

## Irodalom

1. Demonstrációs alapkészlet az általános iskola 6–8. osztályos fizika tanításához – TANÉRT, Budapest, 1983.
2. DEDE M., DEMÉNY A., JUHÁSZ S.: *Newton törvényei fényképeken* – Fizikai Szemle 23/6 (1973) 44
3. *Fizikai kísérletek gyűjteménye* (szerk.: Jubász A.) – Tankönyvkiadó – TypoTEX, Budapest, 1992.
4. R. WODINSKI, H. WIESNER: *Einführung in die Mechanik über die Dynamik* – Physik in der Schule (Berlin) 32/4,5,6 (1994)
5. W. OEHME, G. SCHNELLENBERG: *Annäherung der Durchschnittsgeschwindigkeit an die Augenblicksgeschwindigkeit – ein experimentelles Problem?* – Physik in der Schule (Berlin) 31/11 (1993) 389
6. H.-D. KOLWIG, V. RICHTER: *Computerunterstützte Experimente in der Mechanik mit der Glasfabrikan* – Physik in der Schule (Berlin) 31/2 (1993) 61
7. Lipman Electronic Engineering Ltd.: *Owner's Guide VS-100* – Ramat-Hahayal, Israel, 1995.
8. M. RONEN, A. LIPMAN: *A vektorszóóp* – Fizikai Szemle 54/11 (1995) 395
9. G. SHORTLEY, D. WILLIAMS: *Principles of College Physics* – Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1967, pp. 52–55
10. DEDE M.: *Mechanika I.* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
11. P. WOLFRAM: *Bemerkungen zum Begriff „Masse“ in der Schulphysik* – Physik in der Schule (Berlin) 33/2 (1995) 51
12. FARKAS ZS.: *A vektorszóóprendszer alkalmazása a kinematikában* – Fizikai Szemle 54/11 (2004) 345

# KÁOSZRÓL, KICSIT BŐVEBBEN

Gruiz Márton, Tél Tamás  
ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

## Mi a káosz?

Magunk között (tanárok, fizikusok, mérnökök között) szólva, a káosz a mechanikai mozgások általános formája. Matematikailag fogalmazva, minden, legalább három elsőrendű közönséges differenciálegyenlettel leírható rendszer időbeli viselkedése kaotikus. Szigorúan véve, feltételként megkövetelendő, hogy az egyenletek ne legyenek lineárisak [1]. Ez viszont gyakorlatilag nem jelent megkötést, hiszen a harmonikus oszcillátoron kívül szinte minden mozgás nemlineáris. Mindezekből következik, hogy a káosz a mechanikán kívül is (pl. a töltött részecskék mozgásában, a plazmafizikában, a relativisztikus mechanikában), sőt a társtudományokban (meteorológia, csillagászat, kémia, biológia stb.) is megjelenik (lásd [2–5], valamint a *Természet Világa* 2002 óta tartó káosz témájú cikksorozatát).

Nem meglepő, ha az Olvasó a káoszjelenségről esetleg még nem hallott, ugyanis a fogalomkör az 1980-as évek végére fogalmazódott csak meg, s még mára sem került bele a hivatalos fizika tananyagba. A *Mindentudás az iskolában* című rovatban megjelent cikkünkben [6] egyszerű példákkal illusztráltuk a jelenséget.

Ezek jól mutatják, hogy az egydimenziós gerjesztett mozgások, illetve a kétdimenziós súrlódásmentes mozgások már rendszerint kaotikusak. Az utóbbi osztályban az akadályozhatja meg a káosz megjelenését, ha valamely szimmetria miatt az energián kívül még egy megmaradó mennyiség is létezik (mint pl. a Kepler-problémában az impulzusnyomaték) [7–9]. Ebből az is látszik, hogy ha a középiskolából jól ismert bármelyik feladatot (pl. egyetlen lejtőn pattogó golyót, bolygómozgást, Atwood-ejtőgépet, álló lemezen pattogó golyót) kissé általánosítjuk, valamely megkötésétől megszabadítjuk, akkor a mozgás könnyen kaotikussá válhat [10].

Az előző cikkünkben bemutatott példák alapján a kaotikus viselkedés a következőképpen definiálható:

**I. definíció:** A káosz a kevés szabadsági fokú rendszerek olyan mozgása, mely

– időben szabálytalan, véges számú periodikus mozgás összegként sem áll elő,

– hosszú távon előre jelezhetetlen és érzékeny a kezdőfeltételre,

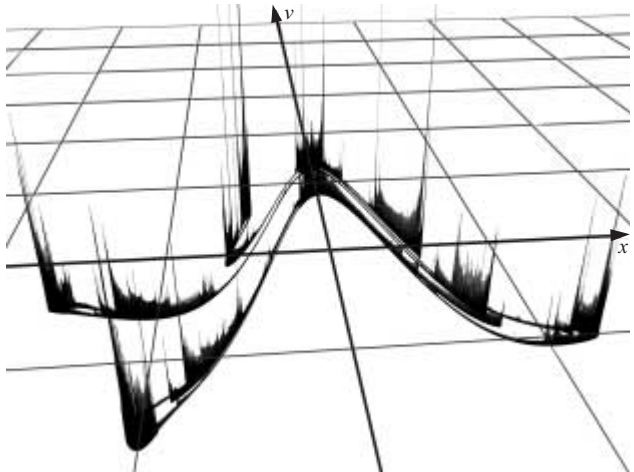
– megfelelő ábrázolásban (a fázistérben) komplex, de rendezett struktúrát mutat: fraktálszerkezetű.

Ezek a tulajdonságok általában egymást feltételezik, egyszerre vannak jelen. Ha tehát egy fizikai rendszer hosszú távon aperiodikus, akkor időbeli fejlődése megjósolhatatlan és egyben – alkalmas ábrázolásban – fraktálszerkezetű (lásd *Vicsek Tamás* írását a 221. oldalon).

A hagyományos szemlélet oldaláról nézve mindhárom újszerű és meglepő. Mivel a kezdeti bizonytalanságok növekedése exponenciális ütemű, akár milyen kicsiny is a kezdeti különbség, az viszonylag rövid idő alatt nagyra nő. A kaotikus mozgás ezért hosszú távon előre jelezhetetlen, hosszú idejű viselkedése véletlenszerű.

A három definiáló tulajdonság mögött – magasabb szinten – egyetlen közös vonás áll: a hosszú idejű viselkedés csak *valószínűségi* fogalmakkal írható le. A kaotikus rendszerekben mindig kialakul egy időfüggetlen va-

**1. ábra.** Egy nemlineárisan gerjesztett harmonikus oszcillátor hosszú idejű kaotikus mozgását jellemző természetes eloszlás súrlódás jelenlétében [1]. A vízszintes síkon az oszcillátor kitérését és sebességét ábrázoltuk a gerjesztési periódusidő egész számú többszöröseiben, a függőleges tengelyen az egyes pontok látogatási valószínűsége szerepel. Szembeszökő, hogy az eloszlás mindenütt egyenletlen, maga is fraktáljellegű.



lőszínűségeloszlás. Ez a természetes eloszlás megmutatja, hogy a fázis tér egy-egy pontját milyen gyakran látogatja meg a rendszer hosszú idő alatt (1. ábra).

A káosz ezért definiálható úgy is, mint

**II. definíció:** A káosz a kevés szabadsági fokú rendszerek olyan mozgása, melyet hosszú távon csak valószínűségeloszlással lehet helyesen (és tetszőleges pontossággal) jellemezni.

Ugyanakkor a káosz semmiképpen nem zaj, hiszen abban a valószínűségi viselkedés minden lehetséges állapotra kiterjed (és a valószínűségeloszlás sima), a káoszban viszont ezeknek csak egy fraktálszerkezetű részhalmozára (és az eloszlás maga is fraktál). Zaj esetén tehát egy adott helykoordinátába folytonosan sok sebességértékkel térhet vissza a rendszer, s a közeli sebességekhez közel azonos valószínűség tartozik. A kaotikus mozgásban viszont egy-egy helykoordinátához szintén végtelen sok, de nem összefüggő, hanem izolált, kitüntetett sebességértékek tartoznak (melyek összessége fraktál), s ráadásul még a nagyon közeli valószínűsége is erősen különböző lehet (lásd 1. ábra).

E véletlenszerű, sztochasztikus viselkedés eredete bizonyíthatóan a kevés összetevő erős és nemlineáris kölcsönhatása. Meglepő ez, ugyanis olyan rendszerekről van szó, melyekben egy adott állapotból a törvények ismeretében elvileg teljes pontossággal következtethetünk a jövőre. Ezzel tehát a klasszikus mechanikában is elkerülhetetlenné válik a valószínűségi szemlélet! Az, amiről eddig azt hittük, hogy a mikrovilág, a kvantummechanikai állapotjellemzés velejárója, jó fél évszázaddal később a makrovilág mozgásaiban is alapvető jellemzőnek bizonyul (természetesen egészen más okból). A mechanikán kívüli előfordulásokat is figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy egész természetszemléletünk átértékelését követeli meg az a tény, hogy *determinisztikus* rendszerek hosszú távon *véletlenszerű* viselkedést mutathatnak.

## Mit nem érdemes kaotikusnak tekinteni?

A káosz előrejelezhetetlenségi tulajdonsága alapján csábítóan tűnhet a következő definíció

**III. definíció(?):** A káosz bármely mozgás, mely hosszú távon előre jelezhetetlen.

Ezzel a definícióval azonban túl sokat markolnánk. Ne feledjük, az ideális gáz minden egyes részecskéjének mozgása egyfajta bolyongás, és ezért hagyományos értelemben hosszú távon előre jelezhetetlen (történetileg éppen ez vezetett el, *Einstein* Brown-mozgással kapcsolatos munkája [11] nyomán a stochasztikus folyamatok elméletéhez). Másrészt, erre a kiszámíthatatlan viselkedésre *Boltzmann* kinetikus elmélete óta létezik a *molekuláris káosz* fogalma. Érdemes ezért az I. és a vele egyenértékű II. definíciót, a *determinisztikus káosz* fogalmát a kis szabadsági fokú rendszerekre fenntartani. Ezek véletlenszerű viselkedése amúgy is sokkal meglepőbb, mint a nagy szabadsági fokúaké. A molekuláris káosz így a zaj szinonimája maradhat.

A III. definíció elvetése azzal az előnnyel is jár, hogy nem kényszerülünk a turbulenciát, a folyadékok (egy nagy

szabadsági fokú rendszer) időben is és térben is szabálytalan viselkedését káosznak tekinteni. Nyugodtan mondhatjuk, hogy a turbulencia a káosznál jóval bonyolultabb.

A légkör sok összetevőből álló, nagy szabadsági fokú rendszer, melynek állapota gyakran turbulens. A meteorológia ennek ellenére fontos szerepet játszott és játszik a káosz kutatásában. *Edward Lorenz* meteorológus fedezte fel 1963-ban, hogy az egyszerű rendszerek is lehetnek előre jelezhetetlenek [2, 5, 12]. A legújabb kutatások azt bizonyítják, hogy bizonyos földrajzi helyeken és bizonyos időpontokban a légkör úgy viselkedhet, mint egy kevés összetevőből álló rendszer. Ott és ilyenkor ezért – annak ellenére, hogy az egész légkör turbulens – a káoszról szerzett ismeretek haszonnal alkalmazhatók [2].

## A káosz hasznáról és káráról

A káosz tehát egy érdekes, a hagyományoshoz képest újfajta mozgásforma. Létezésének, az emberi felhasználás szempontjából, vannak hasznos és hátrányos következményei is. Hasznos lehet például a folyadékokban történő sodródásban, miután éppen a káosz vezet a jó keveredéshez. Nem csoda hát, hogy a kaotikus dinamika egyik alapmodellje az úgynevezett péktranszformáció [1], mely ugyanazt a szerepet játssza a szabálytalan mozgások megértésében, mint a harmonikus oszcillátor a szabályosakéban. A turmixgép annál hatékonyabb, minél kaotikusabb benne a folyadékelemek mozgása. A környezetvédők körében még mindig nem ismeretes, hogy a szennyező anyagok nagyskálájú terjedését kizárólag a káosz ismeretében lehet érdemben megérteni.

A szabálytalan rezgések kialakulása, az áramkörök begerjedése, vagy az űrhajók eltérése a tervezett iránytól viszont olyan folyamatok, melyeket elkerülni igyekszünk. Igen kicsi, de mégsem zérus annak a valószínűsége, hogy valamelyik kisbolygó kaotikus mozgása során a következő évtizedekben összeütközik a Földdel.

A káosz egyik különleges tulajdonsága, hogy időbeli szabálytalansága ellenére *szabályozható*, periodikussá tehető. Ezt éppen a káosz sajátos vonásai teszik lehetővé. Az egyik legelterjedtebb eljárás a bölcs gyermeknevelésre emlékeztet: megvárjuk, amíg a rendszer a kaotikus mozgás során *magától* olyan állapotba jut, ahol jól megválasztott kicsiny külső hatás is elegendő ahhoz, hogy következményeként a mozgás periodikussá, tehát szabályossá váljék, azaz a kaotikusság ne maradjon fenn többé.

## Tanítható-e (tanítandó-e) a káosz?

Jelen és előző cikkünkben példáinkat úgy választottuk meg, hogy nyilvánvalóvá váljék: a káosz tényleg egyszerű rendszerekben fordul elő. A kettős lejtőn (vagy a rezgő lemezen) pattogó golyó mozgását egy igényes középiskolás egyedül is (egy kevésbé igényes, tanári segítséggel vagy szakkörön) végig tudja számolni. Csak a hosszú idejű iteráció követését kell számítógépre bízni. Könnyen megérthető az is, hogy egyszerű matematikai struktúrák bonyolult időfüggésű dinamikákra vezethet-

nek [13, 14]. A fraktálszerkezetet feltáró megfelelő mintavételezési módszer kiválasztása, a fázisér fogalma és a valószínűségi szemlélet viszont túlmutat azon, amit ma középiskolában széleskörűen tanítani lehetne.

Érdekes módon azonban a kaotikus mozgás szabálytalan, és előre jelezhetetlen jellege *kísérleti eszközökkel* középiskolás szinten is jól hozzáférhető. Ezt bizonyítja *Békéssy László István* és *Bustya Áron* bajai diákok dolgozata [15] a kettősinga mozgásáról. Annak ellenére, hogy a pontos mozgásegyenletet bonyolultsága miatt [9] az elméleti fizika előadásokon sem mindig vezetjük le, a két inga végpontjának pályája egy-egy LED-del jól kirajzolható és vizsgálható. *Sótér Anna* székesfehérvári középiskolás Edward Lorenz könyvének [12] útmutatása alapján kaotikus vízike- reket épített. Egy ferde tengelyű korong peremére kilyukasztott aljú műanyag kávéspoharakat rögzített. A korong felső részére *egyenletes erősségű* vízugarat engedve, a poharak különféle mértékig telnek meg, és a korong forogni kezd. A forgás szabálytalan időközönként változtatja irányát, a kerék mozgása kaotikus [16]. *Biró István* marosvásárhelyi diák a mágneses inga mozgását tanulmányozta. Egy fotópapír alá két mágneses korongot rögzített, s fölé hosszú ingát szerelt, melynek végére vastekercset helyezett. A tekercsek közé tett lézermutatóval a fotópapíron jól kirajzolható az inga pályája, sőt a feketedés mértékéből a pillanatnyi sebességre is következtetni lehet [17].

A kaotikus jelenségek játékos formában történő elsajátításához nagy segítséget nyújthatnak a szimulációs programok (lásd pl. [10]), különösen manapság, amikor a diákok a hagyományos tankönyvekkel szemben egyre inkább a számítógépek és az internet világában mozognak otthonosan. E programok használatakor a kezdőfeltételek és paraméterek változtatása révén a diák a tananyag passzív befogadójából aktív szereplővé lép elő, amely modern pedagógiai és módszertani ismereteink szerint nagyságrendekkel növeli a tanulás hatékonyságát.

A kaotikus rendszerek akár kísérleti, akár számítógépes tanulmányozása sajátos élményt nyújt. Egy nemlineáris rendszer megismerése ugyanis valódi „kaland”, hiszen nagyon sok jelenség csak a konkrét mérés vagy szimuláció közben tárul föl, legtöbbször teljesen váratlanul, meglepetést okozva. Ennek során a diák megízlelheti a *felfedezés* örömet, s érdeklődése a tudományok irányába terelődhet.

Összességében úgy gondoljuk, hogy a káosz középiskolai tanításának megteremtése nem is technikai, sokkal inkább lelkiismereti kötelességünk. Miután felismertük, hogy a jelenleg tanított fizikai mozgásformák mind kivé-

telek, vajon megtehetjük-e, hogy a szabályról, az általános mozgásformáról – amely ráadásul alkalmas arra, hogy a fizika újszerű vonásaira és egyben a mindennapi élettel való kapcsolatára is felhívja a figyelmet – nem ejtünk szót? A *Fizika Világéve* szellemében csakis a nem lehet a válasz.<sup>1</sup> Kollégáinkat ez irányban történő további közös együttgondolkodásra buzdítjuk.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti *Jaloveczki József* (Baja) és *Máthé Márta* (Marosvásárhely) tanárokat a káosz kísérleti vizsgálatával foglalkozó középiskolás diákok felkészítéséért és munkájuk irányításáért.

## Irodalom

1. TÉL TAMÁS, GRUIZ MÁRTON: *Kaotikus Dinamika* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002
2. GÖTZ GUSZTÁV: *Káosz és prognosztika* – Országos Meteorológiai Szolgálat, Budapest, 2001
3. ÉRDI BÁLINT: *A Naprendszer dinamikája* – Eötvös Kiadó, Budapest, 2001
4. F. DIACU, P. HOLMES: *Égi találkozások, A káosz és a stabilitás eredete* – Akkord Kiadó, Budapest, 2003
5. J. GLEICK: *Káosz, egy új tudomány születése* – Göncöl Kiadó, Budapest, 1999
6. GRUIZ MÁRTON, TÉL TAMÁS: *A káosz* – Fizikai Szemle 55 (2005) 191
7. BUDÓ ÁGOSTON: *Mechanika* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1972
8. NAGY KÁROLY: *Elméleti mechanika*, 2. kiadás – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002
9. L.D. LANDAU, E.M. LIFSHIC: *Elméleti fizika I, Mechanika* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1974
10. TÉL TAMÁS, GRUIZ MÁRTON: *Mi a káosz? (És mi nem az?)* – Természet Világa 133 (2002) 296
11. A. EINSTEIN: *Über die molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* – Annalen der Physik 17 (1905) 549
12. E.N. LORENZ: *The essence of Chaos* – The University of Washington Press, 1993
13. GÁSPÁR VILMOS: *Játsszunk káoszt!* – Természet Világa 133 (2002) 299
14. KECSKÉS LAJOS: *Egy ölnyi végtelen* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002
15. BÉKÉSSY LÁSZLÓ ISTVÁN, BUSTYA ÁRON: *Fizikai kettősinga vizsgálata* – Fizikai Szemle 55 (2005) 185
16. SÓTÉR ANNA: *Lorenz modelljének kísérleti vizsgálata és a kaotikus vízikerek* – Természet Világa 134 (2003) LXXIII
17. BIRÓ ISTVÁN: *Mágneses inga kísérleti tanulmányozása* – kézirat, beküldés előtt a Fizikai Szemléhez
18. HÓBOR MIKLÓS, GRUIZ MÁRTON, GÁLFI LÁSZLÓ, TÉL TAMÁS: *Kaotikus mozgások, szimulációs program* – ELTE Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest, 2001

<sup>1</sup> Ausztriában már megjelentek olyan középiskolai fizika tankönyvek, melyek kitekintést nyújtanak a kaotikus jelenségek világába, például: ALBERT JAROS, ALFRED NUSSBAUMER, HANSJÖRG KUNZE: *Basiswissen Physik-compact* – Öbv&hpt, Wien, 1999.

# AZ EÖTVÖS TÁRSULAT TISZTÚJÍTÓ KÜLDÖTTKÖZGYŰLÉSE

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2005. évi Tisztújító Küldöttközgyűlését az eredetileg meghirdetett időpont helyett – technikai okok miatt – 2005. június 25-én, szombaton 10 órai kezdettel tartja az ELTE Fizikai épület (XI. Pázmány Péter sétány 1/A) 083. előadótermében.

Napirend előtti előadásban beszámolót hallgathatnak meg az érdeklődők a Fizika Évének eseményeiről.

*A napirendből:* elnöki megnyitó • a Szavazatszámoló Bizottság felkérése • a Társulat 2004. évi közhasznúsági jelentése • a Társulat 2005. évi költségvetése • a Felügyelőbizottság jelentése • vita és szavazás az előzőekről • a Jelölőbizottság jelentése, a jelöltlista elfogadása • javaslat a Társulat érmének odaítélésére, az érem és díjak kiosztása • a Társulat tisztségviselőinek megválasztása • zárszó