

# EGY REMÉNYTELENNEK TŰNŐ VEZÉRLÉSI PROBLÉMA A KLASSZIKUS ÉS MODERN FIZIKA HATÁRÁN

Tél András, BME, Mechatronika alapszak, III. évfolyam  
Tél Tamás, ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék

A modern műszaki problémákban, így például a robotok tervezésekor gyakran lépnek fel irányítási, vezérlési feladatok. Ezek közül különösen érdekesek azok, amelyek során egy eredendően instabil állapotba kell eljuttatni a rendszert. Az alábbiakban bemutatunk egy első látásra reménytelennek tűnő mechanikai feladatot, amelynek megoldásához a modern fizika mára már klasszikussá vált eredményei adnak segítséget.

## A vezérlési feladat

Tekintsünk egy egyenes mentén harmonikus rezgőmozgást végző  $m$  tömegű testet, amelynek rugóállandója egy *előírt*  $D(t)$  függvény szerint változik időben. Az  $x(t)$  kitérés-idő függvényt meghatározó mozgásegyenlet [1]

$$m\ddot{x}(t) = -D(t)x(t), \quad (1)$$

ahol a pont az idő szerinti deriválást jelöli. Az ennek az egyenletnek eleget tevő rendszer manapság érzékelők (szenzorok) és beavatkozó egységek (aktuátorok) segítségével könnyen megépíthető, bármilyen is a  $D(t)$  függvény. A rugóra ható erő most tehát nem

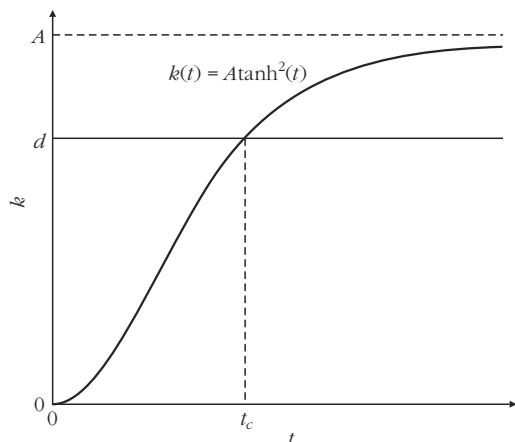
csak a kitéréstől függ, hanem az időfüggő rugóállandó pillanatnyi értékétől is.<sup>1</sup> Az (1) egyenlet jobb oldala expliciten is függ az időtől, a differenciálegyenlet *nem autonóm*, vagyis a mozgás folytatását nem csak a test pillanatnyi helyzete és sebessége határozza meg, hanem egy külső hatás is. Az egyenlet olyan típusú, mint a gerjesztett rezgéseket leíró egyenletek [1], csak az időfüggés nem egy külső erőben, hanem a rugóállandóban jelenik meg. A mechanikai összenergia a súrlódás hiányában sem állandó, hiszen a rugóállandó időbeli változása miatt a rendszer energiát nyerhet vagy veszíthet.

Tegyük föl ráadásul, hogy a rugóállandó időben monoton módon csökken, egy idő után *előjelet vált*, s attól kezdve végig negatív marad. Az egyszerűség kedvéért egységnyi tömeget tekintve, s alkalmasan megválasztott időegységet használva, ezt kifejezhetjük úgy is, hogy a mozgásegyenletet az

$$\ddot{x}(t) = -[d - k(t)]x(t) \quad (2)$$

alakba írjuk. Itt  $d > 0$  a nulla pillanathoz tartozó kezdeti rugóállandó, és  $k(t)$  az időbeli változást leíró

<sup>1</sup> A rugóállandó szóhasználat annyiban jogos, hogy  $D(t)$  továbbra is független a kitéréstől.



1. ábra. A konkrét példaként választott  $k(t)$  rugófüggvény alakja. A kritikus  $t_c = \tanh^{-1}(d/A)^{1/2}$  értéknél a rugófüggvény értéke megegyezik a kezdeti rugóállandóval, az eredő rugóállandó itt zérus, ennél nagyobb időkre negatív. A rugó tehát  $t > t_c$ -re taszítóvá válik.

rugófüggvény, amely nulláról indul és monoton módon tart a  $d$ -nél nagyobb  $A$  értékhez. Konkrétan válasszuk a  $k(t)$  rugófüggvényt

$$k(t) = A \tanh^2 t = A \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} \quad (3)$$

alakúnak, amely egy egyszerű, folytonos átváltást ír le 0 és  $A > d$  között. A rugófüggvény alakját és a  $d$  kezdeti értékhez való viszonyát az 1. ábra mutatja.

A (2) egyenlethez tartozó vezérlési probléma<sup>2</sup> a következő: *véges kezdeti kitéréssel indítva, adott  $A$  mellett, elérhető-e  $d$  alkalmas megválasztásával, hogy a test hosszu idő után megálljon?*

Mivel a kezdeti rugóállandó az  $A$  nagyságú intervallumban változhat, ezt az intervallumot az operációs tartománynak nevezzük. Egy vezérlési feladat során az  $A$  értéket rögzítjük. A megoldás azért tűnik első ránézésre reménytelennek, mert az eredő rugóállandó egy idő után ( $t > t_c$ -re) negatív, a rugó taszító, s a taszító rugók általános tulajdonsága, hogy egyre távolabbra juttatják a testet, amely formálisan azonban kifut a végtelenbe. A vezérlés lehetőségében tehát mégis reménykedhetünk, ha egy *speciális* feltétel teljesül. Ha a  $t_c$  pillanatban a test nem távolodik az origótól, hanem *közeledik* hozzá, méghozzá elegendően nagy sebességgel, akkor előfordulhat, hogy tehetetlensége miatt ezt a közeledést megtartja, s ámbár az eredő rugóállandó abszolútértéke nő, az eredő erő nagysága,

$$|k(t) - d| |x(t)|$$

csökkenhet, ha  $|x(t)|$  elegendően kicsi és megfelelő ütemben csökken. Így tehát egészen kivételes esetekben, bizonyos  $d$  értékek mellett, lehetséges az, hogy a test hosszu idő után az origóhoz tartson, megálljon.

<sup>2</sup> A vezérlés olyan beavatkozási forma, amelyben a betáplált adat után a rendszernek – szemben a szabályozással – nincs visszahatása önmagára.

## Numerikus eredmények

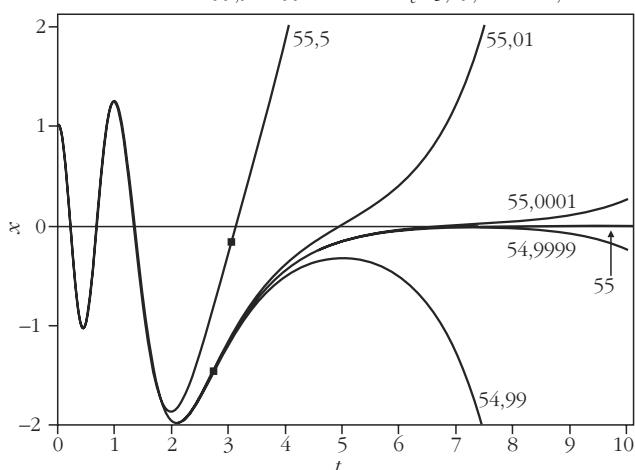
A speciális  $d$  értékek megtalálásához általában csak numerikus módszerekkel juthatunk. Rögzítettük ezért először a kezdőfeltételt oly módon, hogy a mozgás mindig egységnyi kitéréssel indul, kezdősebesség nélkül:

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ \dot{x}(0) &= v(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Az, hogy a kezdeti kitérés egységnyi, nem jelent megszorítást, mert a hosszegység szabadon választható (más szóval, azt a távolságot tekintjük hosszegységnek, amelyből a test indul). A vezérlés ezek után egyetlen mennyiség, a  $d$  kezdeti rugóállandó megválasztásával végezhető el. A mozgás numerikus integrálásához a Newton-egyenlet szimulálására jól bevált negyedrendű Runge–Kutta-módszert [2] választottuk, rögzített  $h$  lépésközzel. A negyedrendű jelző arra utal, hogy egy iterációs lépés  $h^4$  értékig pontos (a hiba nagyságrendje  $h^5$ ). Ez elegendő pontosságot biztosít, viszonylag rövid futási idővel, a  $h = 0,01$  választással. Mivel nagyobb  $d$  értékek mellett a kritikus  $t_c$  idő nagyobb, a test hosszabb ideig rezeg, érdemes az  $A$ -hoz közeli  $d$  értékek vizsgálatával kezdeni.

Az  $A = 56$ ,  $55 < d < 56$  választás mellett a kritikus pillanathoz körülbelül másfél rezgés után érünk el (a frekvencia közben lassan csökken, hiszen a  $[d - k(t)]$  rugóállandó is csökken). Ekkor  $d < 55,5$ -re, a kitérés negatív, a sebesség pozitív, de annyira nagy, hogy a test a negatív rugóerő ellenére jelentős sebességgel halad át az origón, s attól kezdve gyorsulva fut a végtelenbe (2. ábra). A  $d = 55$  érték felé közeledve ez a kifutás egyre lassul.  $d = 55,0001$  mellett az  $x(t)$  függvény már közelít a  $t$ -tengelyhez, de kis szög alatt átmetszi. A  $d = 55$  értékre a görbe numerikus pontossággal belesimul a  $t$ -tengelybe, amint a 2. ábrán is láthatjuk. Ekkor tehát sikeres a vezérlés! Az, hogy az

2. ábra. A numerikusan meghatározott kitérés-idő függvény különböző  $d$  kezdeti rugóállandókkal. Az egyes görbék mellett a hozzájuk tartozó  $d$  értéket tüntettük fel. A  $d = 55$  értéknél megvalósul a vezérlés: a test megáll az origóban. A kis fekete négyzetek a  $t_c$  pillanatokat jelölik, amelyek egyben az  $x(t)$  görbe inflexiós pontjai, hiszen itt  $\ddot{x} = 0$ . A  $d = 55,5$  és  $55$  értékekre  $t_c = 3,05$ , illetve  $2,70$ .



ilyen  $d$  értékek mennyire kivételesek, jól látszik abból is, hogy  $d = 54,9999$  és  $d = 54,99$ -ra a kitérés a negatív végtelenbe tart. A  $t_c$  értéknél fellépő sebesség ekkor már nem elég ahhoz, hogy a test a negatív irányból eljusson az origóig, s miután azt megközelítve visszafordul, a taszító rugó egyre messzebbre távolítja.

### Az instabil állapot vizsgálata, a fázistér

Ez a tapasztalat jól mutatja, hogy az origó erősen *instabil állapot*. Vizsgálatára érdemes használni a *dinamikai rendszerek* módszertanából ismert eszközöket [3]. Tekintsük először is a (2) mozgásegyenlet hosszú idő elteltével érvényes alakját. Mivel  $t \rightarrow \infty$ -re  $k(t)$  az  $A$  konstans értékhez tart, az egyenlet jobb oldalán  $(A-d)x$  áll. Mivel  $A > d$ , a zárójel pozitív, érdemes ezt  $s^2$ -ként jelölni:

$$s = \sqrt{A-d}. \quad (5)$$

Az  $s$  mennyiség a taszítási paraméter. A mozgásegyenletet ezzel a rövidített jelöléssel

$$\ddot{x} = s^2 x \quad (6)$$

alakú, és egy időben konstans állandójú taszító rugó hatását írja le. Hosszú idő elteltével a kitérés általában nagy. A sikeres vezérléshez közeli esetekben azonban a (6) egyenlet érvényes  $|x| \ll 1$  esetén is. Tegyük fel, hogy ilyen esettel van dolgunk, s indítsuk újra az időszámítást akkor, amikor a test már egy kis  $x_0$  koordinátájú és kis  $v_0$  sebességű állapotba került. Célunk ezzel annak megértése, hogy milyen a mozgás az origó környékén.

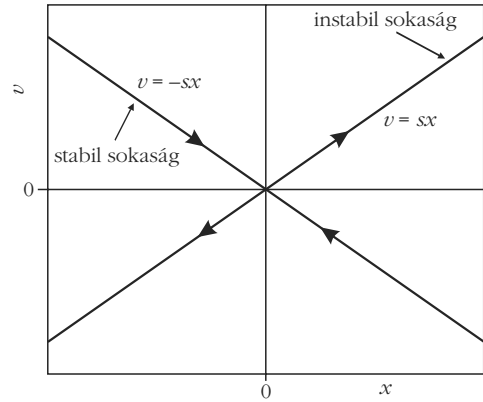
Vegyük észre, hogy a (6) egyenlet autonóm, ráadásul (éppen ezért) megoldható analitikusan. Mint minden lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletnek, megoldása kereshető exponenciális alakban. Az  $x = \exp(\lambda t)$  feltevéssel a  $\lambda = \pm s$  megszorításra jutunk, vagyis a  $\lambda$  kitevő csak a taszítási paraméter,  $s$ , vagy annak ellentettje,  $-s$  lehet. Az általános megoldás ezen alapg megoldások lineáris kombinációja. Könnyen ellenőrizhető, hogy a (6) egyenlet  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$  kezdőfeltételt kielégítő megoldása

$$x(t) = \frac{s x_0 + v_0}{2s} e^{st} + \frac{s x_0 - v_0}{2s} e^{-st} \quad (7)$$

alakú. A megoldás tehát két exponenciális összege, amelyek közül egy idő után a pozitív kitevőjű,  $\exp(st)$  tag válik dominánssá. Ez írja le a végtelenhez tartást. Mindez azonban csak akkor igaz, ha az  $s x_0 + v_0$  együttható nem nulla. Bizonyos kezdőfeltételekre azonban fennállhat, hogy  $s x_0 + v_0 = 0$ , s ekkor

$$x(t) = x_0 e^{-st}. \quad (8)$$

Ilyenkor tehát a test *egyre csökkenő sebességgel az origóhoz tart*. Ennek az esetnek kell tehát megvalósulnia sikeres vezérlés esetén.



3. ábra. Az origó (nyeregpont) és környezete a fázistérben, a jellegzetes keresztalakzat. A mozgás a vonalakon a nyilakkal jelölt irányba történik. Az origóba bejutni csak a stabil sokaság mentén lehet.

Az origó körüli viselkedésről áttekintő képet a *fázistérben* kaphatunk, ahol a  $v = \dot{x}$  sebességet ábrázoljuk az  $x$  kitérés függvényében. Fenti eredményünk azt mutatja, hogy a

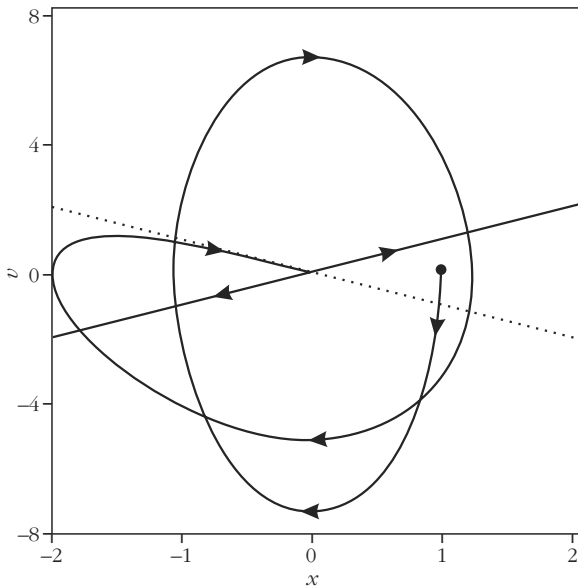
$$v = -s x \quad (9)$$

egyenes mentén elhelyezkedő pontok éppen eljutnak az origóba, ha  $|x| \ll 1$ . Vagyis, ha jól meghatározott sebességgel lökjük az instabil állapot felé a testet, akkor az megáll. A nulla sebesség elérése elvileg végtelen hosszú ideig tart, de gyakorlatilag az  $1/s$  idő néhányszorosa után a test már nagyon jó közelítéssel megközelíti a nyugalmi állapotot. Az egyenesen kívüli kezdőfeltételek mind a végtelenbe vezetnek. A  $v = s x$  egyenes mentén levő pontoknak megvan az a sajátos tulajdonsága, hogy esetükben  $s x_0 - v_0 = 0$ , és ők egyetlen exponenciálisan növekvő függvény szerint távolodnak,  $x(t) = x_0 e^{st}$ .

A fázistér  $v = -s x$  egyenese a fentiek szerint azt a speciális mozgást írja le, amely az origóba történő eljutásnak felel meg. Ezt a görbét ezért az origó stabil görbéjének, a dinamikai rendszerek szóhasználatával *stabil sokaságának* [3] hívjuk. A  $v = s x$  egyenes, amelynek mentén az eltávolodás a leggyorsabb, az origó instabil sokasága. A 3. ábrán is látható, hogy a fázissíkot a stabil és instabil sokaságok négy síknyegyedre osztják.

Általában is igaz [3], hogy a mechanikában előforduló minden autonóm rendszer instabil állapota ilyen típusú. A keresztalakzat megjelenése azt fejezi ki, hogy az instabilitás sohasem tökéletes. A fázistér egy elhanyagolhatóan csekély mértékű tartományából (a teljes sík egy vonalából) mindig el lehet jutni az instabil állapotba. (A hegyére állított ceruza állapotát instabilnak mondjuk, pedig kezdeti kitérés esetén ott is találhatunk egy megfelelő kezdősebességet, amellyel meglökve az éppen megáll a függőleges helyzetben.) Az instabil állapotok tehát mindig nyeregpontok a fázistérben, olyan pontok, amelyekhez tartozik stabil és instabil sokaság.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> A stabil sokaságra szorítkozva az origó stabilnak mutatkozik, a teljes fázissíkon azonban instabil.



4. ábra. A  $d = 50$  és a  $d = 50 \pm 10^{-4}$  értékekhez tartozó megoldások képe a fázistérben. Ezek jó közelítéssel kirajzolják az origóba tartó stabil sokaságot, de mivel  $d = 50 + 10^{-4}$  mellett a megoldás hosszú idő után a pozitív,  $d = 50 - 10^{-4}$ -re viszont a negatív végtelenbe tart, az instabil sokaság egy darabja is jól láthatóvá válik. Pontozott vonallal berajzoltuk a  $v = \pm sx$  egyeneseket is, amelyek a sokaságok origó körül érvényes alakjait adják meg. A  $v = sx$  instabil ágától a numerikus megoldás nem különböztethető meg, hiszen hosszú idő után a (6) egyenlet nagy  $x$ -ekre is érvényes. A  $v = -sx$  görbe viszont valóban csak az origó környékén érinti a szimulálással kapott stabil sokaságot.

Számunkra a stabil sokaság bír különös jelentőséggel, hiszen a vezérlés csak ezen görbe mentén lehet sikeres. Örülhetünk annak, hogy alakját a (9) összefüggés szerint egzaktul ismerjük, de ez csak akkor igaz, ha a test már közel került az origóhoz. Mit mondhatunk az origótól távol eső pontok vezérlési esélyéről? A folytonosság miatt feltételezhetjük, hogy az origó stabil sokasága a teljes (2) egyenlet fázistérben is létezik. Ha tehát nem kötjük magunkat a  $t \gg 1$  feltételhez, az eredeti nem autonóm egyenlet fázistérben is találunk egy olyan görbét, amely hosszú idő után befut a (9) egyenesbe, s azon keresztül az origóba. Ezt a stabil sokaságot numerikusan kell megkeresni, s a kérdés az, hogy a (4) kezdőfeltétel adott  $d$  mellett ráesik-e az origó stabil sokaságára. Azon  $d$  értékek, amelyekre ez teljesül, a vezérlést biztosító  $d$  értékek. A 4. ábra mutatja, hogy  $d = 55$  esetén az (1,0) pont valóban rajta van az origóba vezető stabil sokaságon. Autonóm rendszerekben a stabil sokaság nem metszheti önmagát. Mivel azonban rendszerünk nem autonóm, több metszéspontot is megfigyelhetünk.

(Azt is mondhatjuk, hogy az igazi fázistér 3 dimenziós, amelyet  $x$ ,  $v$  és a rugóállandóban megjelenő idő feszít ki, s mi az igazi, önmagát nem metsző sokaságnak az  $(x, v)$  síkra vett vetületét látjuk.)

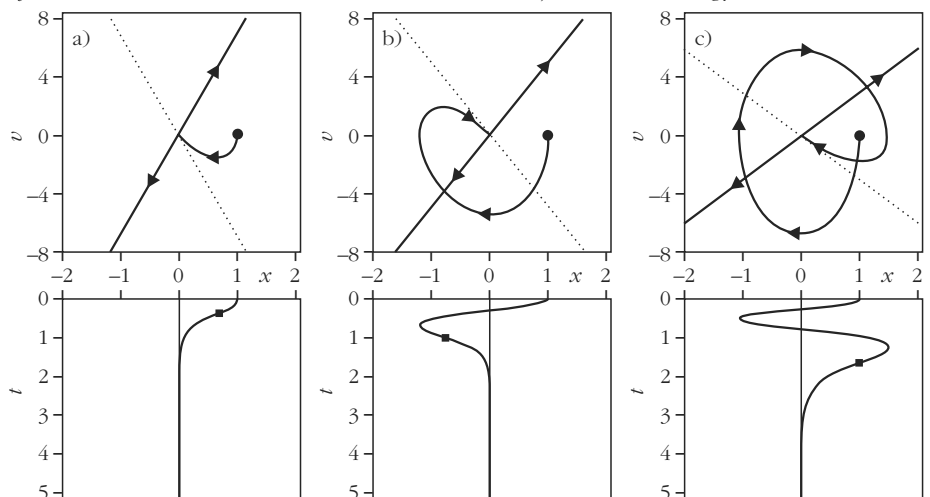
## A rugóállandó-spektrum

Vizsgáljuk ezek után, létezik-e még másik, vezérlésre alkalmas  $d$  érték  $A = 56$  mellett. Ezt numerikusan úgy tehetjük meg, hogy programot írunk, amely az összes  $d$  értéket megvizsgálja  $\Delta d = 0,01$  lépésként a  $0 < d < A$  operációs tartományban. Minden egyes  $d$ -hez numerikusan meghatározza az  $x(t)$  függvényt, s rögzíti annak értékét egy késő időpontban (például  $t = 30$ -ban). A program, amely a LabView grafikus programnyelven íródott [4], újabb és újabb  $d$  értékeket vesz mindaddig, amíg azt nem érzékeli, hogy a későbbi időpontban felvett  $x$  érték előjele különbözik az előző  $d$ -hez tartozó előjelétől. Ekkor megáll és kiírja az utolsó  $d$  értéket, amelynek környékén léteznie kell egy vezérlést megvalósító értéknek, hiszen itt simul hozzá az  $x(t)$  függvény a  $t$ -tengelyhez (vagyis ugyanaz zajlik le, mint a 2. ábrán, csak más  $d$ -re).

Ezzel a módszerrel összesen még három vezérlésre alkalmas  $d$  értéket találunk, amelyek 7, 31, és 47. A kitérés-idő függvény ezekre rendre negyed, háromnegyed és ötnegyed rezgés után tart az origóba. A fázistérbeli képen ennek megfelelően az origó elérése előtti rajzolat egyre bonyolultabb, és egyre több metszéspont figyelhető meg (5. ábra). Vegyük észre, hogy az alacsonyabb  $d$  értékekre az origó egyre instabilabb, az (5) tasztási paraméterre rendre a 7, 5 és 3 értékeket kapjuk. Ennek megfelelően a nyeregpontra jellemző keresztalakzat egyre meredekebb a fázissíkon.

Az  $A = 56$  paraméter esetén tehát összesen négy vezérlést biztosító kezdeti rugóállandó értéket találunk a (4) kezdőfeltétellel. Az ilyen típusú feladatok a

5. ábra. A  $d = 7$  (a), 31 (b) és 47 (c) vezérlést biztosító értékekhez tartozó megoldások képe a fázistérben. Alattuk a megfelelő  $x(t)$  függvény látható. A két ábrázolás közötti kapcsolat bemutatására a kitérés-idő függvényt elforgattuk, hogy a két  $x$  tengely párhuzamos legyen. A kritikus idők rendre  $t_c = 0,37, 0,96$  és  $1,56$ . Pontozott vonallal a fázistérben berajzoltuk a  $v = \pm sx$  egyeneseket is.



1. táblázat

A rugóállandó-spektrum különböző $A$ -kra			
$A$	$\lambda$	$d_n$	$n_{\max}$
12	4	3, 11	1
30	6	5, 21, 29	2
56	8	7, 31, 47, 55	3

sajátérték-problémák körébe tartoznak: megoldások csak bizonyos diszkrét  $d_n = d_0, d_1, \dots, d_{n_{\max}}$  értékek mellett találhatók.

Az  $A$  paraméter más értékei mellett is ugyanezt a jelleget látjuk. A tapasztalat az, hogy  $A$  növelésével nő a sajátértékek száma. Az 1. táblázatban összefoglaljuk néhány jellegzetes  $A$  paraméter mellett a talált  $d_n$  sajátértékeket, a rugóállandó-spektrumokat.

A táblázatból több érdekes szabályosság olvasható ki. Adott  $A$  mellett az  $(n+1)$ -edik és az  $n$ -edik sajátérték különbsége például 8 egész számú többszöröse. Egyszerű összefüggésre jutunk, ha észrevesszük, hogy a vizsgált  $A$  értékek két egymás utáni egész szám szorzataként írhatók,

$$A = \lambda(\lambda - 1), \quad (10)$$

ahol  $\lambda > 1$ . Az adott  $\lambda$ -hoz tartozó első sajátérték mindig  $\lambda - 1$ , és  $d_{n+1} - d_n = 4\lambda - 8(n+1)$ . Ezek után könnyen felismerhető az általános szabály:

$$d_n = \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 2n - 1)^2, \quad (11)$$

amely  $n = 0$ -tól a maximális  $n_{\max} = [(\lambda-1)/2]$  értékig érvényes, ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. A  $d_n$  sajátértékhez tartozó (5) taszítási paraméter:  $s_n = \lambda - 2n - 1$ , amiből látszik, hogy minél kisebb  $n$ , annál instabilabb a probléma. Mivel minden pozitív szám írható a (10) alakban, érthető és numerikusan is ellenőrizhető, hogy a (11) rugóállandó-spektrum tetszőleges valós  $\lambda$ -ra is érvényes.

## Mi a kapcsolat a modern fizikával?

Térjünk most át egy másik kérdéskörre, a kvantummechanikai energiasajátérték-problémára (a figyelmes Olvasó bizonyára már amúgyis észrevette a két feladat hasonlóságát). Mint ismert, az egydimenziós, sima  $V(x)$  potenciálban mozgó  $m$  tömegű részecske  $E$  energiáját a

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = [E - V(x)]\psi(x) \quad (12)$$

stacionárius Schrödinger-egyenlet határozza meg [5–7], ahol  $\hbar$  a Planck-állandó és a vessző az  $x$  helykoordináta szerinti deriválást jelöli. A  $\psi(x)$  hullámfüggvénynek folytonosan differenciálhatónak kell lennie, és kötött állapotban nagy távolságokban nullához kell tartania. Ez az egyenlet mikroszkopikus részecs-

kékre vonatkozik, és időtől független. Hogyan vehető össze a (2) makroszkopikus vezérlési problémával, amely a klasszikus fizika Newton-egyenlete?

Az ilyen távoleső problémák közötti lehetséges kapcsolat felderítésében nélkülözhetetlen segítség az egyenletek dimenziótlanítása [3]. A módszer nagyon egyszerű, és sok más esetben (például egyenletek numerikus megoldásra alkalmas alakjának megtalálásában) is hasznos. Az alapgondolat az, hogy minden problémának megvan a saját jellegzetes hosszúság- vagy időskálája. A Schrödinger-egyenlet esetén ilyen jellegzetes skála lehet a potenciál jellemző mérete, például félszélessége. Tekintsük távolságegységnek ezt az  $a$  mikroszkopikus hosszat az SI-rendszer méter (vagy nanométer) egysége helyett. Ez formálisan azt jelenti, hogy elvégezzük az  $x \rightarrow ax$  transzformációt. Az új  $x$  változó a dimenziótlan helykoordináta, amely megadja, hogy a távolság hányszorosa a  $a$  hosszegységnek. A bonyolult jelölésváltás elkerülése érdekében jelöljük  $V(x)$ ,  $\psi(x)$ -szel a potenciál- és a hullámfüggvény dimenziótlan helykoordinátával kifejezett alakját is. Ha ennek szellemében vesszövel kívánjuk jelölni a dimenziótlan  $x$  szerinti deriváltat is, akkor figyelembe kell venni, hogy minden egyes eredeti  $x$  szerinti deriválás egy  $a$ -val való osztást hoz be. Mivel kétszeres deriválásról van szó, a dimenziótlan helyváltozóban érvényes Schrödinger-egyenlet

$$\frac{\hbar^2}{2ma^2}\Psi''(x) = -[E - V(x)]\Psi(x). \quad (13)$$

Most mindkét oldal energia mértékegységű. A bal oldalon álló  $E^* = \hbar^2/(2ma^2)$  konstans tekinthető a probléma jellegzetes energiaértékének. Ha a jobb oldalon levő energiát és potenciált ebben az  $E^*$  egységben mérjük, akkor helyettük az  $e = E/E^*$ ,  $v(x) = V(x)/E^*$  dimenziótlan energia- és dimenziótlan potenciálfüggvény jelenik meg, és a

$$\Psi''(x) = -[e - v(x)]\Psi(x) \quad (14)$$

egyenletre jutunk. Az atomi méretekre jellemző  $a = 10^{-10}$  m-rel,  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  kg elektrontömeggel és a  $\hbar = 10^{-34}$  Js Planck-állandóval számolva az energiaegység  $E^* = 5 \cdot 10^{-19}$  J  $\approx 3$  eV, ami valóban atomi kötésekre jellemző energiaérték. Az  $E$  összenergia ennek néhány-szorosa, így a dimenziótlan egyenlet már nem függ az eredeti skáláktól, nem maradt benne semmilyen mikroszkopikus paraméter.

Ezen a ponton felismerhetjük, hogy a (14) dimenziótlan Schrödinger-egyenlet a már eddig is vizsgált (2) egyenlethez hasonló, sőt alakjuk az  $x \leftrightarrow t$  csere után teljesen megegyezik!

Érdeemes megjegyezni, hogy a vezérlés dimenziós (1) egyenletét, amelyet a  $D(t) = D - K(t)$  felbontással az

$$m\ddot{x}(t) = -[D - K(t)]x(t) \quad (15)$$

alakban írhatunk, hasonló eljárással hozhatjuk a (2) alakra. A rugóállandó időbeli változásának nyilván

van egy jellegzetes ideje  $\tau$ , amely lehet például az az idő, amely alatt a rugóállandó értéke a felére csökken. Az időt  $\tau$  egységeiben mérve, a  $D^* = m/\tau^2$  rugóállandó-egységet kapjuk, amellyel (15)-ből (2)-re jutunk.<sup>4</sup>

A dimenziótlan egyenletek ekvivalenciájának felismerése után természetesen vizsgálnunk kell a kezdeti és peremfeltételeket is. A vezérlés feltételeként megkövetelt  $x(t \rightarrow \infty) = 0$  megkötés teljesen megfelel a hullámfüggvény normálhatóságával kapcsolatos  $\Psi(|x| \rightarrow \infty) = 0$  peremfeltételnek. A vezérlési probléma kezdőfeltételének kvantummechanikai megfeleltetése több figyelmet igényel. A Schrödinger-egyenlet a teljes  $V(x)$  potenciált vizsgálja, s nem szorítkozik annak csak a pozitív ( $x > 0$ ) koordinátákhoz tartozó felére. Páros potenciálfüggvények, azaz  $V(x) = V(-x)$  esetén, a szimmetria miatt tudjuk, hogy létezniük kell páros hullámfüggvényeknek, s ezek a függvények az origóban vízszintes érintőjűek. Ők, az  $x \leftrightarrow t$  csere értelmében pontosan megfelelnek a (4) mechanikai kezdőfeltételnek. A páros sajátfüggvényekhez a teljes  $e_n$  energiaspektrum páros  $n$  indexű értékei rendelhetőek. A páratlan indexű energiaértékek az origóban eltűnő pontszimmetrikus hullámfüggvényekhez tartoznak.<sup>5</sup> A két probléma közötti megfeleltetés tehát az, hogy ha azonos alakú a dimenziótlan  $k(t)$  és  $v(x)$  függvény, azaz, ha  $k(t) = v(x=t)$  és ha  $v(x)$  páros, akkor a dimenziótlan spektrumok megfelelnek egymásnak; a (4) kezdőfeltételhez tartozó vezérlési probléma dimenziótlan spektruma a

$$d_n = e_{2n} \quad (16)$$

szabály szerint kapható meg az  $e_n$  dimenziótlan kvantummechanikai spektrumból. A példaként használt (3) függvénycsalád a kvantummechanikában a

$$v(x) = \lambda(\lambda - 1) \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \right)$$

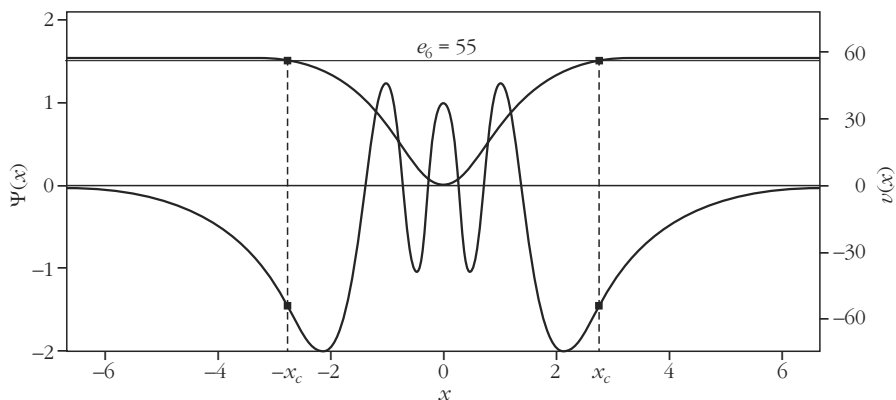
dimenziótlan potenciálnak felel meg, az úgynevezett Rosen–Morse-potenciálnak [7, 8].<sup>6</sup>

Még egyszerűbb példát kapunk a parabolikus  $k(t) = t^2$  rugófüggvény,  $v(x) = x^2$  dimenziótlan potenciál esetén, amely a  $V(x) = 1/2 m \omega^2 x^2$  harmonikus oszcillátor problémájának felel meg az  $E^* = \hbar \omega / 2$ ,  $a^2 = \hbar / (m \omega)$  egységválasztással. A rugóállandó-spektrum

<sup>4</sup> Makroszkopikus  $m = 1$  kg,  $\tau = 1$  s adatokkal  $D^* = 1$  kg/s<sup>2</sup> = 1 N/m.

<sup>5</sup> Ezeket az  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 1$  kezdőfeltétellel kaphatnánk meg a vezérlési problémában, de ezzel a kezdőfeltétel-családdal a terjedelmi korlátok miatt nem foglalkozunk.

<sup>6</sup> Ennek dimenziótlan energiaspektruma egzaktul ismert az  $e_n = \lambda(\lambda-1) - (\lambda-n-1)^2$  alakban,  $0 \leq n \leq (\lambda-1)$ .



6. ábra. A 2. ábra  $d = 55$  értékhez tartozó  $x(t)$  függvénye páros kiterjesztésével kapott  $\Psi(x)$  függvény. Ez a  $v(x) = 56 \tanh^2 x$  potenciálhoz (felső görbe) tartozó Schrödinger-egyenlet hetedik sajátfüggvénye ( $n = 6$ ), amely az  $e_6 = d_3 = 55$  sajátértékhez tartozik. Az  $x_c = t_c$  kritikus távolságot is feltüntettük. Ez a klasszikus fordulópont, amelyen túl a hullámfüggvény már sohasem hullámzik.

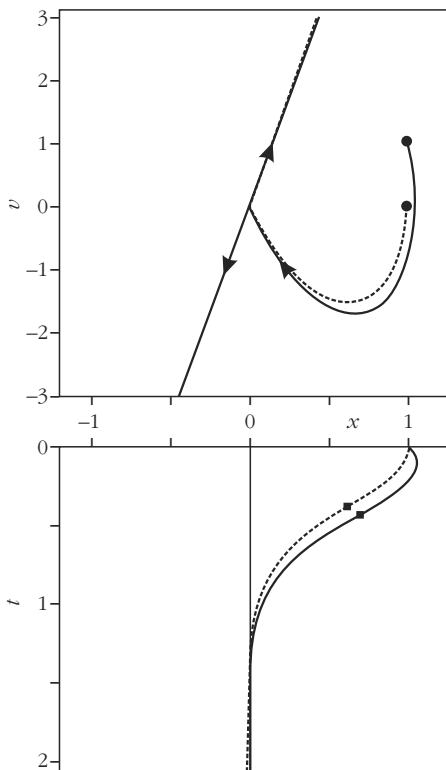
2. táblázat A vezérlési és a kvantummechanikai feladat megfeleltetése	
Newton-egyenlet	Schrödinger-egyenlet
karakterisztikus idő $\tau$	karakterisztikus távolság $a$
kitérés függvény $x(t)$	hullámfüggvény $\Psi(x)$
rugófüggvény $K(t)$	potenciálfüggvény $V(x)$
dimenziótlan idő $t$	dimenziótlan távolság $x$
rugóállandó egység $D^*$	energiaegység $E^*$
az operációs intervallum hossza $A$	a $v(x)$ potenciálgödör mélysége $A$
rugóállandó-spektrum $d_n = D_n/D^*$	energiaspektrum $e_n = E_n/E^*$
sikeres vezérlés	sajátállapot megtalálása

az ismert [5, 6] lineáris  $E_n = \hbar \omega(n+1/2)$ ,  $e_n = 2n+1$  spektrumból következően  $d_n = 4n+1$  alakú.<sup>7</sup>

Sajnos, az egzaktul megoldható kvantummechanikai problémák száma csekély [6, 7], ezért csak nagyon ritkán számíthatunk arra, hogy a  $d_n$  spektrum kifejezhető egyszerű képlettel. A vázolt numerikus eljárás azonban mindig célhoz vezet.

Feltehető az a kérdés is, hogy milyen kvantummechanikai feladatot oldunk meg a  $k(t)$  függvény megválasztásával. Mivel az idő pozitív, a potenciálnak pedig negatív  $x$  koordinátákra is értelmezettnek kell lennie, azt mondhatjuk, hogy  $v(x) = k(t=x)$ , negatív  $x$ -ekre pedig  $v(x) = v(-x)$ . Vagyis, a (4) kezdőfeltételnek eleget tevő vezérlési feladat a  $k(t)$ -nak megfelelő potenciál páros kiterjesztését tartalmazó energiasajátérték-problémájának felel meg, és abban is a páros sajátértékeket adja meg  $d_n$ . Így a  $d_n$ -hez tartozó vezérelt  $x(t)$  kitérés-idő függvény páros kiterjesztése a  $t \rightarrow x$  helyettesítés után a  $v(x)$  potenciál  $2n$ -edik sajátállapotához tartozó hullámfüggvényt adja meg (6. ábra).

<sup>7</sup> Ha  $k(t) = \lambda^2 t^2$ ,  $v(x) = \lambda^2 x^2$ , ahol  $\lambda > 0$  tetszőleges szám, akkor az  $E^* = \hbar \omega / (2\lambda)$ ,  $a^2 = \hbar \lambda / (m \omega)$  választással az  $e_n = (2n+1)\lambda$  dimenziótlan spektrumra jutunk, amelyből  $d_n = (4n+1)\lambda$ . Ugyanez következik (11)-ből is a nagy  $\lambda$  határesetben, véges  $n$ -ekre. Ennek oka az, hogy a (3) rugófüggvény parabolikusan indul:  $k(t) = \lambda(\lambda-1)t^2$ , és nagy  $\lambda$ -ra  $\lambda(\lambda-1) \approx \lambda^2$ .



7. ábra. Sikeres vezérlés  $v_0 = 1$  kezdőfeltétel mellett a  $d_0 = 9,526$  paraméterrel. A fázistérbeli kép alatt a kitérés-idő függvény látható. Szaggatott vonallal a  $v_0 = 0$ ,  $d_0 = 7$  eset görbéit is berajzoltuk az összehasonlíthatóság érdekében, s kisebb tartományban, mint az 5.a ábrán.

A  $t_c$  kritikus idő megfelelője az  $x_c$  kritikus távolság. Ez az a helykoordináta, ahol az összenergia megegyezik a potenciális energiával, vagyis, ahol a klasszikus fizika törvényeinek eleget tevő részecske visszafordulna. Az, hogy a kvantummechanikai feladatban a részecske véges valószínűséggel lehet az  $x_c$ -nél nagyobb távolságban is, az *alagúteffektus* jelensége. Éppen ez az a tartomány, ahol a vezérlési feladatban a rugóállandó negatív! A vezérlési és a kvantummechanikai probléma megfeleltetésének legfontosabb gondolatait foglalja össze a 2. táblázat.

## A vezérlési feladat általánosabb, mint a kvantummechanikai feladat

Vizsgáljuk most meg, hogyan alakul a vezérlési feladat, ha az  $x(0) = 1$  helyzetből nullától eltérő  $v_0 \neq 0$  kezdősebességgel indítjuk a testet. A  $v_0 = 1$  értékkel  $A = 56$ -ra a numerikus megoldást követve azt tapasztaljuk, hogy  $d = 7$  körül nem sikeres a vezérlés, de  $d = 9,526$ -ra sikeressé válik. Ez szemléletesen is érthető, hiszen, ha a test kezdetben határozottan távolodik az origótól, akkor a kritikus idő (amely független  $v_0$ -tól) eltelte után még viszonylag messze van az origótól, így a taszító erő  $d = 7$  körül még kivetí a pozitív végtelenbe. Az origó pozitív irányból való lassú elérése csak valamelyik nagyobb  $d$  értéknél válik lehetővé. A 7. ábrán a kitérés-idő függvényen kívül a fázistérbeli rajzolatot is láthatjuk, amely topológiailag azonos a  $d = 7$ ,  $v_0 = 0$

3. táblázat

**Kezdősebesség-függő rugóállandó sajátértékek**  
 **$A = 56$ -ra ( $\lambda = 8$ )**

$v_0$	$d_n(v_0)$
2	11,389; 33,063; 48,035; 55,305
1	9,526; 32,087; 47,539; 55,163
0	7,000; 31,000; 47,000; 55,000
-1	3,575; 29,851; 46,438; 54,823
-2	-, 28,708; 45,877; 54,637

értékhez tartozóval (5.a ábra). Az  $(1, v_0)$  kezdőpont természetesen rajta van az origó stabil sokaságán, ha  $d = 9,526$ .

Ez a megfigyelés azt sugallja, hogy minden egyes  $v_0$  dimenziótlan sebességhez tartozhat egy  $d_n(v_0)$  rugóállandó-spektrum. A numerikus tapasztalat ezt alátámasztja, amint azt a 3. táblázat néhány esetre bemutatja.

Az a szabály olvasható le, hogy pozitív kezdősebességek az eredeti sajátértékeket növelik, a negatívak csökkentik. Különösen érdekes a  $v_0 = -2$  eset, amikor nem találunk sajátértéket a  $0 < d < 7$  tartományban. A kezdősebesség ekkor olyan nagy negatív szám már, hogy a pozitív értékek felől oszcillálás nélkül az origóba tartó megoldás már nem is létezhet. Nagyobb  $n$ -ekre a kezdősebesség hatása egyre kisebb, a függvények egyre később csengenek le, és rájuk a kezdeti meredekség-változás kisebb hatással van.

A vezérlési és a kvantummechanikai probléma fenti összehasonlítása alapján felmerül a kérdés: mondhatjuk ezek után, hogy a  $v_0 \neq 0$  esetekkel a  $v(x) = k(t=x)$  potenciál újabb kvantummechanikai sajátértékeket fedeztünk fel? Semmiképpen sem! A vezérlés véges meredekséggel induló  $x(t)$  függvényének  $x$  tengelyre vett tükrözésével kapott páros kiterjesztése ugyanis *megettórik* az origóban. Ez *nem* feleltethető meg kvantummechanikai hullámfüggvények, hiszen  $\psi$ -nek differenciálhatónak kell lennie (különben például nem lenne egyértelműen értelmezhető rá az impulzusoperátor: a deriválási operátor hatása). A levonható konklúzió az, hogy a vezérlési probléma bővebb, mint a kvantummechanikai,<sup>8</sup> mert több megoldása létezik, mint a kvantummechanikainak, hiszen minden  $v_0$  értékhez (nem csak  $v_0 = 0$ -hoz) tartozhat egy rugóállandó-spektrum. Ennek oka, hogy a klasszikus  $x(t)$  függvényre kevesebb megszorítás létezik, mint a hullámfüggvényre. Ugyanakkor azonban a vezérlési probléma minden egyes  $v_0$ -nál ugyanolyan (akár analitikus) módszerekkel oldandó meg, mint a Schrödinger-egyenlet.

Annak más oldalról történő megvilágítására, hogy a kvantummechanikai probléma megoldása bonyolultabb, több megkötésnek tesz eleget, mint a mechanikai, érdemes röviden kitérni az általános, azaz nem

<sup>8</sup> Hacsak nem tételezzük fel az origóban még egy  $v_0$ -val arányos Dirac-delta potenciált is. Az azonban, hogy az amúgyis mikroszkopikus eredeti problémában egy még sokkal kisebb hatótávolságú kölcsönhatást is beépítsünk, nehezen motiválható.

páros, egyetlen minimumú  $v(x)$  potenciál esetére. Válasszuk az origót a potenciál minimumának. A pozitív és a negatív  $x$  értékekhez tartozó potenciálból pozitív időkre két különböző rugófüggvény definiálható  $k_1(t) = v(t=x>0)$  és  $k_2(t) = v(t=-x>0)$ . Mivel a hullámfüggvénynek mind a pozitív, mind a negatív végtelenben el kell tűnnie, a megfelelő vezérlési feladatban *két* különböző differenciálegyenletet kell megoldanunk, mindkettőt pozitív időkre, s ugyanazzal a  $d$ -vel:

$$\ddot{x}_i(t) = -[d - k_i(t)]x_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

A kezdőfeltétel az, hogy az 1-es esetben  $x_1(0) = 1$ ,  $v_1(0) = v_0$ , a másik esetben viszont  $x_2(0) = 1$ ,  $v_2(0) = -v_0$ , ugyanis az  $x_2$  megoldás  $x$ -tengelyre való tükrözésével kapott teljes megoldás:  $\psi(x>0) = x_1(t=x)$ ,  $\psi(x<0) = x_2(t=-x)$  csak így lehet folytonosan deriválható az origóban. Az energiaspektrum megtalálása azt jelenti, hogy minden egyes véges  $v_0$  és  $d$  mellett végig kell próbálnunk, hogy vezérelhető-e *mindkét feladat egyszerre*.

## Összefoglalás

Megmutattuk, hogy létezik egy időfüggő vezérlési feladat, amely szoros hasonlóságot mutat az egydimenziós kvantummechanikai energiasajátérték-problémával, amennyiben a helykoordinátában páros potenciálokat vizsgálunk. Még ekkor is, a vezérlési feladatnak jóval több diszkrét megoldása létezik, mint a

kvantummechanikainak, mert a vezérelt részecskének lehet kezdősebessége is. A sikeres vezérlés mindig egy instabil pont (az origó) elérését jelenti, ami csakis a stabil sokaság mentén lehetséges. A vezérlés feltétele tehát úgy fogalmazható meg, hogy a kezdőfeltétel essen rá az origó stabil sokaságára. A dinamikai rendszerek szemlélete új megvilágításba helyezi a klasszikus kvantummechanikai energiasajátérték-problémát is.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönjük *Varga Balázs* tanár úrnak (Eötvös József Gimnázium, Budapest), hogy olyan modern fizikai órákat tartott, amelyek alapján a 11-edikes diákban felmerült a kérdés: mi lehet a Schrödinger-egyenlet időbeli megfelelője. Ez vezetett el a bemutatott gondolatmenethez.

## Irodalom

1. Nagy Károly: *Elméleti Mechanika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
2. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2002.
3. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
4. <http://ni.com/labview>
5. Marx György: *Kvantummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
6. F. Constantinescu, E. Magyari: *Kvantummechanika Feladatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
7. L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Kvantummechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
8. N. Rosen, P. M. Morse, *Phys. Rev.* 15 (1932) 210.