A RUGALMAS FONALÚ INGÁRÓL – MAI SZEMMEL

– Vermes Miklós emlékezetére

Gruiz Márton, ELTE TTK, Elméleti Fizikai Tanszék
Radnai Gyula, ELTE TTK, Anyagfizikai Tanszék
Tél Tamás, ELTE TTK, Elméleti Fizikai Tanszék

A kaotikus mozgások meglepő és megkapó tulajdonsága, hogy rendkívül egyszerű módon is létrehozhatók. Elég például két, a középiskolások számára is jól ismert egyszerű rendszert összecsatolni. Egy merev szárú ingára függesztett másik merev szárú inga mozgása már elvezethet kaotikus viselkedéshez.

A kaotikus jelenségek okait általában valamilyen nemlinearitásban kell keresnünk, ami a mozgást vezérlő mozgásegyenletekben lép fel. Az egyik legegyszerűbb példa erre a rugalmas fonalú inga (röviden: rugós inga) mozgása. A *Fizikai Szemle* 1986. évi 10. számában jelent meg *K. Luchner* és *R. Worg* cikke [1], melyben részletesen tárgyalták ezt a jelenséget. Karl Luchner (1929–2001) a müncheni Ludwig Maximilians egyetem fizikai didaktika tanszékének akkori vezetője az 1987-ben Balatonfüreden tartott nemzetközi konferencián is beszámolt a kaotikus rezgésekkel kapcsolatos kutatásairól. A müncheni professzor természetesen nem tudhatta, de a *Fizikai Szemle* szerkesztőinek figyelmét is elkerülte, hogy 1966 januárban már megjelent egy cikk: *A rugalmas fonalú ingáról, Vermes Miklós* és *Wiedemann László* tollából [2]. A következő évben, 1967-ben Vermes Miklós a *Magyar Fizikai Folyóirat*ban közölt egy tanulmányt [3] ezzel a címmel: *Rugalmas fonalú inga lengése.* Miért foglalkoztatta Vermes Miklóst annyira ez a probléma?

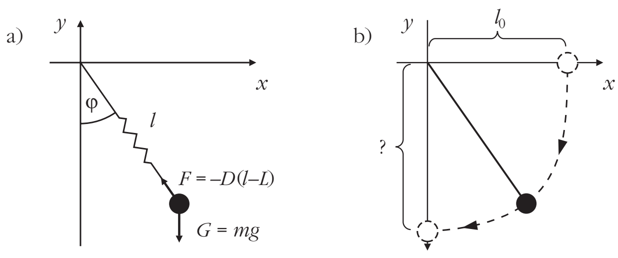
Egy 1965-ös versenyfeladat története

Idézzük a Fizikai Szemlében megjelent cikk bevezetőjét (lásd *1. ábra*):

„Az 1965. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának 1. feladata így szólt:

Felfüggesztett L hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugóra kisméretű testet akasztunk. A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó akkor nyújtatlan állapotban van, hossza L) és elengedjük. Ismeretes a rugó D állandója, amely szerint a rugalmas erő arányos az x megnyúlással: $F = -Dx$. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?

1. ábra. A feladat vázlata: a) L hosszúságú, D rugóállandójú, elhanyagolható tömegű ideális rugóra akasztott m tömegű testre ható erők, b) a rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk, a kezdeti hossza $l_0 = L$, majd elengedjük. (A testre esés közben a G nagyságú nehézségi és az F nagyságú rugóerő hat, a rugó pillanatnyi megnyúlása: $l - L$. Megnyújtott rugó esetén az F erő negatív, az origó felé mutat.)



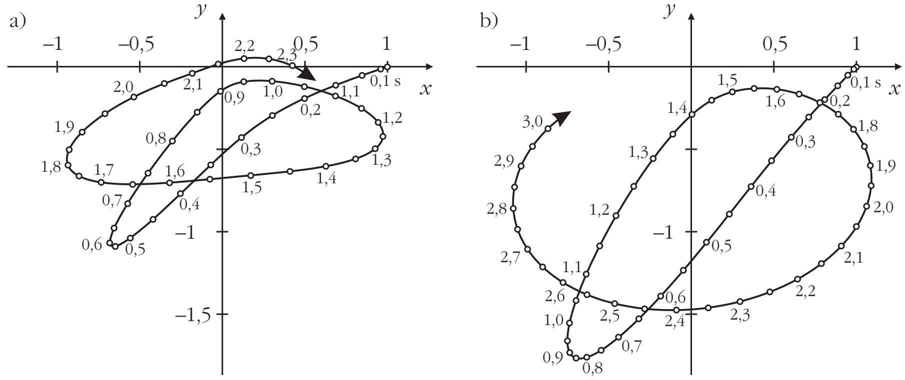
A feladat paraméteresen lett feladva, és csak később derült ki, hogy – az *m, D, L* paraméterek gyakorlatilag tetszőleges értékei esetén – a megadott kezdőfeltétellel bizony egészen különleges mozgások jönnek létre.

A több mint 40 évvel ezelőtti OKTV Bizottságból ma már csak Wiedemann László emlékezetére támaszkodhatunk, ha a feladat kitűzésének körülményeit akarjuk felidézni. Eszerint a Bizottság akkori elnöke Vermes Miklós (1905–1990), tagjai pedig *Bodó Zalán* (1920–1990), *Nagy László* (1931–1987), *Párkányi László* (1907–1982) és Wiedemann László (1931–) voltak. A feladatot Párkányi László hozta és a többiek – valamennyien gyakorlott feladatkitűzők és -megoldók – figyelmét elkerülte a feladatban rejtőző „időzített bomba”, amelyet csak a versenyzők dolgozatainak átnézése közben vettek észre. Szerencsére volt még egy optikai és egy elektrodinamikai–termodinamikai feladat is a döntőn, így főleg ezek alapján – a mechanikai feladatra adott megoldási próbálkozásokat kisebb súllyal véve figyelembe – sikerült megállapítani a verseny nyerteseit. Első helyezett lett *Juvancz Gábor,* a budapesti Fazekas Gimnázium tanulója (a tehetséges, ígéretes karrier elé néző fiatal fizikus nem sokkal az egyetem elvégzése után repülőszerencsétlenség áldozata lett), második *Béres László* az István Gimnáziumból (orvos lett később), harmadik *Tüttő István* az Arany János Gimnáziumból, jelenleg a KFKI SZFKI sikeres kutatója, meghívott előadó az ELTE-n. Mindhárman budapestiek és IV. osztályosok voltak 1965-ben.

Az eltelt sok évtized bizony elmoshatja az emlékeket: Tüttő István ma már úgy emlékszik, hogy a versenyt *Lovász László* nyerte meg. Igaz, Lovász László – akkor még csak III. osztályos – szintén indult a döntőn, de nem ért el helyezést. (A következő évben viszont ő nyerte meg a fizika OKTV-t, valószínűleg ez maradt meg Tüttő István emlékezetében.) Lovász László akadémikus memóriája érdekesen őrizte meg az első feladattal kapcsolatos problémát:

„…ha az ember feltette, hogy szimmetrikus a pálya, akkor könnyű volt, de semmi ok nem volt feltenni, hogy ez igaz, ezért aztán nem is csináltam meg a feladatot…”

Vermes Miklóst nyilván zavarta a Bizottság melléfogása, s mindenképpen utána akart járni a fizikai problémának. Utólag valószínűleg kísérletileg is megvizsgálta a jelenséget, különböző rugókkal és különböző tömegű testekkel. Azután nekiült, és fáradságos munkával, sok-sok oldalnyi kézi számítással, a szukcesszív approximáció módszerével, speciálisan megválasztott rugóállandók és tömegek mellett meghatározott néhány pályát. Közös cikkükben Wiedemann László többek között azt mutatta meg, hogy milyen elhanyagolások esetén lehet a pálya olyan egyszerű és szimmetrikus, ahogyan eredetileg elképzelték.



2. ábra. Két, Vermes által numerikusan meghatározott pálya: Δt = 0,01 s, a paraméterek: a) m = 0,034 kg és b) m = 0,102 kg. A rugó kezdeti hossza mindkét esetben 1 m, a kis karikák a tömegpont helyzetét mutatják 0,05 s időközönként [3].

A verseny eredményhirdetésén ott volt Lovász László: „Az eredményhirdetésen az előadó – valószínűleg Vermes Miklós – olyasmit mondott, hogy elfogadták, ha valaki feltette a szimmetriát, de megemlítette, hogy igazából a pálya legalacsonyabb pontja nem középen van… Abban biztos vagyok, hogy kaotikus pálya lehetőségéről nem volt szó…”

Miért is lett volna? *Henri Poincaré* (1854–1912) elmélete a fizikában évtizedekig aludta „csipkerózsika-álmát”, míg végre a 80-as években a fizikusok kedvenc „vadászterületévé vált”.

Vermes Miklós minden bizonnyal megsejtette a fizikai probléma fontosságát, ezért nem elégedett meg saját számítási eredményeivel. Felkereste a Magyarországon akkor legmodernebbnek számító Ural II. számítógép[1] „gazdáját”, *Szelezsán János*t az MTA Számítástechnikai Központjában. Megkérte, próbálja meg a géppel kiszámíttatni a pályákat. Ez került azután be a *Magyar Fizikai Folyóirat*ban közölt tanulmányba, melynek végén illőn köszönetet is mondott a kapott segítségért. „Én csak beprogramoztam azt a feladatot, amire Vermes Miklós megkért” – hárítja el magától az érdemeket ma Szelezsán János. Azt még megemlíti, hogy Vermes is kacérkodott akkoriban (60 éves korában) azzal a gondolattal, hogy megtanul programozni.

Most, negyven év után, érdekes és egyben megtisztelő feladat a mai számítógépekkel megoldani a Vermes által kitűzött feladatokat. Ezt próbáltuk meg, s közben a probléma szépsége által lenyűgözve sikerült megragadnunk néhány olyan kapcsolódó problémát is, melyek minden bizonnyal Vermes Miklós tetszését is elnyernék.

Vermes Miklós számítógépes szimulációja

Vermes Miklós összesen hét különböző pályát (a rugóra akasztott test függőleges síkbeli pályáját) követett számítógépes szimulációval, a mozgás néhány másodpercéig. A rugó nyugalmi hossza L = 0,5 m, a rugóállandó D = 2 N/m, a kezdősebesség nulla, a rugó indulási helyzete pedig vízszintes volt az összes esetben.[2] Az első három ábrájánál, az eredeti középiskolai feladatnak megfelelően, nyújtatlan rugóval indította a mozgást m = 0,034 kg, 0,068 kg, 0,102 kg tömegekkel. A másik négynél azonban már eltért a feladattól, s kezdőhelyzeteknek az l_0 = 0,75 m és 1 m hosszúságú (nyújtott) rugókat vette (*1.b ábra*). A mozgásokat azzal a feltétellel tárgyalta, hogy a rugó összenyomáskor is követi a megnyúlásra érvényes erőtörvényt. Másrészt a kezdőfeltételek csak függőleges síkmozgást tesznek lehetővé.

A numerikus megoldás azt jelenti, hogy kis Δt időlépéseket véve „felgöngyölítjük” a megoldást. Az $x(t)$ hely- és a $v(t)$ sebességkoordináta és a Newton-egyenletből leolvasható gyorsulás[3] alapján ugyanis ki lehet számolni az $x(t+\Delta t)$, $v(t+\Delta t)$ értékeket, majd, ismételve a számítást, tetszőleges hosszúságig meghatározhatók a pályák.

Vermes Miklós a számítógépbe az alábbi, középiskolások számára is érthető, egyszerű képleteket programozta (vesszővel jelöltük a $(t+\Delta t)$-hez tartozó értékeket): $v'_x = v_x + a_x\Delta t$, $v'_y = v_y + a_y\Delta t$ és $x' = x + v_x\Delta t + a_x\Delta t^2/2$, $y' = y + v_y\Delta t + a_y\Delta t^2/2$. Vermes az x', y' koordinátákat meghatározó képleteket alkalmazta úgy is, hogy $v_{x,y}(t)$-t kicserélte $v_{x,y}(t+\Delta t)$-re, vagyis a sebességösszetevők értékeit nem az intervallum elejéről, hanem a végéről vette. A két módszerrel ellentétes előjelű hibák keletkeztek, ezért Vermes mind a két eljárással kiszámította a pályát, s végül a megfelelő koordináták számtani közepét ábrázolta.[4]

Terjedelmi okokból a Vermes Miklós által tanulmányozott hét mozgásból csak az utolsó kettőt vizsgáljuk részletesen, az m = 0,034 kg és 0,102 kg tömegekkel terhelt l_0 = 1 m-re nyújtott rugókét. A *2. ábra* Vermes Miklós eredeti rajzait mutatja.

Vermes nem véletlenül követte a pályákat csupán néhány másodpercig. Csak addig szimulált, ameddig biztos lehetett abban, hogy a „valódi” pályától való kis eltéréssel képes megrajzolni a görbéket. A rendszer konzervatív, ezért az ellenőrzés viszonylag egyszerű volt: a szimulálás addig megbízható, amíg az energia a mozgás során alig tér el kezdeti értékétől.

Szimuláció mai módszerekkel

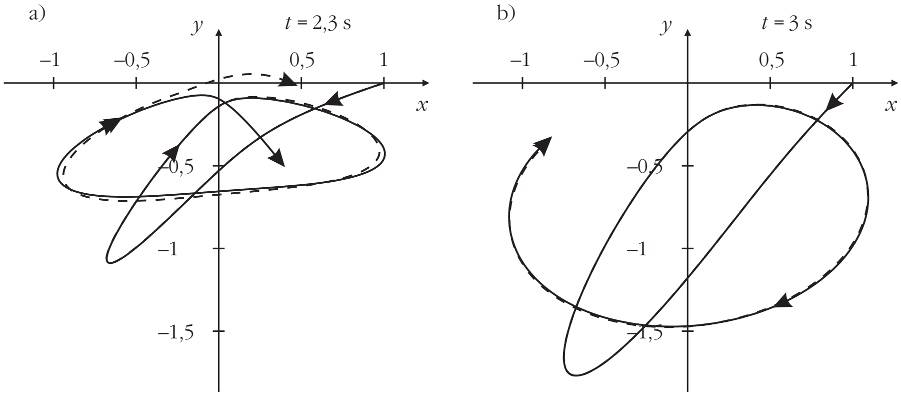
A számítógépek és a numerikus módszerek fejlődése mára lehetővé teszik, hogy a pályákat sokkal nagyobb pontossággal határozzuk meg. A témakörben széleskörűen elfogadott, úgynevezett negyedrendű Runge–Kutta-

[1] Az Ural II. számítógépet 1959-ben a Szovjetunióban fejlesztették ki, majd gyártották 1959–1964 között, összesen 139 példányban (Magyarországra 3 darab került). Elektroncsöves gép volt, ennek megfelelően elhelyezése 90–100 négyzetméteres helyiséget igényelt, fogyasztása pedig 30 kW volt. Átlagosan 5000–6000 művelet elvégzésére volt képes másodpercenként. (További információk: www.hszk.bme.hu/pictures/ural2.html)

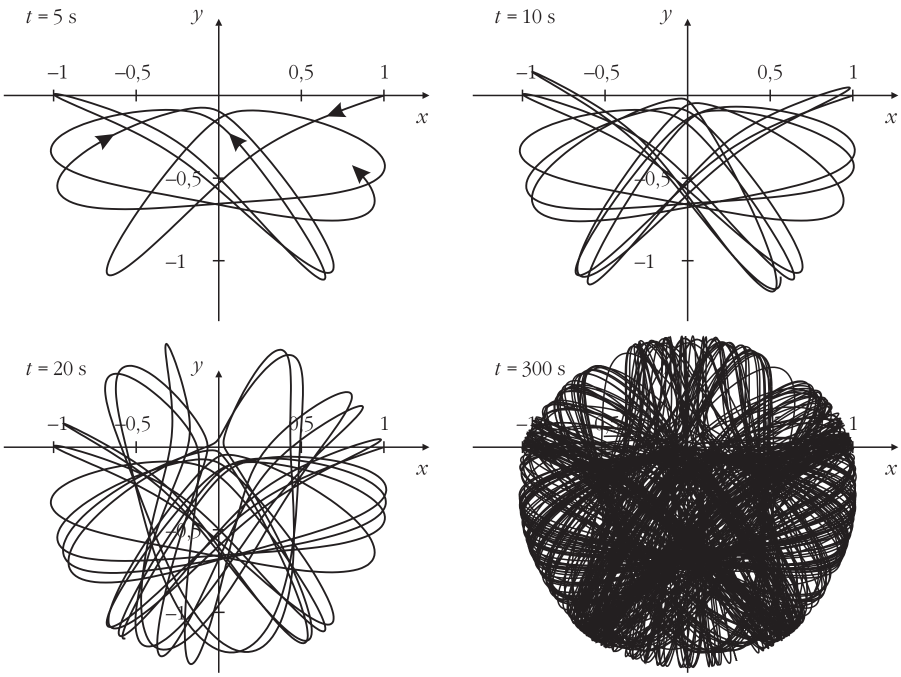
[2] Vermes eredeti cikkében a paraméterek és kezdőfeltételek természetesen még CGS mértékrendszerben voltak megadva, mi a manapság szokásos SI-t használjuk.

[3] A Newton-egyenletek: $ma_x = -D(l-L)\sin\varphi = -D(l-L)x/(x^2+y^2)^{1/2}$, $ma_y = +D(l-L)\cos\varphi - mg = -D(l-L)y/(x^2+y^2)^{1/2} - mg$.

[4] Megjegyezzük, ha Vermes az átlagokat tette volna a lépések x, y kiindulópontjává, akkor az eredménye sokkal pontosabb lehetett volna.



3. ábra. A negyedrendű Runge–Kutta-eljárással, Δt = 0,01 s lépésközzel meghatározott „pontos” pályák (folytonos vonalak) és a *2. ábrá*n már bemutatott Vermes-féle görbék (szaggatott vonalak) az a) és b) esetben egyszerre ábrázolva.



4. ábra. A *2.a* és a *3.a ábra* mozgásának (m = 0,034 kg, l_0 = 1 m) egyre hosszabb ideig követett pályája. Az egyes képeken leolvasható az eltelt idő. A mozgás kaotikus.

módszerrel [4] újra megoldottuk a Vermes-féle feladatot. A módszerről elég annyit tudnunk, hogy egyetlen Δt lépés ~Δt^4 pontosságú, azaz egy lépés során a hiba legfeljebb ~Δt^5 nagyságú. Ezzel az eljárással a numerikusan meghatározott energia még 10^6 nagyságrendű lépés után is legfeljebb csak néhány ezrelékkel tér el a kezdetitől, ezért a módszert „pontosnak” fogjuk nevezni.[5]

A *3. ábrá*n a „pontos” pályákat és a Vermes-féle görbéket hasonlíthatjuk össze. A b) esetben végig nagyjából együtt fut a két görbe, az a) esetben az utolsó 0,3 másodpercben viszont már jelentős és növekvő eltérés látható. Összességében megállapíthatjuk: Vermes jól becsülte meg azt az időtartamot, ameddig a megrajzolt görbéi szemmel láthatóan még hűen ábrázolják a mozgást.

Az Olvasóban minden bizonnyal felmerül a kérdés: hosszabb ideig szimulálva vajon hogyan néz ki ennek a két mozgásnak a pályája?

A *4.* és az *5. ábrá*kon megadjuk a két eset pályáit egyre hosszabb időintervallumokban. (Ezek és a későbbi ábrák már mind „pontos” szimulációk.) Első ránézésre is szembeötlő, hogy hosszú távon a két mozgás alapvetően különbözik. A *4. ábrá*n egy „összevissza”, szabálytalan mozgást láthatunk (előlegezzük meg neki a *kaotikus* [5] elnevezést), szemben az *5. ábrá*val, ahol „csak” *kváziperiodikus* [5] a mozgás.

Előzetesen a paraméterekből, a kezdőfeltételekből, de még a mozgás néhány másodpercig való követéséből sem sejthettünk a rendszer hosszú távú viselkedéséből semmit. Természetesen Vermes sem tudhatta, hogy az általa megvizsgált pályák igazából milyen jellegűek. (A hét esetből mai szemmel három bizonyul kaotikusnak s négy kváziperiodikusnak, köztük az eredeti feladatnak megfelelő, nyújtatlan kezdőfeltételhez tartozók.)

Áttekintő vizsgálat

Maguk a pályák nem adnak mindig kielégítő eligazítást a mozgástípusokról. A bemutatott esetekben például nem látjuk, hogy más kezdőfeltételből indítva, de a paramétereket változatlanul hagyva milyen mozgások alakulnak ki.[6] Lehetnek-e kaotikusak, kváziperiodikusak, netán periodikusak? Ha igen, akkor hányféle egymástól független kaotikus, kváziperiodikus és periodikus mozgás jöhet létre?

Ha a mozgásfajták jobb áttekintését, rendszerezését és további vizsgálatát szeretnénk elérni, akkor – a káoszelmélet tanulságai szerint – érdemes definiálnunk egy leképezést. A rugós inga pillanatnyi mozgásállapotát négy adat határozza meg: az x, y helykoordináta és a hozzájuk tartozó v_x, v_y sebességek. Ezek a változók feszítik ki a fázisteret, mely most négydimenziós. A fázistér egy pontja egyértelműen meghatározza a rendszer mozgásállapotát. A változó mozgásállapot egy pályát rajzol a fázistérben, a trajektóriát.

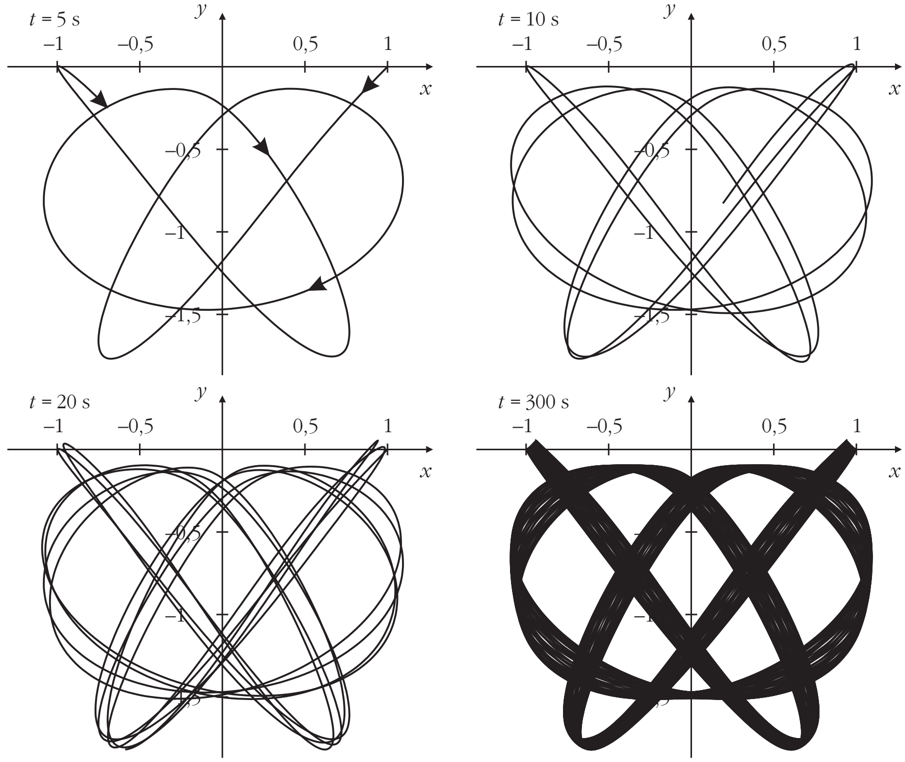
A rugós inga konzervatív, tehát megmarad az x, y, v_x, v_y függvényeként felírható energia, ezért a négy koordináta nem független egymástól, egyik kifejezhető a másik háromból. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a négydi-

[5] A Vermes által alkalmazott eljárás viszont – mai szóhasználattal – csak elsőrendű, vagyis az egy lépésben elkövetett hibája ~Δt^2.

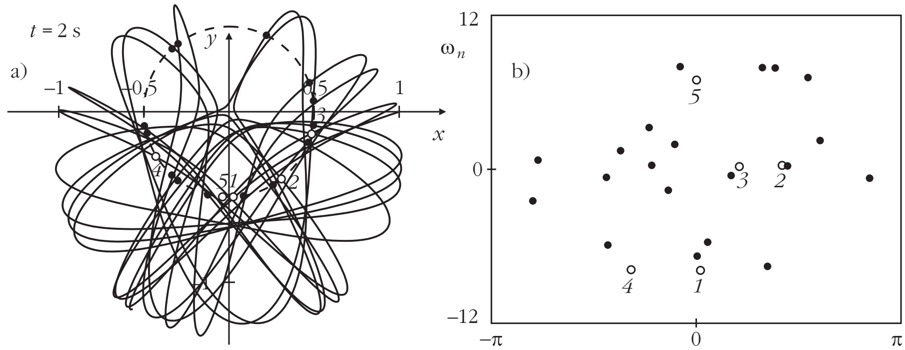
[6] A rugós ingának a továbbiakban is csak a síkbeli mozgásáról van szó.

menziós fázistérben a trajektória egy háromdimenziós, állandó energiájú felületen mozog. Elegendő tehát három – immár tényleg független – változó által kifeszített térben ábrázolnunk a trajektóriát, mely úgy képzelhető el, mint egy cérnából álló gombolyag. Az úgynevezett Poincaré-leképezést úgy kapjuk, ha ezt a gombolyagot egy felülettel (mondjuk egy síkkal) elmetszszük, s a metszéspontokat ábrázoljuk. Gyakorlati okokból a mozgást polárkoordináták segítségével követjük nyomon ezentúl, azaz az *x, y*, v_x, v_y változókról áttérünk a φ, $\omega \equiv \dot{\varphi}$, *l*, $v_l \equiv \dot{l}$ változókra, ahol φ a szögkitérés (lásd *1. ábra*), ω a szögsebesség, *l* a rugó pillanatnyi hossza (a rögzített testnek a felfüggesztési ponttól való távolsága), v_l pedig a sugárirányú sebesség.

A Poincaré-leképezést a φ, ω, *l* koordináták által kifeszített térben készítjük el, az *l* = *L* sík metszésével. Gyakorlatban ez azt jelenti, hogy mindannyiszor ábrázolunk egy pontot a (φ; ω) síkon, ahányszor a rugó hosszúsága éppen a nyújtatlan hossz, azaz *L*. (A trajektóriának a metsző síkon általában csak az egyik irányból jövő döfését rögzítjük, mi az $\dot{l} > 0$ feltételt választottuk.) A *6. ábrá*n az általunk használt Poincaré-leképezés menetét szemléltetjük a *4. ábra* példáján. A Poincaré-leképezéssel tehát a mozgásról egy jól áttekinthető „ujjlenyomatot” veszünk.



5. ábra. A *2.b* és a *3.b ábra* mozgásának (*m* = 0,102 kg, l_0 = 1 m) egyre hosszabb ideig követett pályája. Az egyes képeken leolvasható az eltelt idő. A mozgás kváziperiodikus.



6. ábra. A Poincaré-leképezés szemléltetése. Amikor a rugóra akasztott test pályája belülről kifelé metszi a szaggatott vonallal megrajzolt *l* = *L* kört (a), akkor ábrázoljuk az abban a pillanatban leolvasható (φ_n; ω_n) adatokat (b). Az első öt pontot (φ_1; ω_1) … (φ_5; ω_5) üres körökkel jelöltük, számokkal jelezve a leképezési sorrendjüket. 20 másodperc alatt összesen 25 pont képződött le. A b) ábra az a) pálya „ujjlenyomata”.

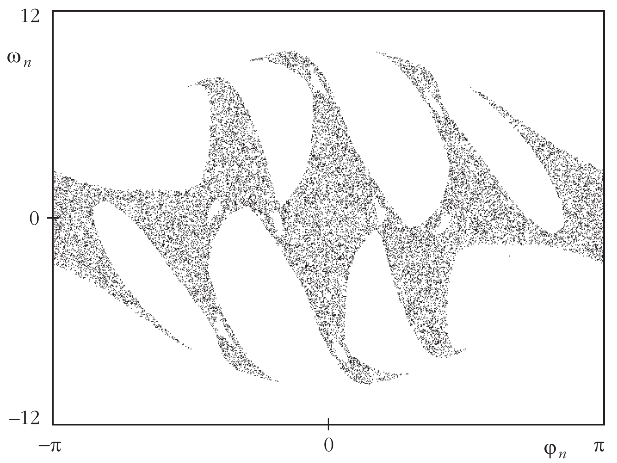
A mozgás kaotikussága, „összevisszasága” itt is megnyilvánul: a b) képen a pontok elhelyezkedése, s egymás utáni sorrendje véletlenszerűnek tűnik. Természetes módon vetődik fel a kérdés: nagyon sok pontot leképezve mi rajzolódik ki a (φ_n; ω_n) síkon?

A *7. ábrá*n bemutatjuk azt az alakzatot, amely a *6. ábrá*n elkezdett leképezés folytatásaként jelenik meg.[7] Összesen 20 000 másodpercig követtük a mozgást[8] (azaz több mint öt és fél órán keresztül!), miközben 22 139 pontot kaptunk. A képen egy éles, de tagolt határral rendelkező terület látható, a *kaotikus tartomány*. (A pályát kirajzoló *4. ábrá*n ilyen hosszú idő után már csak egyetlen nagy fekete foltot látnánk!) A kaotikus tartományt a leképezés pontsorozata egyenletesen, ugyanakkor véletlenszerűen járja be.

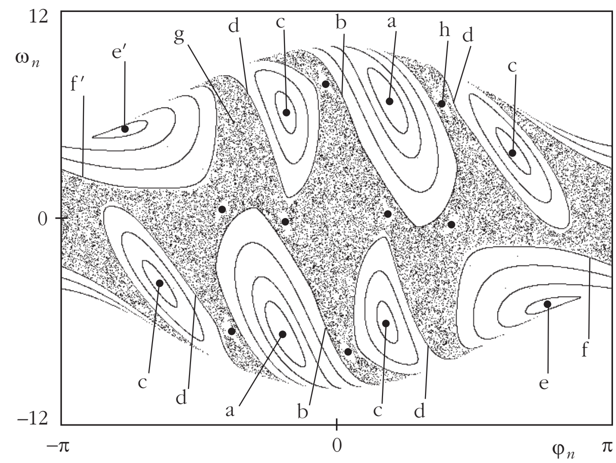
Ezután próbáljuk meg kideríteni, hogy az üres „öblökben” vajon mi lehet! A felderítéshez kézenfekvő a módszer: indítsunk mozgásokat a fehér tartományból vett φ_0, ω_0 kezdőfeltételekkel (természetesen az *l* = *L* metsző síkról), de egyébként változatlan paraméterekkel. A mozgásállapotot négy változó jellemzi, tehát egy még szabad. A negyediket, azaz a test sugárirányú sebességét ($\dot{l}_0 = v_{l0}$) az energiából számítjuk ki úgy, hogy egyezzen meg a *7. ábrá*n bemutatott mozgás energiájával.

[7] A φ változó 2π szerint periodikus, ezért a *7. ábrá*n látható (φ_n; ω_n) síkot egy henger palástjaként kell elképzelnünk.

[8] Az említett időtartamok természetesen a rendszer mozgásának jellemzői. A számítógépprogram futtatási ideje a processzor sebességétől függ, és semmiféle jelentősége nincs a probléma szempontjából. (Egy 2 GHz-es processzorral, Turbó Pascal programmal, a léptéket Δt = 0,001 s-nak beállítva, hozzávetőlegesen másfél percig tartott a *7. ábra* elkészítése. Szelezsán János becslése szerint ugyanekkora munka elvégzése az Ural II.-nek akár hónapokig is eltarthatott volna.)



7. ábra. A *6. ábrá*n bemutatott leképezés folytatásaként kirajzolódott úgynevezett kaotikus tartomány. Összesen 22 139 pont képződött le 20 000 másodperc alatt.



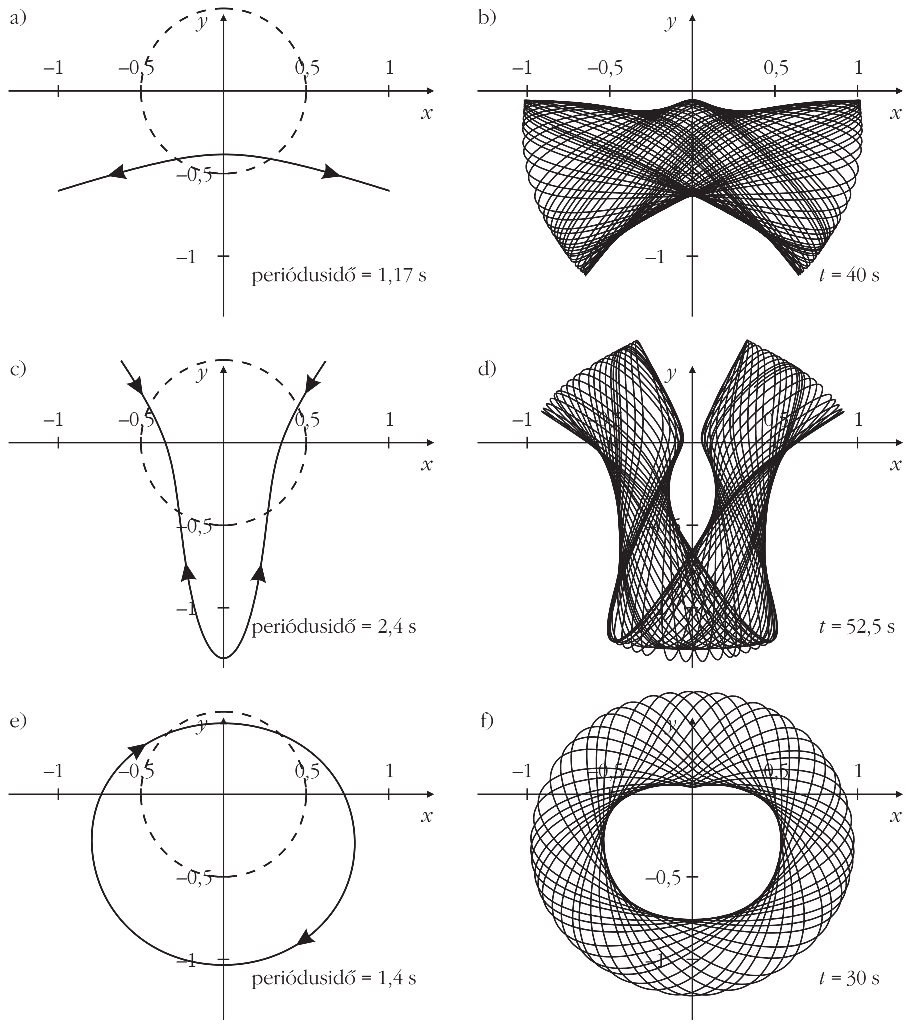
8. ábra. A *7. ábrá*n látott kaotikus tartományon kívül további 20 kezdőfeltétellel elkészített Poincaré-térkép.

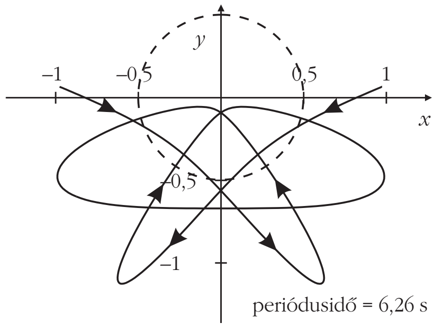
Első gondolatunk az lehetne, hogy a mozgás semmiben nem fog különbözni a *4. ábrá*n bemutatottól, hiszen a paraméterek nem változnak, s az összenergia is azonos. A *7. ábrá*ra nézve azonban azt látjuk, hogy olyan kezdőfeltételekből indítunk trajektóriákat, amelynek közelében a *4. ábra* pályája több mint ötórás mozgása során sem járt, vagyis valami alapvetően különböző dologról lesz szó. A *7. ábrá*n látottakon túl további 20 kezdőfeltétellel elkészített képünk, egy Poincaré-térkép, a *8. ábrá*n tekinthető meg.

Az újonnan indított pályák lényegesen különböznek a *7. ábra* mozgásának látványától: a leképezésen különálló pontok és vonalak rajzolódnak ki. Néhányukat betűkkel jelöltük meg. Az *a*-val jelölt (egyetlen pálya) képe két pont. Ez a pálya tehát – hosszú idő alatt is – a leképezési feltételt csak két (φ_1, ω_1), (φ_2, ω_2) számpárral teljesíti, méghozzá felváltva „ugrálva” az egyikről a másikra. Könnyen rájöhetünk: ez egy olyan ismétlődő (periodikus) mozgás, mely egyetlen periódus alatt kétszer elégíti ki a leképezési feltételt (lásd *9.a ábra*).

A periodikus mozgás pontját a fa évgyűrűihez hasonlóan zárt görbék veszik körül. Az *a*-hoz tartozó legnagyobb gyűrűt *b*-vel jelöltük. Ezekhez kváziperiodikus mozgások tartoznak. Minél tágabb egy gyűrű, az általa reprezentált kváziperiodikus mozgás annál inkább eltér a hozzá tartozó periodikus mozgástól. A mozgások pályái a *9. ábrá*n tekinthetők meg, a leképezés feltételét jelentő szaggatott vonalú körrel együtt. Az ábrán látható továbbá a *c*-vel jelölt négy pont periodikus mozgásának térbeli képe és a hozzájuk tartozó legtágabb gyűrű (*d*) pályája. *e* és *f* olyan átforduló periodikus, illetve kváziperiodikus mozgást jelöl, melyeknek a szögsebessége sohasem vált előjelet, mindig negatív (ezért esnek a leképezett

9. ábra. A *8. ábra* Poincaré-térképe alapján néhány periodikus és kváziperiodikus mozgás pályája. A betűjelek megfelelnek a Poincaré-térképen találhatóknak.





10. ábra. A *8. ábrá*n *h*-val jelölt periodikus mozgás pályája. Ez olyan mozgás, amely egyetlen periódus alatt nyolcszor metszi belülről kifelé az $l = L$ kört.

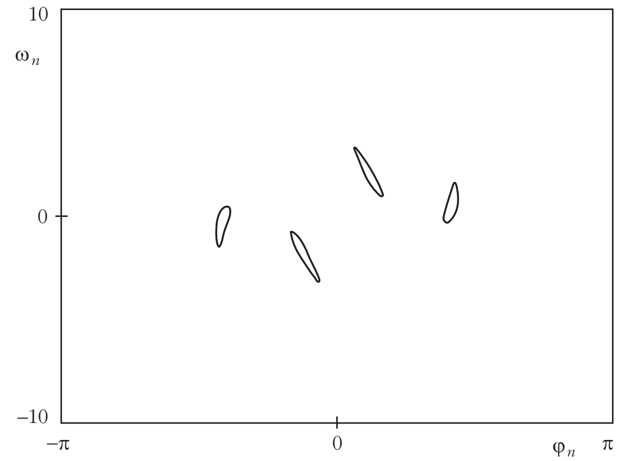
pontjaik a *8. ábra* alsó térfélére). Az e' és az f' ezeknek a pozitív szögsebességű szimmetriapárjai. A kaotikus tartományt *g*-vel jelöltük.[9]

Példánkon keresztül kezdenek a Poincaré-leképezés előnyei kidomborodni. Egy periodikus mozgás képe nagyon egyszerű: egy vagy néhány pont. A kváziperiodikusaké egy zárt görbe, a kaotikusé viszont egy kiterjedt tartomány. A tartományon belül bármilyen kezdőfeltételből indítjuk a mozgást, ugyanazt a képet fogja kirajzolni, ugyanazt a területet fogja bejárni – egyenletesen és véletlenszerűen. A káosz „összevisszasága” itt úgy mutatkozik meg, hogy a pont egy kétdimenziós tartományt jár be, szemben a kváziperiodikus esettel, amely egy egydimenziós vonalra szorítkozik.

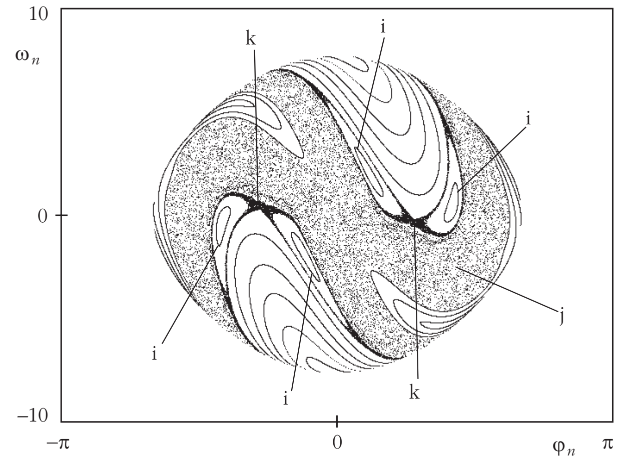
Poincaré-térképünkön találtunk tehát négy különböző periodikus pályát. Vajon tényleg csak ez a négy van? Ha jobban szemügyre vesszük a *7. ábra* kaotikus tartományát, akkor a pöttyözött területen belül nyolc apró kis lyukat fedezhetünk fel. Mivel a rögzített energia megengedi (hiszen körbe veszi őket a kaotikus tartomány), valamilyen mozgásnak tartozni kell azokhoz is. A tisztázás érdekében indítsunk egy pályát az egyik közepéből!

A *8. ábrá*n *h*-val jelölt pontból indított mozgás képe nyolc különálló pont lett, mindegyik lyukba esik egy belőlük. Eddigi tapasztalataink alapján sejthető, hogy ez egy olyan periodikus mozgás, amely egyetlen periódus alatt nyolcszor elégíti ki a leképezési feltételeket (lásd *10. ábra*). Természetesen ezekben a kis lyukakban is léteznek kváziperiodikus pályák, melyek a leképezésen *h* körüli gyűrűkként jelennek meg (ezeket azonban már nem ábrázoltuk).

Bár a *7. ábrá*n nem látszik, a kaotikus tartomány tele van további apró lyukakkal, a tartomány határa és a lyukak széle pedig apró öblökkel. Mindegyikhez tartozik egy-egy periodikus pálya, s kváziperiodikus mozgások sokasága. Minél apróbbak a lyukak és öblök, annál nagyobb a számuk, s annál bonyolultabbak a hozzájuk tartozó periodikus pályák. Számuk összességében a végtelenhez tart. Az ily módon kilyuggatott kaotikus tartomány fraktál szerkezetű [5].



11. ábra. Vermes *5. ábrá*n bemutatott mozgásának Poincaré-metszete.



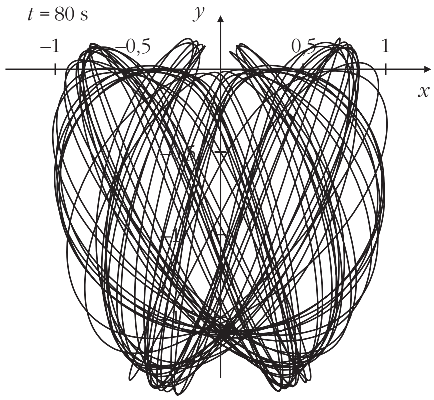
12. ábra. A *11. ábra* kiegészítése Poincaré-térképpé. *i*-vel jelöltük a *11. ábrá*n látott görbéket, *j*-vel egy nagy, *k*-val egy kicsi kaotikus tartományt.

Térjünk most vissza Vermes másik példájához (*2.b, 3.b* és *5. ábra*). Korábban megállapítottuk, hogy kváziperiodikus mozgással van dolgunk. De mit mutat a Poincaré-metszet? A *11. ábrá*n valóban egy kváziperiodikus mozgás szokásos, azaz a kaotikusnál jóval „unalmasabb”, egyszerűbb képe tűnik fel.

Előző példánk után már sejthetjük, hogy sok különböző periodikus és kváziperiodikus pálya létezhet még ugyanezen paraméterek és energia mellett, sőt, esetleg még kaotikus tartomány is. Valóban, a Poincaré-térkép (*12. ábra*) hasonló a *8. ábrá*hoz: egy nagy kaotikus tartomány (*j*) mellett sok különböző periodikus és kváziperiodikus mozgás látszik (Vermes pályáját *i*-vel jelöltük). Legszembetűnőbb különbség az, hogy a tartományok nem nyúlnak ki a kép jobb és bal oldalának szélére. A magyarázat egyszerű: ennél az (alacsonyabb) energiaszintnél sem a kváziperiodikus, sem a kaotikus mozgások nem tudnak „átfordulni”, vagyis minden esetben $|\varphi| < \pi$. A *13. ábrá*n 80 másodpercig ennek a nem átforduló, de kaotikus mozgásnak térbeli pályáját ábrázoltuk.

A térképet alaposabban megnézve azt is észrevehetjük, hogy a *k*-val jelölt „görbe” bizony helyenként „kiszélesedik”, vagyis kváziperiodikus mozgás nem lehet. Itt egy újabb kaotikus tartományra bukkantunk, mely különbözik a *j*-től!

[9] A Poincaré-térképen a kaotikus tartomány és a kváziperiodikus pályák együttese által elfoglalt területnek határozott alsó és felső pereme jelenik meg. Az ezen kívülre eső üres területhez nem tartozik semmilyen mozgás, hiszen a rögzített energia miatt $|\omega_n|$ nem nőhet minden határon túl.



13. ábra. A *12. ábra j* kaotikus tartományához tartozó pálya.

Tanulságok

Negyven évvel ezelőtt Vermes Miklós véletlenszerűen kiválasztotta a rugós inga hét különböző indítási feltételét, majd számítógép segítségével, a mozgás első néhány másodpercében pontról pontra követte a mozgó test pályáját. Nem tudhatott semmit arról, hogy ezek igazából milyen mozgások. Megválaszolandó kérdésként a probléma fel sem merült. Valószínűleg a „szabálytalan” jelzővel illette volna őket, ha valaki kérte volna erre. Kiválasztottuk a cikkében közölt hétből a két utolsót, s kicsit tüzetesebben megvizsgáltuk őket. Kiderült: az egyik kaotikus, a másik kváziperiodikus. Hogy éppen ezek lettek, az a vakszerencsén múlt, hiszen – mint láttuk – ugyanezen paraméterek és energia mellett, de más kezdőfeltételekkel akár mind a kettő lehetett volna kaotikus, kváziperiodikus, vagy (határesetben) egyszerű periodikus (természetesen ez igaz a Vermes által vizsgált másik öt mozgásra is). Bár az eredeti versenyfeladatnak megfelelő (vízszintes és nyújtatlan rugóval elengedett test) mozgásoknál háromból három volt kváziperiodikus, de ugyanezen rugóra például 0,08 kg tömeget akasztva a mozgás kaotikus lesz.

Vermes minderről még semmit sem tudhatott: a káoszelmélet első alapcikkei (Poincaré után, akinek munkáit inkább csak a matematikusok ismerték) az 1960-as években jelentek meg [6, 7].

Ma már tudjuk, hatékony vizsgálatukhoz leképezést kell alkalmaznunk, s a korábban másodpercekig követett mozgásokat órákig kell szimulálni, méghozzá Vermes módszerénél jóval pontosabban. Hogy a kaotikus rendszerek tulajdonságaiba mennyire nem nyújt betekintést a mozgásegyenlet puszta alakja, az abból is kiviláglik, hogy nemcsak egy Poincaré-metszet megalkotásához, hanem még a felfüggesztési pont alatti első(!) áthaladás kiszámításához is számítógép segítségét kell igénybe vennünk.

Hiába egyszerű tehát egy mechanikai rendszer. Ha a mozgásegyenletek nemlineárisak, gyakran kialakul a káosz. Ilyen esetben viszont a tulajdonságok színes tárházának felderítéséhez már nélkülözhetetlen a számítógép, mellyel a szó valódi értelmében „felfedezés” a feltáró munka…

Vermes Miklós 1967-es cikke az ebbe az irányba tett első lépés volt a magyar fizikában.

Irodalom

1. K. Luchner, R. Worg: *Kaotikus rezgések* – Fizikai Szemle *36* (1986) 372
2. Vermes M., Wiedemann L.: *A rugalmas fonalú ingáról* – Fizikai Szemle *16* (1966) 26
3. Vermes M.: *Rugalmas fonalú inga lengése* – Magyar Fizikai Folyóirat (1967) 397
4. W.H. Press et al.: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* – Cambridge University Press, Cambridge, 1992
5. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus Dinamika* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002; *Chaotic Dynamics* – Cambridge University Press, Cambridge, 2006
6. A.N. Kolmogorov: *General theory of dynamical systems in classical mechanics* – in: Proceedings of the 1954 International Congress of Mathematics (North Holland, Amsterdam, 1957)
7. E.N. Lorenz: *Deterministic nonperiodic flow* – J. Atmos. Sci. *20* (1963) 130

BESZÉLGETÉS A 75 ÉVES LOVAS ISTVÁNNAL

Ez év október elsején van *Lovas István*nak, az MTA rendes tagjának, a Debreceni Egyetem Természettudományi Kara emeritus professzorának 75. születésnapja. Ebből az alkalomból kérdezem egykori tanáromat, ma kollégámat és barátomat életútjáról.

– Hogyan indultál el a II. világháború utáni időkben Gyöngyöshalászról? Mi adta az indíttatást, hogy a fizikusi pályára lépj? Az ember azt gondolná, hogy környezeted inkább arra ösztökélhetett, hogy a gazdálkodást vagy valamilyen más, kétkezi mesterséget válassz.

– 1946-ig a gyöngyösi Koháry István Gimnáziumba jártam. A háború utolsó esztendeje meg a kamaszodás nem tettek jót tanulmányi eredményeimnek. A negyedik osztályban kapott bizonyítványban szereplő érdemjegyek meglehetősen egyformák voltak, többnyire elégségesek. Mehettem a következő osztályba. Pontosabban mehettem volna, ha Édesapám nem jut másfajta következtetésre: „Te már nyolc éve jársz iskolába. Ez az utolsó év nem sok örömet hozott. Én nem végeztem el több osztályt, csak egyet. Legyen neked elég nyolc. Választhatsz, vagy beadlak autószerelő inasnak, vagy veszünk még egy lovat, és azokkal jársz. Szekeret rakni már tudsz, és szántani is. Legjobb lesz, ha itthon maradsz!” Talán így is történt volna, ha véletlenül nem kerül a kezembe egy divatjamúlt tankönyv. Egy esős napon ezt kezdtem el lapozgatni. A könyv a reálgimnázium első négy osztályának matematikai ismereteit foglalta össze. Az olvasás nem esett nehezemre, mert ezeket a fejezeteket még a kamaszodás előtti években tanultuk, és akkor még nem volt semmi gond. A