

Nemlineáris fizika

Non-linear Physics

Tél Tamás

ELTE Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

Abstract

Non-linear phenomena turned out in the last decades to have new and surprising features. The mathematical tools proved to be so powerful in the linear world, break down here. Thus, e.g., the simple form of an equation of motion (if non-linear) does not imply at all the simplicity of the motion itself.

We review some basic non-linear aspects also related to everyday phenomena: non-linear oscillations, bifurcations, and chaos in low dimensional systems. They are compared with their spatio-temporal counterparts: non-linear waves (solitons, tsunamies), hydrodynamical instabilities, and turbulence.

Our aim is to call the attention to the practical relevance of nonlinear phenomena and of their understanding.

Összefoglalás

A nemlineáris jelenségekről az utóbbi évtizedekben kiderült, hogy új és meglepő vonásokkal rendelkeznek. A lineáris világban oly hatékonyak bizonyult matematikai módszerek itt csődöt mondanak. Így pl. a mozgásegyenlet egyszerű alakjából (amennyiben nemlineáris) egyáltalán nem következik, hogy a mozgás maga is egyszerű.

Bemutatunk néhány alapvető nemlineáris jelenséget, melyek a mindennapi élettel is kapcsolatosak. Az alacsony szabadsági fokú rendszerekben nemlineáris rezgéseit, bifurkációkat és kaotikus mozgásokat. Ezeket összehasonlítjuk a térben kiterjedt rendszerekben nekik megfelelő jelenségekkel, a nemlineáris hullámokkal (szolitonok, cunamik), a hidrodinamikai instabilitásokkal és a turbulenciával.

Célunk az, hogy felhívjuk a figyelmet a nemlineáris jelenségek és megértésük gyakorlati fontosságára.

A természetben semmi sem lineáris, legalábbis egzaktul nem az. A klasszikus fizika fejlődése során mégis hasznosnak bizonyult az a feltevés, hogy bizonyos mennyiségek egyenes arányban vannak egymással, mint például a rugóerő a megnyúlással. Ez az egyszerűsítés sok jelenség alapvető fogalmi (és matematikai) megértését tette lehetővé, mely a harmonikus oszcillátortól kezdve, a hullámjelenségeken keresztül elvezetett a molekularezgések leírásáig. Ma már tudjuk azt is, hogy a Kepler-probléma egzakt megoldása azért volt lehetséges, mert a probléma megfelelő transzformációval leképezhető a harmonikus oszcillátorra [1]. A klasszikus elektrodinamika és a kvantummechanika is lineáris elméletnek bizonyult, s közös kiterjesztésük vezetett el a sugárzások megértésére. Még nemlineáris, erősen kölcsönható rendszerekben is sokszor hasznos az a kép, miszerint az energia-felvétel lineárisan viselkedő elemi gerjesztések megjelenésével jár. Így jutottunk el a szilárdtestek rácsrezgéseinek, a szupravezetés és szuperfolyékonyság makroszkopikus tulajdonságainak megértéséhez. A sikerek láttán nem csoda, hogy évszázadokon át tartotta magát az a nézet, hogy a nemlineáris jelenségek a lineárisak kissé módosított változatainak bizonyulnak majd, s csak némileg lesznek bonyolultabbak.

Az utóbbi néhány évtizedben kiderült azonban, hogy ez egyáltalán nem így van: a nemlinearitás számos új és szokatlan jelenséget hordoz. Ráadásul a lineáris világban jól működő matematikai módszerek érvényüket veszítik. Egy nemlineáris mozgásegyenlet egyszerű alakjából például egyáltalán nem következik, hogy maga a mozgás is egyszerű lesz. A nemlineáris jelenségek nem részei a középiskolai fizika tananyagának és az egyetemi oktatás is csak alig érinti azokat. Mivel azonban számos – köztük több hétköznapi – jelenséggel is kapcsolatosak, érdemes a legfontosabbakat áttekintenünk, abban a reményben, hogy egyszerű tárgyalásban az oktatásban is megjelenhetnek.

Először a csak időbeli változást mutató, kis szabadsági fokú rendszerek legfontosabb nemlineáris jelenségét tekintjük át, s azután térünk át a térben is kiterjedt, nagy szabadsági fokú rendszerek jelenségeire, a meg-

felelő eseteket párhuzamba állítva. Példáinkat az első csoportban a pontmechanika, a másodikban a hidrodinamika területéről vesszük.

1. Kis szabadsági fokú rendszerek

A kis szabadsági fokú rendszerek helyzete néhány változóval megadható, az ilyen rendszerek állapotváltozását tehát néhány időfüggvény írja le. Ezek a rendszerek alapvetően csak időtől függő jelenségeket mutatnak, még akkor is, ha mozgásuk térben történik. Dinamikájukat *közönséges* differenciálegyenletek írják le.

1.1. Nemlineáris, nagy amplitúdójú rezgések

Hajlamosak vagyunk természetesnek tekinteni, hogy a rezgések periódusideje független az amplitúdójuktól. Ez azonban csakis a lineáris rezgések esetén van így. Azt szokás mondani, hogy „*kicsiben minden lineáris*”, vagyis elegendően kis amplitúdó esetén minden rezgés lineáris. Annak meghatározására azonban, hogy pontosan mit is jelent az, hogy „elegendő”, csak akkor válunk képessé, ha a legfontosabb nemlineáris korrekciókat – melyek az amplitúdó nem elhanyagolható mivoltából adódnak – meg tudjuk állapítani.

Az l hosszúságú, légüres térben lengő fonálinga esetében ismert [1,2], hogy a rezgésidőnek a kezdeti φ_0 (radiánban mért) szögkitérésben első korrekciós tagját figyelembe véve a periódusidő

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{16} \right) \varphi_0^2 \right).$$

Innen leolvasható, hogy az inga lengése akkor tekinthető jó közelítéssel lineáris rezgésnek, ha a φ_0 amplitúdóra fennáll, hogy $(1/16) \varphi_0^2 \ll 1$. Konkrétan, a hagyományos, $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ amplitúdó-független rezgésidő-kifejezés 1 ezrelékre pontos, ha $(1/16)\varphi_0^2 < 1/1000$, azaz ha $\varphi_0 < 0.13$ radián, vagyis 7,5 fok. A fiatal Galilei a pisai dóm csillárjának lengését figyelve, az időt saját pulzusával mérve, fedezte fel a lengési időtartamok azonosságát különböző mértékű kitérések esetén [3]. Ez vezetett el később az ingaóra feltalálásához.

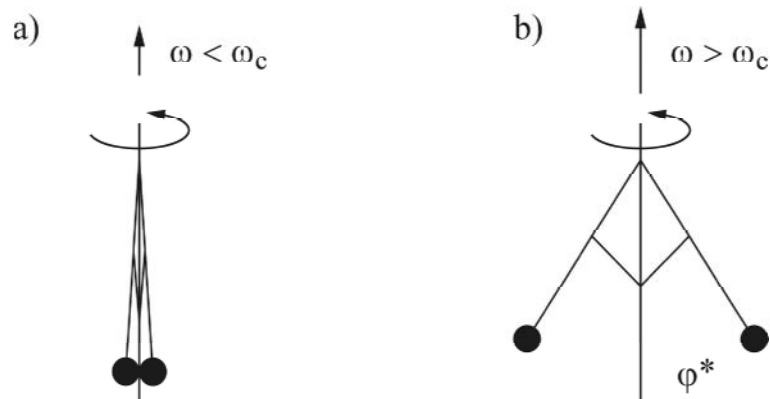
A kezdeti kitérést 7,5 fok fölé növelve, a rezgésidő egyre határozottabban függ az amplitúdótól. A fenti, első korrekciót tartalmazó képlet maga is csak $\varphi_0 = 42$ fokig érvényes 1 ezreléknyi pontossággal, ezután az amplitúdó negyedik, hatodik stb. hatványai is egyre nagyobb súllyal szerepelnek, $\varphi_0 = 360$ fok felé közeledve pedig a lengésidő végtelenhez tart (a fejjel lefelé induló hajóhinta esete). A lineáris, $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ rezgésidő-kifejezéstől tehát egyre távolabb kerülünk az amplitúdó növelésével.

Általánosan igaz, hogy minden, nem egészen kis amplitúdójú rezgés a nemlineáris tartományban zajlik (ahol a visszatérítő erő már a lineárisnál bonyolultabban függ a kitéréstől). Úgy is mondhatjuk, hogy „*nagyban minden nemlineáris*”. A rezgések periódusideje tehát általában függ az amplitúdótól, s azon keresztül az összenergiától. Az amplitúdó-független rezgésidő, kizárólag egy speciális eset, a lineáris erőtvény sajátosága.

1.2. Bifurkációk

A nemlineáris rendszerek paramétereik változása következtében elveszíthetik stabilitásukat. Az eredetileg stabil állapot instabillá válik, de megjelenik helyette rendszerint két új stabil állapot [4].

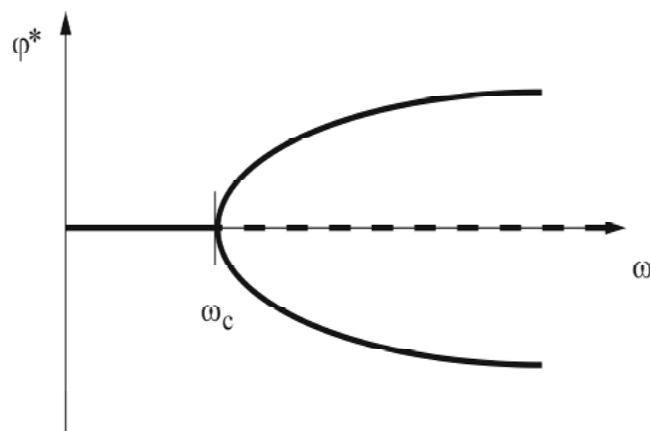
Erre egyszerű példa az ún. centrifugális szabályozó, egy matematikai inga, melynek felfüggesztési pontja a függőleges tengely körül ω szögsebességgel forog. Kis φ szögkitérések esetén a szokásos $-mgl\varphi$ visszatérítő forgatónyomatékon kívül hat a centrifugális erőből származó kifelé mutató $ml^2\omega^2\varphi$ nyomaték is. E két hatás versengése határozza meg, hogy mi történik. Az eredő nyomaték mindaddig negatív, amíg a forgás eléggé lassú, pontosabban $\omega < \sqrt{g/l}$. Az inga egyetlen lehetséges nyugalmi helyzete a zérus kitérésű állapot: $\varphi^* = 0$. Az $\omega_c = \sqrt{g/l}$ kritikus értéknél gyorsabb forgatás esetén bármilyen kis kezdeti szögkitérésből kifelé mozdul az inga, a függőleges állapotba nem tér vissza. Az eredeti nyugalmi állapot instabillá vált. Az új egyensúlyi állapot a véges szögkitérés esetén érvényes $-mgl \sin \varphi$ visszatérítő és $ml^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi$ kifelé forgató nyomaték egyensúlyából adódóan $\varphi^* = \arccos(g/l\omega^2)$, egy véges φ^* érték vagy ennek ellentettje. Ezek az állapotok stabilak, tehát a rendszer kis fluktuációktól nem távolodik el tőlük.



1. ábra

*A centrifugális szabályozó bifurkációja a forgatási szögsebesség függvényében.
A gyakorlatban megépített centrifugális szabályozók két, közös síkban mozgó ingát tartalmaznak.
a) a kritikus forgatási szögsebesség alatt csak a függőlegesen lógó állapot valósulhat meg.
b) felette viszont a regulátor kinyílik, és egy új stabil állapot jelenik meg*

Számos más esetben is előfordul, hogy valamely paraméter változtatásakor egy stabil állapot hirtelen instabillá válik és mellette új stabil állapotok születnek. Az állapotok x^* helyzetét a μ -vel jelölt paraméter függvényében ábrázolva gyakran villa-szerű rajzolatot kapunk (2. ábra), ezért hívjuk ezt a jelenséget bifurkációnak, a rajzolatot bifurkációs diagramnak. A nemlinearitás elválaszthatatlan társa tehát az instabilitás. (Az egész jelenség hasonló a termodinamikai fázisátalakuláshoz, még hozzá a másodrendű fázisátmenethez, de ne feledjük, hogy ott nem egyetlen anyagi pont, hanem Avogadro-számnyi részecske szerepel.)



2. ábra

Bifurkációs diagram: a centrifugális szabályozó φ^ egyensúlyi szögkitérése az ω szögsebesség függvényében. A szaggatott vonal instabil állapotot jelöl.
A bifurkációs diagram általában a stacionárius állapotok x^* helyzetét és stabilitását mutatja valamely μ paraméter függvényében*

Általánosan, minden nemlineáris rendszerben várható, hogy a paraméterek valamely változtatására bifurkációk következnek be. A bifurkációk tehát igen gyakori jelenségek. Egy műszaki gyakorlatból ismert másik példa a hosszirányban terhelt rudak egyik vagy másik irányba történő kihajlása, mely egy kritikus terhelés elérésekor hirtelen történik meg.

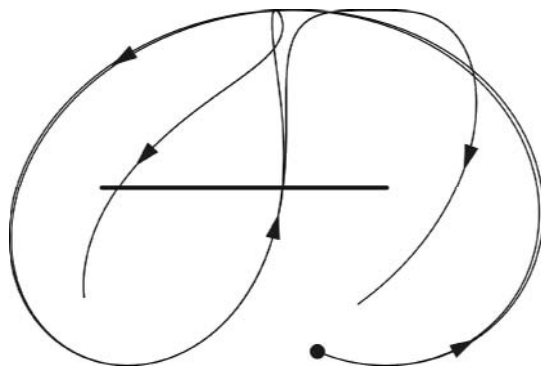
Nemcsak nyugalmi állapot, hanem egy adott mozgástípus is elveszítheti stabilitását. A gerjesztett nemlineáris oszcillátornak például a rezonancia-frekvencia közelében két különböző amplitúdójú rezgése lehetséges (melyek különböző kezdőfeltételekből érhetők el), és létezik egy instabil rezgés is közöttük, mely a gya-

korlatban sohasem valósul meg [2]. A két stabil rezgés közötti átmenet a frekvencia változtatásakor hirtelen következik be. Ez jól megfigyelhető a háztartási centrifugák bekapcsolásakor, melyek először mély erős, hangot adnak, majd átválnak halk, de magasabb bűgásra. Kikapcsoláskor pedig, amikor forgási szögsebességük egy kritikus érték alá esik, egyszer csak mély, zörgő hangot hallatnak, s így állnak meg.

1.3. Káosz

Az energiabefektetés növelésével a rendszerek olyan bifurkációkon mennek keresztül, melyek során mozgásuk egyre bonyolultabb lesz. Ennek a sorozatnak egy lehetséges végállapota az ún. káosz [4,5]. Ez sokáig tartó mozgás, mely azonban mégsem ismétli önmagát.

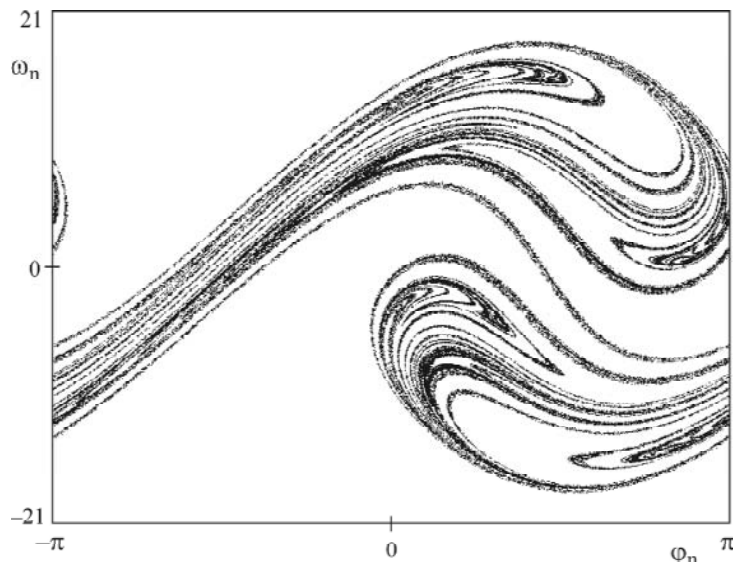
Amennyiben egy inga felfüggesztési pontját a vízszintes síkban periodikusan mozgatjuk, gerjesztjük, a mozgása rendszerint kaotikussá válik: a $\varphi(t)$ szögkitérés-idő függvény szabálytalanul változik, benne semmilyen periodicitás sem ismerhető fel. A mozgás ugyanakkor törekeny abban az értelemben, hogy formája nagyjában függ a pontos kezdeti állapottól, vagyis kis kezdeti különbségek gyorsan felerősödnek (3. ábra). A kaotikus mozgás alapvető sajátossága – szemben a megszokott, szabályos esetekkel –, hogy időbeli lefolyása érzékenyen függ a kezdőfeltételektől.



3. ábra

Kaotikus mozgás: két, közeli állapotból indított gerjesztett inga végpontjának pályája a függőleges síkban [4]. A kezdeti helyzetek olyan közel esnek, hogy a pályáknak megfelelő vonalak eleinte nem különböztethetők meg, utána azonban gyorsan szétválnak: a mozgás érzékeny a kezdőfeltételekre. Az inga felfüggesztési pontja az ábrán látható vízszintes szakaszon mozog

A kaotikus mozgás tehát nem jelezhető hosszú távon előre, hiszen a kezdeti bizonytalanságok jelentős eltérésekre vezetnek az eredetileg közlelről induló pályákban. A káosz ezért *valószínűségi módszerekkel* írható csak le helyesen. A véletlenszerűség azonban nem terjed ki az összes elképzelhető állapotra (mint a hagyományos zaj esetén). Ha például a súrlódásos gerjesztett inga mozgásáról úgy veszünk mintát, hogy a szögkitérés és szögsebesség koordinátákat a gerjesztés periódusának egész számú többszöröseiben ábrázoljuk, akkor egy érdekes mintázatot kapunk (4. ábra). Az ilyen alakzatokat fraktáloknak nevezik, nulla a területük, s tört, nem egész dimenzióval jellemezhetőek. A mozgás során a pontok ezen a fraktálon ugrálnak látszólag szabálytalanul. Az előrejelezhetetlen, véletlenszerű viselkedés csak erre a tartományra terjed ki. Az állapotot jellemző pont tehát bolyong, de e bolyongás bizonyos állapotok között történhet csak (az ábrán fehéren maradt pontokba sohasem jut el). A káoszbeli valószínűségi viselkedés tehát strukturált, s ráadásul fraktál jellegű. Vagyis a káosz olyan hosszantartó mozgás, mely szabálytalan, nem jelezhető előre, de megfelelő ábrázolásban alacsony dimenziós fraktál-szerkezetet mutat.



4. ábra

A káosz geometriája: súrlódásos gerjesztett inga kaotikus mozgásának képe, a szögkitérés-szögsebesség állapotsíkon (fázistéren) az inga állapotát periódusidőnként ábrázolva [4]. Egy megszokott, szabályos periodikus mozgás ugyanebben az ábrázolásban egyetlen pontként jelenne meg!

Lineáris rendszer nem mutathat kaotikus viselkedést. A nemlinearitás viszont a káosz révén a klasszikus fizikán belül is elvezet a véletlenszerű viselkedéshez és olyan más szokatlan vonásokhoz, melyek egy lineáris világban elképzelhetetlenek lennének.

A káosz gyakori előfordulását mutatja, hogy szinte bármely középiskolából vagy bevezető egyetemi előadásról ismert feladat kaotikus viselkedésre vezet, ha bizonyos megkötéseit feloldjuk (az inga felfüggesztési pontja példánkban nem rögzített, hanem periodikusan rezeghet).

A káosz számos hétköznapi jelenségben is megfigyelhető. A motorok, autók és repülőgépek első kerekei könnyen berezegnek, vagyis kaotikus kilengéseket mutatnak. A téstagyúrás folyamatában az egyes anyagszemcsék gyors elkeveredése utal kaotikus mozgásukra. A turmixgép akkor hatékony, ha kaotikusan kever. Általában a szennyezések környezeti elterjedése is kaotikus folyamat.

A Naprendszer mozgása több vonatkozásban is kaotikus. A kisbolygók, aszteroidák közül nem tudjuk pontosan, melyik közelíti meg a Földet annyira, hogy belépve légkörébe hullócsillagként elégjen, vagy esetleg becsapódjon a felszínre. A 2004 MN4 jelű, 400m átmérőjű aszteroidára vonatkozó számítások 2004. végén még arra utaltak, hogy a kisbolygó 2029-ben ütközhet a Földdel. A pontosított adatok alapján elvégzett szimulációk ennek ellenkezőjét mutatják. A körülbelül évente történő későbbi megközelítések közül azonban a 2044, 2053-ban esedékesekről nem zárható ki, hogy ütközés történik. A szimuláció addigra már csak egy esemény-sokaságot jelez, melyek között szerepel az ütközés lehetősége, ennek esélye azonban csekély. Minél távolabbra igyekszünk tehát előrejelzést tenni, annál kevésbé pontosak kijelentéseink, amely az aszteroida kaotikus mozgására utal.

2. Térben kiterjedt rendszerek

A térbeli kiterjedéssel is rendelkező rendszerek, a folytonos közegek úgy tekinthetők, mint végtelen sok elmozdulásra képes, egymással kapcsolatban levő pont összessége. Az ilyen, végtelen szabadsági fokú rendszerek nemlineáris jelenségei a kis szabadsági fokúakénál jóval gazdagabbak, hiszen a térbeli viselkedés új vonásokat hoz be. Az ilyen rendszereket *parciális* differenciálegyenletek írják le, melyek végtelen sok közönséges differenciálegyenlet rendszerének feleltethetők meg. Ennek ellenére néhány vonásuk szoros párhuzamba állítható a csak időfüggő rendszerek nemlineáris jelenségeivel.

2.1. Nemlineáris hullámok

A nagy amplitúdójú hullámok legegyszerűbb példái a szolitonok [6]. Ezek a folyadékfelszín púp alakú kidudorodásai. A hagyományos szóhasználat szerint tehát nem a periodikus síkhullámok, hanem a csomagok

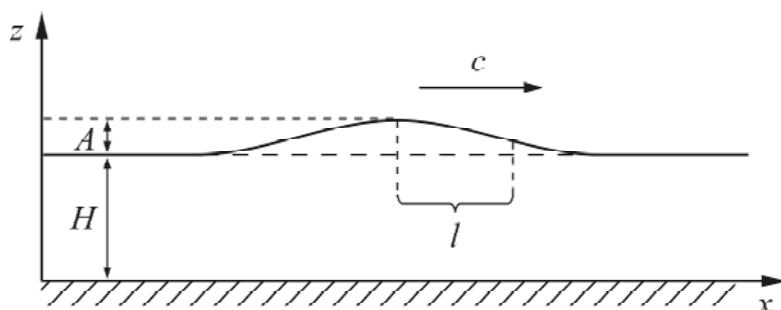
megfelelő. A szolitonok fontos tulajdonsága, hogy c sebességük függ a kidudorodás A amplitúdójától és a H vízmélységtől, méghozzá a

$$c = \sqrt{gH} \left(1 + (1/2)A/H \right)$$

szabály szerint. Ez arra a legtöbbször előforduló esetre vonatkozik, amikor az amplitúdó ugyan jóval kisebb, mint a vízmélység: $A \ll H$, de azért nem elhanyagolható. A kidudorodás oldal irányú kiterjedése, felszélessége (fél hullámhossza) ugyanekkor

$$l = H \sqrt{3H/4A},$$

ami $H/A \gg 1$ miatt jóval nagyobb, mint a vízmélység: $l \gg H$. A folyadék ezért a szoliton szempontjából mindig sekély. Érdeemes emlékeztetni arra, hogy az elhanyagolhatóan kis amplitúdójú, lineáris hullámok sebessége sekély folyadékokban [1,2] $c_0 = \sqrt{gH}$ (ami a fenti képletből is következik az A tart 0 határesetben). A nemlineáris hullám tehát mindig gyorsabban terjed, mint a megfelelő lineáris hullám.



5. ábra

Szoliton-hullám jellegzetes alakja H átlagos mélységű folyadékban. A szoliton jellemző adatai: A amplitúdó, c sebesség, l felszélesség

A szolitonok sebessége függ tehát az amplitúdójuktól, és ráadásul még a hullámhosszuk is. Így végső soron a c/l frekvencia is függ az amplitúdótól! Ez a szokásos lineáris hullámok világában elképzelhetetlen. Gondoljunk arra, milyen lenne a hang, ha frekvenciája amplitúdó-függő lenne (magassága függne pl. a hang erősségétől!). A jól ismert hang tehát lineáris hullám. A levegőben robbanáskor keletkező lökeshullámok viszont már nagy amplitúdójúak, nemlineárisak, ők felelnek meg a hangterjedés nemlineáris hullámainak. A nemlineáris hullámok frekvenciájának szokatlan amplitúdó-függése *analóg* a nemlineáris rezgések periódusidejének amplitúdó-függésével (amit az I.1 pontban tárgyaltunk).

A szolitonok, szemben az ugyanolyan mélységű folyadékban terjedő lineáris hullámokból képzett hullámcsoportokkal, sohasem folynak szét. Ha ütköznek, az átfedési időszak után visszanyerik eredeti alakjukat. Erre a részecskeszerű tulajdonságra utal a nevükben szereplő „on” végződés. Fontos eltérő tulajdonságuk az is, hogy haladásuk irányába megmozgatják a víztömegeket (a lineáris hullámok csak rezgőmozgást hoznak létre, eredő elmozdulás nélkül). Ráadásul a vízben terjedő nagy kiterjedésű szolitonok (mint minden hosszú hullám) rendkívül lassan csillapodnak, gyakorlatilag ideálisként viselkedik ilyenkor a folyadék.

Ezek a tulajdonságok együttesen vezetnek arra, hogy a földrengés által keltett szoliton tulajdonságú tengerhullámok, tsunamik, nagyon veszélyesek lehetnek. Szomorú aktualitást adott a témakörnek a 2004. december 26-ai tsunami az Indiai-óceánban, mely rendkívüli károkat okozott. A nyílt tengeren a tsunami amplitúdója mindössze körülbelül egy méter volt: $A = 1m$. A $H = 5km$ átlagos vízmélységgel számolva, képleteinkből $c = 800km/h$ és $l = 300km$ adódik. A nyílt tengeren a hullám tehát alig vehető észre, de hatalmas víztömeget érint és igen gyorsan halad (Szumátrától Indiáig 2 óra alatt ért el). Ez a víztömeg torlódik fel a sekély vízben és okoz hullámtörés közben jelentős pusztítást.

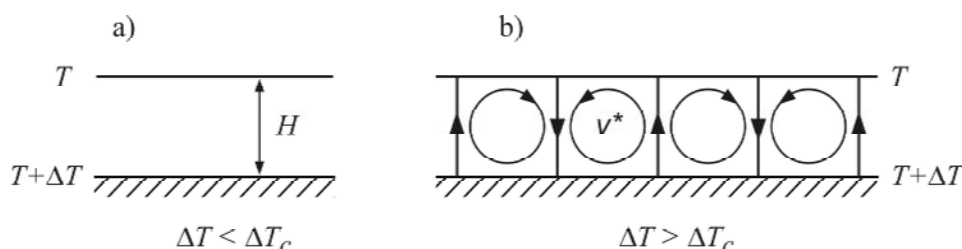
A szolitonokon kívül sok más, alakjukban és jellegükben különböző nemlineáris hullám is létezik, mint például az óceáni dagály megérkezésével járó torlól hullámok, vagy a különböző sűrűségű közegek mozgása során kialakuló frontok (a légköri hidegfront vagy a lavina mozgása) [6].

2.2. Instabilitások

Energia-befektetés hatására az áramlások mintázatai megváltozhatnak. Az eredeti áramlás instabillá válik, és helyette új áramlási minta (vagy minták) alakul(nak) ki. Ezt a jelenséget nevezzük hidrodinamikai instabilitásnak.

Különösen meglepő az az eset, amikor a kiindulási állapotban nincs is áramlás. Ekkor ugyanis egy kritikus mértékű energia-befektetés mellett hirtelen megmozdul a folyadék, és a keletkező áramlás ráadásul valamilyen szabályos mintázatba rendeződik.

A legegyszerűbb példa a konvekció (fel-, és leáramlás) beindulása alulról fűtött folyadékban, lefelé mutató gravitációs térben. Tartsuk a folyadék alját a külső felszínnél ΔT -vel magasabb hőmérsékleten. Amíg ΔT kicsi, a folyadék nyugalomban marad, a befektetett hő kizárólag hővezetés útján terjed a nyugvó közegben. Az alul felmelegedett folyadék ugyan könnyebb a felette levőnél és rá felhajtóerő hat, az azonban még nem eléggé nagy ahhoz, hogy legyőzze a viszkozitásból adódó fékező erőt. E két erőhatás versengése dönti el, hogy beindul-e áramlás. A ΔT hőmérséklet-különbség emelésével a felhajtóerő egyre erősebb, ezért létezik egy ΔT_c kritikus hőmérséklet-különbség, melynél megmozdul az alsó folyadékréteg. Feláramlás kezdődik, de az anyagmegmaradás miatt oldalirányú és lefelé mutató mozgás is kialakul. Ez egységes és megdöbentően szabályos módon szerveződik áramlási képpé [7,8,9]. Igen nagy kiterjedésű közegben a fel és leáramló vízoszlopok a H vízmélységgel összemérhető távolságokon szabályosan követik egymást. A köztük levő tartományokban a folyadék körkörös mozgást végez vízszintes tengelyű párhuzamos hengerek mentén. A szomszédos hengerek egymással szemben forognak. A porral megfestett áramlást felülről szemlélve párhuzamos csíkozattal megjelenésének vagyunk tanúi [7,8,9].

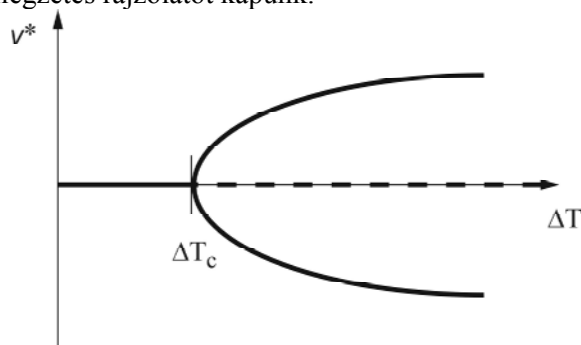


6. ábra

A konvekció, a Rayleigh–Bénard-instabilitás. Alulról melegített széles folyadékréteg.

- A hőmérséklet-különbség kisebb a kritikusnál, a folyadék nem mozog.
- A kritikusnál magasabb hőmérséklet-különbség esetén konvekció indul meg, az áramlás időtől független és párhuzamos hengerek mentén zajlik

A kritikus érték körül lezajló jelenséget instabilitásnak nevezzük, a konkrét esetet első leíróiról Rayleigh–Bénard-instabilitásnak. Ha az áramlás jellegzetes v^* sebességét (a kritikus pont fölött egy adott henger lehetséges körbeforgási sebességét) és az állapot stabilitását ábrázoljuk a ΔT hőmérséklet-különbség függvényében, akkor ismét jellegzetes rajzolatot kapunk.



7. ábra

A Rayleigh–Bénard-instabilitás jellemzése a ΔT hőmérséklet-különbség függvényében.

A szaggatott vonal a kritikus pont fölött instabillá vált áramlásmentes állapotot jelzi.

Ugyannak a sebességértéknek az előfordulása + és – előjellel arra utal, hogy egy adott henger mentén az áramlás jobbra és balra is foroghat

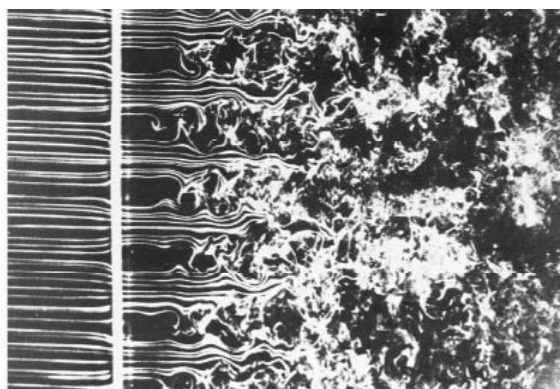
Azt is mondhatnánk, hogy az áramlási bifurkáción ment keresztül (I.2 pont). A szóhasználatbeli különbséget azért érdemes mégis fenntartani, mert itt nem egyetlen lehetséges adat megváltozásáról van szó, hanem az egész sebességeloszlás megváltozásáról (más szóval: a bifurkáció egy függvény térben történik).

Véges kiterjedésű edényben a mintázat függ a perem alakjától. Kialakulhatnak felülnezetben gyűrű vagy hatszög alakú áramlási képek is. Az utóbbi sokszor megfigyelhető serpenyőben melegített vékony olajrétegben. Hasonló jellegű instabilitások alakulnak ki a különböző szögsebességgel forgatott koaxiális hengerek között elhelyezkedő folyadék mozgásában, amikor is elegendően nagy szögsebesség-különbség esetén a forgástengelyre merőleges síkban hirtelen gyűrűszerű áramlás indul be [8].

Akármelyik esetet tekintjük is, azt mondhatjuk, hogy a '*semmiből*' hirtelen lesz '*valami*'. Ezt nevezzük a mintázatképződésnek [7,8]. Ez ráadásul spontán történik, hiszen semmilyen külső információ nem szükséges a minta kialakulásához, adott energiaáram mellett mindig ugyanaz a rajzolat jön létre (adott edényben). Ez a felismerés jelentősen hatott a fizika társtudományaira is, hiszen rámutat arra, hogy nem szükséges pl. a biológiai mintázat pontos kódját a DNS-ben tárolni, elég a megfelelő mintázatra vezető kémiai reakcióét, mely spontán módon adja majd a mintázatot, ha a paraméterek a megfelelő tartományba esnek.

2.3. Turbulencia

Az egyre növekvő energia-befektetés következtében egyre több instabilitáson megy át a folyadék, térben egyre összetettebb és időben is változó áramlások alakulnak ki. Ezek egyre bonyolultabbak, és előbb-utóbb mindegyikük *instabillá* válik. Az egész folyamat *végállapota* a turbulens áramlás [6,8], mely térben is és időben is teljesen rendezetlen (8. ábra)



8. ábra

Turbulens áramlás. A balról érkező gyors homogén áramlás a képen függőleges vonalként megjelenő rácson áthaladva instabillá válik, fokozatosan elveszti szabályos jellegét [8]. A kép jobb oldalán már a kifejlett turbulencia látható, mely szabálytalanul egymásba ágyazott, felbomló és újraszülető, különböző méretű örvények összességének tekinthető.

A kifejlett turbulenciában minden egyes folyadékrészecske szabálytalan mozgást végez, azt is mondhatnánk, hogy 'kaotikus'. Most azonban nem néhány változó, hanem - a térbeli kiterjedés miatt - végtelen sok változó mutatja ezt a bonyolult viselkedést. A turbulencia térben és időben is 'kaotikus', ezért végtelenszer bonyolultabb, mint maga a káosz. Ennek megfelelően nem rendelhető hozzá egy alacsony dimenziós fraktál, amit a káosz I.3 pontban adott definíciója megkövetel. A turbulenciában a folytonos közegből adódóan végtelen sok szabadsági fok mindegyike aktívan részt vesz. Ez nem zárja ki természetesen azt, hogy legyenek a káoszhoz hasonló vonásai is, mint pl. az előrejelezhetetlenség.

Az előrejelezhetetlenségből adódó valószínűségi viselkedés most azonban az egész geometriai térre kiterjed. A turbulens áramlásban a folyadékmozgás ezért egyfajta bolyongás, mely *nem* struktúrált (nem fraktál szerkezetű), a részecske mindenhova eljuthat. Ez a hagyományos bolyongással, a diffúzióval analóg folyamat, de annál jóval gyorsabb. Míg a hagyományos diffúzió a környező molekulákkal adódó szabálytalan ütközések következménye, a turbulens diffúziót az okozza, hogy a különböző méretű, de mindenképpen makroszkopikus örvények szabják meg a részecskék mozgását. Az adott anyagra nyugvó közegben jellemző molekuláris diffúzió állandóját a közeg turbulens áramlása 5-7 nagyságrenddel is megnövelheti! Egyetlen részecske bolyongása során elmozdulásának átlagos nagysága az eltelt idő négyzetgyökével nő [7]. Ennek megfelelően, két, kezdetben igen közel levő részecske a diffúzió hatására t idő alatt átlagosan

$$(2Dt) \Delta x = \sqrt{(2Dt)}$$

távolságra kerül, ahol D a diffúziós állandó. Következésképpen egy pontszerű kezdeti koncentráció-eloszlás t idő után átlagosan Δx átmérőjű tartományra terjed ki. Adott méret elérése tehát 5-7 nagyságrenddel gyorsabb turbulens áramlásban, mint nyugvó közegben.

Konkrét példaként tekintsük a levegőt, mint közeget. A makromolekuláktól eltekintve szinte minden anyag molekuláris diffúziós állandója $2 \cdot 10^{-5} m^2/s$ körüli, turbulens diffúziós állandója viszont eléri az $1 m^2/s$ értéket. Ahhoz, hogy egy kezdetben pontszerű koncentráció 10m-re szétterjedjen, álló levegőben 30 napra lenne szükség! Turbulensen kavargó levegőben ehhez viszont csak 50 másodperc szükséges. Ha tehát szinte rögtön megérezzük a szobában, hogy mi készül a konyhában, az nem a molekuláris diffúzió, hanem a lakás levegőjében mindig jelenlévő turbulens áramlások következménye, és a turbulenciában rejlő véletlenszerű viselkedés hétköznapi bizonyítéka.

Összefoglalás

Elmondhatjuk, hogy egy lineáris világban az itt felsorolt jelenségek (1. táblázat) egyike sem fordulhatna elő. Az utóbbi évtizedek tapasztalata azt sugallja, hogy amikor egy problémával ismerkedünk, a legelső eldöntendő kérdésnek annak kell lennie, hogy lineáris-e vagy sem a probléma, ill., az azt leíró differenciálegyenlet. Reális közelítéseket alkalmazva, az első eset bekövetkezésére igen csekély az esély.

1. táblázat.

A legfontosabb nemlineáris jelenségek és megfeleltetésük a kizárólag időtől függő, és a térbeli kiterjedéssel is rendelkező rendszerekben.

Időbeli jelenségek, kis szabadsági fokú rendszerek	Térben kiterjedt rendszerek, nagy szabadsági fokú rendszerek
nemlineáris rezgések	nemlineáris hullámok
bifurkáció	instabilitás
bifurkáció-sorozat	instabilitás-sorozat
káosz	turbulencia

A kiterjedt rendszerekben, közegekben a nemlineáris jelenségek köre jóval bővebb a térbeliséget kifejező, végtelen sok szabadsági fok miatt. A megfeleltetés ennek megfelelően csak kvalitatív és jelzés értékű. Érdemes ezért a táblázat bal oldalán felsorolt fogalmakat szigorú értelemben csak a kis szabadsági fokú rendszerekre korlátozni, és a térbeli esettől való megkülönböztetést a szóhasználatával is kifejezni.

Végül megjegyezzük, hogy az említett nemlineáris jelenségek (1. táblázat) egyáltalán nem kötődnek kizárólag a fizikához. Megtalálhatók mind kémiai, mind biológiai rendszerekben, sőt közgazdasági modellekben is.

Tudjuk, hogy a lineáris törvények csak igen kivételes esetekben érvényesek. Amíg tehát a nemlineáris jelenségek nem kerülnek be a középiskolai, ill. egyetemi tananyagba kellő súllyal, addig a kivételt tanítjuk, nem a szabályt.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki Gruiz Mártonnak az évek óta tartó eredményes együttműködésért, a szöveggel kapcsolatos hasznos tanácsaiért, és az ábrák elkészítéséért. A dolgozat az OTKA támogatásával (T047233, TS044839) készült.

Irodalom

- [1] Nagy Károly: Elméleti Mechanika (Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp., 2002)
- [2] Budó Ágoston: Mechanika (Tankönyvkiadó, Bp., 1965)
- [3] George Gamow, A fizika története (Gondolta, Bp. 1965)
- [4] Tél Tamás, Gruiz Márton: Kaotikus Dinamika (Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp., 2002)
- [5] James Gleick: Káosz, egy új tudomány születése (Göncöl Kiadó, Bp., 1996)
- [6] Tél Tamás: Környezeti áramlások, jegyzet (ELTE Elméleti Fizikai Tanszék, Bp., 2003)
- [7] Hermann Haken: Szinergetika (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1984)
- [8] Milton van Dyke: An Album of Fluid Motion (The Parabolic Press, Stanford, 1982)
- [9] Sasvári László: A Rayleigh—Bénard-instabilitás, Fizikai Szemle 35, 58 (1985)