszúságú és terjedési irányú két lineárisan polarizált hullám frekvenciája is különböző.

Most bemutatunk egy, a fenti megoldással ekvivalens eljárást, melynek használata akkor előnyös, ha a polarizációs irányok konkrét meghatározása a célunk. Jelöljük az egyelőre ismeretlen \mathbf{D}_0^a , illetve \mathbf{D}_0^b polarizációs irányokba mutató egységvektorokat \mathbf{e}^a illetve \mathbf{e}^b -vel. Tudjuk, hogy \mathbf{D}_0^a és \mathbf{D}_0^b egymásra és a terjedési irányra is merőlegesek, tehát

$$(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = 0, \quad (\mathbf{e}^a, \kappa) = 0, \quad (\mathbf{e}^b, \kappa) = 0, \quad |\mathbf{e}^a| = 1, \quad |\mathbf{e}^b| = 1. \quad (15)$$

Ezek az összefüggések még nem határozzák meg az $\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b$ vektorokat, mert a két egységvektor hat komponensére csak öt egyenlet adnak. Valóban, (15) még nem tartalmazza azt a feltételt, hogy $\mathbf{E}_0^{a(b)}$ ugyanabban a síkban van, mint κ és $\mathbf{D}_0^{a(b)}$ (l. (9) egyenletet és 1. ábra). Ezt a feltételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy \mathbf{E}_0^a -nak merőlegesnek kell lennie \mathbf{D}_0^b -re. Mivel \mathbf{E}_0^a iránya (2) szerint az $(e_1^a/\varepsilon_1, e_2^a/\varepsilon_2, e_3^a/\varepsilon_3)$ vektorral párhuzamos, ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{j=1}^3 \frac{e_j^a e_j^b}{\varepsilon_j} = 0. \quad (16)$$

(\mathbf{E}_0^b merőlegessége \mathbf{D}_0^a -ra ugyancsak a (16) megszorításra vezet.) A (15), (16) egyenletek már egyértelműen meghatározzák a polarizációs irányokat. Ehhez most nincs szükség az n törésmutató ismeretére, mint az előző eljárásban.

Érdekességként megemlítjük, hogy az anizotrop közegek kvantumelektrodinamikai vizsgálatakor azt találtuk, hogy az elektromágneses tér Hamilton-operátora csak akkor diagonalizálható, ha a fotonok polarizációs irányait a (15), (16) egyenletek határozzák meg [1]. Más szóval, anizotrop közegben adott hullámszámú fotonok polarizációs irányai megegyeznek az ugyanolyan hullámszámú klasszikus síkhullámok polarizációs irányjaival.

A most bemutatott módszer illusztrálásaként megvizsgáljuk az egytengelyű kristály példáját. Egytengelyű kristály esetén két főtengely irányában megegyezik a dielektromos együttható. Ha a z -tengelyt választjuk optikai tengelynek, írhatjuk, hogy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{\perp}, \quad \varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{\parallel}, \quad (17)$$

A (16) egyenlet ekkor a következőképpen írható:

$$e_1^a e_1^b + e_2^a e_2^b + \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} e_3^a e_3^b = 0. \quad (18)$$

A (15) első egyenletével összevetve, ez csak akkor teljesülhet, ha e_3^a , vagy e_3^b zérus. Legyen $e_3^a = 0$. A (15) második egyenletéből ekkor az

$$e_1^a = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1} e_2^a \quad (19)$$

adódik. A (15) negyedik egyenletét is kielégítő megoldás tehát:

$$\mathbf{e}^a = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_2^2/\kappa_1^2}} \begin{pmatrix} -\kappa_2/\kappa_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Most meghatározzuk a másik polarizációs irány \mathbf{e}^b egységvektorát. Az \mathbf{e}^a és \mathbf{e}^b egymásra merőleges voltából, valamint (19)-ből következik

$$e_2^b = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} e_1^b. \quad (21)$$

Ezt (15) harmadik egyenletébe helyettesítve, kapjuk:

$$e_3^b = -\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \left(1 + \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} \right) e_1^b. \quad (22)$$

Figyelembe véve az \mathbf{e}^b egységvektor-jellegét kifejező (15) ötödik egyenletét, megkapjuk \mathbf{e}^b egyre normált alakját:

$$\mathbf{e}^b = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_2^2/\kappa_1^2}} \begin{pmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_2 \kappa_3 / \kappa_1 \\ -(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) / \kappa_1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Ezzel megmutattuk, hogy a (15), (16) hat egyenlet egyszerűen megadja a kristályban haladó elektromágneses síkhullám polarizációs irányait.

Végül megjegyezzük, hogy az a polarizációs irányú síkhullám esetén az eltolási vektor és az elektromos térerősség vektor egymással párhuzamosak (amint az (20)-ból (17) és (2) segítségével leolvasható). Következésképpen ez a hullám hasonlóképpen viselkedik, mint azt izotrop közegek esetén megszoktuk. (L. pl. (31)). Ezért az a polarizációjú hullámot ordinárius sugárnak nevezzük szemben a b extraordinárius sugárral, mely a megszokottól eltérő viselkedést mutat.

Térjünk most vissza az általános esethez! A (15), (16) egyenletek csak a polarizációs irányokat határozzák meg. Annak érdekében, hogy eljárásunk valóban egyenértékű lehessen a szokásossal, meg kell még mondanunk azt is, hogyan adható meg a törésmutató a (15), (16) egyenletek megoldása ismeretében. Ezzel foglalkozunk a következő pontban.

2. A fázissebesség és a törésmutató meghatározása

Az anizotrop közegekben — mint fent láttuk — adott \mathbf{k} irányban általában két különböző fázissebességű, lineárisan polarizált síkhullám terjed. A fázissebességek és a törésmutatók közötti kapcsolatot a (14) egyenletek adják meg. A fázissebességek meghatározásának az a szokásos módja terjedt el, hogy előbb a törésmutatókat számítjuk ki a (13) egyenletből, és ezekből (14) alapján megkapjuk a fázissebességeket. Ehelyett megadunk egy másik eljárást.

Belátható, hogy a két lineárisan polarizált síkhullámra vonatkozó törésmutatókat a polarizációs irányok ismeretében a következő kifejezések adják:

$$\frac{1}{n_{a,b}} = \left[\sum_{j=1}^3 \frac{(e_j^{a,b})^2}{\epsilon_j} \right]^{1/2}. \quad (24)$$

Most bebizonyítjuk, hogy (24) a törésmutatót meghatározó (10) egyenletnek a két pozitív megoldása. Ehhez (24)-et átalakítjuk a következőképpen.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vegyünk csak az egyik polarizációs irányt

$$\mathbf{D}_0^a = |\mathbf{D}_0^a| \mathbf{e}^a, \quad \mathbf{E}_0^a = |\mathbf{D}_0^a| \begin{pmatrix} e_1^a/\epsilon_1 \\ e_2^a/\epsilon_2 \\ e_3^a/\epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Ezeket (24)-be helyettesítve, az így írható:

$$\frac{1}{n_a^2} = \frac{(\mathbf{D}_0^a, \mathbf{E}_0^a)}{|\mathbf{D}_0^a|^2}. \quad (26)$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy (26) valóban érvényes. A (10) egyenlet az a polarizációs irányra

$$\mathbf{D}_0^a = n_a^2 (\mathbf{E}_0^a - \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{E}_0^a, \boldsymbol{\kappa})). \quad (27)$$

Szorozzuk meg (27) mindkét oldalát skalárisan \mathbf{E}_0^a -val.

$$(\mathbf{D}_0^a, \mathbf{E}_0^a) = n_a^2 E_0^{a^2} - n_a^2 (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}_0^a)^2. \quad (28)$$

Ebből

$$n_a^2 = \frac{(\mathbf{D}_0^a, \mathbf{E}_0^a)}{E_0^{a2} - (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}_0^a)^2}. \quad (29)$$

Az \mathbf{E}_0^a , \mathbf{D}_0^a és $\boldsymbol{\kappa}$ vektorok elrendeződését az 1. ábra szemlélteti. Ebből látszik, hogy fennállnak a következő egyenlőségek.

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_0^a, \mathbf{E}_0^a) &= |\mathbf{D}_0^a| |\mathbf{E}_0^a| \cos \delta, \\ (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}_0^a) &= -|\mathbf{E}_0^a| \sin \delta. \end{aligned} \quad (30)$$

Ezeket (29)-be beírva, kapjuk:

$$n_a^2 = \frac{|\mathbf{D}^a|^2}{(\mathbf{E}_0^a, \mathbf{D}_0^a)},$$

ami (26)-tal ekvivalens. Ezzel megmutattuk, hogy a törésmutatók egyszerűen számíthatók a (24) képlet alapján.

Lássuk ezt ismét az egytengelyű kristály példáján. Helyettesítsük be (20)-at (24)-be! Adódik:

$$\frac{1}{n_a^2} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}. \quad (31)$$

Hasonlóképpen kapjuk (23) és (24) alapján:

$$\frac{1}{n_b^2} = \frac{\kappa_3^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\varepsilon_{\parallel}}. \quad (32)$$

A megfelelő fázissebességek:

$$v_a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}, \quad (33)$$

$$v_b = c \left\{ \frac{\kappa_3^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\varepsilon_{\parallel}} \right\}^{1/2}. \quad (34)$$

Az ordinárius sugár esetén tehát a törésmutató és a fázissebesség konstans, hasonlóan ahhoz, mint izotrop rendszerben, az extraordinárius sugár esetén azonban mindkét mennyiség határozott szögfüggést mutat.

A következő pontban az anizotrop közegbeli elektromágneses síkhullám energia- és impulzusviszonyait vizsgáljuk. A gondolatmenetben lényeges szerepet kap majd az, hogy a törésmutatót ki tudjuk fejezni a polarizációs egységvektorok segítségével.

3. Az elektromágneses síkhullám energiája és impulzusa anizotrop közegekben

A térenergia sűrűségének

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)) + H^2(\mathbf{r}, t)]$$

kifejezését alapul véve, a (10), valamint az (5b) összefüggések alapján belátható, hogy az izotrop esethez hasonlóan a síkhullám elektromos energiasűrűsége itt is megegyezik a mágnessel. Ezért

$$u(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)). \quad (35)$$

A $\boldsymbol{\kappa}$ irányban terjedő hullámmal együtt energia áramlik, amelynek jellemzésére az energia áramsűrűséget, az ún. Poynting-vektort használjuk. Ennek definíciója

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = c(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)). \quad (36)$$

Mivel \mathbf{E} nem merőleges $\boldsymbol{\kappa}$ -ra, az elektromágneses energia nem a hullámterjedés irányában áramlik, hanem azzal δ szöget zár be (l. az 1. ábrát). Fejezzük ki az u energiasűrűséget és az \mathbf{S} Poynting-vektort (10) felhasználásával \mathbf{E} és $\boldsymbol{\kappa}$, ill. \mathbf{k} segítségével:

$$u = n^2(E^2 - (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E})^2), \quad (37)$$

$$\mathbf{S} = (\omega/k)n^2(\boldsymbol{\kappa}E^2 - \mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E})). \quad (38)$$

A polarizációs indexeket az egyszerű jelölés kedvéért ebben a pontban nem írjuk ki. A (37), (38) kifejezések egybevetéséből adódik:

$$u = \frac{1}{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{S}) = \frac{k}{\omega} |\mathbf{S}| \cos \delta. \quad (39)$$

Ez a $k = \omega/v$ összefüggés figyelembevételével így is írható:

$$u = |\mathbf{S}| \cos \delta / v. \quad (40)$$

Itt v a hullám fázissebességét jelenti. (40)-ből látszik, hogy az elektromágneses energia nem a fázissebességgel terjed. Az energiaterjedés \mathbf{v}^* sebességét a

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{S}}{u} \quad (41)$$

képlettel definiáljuk. A (40), (41) képletekből következik

$$v^* = \frac{v}{\cos \delta}. \quad (42)$$

Mivel anizotrop közegekben (speciális irányoktól eltekintve) a δ szög nem zérus, ezért az energia \mathbf{v}^* áramlási sebessége általában nagyobb a fázissebességnél. A fázissebesség az energiasebességnek a hullám terjedési irányára való vetületével egyezik meg.

A későbbiek szempontjából lényeges, hogy v^* nem lehet nagyobb a vákuumbeli fénysebességnél. Ahhoz, hogy ezt belássuk, mind a Poynting-vektort, mind az energiasűrűséget átalakítjuk.

Az anyagi egyenletek, valamint (10) és (24) felhasználásával kapjuk:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{n} \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{D^2}{n^2} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}) \right) = \frac{c}{n} D^2 \left(\boldsymbol{\kappa} \sum_{j=1}^3 \frac{e_j^2}{\varepsilon_j} - \mathbf{e} \sum_{j=1}^3 \frac{e_j \kappa_j}{\varepsilon_j} \right), \quad (43)$$

$$u = (\mathbf{D}, \mathbf{E}) = D^2 \sum_{j=1}^3 \frac{e_j^2}{\varepsilon_j}. \quad (44)$$

(41) alapján az energia terjedési sebessége:

$$\mathbf{v}^* = c \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}}{n} - \mathbf{e} n \sum_{j=1}^3 \frac{e_j \kappa_j}{\varepsilon_j} \right). \quad (45)$$

Ennek nagysága

$$v^* = c \sqrt{\frac{1}{n^2} + n^2 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{e_j \kappa_j}{\varepsilon_j} \right)^2}. \quad (46)$$

Azt állítjuk, hogy a gyök alatti kifejezés nem nagyobb egynél. Induljunk ki ebből a feltevésből, tehát legyen

$$\frac{1}{n^2} \cong \frac{1}{n^4} + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{e_j \kappa_j}{\varepsilon_j} \right)^2. \quad (47)$$

A törésmutató (24) kifejezését felhasználva, ez így írható

$$\sum_{j=1}^3 \frac{e_j^2}{\varepsilon_j} \cong \frac{1}{n^4} + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{e_j \kappa_j}{\varepsilon_j} \right)^2. \quad (48)$$

(28) és (26) összevetéséből következik, hogy $n^{-4} + (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{E}_0)^2 D_0^{-2} = E_0^2 / D_0^2$, amit (48)-ba helyettesítve adódik:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{e_j}{\varepsilon_j} \cong \sum_{j=1}^3 \frac{e_j^2}{\varepsilon_j^2}. \quad (49)$$

Ez viszont biztosan igaz, mert $\varepsilon_j \cong 1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$v^* \cong c. \quad (50)$$

Ezután meghatározzuk a síkhullám elektromágneses impulzusát. Az impulzus-sűrűséget a

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (51)$$

képlettel definiáljuk [4, 2]. Az energia áramsűrűség (36) kifejezését (51)-gyel összevetve megkapjuk az energia tehetetlenségét kifejező Planck-féle összefüggést az impulzussűrűség és az áramsűrűség között:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}. \quad (52)$$

Mivel $\mathbf{S} = u\mathbf{v}^*$, az impulzussűrűség a

$$\mathbf{g} = \frac{u}{c^2} \mathbf{v}^* \quad (53)$$

alakba írható. Az itt szereplő u/c^2 mennyiség a síkhullám energiasűrűségének megfelelő tehetetlen-tömeg-sűrűség. Az impulzussűrűség kifejezése tehát olyan alakú, amint azt a mechanikában megszoktuk, nevezetesen: tömegsűrűség \times sebesség. Benne a v^* energia terjedési sebesség szerepel, amely — mint láttuk — nem egyezik meg a hullám fázissebességével. Ezek az eredmények természetesen izotrop közegekben is érvényesek, de ott $v^* = v$.

Végezetül megadjuk az energia terjedési sebességét egytengelyű kristályban. A (45), valamint a (20) és (31) egyenletekből következik, hogy az ordinárius sugárra

$$v_a^* = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}} \kappa,$$

ami megegyezik a sugár fázissebességével (l. (33)). Az extraordinárius sugárra viszont (46), (23) és (32) alapján

$$v_b^* = c \left[\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 \epsilon_{\parallel}^2 / \epsilon_{\perp}^2}{\epsilon_{\parallel} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 \epsilon_{\parallel} / \epsilon_{\perp})} \right]^{1/2},$$

ami különbözik a fázissebességtől.

4. Fotonok anizotrop közegekben

Az elektromágneses sugárzással foglalkozó tankönyvekből ismert, (l. például [5]), hogy a forrásmentes, ún. tiszta sugárzási tér előállítható síkhullámok szuperpozíciójaként. A tér energiája és impulzusa különböző hullámhosszúságú síkhullám-energiák és impulzusok összege. A kvantumelektrodinamika szerint ezek a síkhullámok kvantált energiával és impulzussal rendelkeznek. A \mathbf{k} hullámszámmal jellemzett síkhullám energiája és impulzusa vákuumban (a nullponti energiától eltekintve):

$$U_{\mathbf{k}} = \hbar k c n_{\mathbf{k}}, \quad (54)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k} n_{\mathbf{k}}. \quad (55)$$

$n_{\mathbf{k}}$ a 0, 1, 2, ... nem negatív egész számokat veheti fel, $\hbar k c$ az energia, $\hbar \mathbf{k}$ pedig az impulzus kvantuma. A síkhullám ugyanannyi energiakvantumot tartalmaz, mint impulzuskvantumot, hiszen mindegyikben ugyanaz az $n_{\mathbf{k}}$ szám szerepel szorzóként. A $\hbar k c$ energiájú $\hbar \mathbf{k}$ impulzusú kvantumot nevezzük fotonnak. A foton hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a részecskék. Nevezetesen, impulzusa és energiája a részecskékhez hasonlóan négyesvektorként transzformálódik, amikor egy inerciarendszerről másikra térünk át. A foton nyugalmi tömege zérus, de a tehetetlen tömege zérustól különbözik és a c^2 -tel osztott energiával egyezik meg. A foton impulzusa a tehetetlen tömegével ugyanolyan kapcsolatban van, mint a részecskék impulzusa: tömeg \times sebesség alakú. A klasszikus mechanikából eredő részecskefogalmat azonban mégsem lehet a fotonra teljesen alkalmazni, mert pl. értelmetlen a foton helyéről vagy pályájáról beszélni.

Mintegy harminc évvel ezelőtt vetődött fel a kérdés, hogy az elektromágneses tér részecsketulajdonságai érvényesek-e átlátszó közegekben is. Itt ugyanis a tér kölcsönhat az atomok vagy molekulák töltött részével, azokat mozgásba hozza, közben energiát és impulzust ad át nekik. A rezgő töltések elektromágneses hullámokat sugároznak, ezáltal energiát és impulzust adnak vissza a térnek. Külön vizsgálatot igényelt annak eldöntése, hogy a fény kvantumos szerkezete megmarad-e ilyen körülmények között is, vagy csak vákuumra korlátozódik. A válasz az izotrop közegekre kidolgozott fenomenológiai kvantumelektrodinamika [6–8] alapján igen volt. Az elektromágneses sugárzás energiája és impulzusa izotrop közegekben is kvantált. A foton energiája [8] $\varepsilon = \hbar kc/n$, impulzusa $\mathbf{g} = \hbar \mathbf{k}/n^2$ (n a közeg törésmutatója). Az energia és impulzus között a vákuumhoz hasonlóan a

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon}{c^2} \mathbf{v}^*$$

összefüggés érvényes. Ez teljesen olyan alakú, mint a részecskék impulzusa. ε/c^2 a foton tehetetlen tömege, \mathbf{v}^* a sebessége, amely megegyezik az azonos hullámhosszú klasszikus hullám energiájának terjedési sebességével: $v^* = c/n$. A vákuumbeli fotonokhoz képest az a különbség adódott, hogy szigetelőkben a foton nyugalmi tömege nem zérus, hanem

$$m_0 = \frac{\hbar k}{cn^2} \sqrt{n^2 - 1}. \quad (56)$$

A foton $m = \varepsilon/c^2$ tehetetlen tömege és m_0 nyugalmi tömege között a részecskékre jellemző

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^{*2}/c^2}} \quad (57)$$

képlet érvényes. Ez teljesen összhangban van a relativitáselmélettel, hiszen a szigetelőbeli fotonok $v^* = c/n < c$ sebességgel mozognak.

Ezek az eredmények az Abraham [4]- és a Minkowski [9]-féle energia-impulzus-tenzor körüli vitában az Abraham-féle felfogást támogatták, mert a Minkowski-fotonok nem rendelkeznek ilyen részecske-tulajdonságokkal. Példaként említjük csupán, hogy a Minkowski-foton nyugalmi tömege képzetesnek adódik.

Mivel a szakirodalomban az energia-impulzus-tenzor iránti érdeklődés az utóbbi időben újból előtérbe került [10, 11], vizsgálatainkat kiterjesztettük anizotrop közegekre is [1]. Ezek eredményeként kaptuk, hogy az elektromágneses tér energiája kristályos közegekben is kvantált, az energiakvantum nagysága itt is

$$\varepsilon_{a(b)} = \frac{\hbar kc}{n_{a(b)}}, \quad (58)$$

de a törésmutató, mint fentebb láttuk, függ a hullám polarizációs irányától, és ennek megfelelően az energiakvantum is polarizációfüggő.

Az elektromágneses tér impulzusoperátora (az Abraham-féle kifejezést használva) anizotrop közegekben nem cserélhető fel az energia operátorral, ezért e két operátornak nincs szimultán sajátállapota.

Kimutatható viszont, hogy a térimpulzus középértéke impulzuskvantumok összegeként adódik. Ezért azt mondhatjuk, hogy a fotonkép anizotrop közegekre már nem vihető át teljesen, de középértékben itt is érvényes. Az így adódó fotonokat,

ezért „kvázi-részecskék”-nek nevezzük. A fotonok impulzusa:

$$\mathbf{g}^{a(b)} = \hbar \left(\mathbf{k} \frac{1}{n_{a(b)}^2} - e^{a(b)} \sum_{j=1}^3 \frac{e_j^{a(b)} k_j}{\varepsilon_j} \right). \quad (59)$$

Ez a mennyiség is függ a polarizációs állapottól.

A foton energiája, és impulzusa között itt is érvényes a

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon}{c^2} \mathbf{v}^* \quad (60)$$

összefüggés. A foton sebessége a \mathbf{v}^* energia terjedési sebességgel egyezik meg, amely — mint láttuk — eltér a hullám fázissebességétől. Ez teljesen összhangban van a reális fizikai képpel, hiszen kristályokban az energia és impulzus nem a hullám terjedés irányában áramlik, hanem a \mathbf{v}^* -gal megadott irányban.

A foton nyugalmi tömege

$$m_0^{a(b)} = \frac{\hbar k}{c n_{a(b)}} \sqrt{1 - v_{a(b)}^{*2}/c^2}. \quad (61)$$

Mivel $v^* \leq c$, ezért $m_0^{a(b)}$ valós. Az $m = \varepsilon/c^2$ tehetetlen tömeg és a nyugalmi tömeg között itt érvényes az

$$m^{a(b)} = \frac{m_0^{a(b)}}{\sqrt{1 - v_{a(b)}^{*2}/c^2}} \quad (62)$$

relativisztikus tömegnövekedési képlet.

Összefoglalva azt mondhatjuk tehát, hogy az Abraham-fotonok kristályokban a fenti értelemben kvázi-részecskék, és rendelkeznek a reális részecskékre jellemző tulajdonságokkal. A Minkowski-fotonok viszont ugyanolyan furcsa tulajdonságúak, mint az izotrop közegekben. Például képzetes a nyugalmi tömegük, továbbá impulzusuk nem \mathbf{v}^* irányú. Következésképpen az impulzus itt nem tömeg \times sebesség alakú. Az anizotrop közegek fenomenológiai kvantumelektrodinamikájában tehát az Abraham-féle leírás mellett az szól, hogy az így adódó fotonoknak hasonló tulajdonságaik vannak, mint a valódi részecskéknél, viszont az energia és impulzus nem diagonalizálható egyszerre, vagyis ezek a fotonok csak kvázi-részecskék. A Minkowski-féle leírásnak is megvan a maga előnye, mégpedig az, hogy benne az energia és az impulzus operátora felcserélhető, a két mennyiség egyszerre hozható diagonális alakra. Az így kapott fotonoknak viszont olyan tulajdonságaik vannak, amik eltérnek a megszokottól.

IRODALOM

1. K. Nagy, T. Tél, Phenomenological quantum electrodynamics of anisotropic media, Acta Phys. Hung. 51, 125, 1981.
2. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Electrodynamics of continuous media, Pergamon Press, Oxford, 1960.
3. M. Born, E. Wolf, Principles of optics, 3rd ed., Pergamon Press, Oxford, 1965.
4. M. Abraham, Rend. Circ. Matem. Palermo 28, 1, 1909; 30, 5, 1910.
5. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Elméleti fizika IV., Relativisztikus kvantumelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
6. V. L. Ginzburg, J. Phys. USSR 2, 441, 1940.
7. J. M. Jauch, K. M. Watson, Phys. Rev. 74, 950, 1948.
8. K. Nagy, Acta Phys. Hung. 5, 95, 1955.
9. H. Minkowski, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 53, 1908. H. Minkowski, Math. Annaln. 68, 472, 1910.
10. V. L. Ginzburg, Theoretical Physics and Astrophysics, Pergamon Press, Oxford, 1979.
11. I. Brevik, Phys. Reports 52, 134, 1979.

