

KVANTÁLT VEZÉRLÉSI PROBLÉMÁK – II. RÉSZ

Megállítható-e fordított helyzetében a mozgatott felfüggesztésű inga?

Tél András, BME, I. éves mechatronika MSc hallgató

Czmerk András, BME Mechatronikai, Optikai és Gépészeti Informatikai Tanszék

Tél Tamás, ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

A vízszintes gyorsított fordított inga

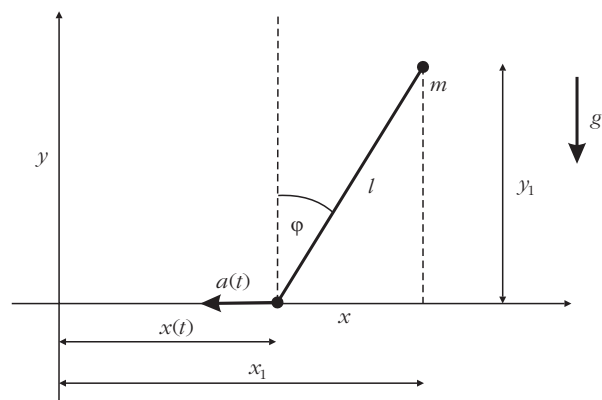
Jelölje ismét φ az inga pozitív y tengellyel bezárt szögét (8. ábra).

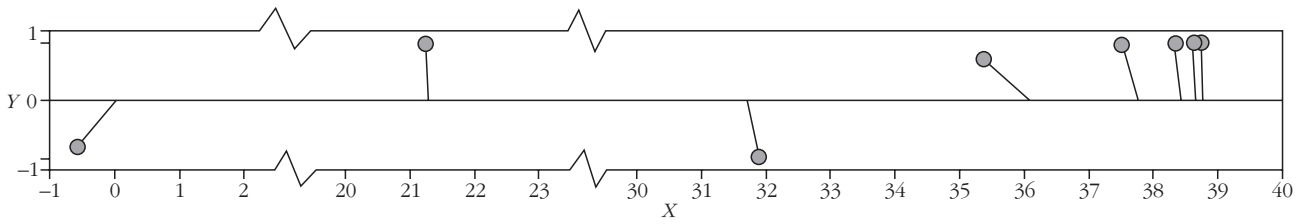
Az együttmozgó koordinátarendszerben $-a(t)$ tehetlenségi gyorsulás lép fel a vízszintes irányban. Ennek a rúdra merőleges komponense $-a(t)\cos\varphi$, a teljes tangenciális gyorsulás tehát $g\sin\varphi - a(t)\cos\varphi$. Így a mozgásegyenlet

$$\ddot{\varphi} = \frac{-a(t)}{l} \cos\varphi + \frac{g}{l} \sin\varphi. \quad (19)$$

A (19) abban a lényeges vonásban különbözik a függőlegesen gyorsuló inga (7) egyenletétől, hogy az előírt $a(t)$ gyorsulás most $\cos\varphi$ -vel szorzódik, a szög

8. ábra. A vízszintesen gyorsított fordított inga koordinátáinak értelmezése.





9. ábra. A vízszintesen gyorsított inga mozgásának fázisai a $t = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3$ és $3,5$ pillanatokban, $A = 56$, $\varphi_0 = -2,5$, $\dot{\varphi} = 0$, $d = d_0$ esetén. $x_{\max} = 38,8$.

más szögfüggvényével, mint g . Ez az oka annak, hogy most nem található közvetlen kapcsolat a Schrödinger-egyenlettel. Látni fogjuk, hogy ennek ellenére kvantált viselkedést tapasztalhatunk, noha a vezérlési spektrum egészen más jellegű lesz.

A τ szerinti dimenziótlantítás után a (10) paramétere-k jelennek meg, s a mozgásegyenlet a

$$\ddot{\varphi} = -A(\text{th}^2 t - 1) \cos \varphi + (A - d) \sin \varphi \quad (20)$$

alakot ölti. A d_n kvantált érték megtalálása esetén az

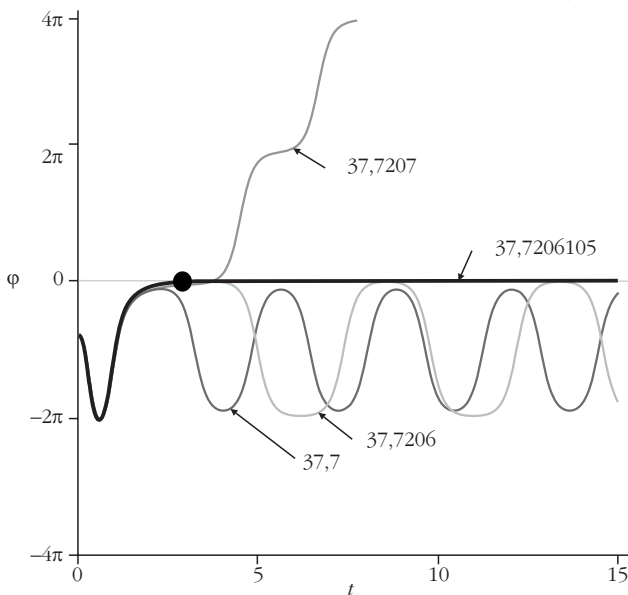
időállandót ismét a (12), a kezdeti gyorsulást ismét a (14) összefüggés adja meg.

A sikeres vezérlés mozgásformái

A vízszintesen gyorsított inga jellegzetes mozgásformáit a 10 ábrán mutatjuk be az $A = 56$ kezdeti gyorsulás mellett. Különösen érdekesek a nagy negatív kezdeti szögkitérésű esetek. A $\varphi_0 = -2,5$ rad kezdeti feltétel esetén, amely a vízszintes sík alá hajló kezdeti állapotnak felel meg, az inga először nagy negatív gyorsulásnak van kitéve.

Legyen először $d = 37,7$. Az ingával együttmozgó rendszerben a pozitív x irányba mutató tehetetlenségi gyorsulás lép fel, mely a g gravitációs gyorsulással

10. ábra. A szimulálással meghatározott szögkitérés-idő függvény különböző d értékek mellett ($A = 56$, $\varphi_0 = -2,5$ és $\dot{\varphi} = 0$). A $t_a = 3,55$ pillanatot, amely után a gyorsítás elhanyagolható, fekete pont jelöli.



együtt egy ferdén lefelé mutató eredő gyorsulást, effektív gravitációs erőt jelent. Az inga az ennek megfelelő egyensúlyi helyzet felé indul, és szögkitérése egyre nagyobb negatív érték lesz. Mire azonban az egyensúlyi helyzetet elérné, az már megváltozott (közelebb kerül a függőleges irányhoz, hiszen a gyorsítás nagysága csökkent), ezért túllendül rajta. Az adott d paraméter esetén a szög elér egy maximális nagyságú negatív (de 2π -nél abszolút értékben kisebb) kitérést, ott visszafordul, majd lógó helyzetén átlendül, és a kezdőfeltételnél nagyobb, de még negatív maximumot elérve ismét visszafordul. $t_a = 3,55$ idő eltelte után a gyorsítás gyakorlatilag megszűnt, hiszen abszolútértéke $g/100$. Az inga ettől kezdve a $\varphi = \pi$ természetes nyugalmi helyzete körül végez nagy amplitúdójú lengéseket.

A $d = 37,7206$ paraméterrel az inga már majdnem eléri a -2π szögkitérését, de kicsivel előtte mégis visszafordul, és pozitív szögsebességgel nagyon jól megközelíti a 0 instabil állapotot, de onnantól még visszahajlik. Az alig nagyobb $d = 37,7207$ paraméterrel az inga, miután ismét visszafordul -2π előtt, most már, ha lassan is, de átjut a $\varphi = 0$ függőleges állapotpontra, eléri a 2π , majd a 4π értékeket, azaz pozitív szögsebességgel többször átforduló mozgást végez (természetesen a függőleges helyzetek körül igen lelassulva).

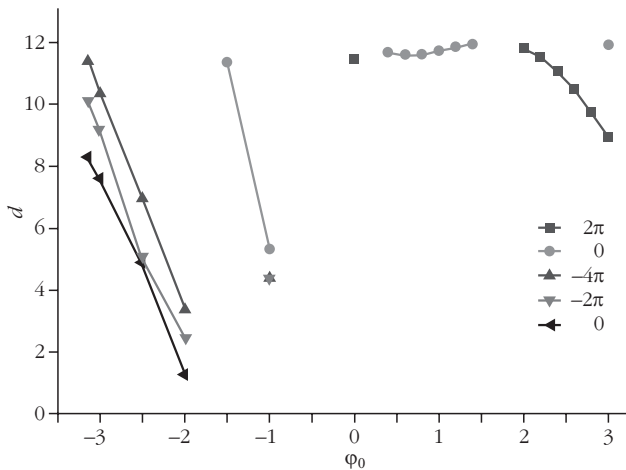
Ebből tudhatjuk, hogy a sikeres vezérlés ezen két d érték között valósul meg. Numerikus számolásunk szerint ehhez $d_0 = 37,7206105$ tartozik.

A (12) összefüggés megadja a d_0 -hoz tartozó időállandót: $l = 0,1$ m, 1 m és 10 m-es ingákra rendre $0,43$ s, $1,35$ s és $4,3$ s értékeket kapjuk. Az A kezdeti gyorsulás (14) szerint mindegyik hossz esetén $a_{0,0} = 3,06$ g, azaz nem túlságosan nagy kezdeti gyorsulással megvalósítható a d_0 -hoz tartozó kvantált vezérlés. A 9.

ábra a sikeres vezérlés térbeli lefolyását mutatja néhány pillanatfelvétellel.

Az időfüggő vezérlési spektrum

A vezérlési spektrumok pozitív és negatív kezdeti szögkitérésekhez tartozó része most erősen eltér. Ez annak köszönhető, hogy negatív irányú gyorsítást alkalmazunk – lásd (1) –, és ez megtöri a jobb-bal szimmetriát. Ha áttérnénk a pozitív irányú gyorsításra (A negatív lenne), akkor ugyanezen spektrumok függőleges ($\varphi_0 = 0$) tengelyre tükrözött változatát kapnánk, hiszen a gyorsulás előjelváltása a szög tükrözésének felel meg. Az ábrákon most is csak a nagyobb tartományokra kiterjedő vezérlési lehetőségeket ábrázoljuk.



11. ábra. A vezérlési spektrum $A = 12$ -re. A jelölésben szereplő számok a végállapot ($\varphi = 0$) eléréséhez szükséges körülfordulások számát és irányát jelölik.

Az $A = 12$ esetben (11. ábra) a jobb oldalon összesen egy ágot látunk, és az sem folytonos. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan kezdeti szögsebesség-intervallumok, ahol *nem létezik sikeres vezérlés*. A π -hez közel eső kezdeti szögkitérésekkel azt tapasztaljuk, hogy vezérlés úgy lehetséges, ha a nagy kezdeti gyorsítás balra megrántja az ingát, az emiatt felfelé mozdul, de visszafordul, és csökkenő gyorsítás mellett, pozitív szögsebességgel éri el az átfordulásnak megfelelő 2π helyzetet. $\varphi_0 = 2$ körül, ahol már amúgy is nagyon nagy kezdeti gyorsításra lenne szükség, ez az ág megszakad. Rövid kihagyással egy másik ág jelenik meg $\varphi_0 = 1,5$ körül, ahol az inga a nulla szögkitérésű helyzetben áll meg, úgy hogy φ előjele nem változik. A mozgás jellegét tekintve ez felel meg a függőleges eset d_0 -val jelölt ágának. Ekkor a felfüggesztési pontot mintegy az inga alá toljuk. Sajnos, minden ilyen lehetőség csak igen nagy gyorsulással valósítható meg. Az origó környékén megjelenik egy újabb rövid ág, ahol a végállapot 2π . Ilyenkor tehát – annak ellenére, hogy a kezdeti szögkitérés kicsi – az inga erősen kileng, s egy átfordulás után áll meg.

Kis negatív szögkitérésekkel ismét találunk egy vezérelhetetlen, több mint 0,5 radián hosszúságú intervallumot. Utána megjelenik egy ág – amely mentén a mozgás mentes az előjelváltásoktól –, a d_0 ág folytatása, annak megfelelően, hogy a kezdetben negatív irányba dőlő ingát úgy rántjuk meg, hogy az a fordított helyzetben álljon meg, mire véget ér a gyorsítás. A $\varphi_0 = -\pi/2$ környékén újabb (0,2 hosszúságú) szakadás történik. Ez érthető, hiszen itt dől el, hogy a vízszintesen megrántott inga fölfelé vagy lefelé fordul. Az ennél nagyobb negatív irányú kezdeti szögkitérésekre három ág rajzolódik ki. A legelső ág mentén a szögkitérés nem éri el -2π -t és az előtt visszafordulva, az inga végül $\varphi = 0$ -val, fordított helyzetében megáll. Ez tehát ismét egy d_0 -nak tekinthető ág. A fölötte elhelyezkedő két ág a -2π , illetve -4π -ben történő megállásnak felel meg.

Az $A = 30$ és 56 értékekhez tartozó vezérlési spektrum jellege nagyon hasonló, ezért külön ábrán nem is

mutatjuk be őket. Az új vonás az, hogy $\varphi_0 > 0$ -ra egymás felett több ág is megjelenhet, amelyek most egymáshoz közel helyezkednek el, és a feljebb levők általában rövidebbek.

A vízszintesen gyorsított fordított inga kis kitérésű határeset

A (21) egyenlet kis szögkitérésekre, amikor $\sin\varphi \approx \varphi$, viszont $\cos\varphi \approx 1$, a következő alakú

$$\ddot{\varphi} = -A(\text{th}^2 t - 1) + (A - d)\varphi, \quad |\varphi| \ll 1. \quad (21)$$

Az első tag itt egy, az inga állapotától *független külső* hatást ír le. Ez tekinthető például egy külső forgatónyomatéknak. A (21) egyenlet tehát egy hagyományos mechanizmussal gerjesztett instabil (hiszen $A > d$) lineáris oszcillátor egyenlete, amelyben semmilyen kvantált viselkedésre való hajlam nem ismert. Ennek tulajdonítható, hogy az origó körüli kezdeti szögkitéréssel csakis olyan vezérlés létezik, amelynek során az inga előbb nagy kitérésű mozgást végez, amely ekkor már nem írható le (21)-gyel, s csak annak végeztével állapodhat meg a nulla kitérésű állapotban.

A Schrödinger-egyenlettel való kapcsolat teljes hiánya miatt a megtalált szerkezet jóval kevésbé szabályos, és jóval kevesebb vezérelhető esetet találunk. Meglepő azonban, hogy nem csak izolált pontokban, hanem kiterjedt intervallumokban is fennáll a sikeres vezérlés lehetősége, továbbra is kvantált módon.

Kitekintés

Eddig a kezdeti szögsebességet nullának választottuk. Vizsgálataink azt mutatják, hogy a spektrum függ φ_0 értékétől is. Kis $|\varphi_0|$ mellett az eddig látottakhoz képest azonban csak keveset deformálódik. Hasonlóan, a szögsebességgel arányos gyenge disszipáció is csak kevésbé módosítja az eredményeket. A kezdeti A gyorsulás növelésekor a spektrumban mindig egyre több ág jelenik meg.

Végül gondoljuk át, hogy mi történhet, ha az $a(t)$ gyorsítás jellegét is megváltoztatjuk. A gyorsítási függvény a Schrödinger-egyenlet potenciálfüggvényének felel meg. Mivel *bármilyen* egydimenziós potenciálban létezik legalább egy diszkrét energiaszint [7], a függőlegesen gyorsított ingák (7) egyenletében is minden $a(t) < 0$ -ra lesz ezért legalább egy sikeres d_0 vezérlési ág (amely függni fog a kezdő szögkitéréstől és szögsebességtől). A fölfelé gyorsítás ($a(t) > 0$) esete *potenciálgátnak* felel meg a (17) Schrödinger-egyenletben, ezért ilyenkor a vezérlés gyakorlatilag lehetetlen.

A más irányokban gyorsított ingák – és általában az instabil végállapotba juttatást célul kitűző vezérlési problémák – esetén azt várjuk, hogy e két eset kombinációja fordul elő: a kezdeti feltételek bizonyos tartományában nem sikeres a vezérlés, másutt pedig kvan-

tált módon, azaz a paraméterek diszkrét értékeinél, egy vezérlési spektrum mentén megvalósítható a rendszer instabil végállapotba juttatása.

A különböző technikai rendszerek vezérlése a rendszert jellemző paraméterek ismeretében hatékony irányítási módszerként ismert. Esetünkben az inverz ingák – fentiekben bemutatott – instabil egyen-

súlyi állapotba, vagy annak közvetlen közelébe juttatása csupán a kezdőfeltételek helyes megválasztásával alternatív lehetőséget kínál az eddig elterjedt összetett szabályozási algoritmusokkal szemben.

Irodalom

7. Marx Gy.: *Kvantummechanika*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1971.