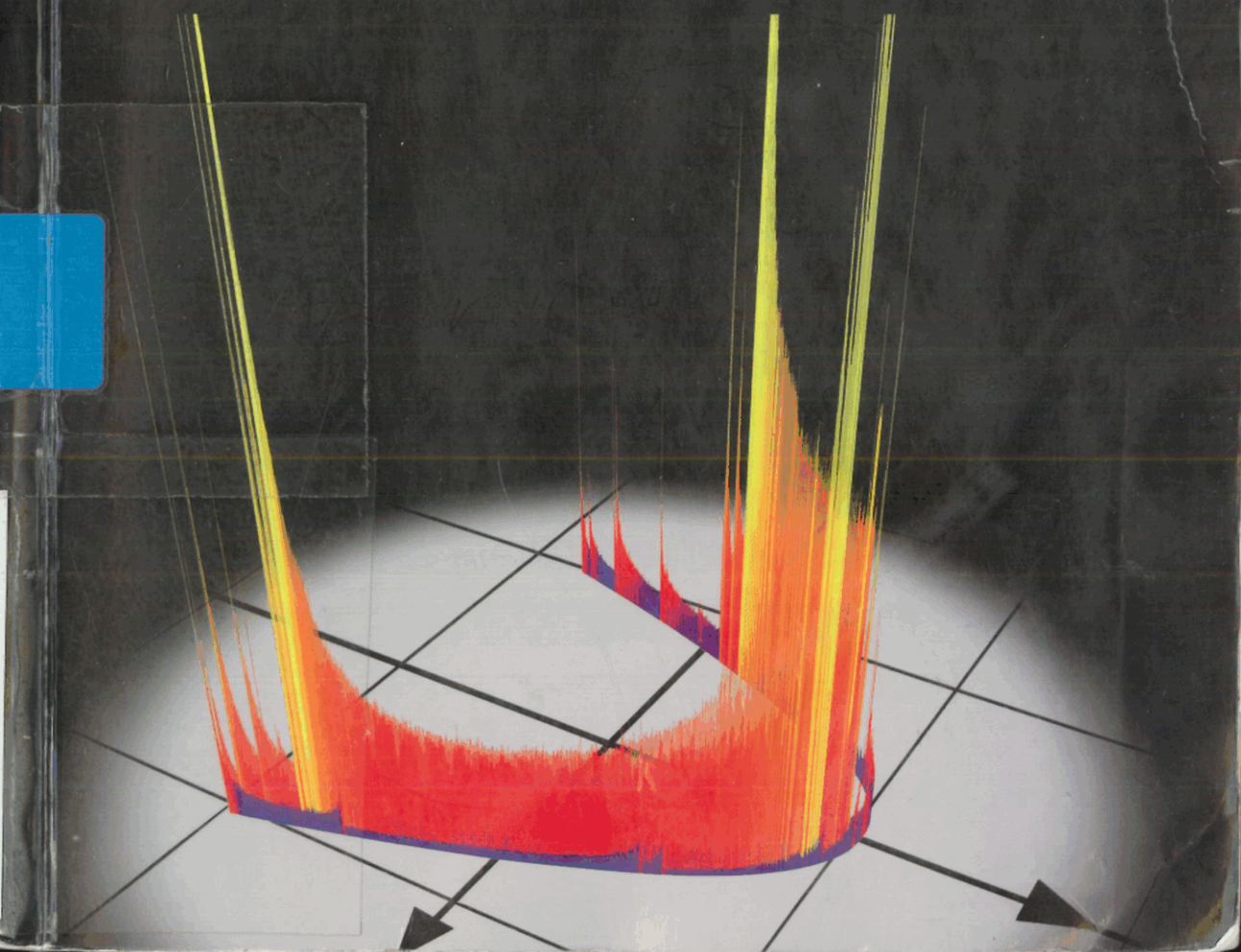


Tél Tamás – Gruiz Márton

KAOTIKUS DINAMIKA



TÉL TAMÁS – GRUIZ MÁRTON

KAOTIKUS DINAMIKA

Bevezetés a kaotikus dinamika világába
a klasszikus mechanika jelenségein keresztül

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

FELSŐOKTATÁSI TANKÖNYV

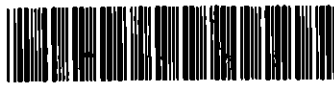
A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított felsőoktatási tankönyv-támogatási program keretében jelent meg.

BÍRÁLÓK

DR. GNÁDIG PÉTER
egyetemi docens

DR. KUN FERENC
egyetemi adjunktus

SZTE Klebelsberg Könyvtár



J001007945



B183524

A könyv címloldalán: A lökdösött oszcillátor kaotikus attraktorának természetes eloszlása parabola-amplitúdófüggvény esetén

A könyv hátoldalán: A szabálytalanul rezgő test kaotikus attraktorán (l. XIII. tábla) kialakult természetes eloszlás kékes-fehéres színezéssel

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, utánközlése, illetve sokszorosítása a Kiadó engedélye nélkül tilos!

ISBN 963 19 3280 X

© Tél Tamás, Gruiz Márton, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.,
Budapest, 2002

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. A kiadásért felel: Pálfi József vezérigazgató. Felelős főszerkesztő: Palojtay Mária. Felelős szerkesztő: Balassa Zsófia. Műszaki szerkesztő: Görög Istvánné. Raktári szám: 42 571. Terjedelem: 32,53 (A/5) ív. Első kiadás, 2002.

Készült a Prospektkop Nyomdában, 019 02

Tartalomjegyzék

Bevezetés	11
Köszönetnyilvánítás	12
Hogyan olvassuk a könyvet?	13
I. A jelenség: bonyolult mozgás, szokatlan geometria	15
1. Kaotikus mozgások	17
1.1. Mi a káosz?	17
1.2. Példák kaotikus mozgásra	18
1.2.1. Szabálytalan rezgések, rezgтетett inga – kaotikus attraktor	18
1.2.2. Mágneses és rezgтетett ingák – fraktál vonzási határ, tranziens káosz	24
1.2.3. Csigán lengő test, lejtőkön pattogó labda – kaotikus sávok	27
1.2.4. Korongok között pattogó golyó, tükröződő karácsonyfadíszek – kaotikus szórás	31
1.2.5. Szennyeződések sodródása – a káosz alkalmazása	33
1. A káosz különböző tudományokban	36
1.3. A fázistér	37
1.4. Összefoglalás	39
1.5. Hogyan vizsgáljuk a kaotikus mozgást?	41
2. A káosz rövid története	41
2. Fraktálalakzatok	43
2.1. Mi a fraktál?	43
2.1.1. Nagy felületű alakzatok	43
2.1.2. A fraktáldimenzió	47
2.2. Fraktáltípusok	51

2.2.1.	Egzaktul önhasonló fraktálok	51
2.2.2.	Összevetített fraktálok	54
2.2.3.	Sovány fraktálok – kövér fraktálok	57
2.3.	Fraktáeloszlások	59
2.4.	Fraktálok és káosz	65
3.	A fraktálok rövid története	67
-		
II.	Előkészületi fogalmak	69
3.	Egyszerű mozgások	71
3.1.	Instabilitás, stabilitás	72
3.1.1.	Mozgás instabil állapot környékén, hiperbolikus pont	72
4.	Instabilitás, véletlen és káosz	80
3.1.2.	Mozgás a stabil állapot körül	80
3.2.	Stabilitásvizsgálat	87
3.2.1.	Nyugalmi helyzetek stabilitása az erőtörvényből	87
3.2.2.	A lineáris közelítés érvényessége	89
3.3.	Az instabilitás kialakulása	90
3.3.1.	Bistabil rendszerek	91
5.	A sokaságok numerikus meghatározása	96
3.3.2.	Bifurkációk	97
3.4.	Állandósult periodikus mozgás: a határciklus	101
3.4.1.	Periodikus erőtörvény	101
3.4.2.	Lecsúszás gödrös lejtőn	103
3.5.	Az általános fázistér	107
3.5.1.	A fázistér általános definíciója	107
3.5.2.	A fázistérfogat dinamikája	108
3.5.3.	Az idő irányának megfordítása	111
3.5.4.	Fixpontok és stabilitásuk az általános kétdimenziós fázistérben	112
3.5.5.	Általános kétdimenziós dinamika fázistérképe	115
4.	Gerjesztett mozgások	117
4.1.	Általános vonások	118
4.1.1.	A mozgásegyenlet	118
4.1.2.	A fázistér	118
4.1.3.	A stroboszkopikus leképezés	120
4.2.	Harmonikusan gerjesztett mozgás stabil állapot körül	124

4.2.1.	A folytonos idejű mozgás	124
4.2.2.	A stroboszkopikus leképezés	125
4.3.	Harmonikusan gerjesztett mozgás instabil állapot környékén	128
4.3.1.	A folytonos idejű megoldás	128
4.3.2.	A stroboszkopikus leképezés	129
4.4.	A lökdösött harmonikus oszcillátor	131
4.5.	Fixpontok általános osztályozása kétdimenziós leképezésekben	134
4.6.	A terület-összehúzóási arány	136
4.7.	A differenciálegyenletekkel kapcsolatos leképezések általános tulajdonságai	138
6.	A nem megfordítható leképezések világa	140
4.8.	Milyen rendszerben várható kaotikus viselkedés?	141

III. A kaotikus mozgás vizsgálata 143

5.	Káosz disszipatív rendszerekben 145
5.1.	A pékleképezés 146
5.1.1.	A leképezés bemutatása 146
5.1.2.	Káosz a pékleképezésben 148
5.1.3.	A kaotikus attraktor 152
5.1.4.	A kaotikus attraktor és az instabil sokaságok 155
5.1.5.	Kettes ciklusok 157
5.1.6.	Magasabb rendű ciklusok 160
5.1.7.	Stabil sokaságok, homo- és heteroklinikus pontok 162
5.1.8.	Az aszimmetrikus pékleképezés 164
5.2.	A lökdösött oszcillátor 165
5.2.1.	Általános tulajdonságok 165
5.2.2.	Fixpontok és stabilitásuk 168
5.2.3.	A fűrészfogattraktor 170
5.2.4.	A háztetőattraktor 178
5.2.5.	A parabolaattraktor 184
7.	Hénon-típusú leképezések 188
5.2.6.	Az erős csillapítás határesetete, egydimenziós leképezések . . 189
5.3.	Paraméterfüggés, a perióduskettőző bifurkációsorozat 190
5.4.	A kaotikus mozgás általános tulajdonságai 195
5.4.1.	A bonyolultság mérőszáma: a topologikus entrópia 196
5.4.2.	Az előrejelezhetetlenség mérőszáma: a Ljapunov-exponens 197

8.	A pillangóeffektus csapdája	201
5.4.3.	A fázistérbeli rend mérőszáma: a fraktáldimenzió	202
5.4.4.	A természetes eloszlás	202
9.	Determinizmus és káosz	209
5.4.5.	A Ljapunov-exponens mint átlag	210
5.4.6.	A dinamika és a geometria kapcsolata: a Kaplan–Yorke- összefüggés	212
10.	Mire jó a numerikus szimulálás?	214
5.4.7.	A kaotikus tulajdonságok összefoglalása	214
11.	Rezgő lemezen pattogó golyó	217
5.5.	Sima időfejlődésű rendszerek	218
5.5.1.	Helyfüggő amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor	221
5.5.2.	Állandó amplitúdóval gerjesztett anharmonikus oszcillátor	222
5.5.3.	Harmonikusan rezegtetett felfüggesztésű inga	222
5.6.	A vízikerek	225
5.6.1.	A mozgásegyenlet	226
5.6.2.	Fixpontok és stabilitásuk	229
12.	A Lorenz-modell	232
5.6.3.	A vízikerek káosza	233
6.	Káosz konzervatív rendszerekben	237
6.1.	Súrlódásmentes rendszerek fázistere	237
6.2.	A területtartó pékleképezés	240
13.	A pékleképezés eredete	243
6.3.	A lökdösött rotátor – a standard leképezés	245
6.3.1.	A leképezés származtatása	245
14.	Leképezések és differenciálegyenletek kapcsolata	247
6.3.2.	A standard leképezés fixpontjai és stabilitásuk	248
6.3.3.	Káosz a lökdösött rotátor mozgásában	249
15.	Kaotikus diffúzió	251
6.3.4.	A kaotikus sáv szerkezete	253
16.	A lópatkó-leképezés	255
6.4.	Zárt, konzervatív rendszerek	256
6.4.1.	Lejtőkön pattogó labda	256
6.4.2.	A rugós inga	260
6.4.3.	Csigán lengő test	263
6.5.	A konzervatív káosz általános tulajdonságai	265
6.5.1.	A tóruszok szerepe	265

6.5.2.	A KAM-tétel	268
6.5.3.	A rezonáns tóruszok maradványai	271
6.5.4.	Makroszkopikus káosz	274
17.	Káosz a Naprendszerben	275
6.5.5.	Erősen kaotikus rendszerek	276
18.	Ergodicitás és keverés	277
19.	Konzervatív káosz és irreverzibilitás	279
7.	Utószó, kitekintés	281
20.	Amiről nem esett szó	282
21.	Turbulencia, térbeli és időbeli káosz	283
8.	Függelék	285
8.1.	Egyenletek dimenziótlánítása	285
8.2.	Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása	290
8.3.	A lekep Pascal program	294
8.4.	A diffegy Pascal program	297
8.5.	Konzervatív rendszerek kanonikus formalizmusa	300
8.5.1.	A Hamilton-függvény	300
8.5.2.	Integrálható rendszerek	301
8.5.3.	A perturbációszámítás érvényét veszti	302
9.	A feladatok megoldása	305
	Irodalom	339
	Fogalomtár	347
	Tárgymutató	352
	A színes táblák jegyzéke	355

Bevezetés

„Milyen meglepő ellentét, hogy a bonyolult, szövevényes jelenségek sokszor oly egyszerű egyenletekkel írhatók le. A fizika tudományában járatlan ember, aki nem ismeri az egyszerű egyenletek hatékonyságát, könnyen arra a következtetésre jut, hogy csak isteni beavatkozással és nem egyszerű egyenletekkel lehet a világ bonyolultságát megmagyarázni.

... Talán az emberi intelligencia ébredésének következő nagy korszakában létrejönnek azok az új módszerek, amelyekben ezeknek az egyenleteknek a *minőségi* tartalma is érthetővé válik.”

Richard Feynman 1963-ban, a Lorenz-modell megjelenésének évében¹

A körülöttünk lévő világ tele van térben és időben szabálytalannak és véletlenszerűnek tűnő jelenségekkel. Ezek eredetének felderítése rendszerint reménytelen feladat a jelenségben részt vevő elemek nagy száma miatt, s ezért beérjük azzal, hogy a folyamatot zajnak tekintjük. Az utóbbi néhány évtized jelentős tudományos felfedezése az, hogy léteznek, sőt nagyon is gyakoriak olyan időben bonyolult jelenségek, melyek egyszerű rendszerekben alakulnak ki. Az ilyen kaotikus jelenségekben a véletlenszerű viselkedés eredete bizonyíthatóan a kevés összetevő erős és nem-lineáris kölcsönhatása. Meglepő ez annak fényében, hogy olyan rendszerekről van szó, melyekben a jelen állapotból a törvények ismeretében elvileg teljes pontossággal következtethetünk a jövőre. Egész természetszemléletünk átértékelését követeli meg az a tény, hogy az ilyen determinisztikus rendszerek véletlenszerű viselkedést mutathatnak.

A káosz egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése. E meghatározás szerint a káosz (a hétköznapi szóhasználattal szemben) nem térbeli, nem statikus rendetlenség. A káosz tehát egy mozgási típus, általánosabb értelemben időbeli fej-

¹R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, New York, 1963), *Mai fizika* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970), 7. kötet, 199. o.

lődés. Számos hétköznapi folyamat (a biliárd vagy a flipperautomata golyójának mozgása, áramkörök begerjedése, festékek keveredése) mellett szerepel műszaki, kémiai, biológiai jelenségekben, betegségek lefolyásában, gazdasági részfolyamatokban, és jóval nagyobb léptékben: például a Föld mágneses tengelyének váltakozásában vagy a Naprendszer alkotóelemeinek mozgásában.

E jelenség és szokatlan tulajdonságai iránt komoly tudományos és társadalmi érdeklődés figyelhető meg. A kaotikus rendszerek mozgása komplex, de megérthető: meglepetésekkel szolgál, és vizsgálóját a felfedezés örömeivel ajándékozza meg. Ugyanakkor a kaotikus jelenségek tanítása nem része a középiskolai tananyagnak, és természettudományos szemléletű felsőoktatási tankönyv sem jelent meg még róla magyarul. Ilyen témájú könyvek idegen nyelven nagy számban állnak rendelkezésre, és szinte mindegyik a káosz interdiszciplináris jellegét hangsúlyozza.

Könyvünk célja, hogy egyetlen tudományterület, a klasszikus mechanika keretén belül mutassa be a káossal kapcsolatos jelenségeket. Azért ezt a területet választjuk, mert itt a legmeglepőbb az a tény, hogy a valószínűségi szemlélet a folyamatok érdemi megértésében elkerülhetetlen.

Az anyagot úgy építettük fel, hogy a könyv olvasásához csak egyszerű fizikai és matematikai ismeretek szükségesek. Figyelmet fordítottunk arra, hogy példáink a témakörön belül a lehető legegyszerűbbek legyenek, egy részük akár középiskolában is bemutatható. Példaválasztásaink jól mutatják, hogy szinte minden középiskolában vagy általános fizika előadásban megismert mechanikai folyamat kaotikussá válik, ha kissé általánosítjuk, vagyis szokásos megkötéseinek valamelyikétől megszabadítjuk: a káosz nem a kivételes, hanem a tipikus viselkedés.

A könyv elsősorban a felsőoktatás alsóéves hallgatóihoz szól. Bízunk azonban abban, hogy általa hozzájárulhatunk a kaotikus jelenségek középiskolai tanításához és a hétköznapi szóhasználatban előforduló néhány félreértés eloszlításához is.

A könyv abból az anyagból született, melyet egyikünk (T. T.) tizenöt éve oktat az ELTE fizikatanár és meteorológus szakos hallgatóinak és melyet mindketten előadtunk tanár-továbbképzési tanfolyamon e témában.

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt köszönetet kívánunk mondani Szépfalusy Péternek, a magyar káosz-kutatás megteremtőjének és meghatározó egyéniségének, akinek munkássága és személyes hatása nélkül ez a könyv nem születhetett volna meg.

Külön köszönet illeti a hivatalos bírálókat, Gnädig Pétert és Kun Ferencet rendkívül alapos munkájukért. Számtalan kritikai építő javaslatukkal nagyban hozzájárultak a könyv érthetőségének javításához.

A könyv egészének vagy részeinek átolvasásáért és hasznos megjegyzéseikért hálások vagyunk Bene Gyula, Érdi Bálint, Jánosi Imre, Muraközy Gyula és Scheuring István kollégáknak, valamint Benczik Izabella, Csernák Gábor, Hantz Péter, Kiss Sándor, Muraközy Balázs és Orosz Gábor hallgatóknak, doktoranduszoknak.

Köszönet illeti Árvay Gergely, Hóbor Miklós, Kepler Zsolt, Rideg Márton és Vankó Győző fizikatanárokat, akik a korábbi években készített szakdolgozatuk során egy-egy téma alapos kidolgozásával előkészítették témaválasztásunkat. Hóbor Miklós, Károlyi György és Szabó Gábor kollégáink programozási és szövegszerkesztési tanácsaikkal segítették munkánkat.

Külön köszönet illeti Hadobás Szilárdot a térbeli ábrák esztétikus megjelenítéséért, Maros Gábort és Hámori Pétert a fotók elkészítéséért, az EP Systema Bt.-t a könyv tipografizálásáért és tördeléséért, valamint a Nemzeti Tankönyvkiadó munkatársait gondos, gyors és segítőkész együttműködésükért.

Hogyan olvassuk a könyvet?

A könyv első része a kaotikus mozgás és a fraktálok alapjelenségeit mutatja be középiskolai ismeretekkel követhető módon. Ennek elolvasása bevezető jellegű áttekintést ad az egész témakörrel.

A második rész az egyszerű mozgásokkal foglalkozik. Itt vezetjük be a mozgások fázistérbeli geometriai szemléltetését és az instabilitással kapcsolatos új fogalmakat (hiperbolikus pont, stabil és instabil sokaságok). A gerjesztett rendszerek mozgásegyenleteiből kétdimenziós leképezéseket vezetünk le. Matematikából a közönséges differenciálegyenletek és a lineáris algebra elemi ismeretét, fizikából pedig az egyetlen anyagi pont Newton-egyenletének és az ezzel kapcsolatos mennyiségeknek (energia, súrlódás) az ismeretét tételezzük fel.

A harmadik rész a káosz részletes elemzését adja. Előbb a súrlódásos rendszerekre jellemző kaotikus attraktoron zajló mozgást mutatjuk be. Ennek megértéséhez előismeretek nem szükségesek, ha elfogadjuk, hogy kétdimenziós leképezések is játszhatják a mozgástörvény szerepét. Ezután a súrlódásmentes, konzervatív rendszerek káoszát tekintjük át.

Az egyes fejezetek anyagára szervesen épülő feladatok (köztük számítógépes kísérletezést igénylők is) az Olvasót önálló munkára serkentik.

A fő gondolatmenthez csak lazán kapcsolódó, de történeti vagy fogalmi szempontból érdekes témákat rövid, kitekintő olvasmányokban foglaljuk össze, melyeket kéthasábos szedéssel különböztetünk meg. Néhány fontos technikai kérdéskört (numerikus eljárások, dimenziótlanítás) függelékekben tárgyalunk. A könyvet foglalmjegyzék egészíti ki, melyben az egyes szakkifejezések angol nyelvű megfelelői

is megtalálhatók. Az irodalmat témák szerint, ill. fejezetekre lebontva adjuk meg a könyv végén.

Annak érdekében, hogy a káosz általános vonásai is világossá váljanak, a legfontosabb összefüggések a mechanikától független megfogalmazásban is tárgyalásra kerülnek (3.5., 4.7., 5.4. és 6.5. szakasz). A mozgások alapvető leírását közönséges differenciálegyenletek adják, s mi az ezekkel kapcsolatos káosszal foglalkozunk. (Ennek ellenére az 5.1., 6.3.1. és 6.4.1. szakasz, ill. a 11. olvasmány anyaga középiskolai ismeretekkel is közvetlenül megérthető.) Nem témánk tehát az ettől eltérő matematikai struktúrákban kialakuló szabálytalan mozgás, amely valóságos jelenségekben nem is fordulhat elő. Így például az egydimenziós leképezések csak speciális határesetként kerülnek tárgyalásra. Reméljük, hogy ezzel a megközelítéssel minden olyan tudományterület számára is hasznos bevezetést adunk, amelynek jelenségei közönséges differenciálegyenletekkel írhatóak le.

I.

**A jelenség: bonyolult mozgás,
szokatlan geometria**

Kaotikus mozgások

1.1. Mi a káosz?

A hosszú ideig tartó, állandósult mozgások egy része önmagát pontosan, periodikusan ismétli. A hétköznapi életből vett példaként gondolhatunk az ingaóra lengésére vagy a Föld Nap körüli keringésére. A hagyományos szemlélet és oktatás szerint az állandósult mozgások mindig szabályosak, azaz periodikusan ismétlődők (vagy legfeljebb néhány különböző periodikus mozgás összetevéséből állnak). Az állandósult periodikus mozgás fontos tulajdonságai: 1) ismétli önmagát, 2) későbbi állapota pontosan jósolható, előre jelezhető (az ingaóra éppen ezért használható időmérésre), 3) adott helyzetébe mindig ugyanazzal a sebességgel tér vissza, vagyis a helyzetet és a visszatérési sebességet megadó ábrázolásban egyetlen pont jellemzi a mozgást.

A szabályos mozgások azonban a lehetséges állandósult mozgásoknak csak *kis részét* alkotják. Mára széleskörűen elfogadottá vált az a felismerés, hogy az egyszerű rendszerek hosszú ideig tartó mozgása is gyakran *szabálytalan*, önmagát nem ismétlő. Példaként a gumiszál végére rögzített test, a similabda mozgását említjük, amely nagy kitérések esetén jóval bonyolultabb, mint a lengés és a rezgés egyszerű összetevése: a mozgásban semmilyen szabályosság sem ismerhető fel.

Az egyszerű, azaz a kevés összetevőből álló rendszerek szabálytalan mozgását kaotikusnak mondjuk. Létezésére az ad lehetőséget, hogy – mint látni fogjuk – *egyszerű nemlineáris egyenleteknek is lehet igen bonyolult a megoldása.* A mozgás-egyenlet egyszerű alakjából – a korábban általánosan elfogadott nézettel szemben – egyáltalán nem dönthető el, hogy a mozgás szabályos lesz-e vagy sem.

A kaotikus mozgás megértése a hagyományostól eltérő szemléletet és sajátos eszközöket kíván. A hagyományos eszközök az ilyen mozgások leírására alkalmatlanok, a kaotikus mozgásforma általánosságának felismerését a *számítógépes kísérletezés tette lehetővé*. A részletes vizsgálatok arra az eredményre vezettek, hogy a szabályos mozgás mindhárom fent említett tulajdonságának *ellentéte* jellemzi a kaotikus viselkedést: az ugyanis 1) nem ismétli önmagát, 2) nem jelezhető előre, mert érzékeny a kezdőfeltételekre, melyeket sohasem ismerünk teljesen pontosan, 3) a visszatérési szabály bonyolult geometriájú: a hely–sebesség ábrázolásban egy komplex, de szabályos szerkezet jelenik meg. A kétféle mozgás közötti különbséget az 1.1. táblázat foglalja össze.

1.1. táblázat. A szabályos és a kaotikus mozgás összehasonlítása.

SZABÁLYOS MOZGÁS	KAOTIKUS MOZGÁS
ismétlődő	szabálytalan
előre jelezhető	előre jelezhetetlen
egyszerű geometriájú	bonyolult geometriájú

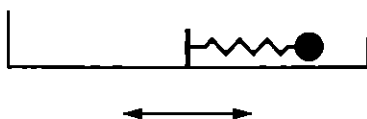
A kaotikus rendszerek említett tulajdonságai külön-külön és együtt is szokatlanok, megértésük konkrét esetek vizsgálatán keresztül a leghatékonyabb. A következőkben a káosz esetében kikerülhetetlen numerikus szimulációk eredményei alapján bemutatunk igen egyszerű rendszerekben megfigyelhető kaotikus mozgásokat. Hangsúlyozzuk, hogy minden rendszert egyetlen paraméterválasztás mellett tárgyalunk, és hogy az ezektől kissé eltérő paraméterekkel – mint minden nemlineáris rendszerben – lényegesen különböző viselkedés is előfordulhat. E példák egyben a káosz különböző típusainak felismerését is lehetővé teszik, és segítségükkel megfogalmazzuk azt is, hogy milyen új szemlélet szükséges a kaotikus mozgásforma részletes tanulmányozásához.

1.2. Példák kaotikus mozgásra

1.2.1. Szabálytalan rezgések, rezegtetett inga – kaotikus attraktor

A rugós felfüggesztésű tárgyak (pl. az autók kereke vagy a centrifugák tengelye) rezgőmozgást végeznek. A mindig jelenlévő súrlódási, közeg-ellenállási veszteség miatt a magára hagyott rezgő tárgy csillapodás után megáll. Állandósult mozgás

csak akkor alakulhat ki, ha ez energiavesztéséget külső forrásból pótoljuk. Ez történhet a rendszer közel periodikus rázásával, gerjesztésével (1.1. ábra) (amit az autókerék esetén a gödrökkel történő kölcsönhatás, a centrifugában pedig az egyenetlen ruhaeloszlás okoz). Amíg a kialakuló rezgés amplitúdója kicsi, a rugó jó közelítés-



1.1. ábra. A gerjesztett rezgés modellje: a súlytalan rugó egyik végéhez véges tömegű testet kötünk, másik végét szinuszos periodicitással mozgatjuk.

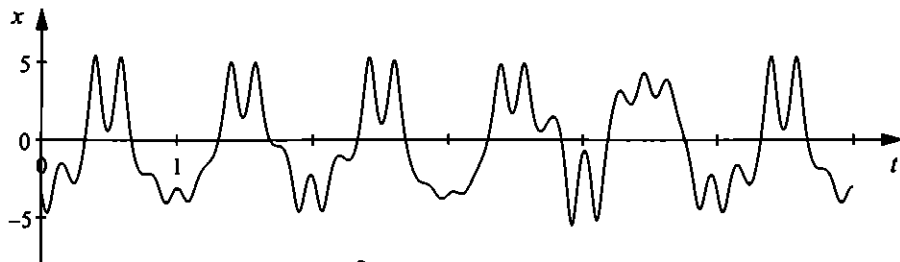
sel a *lineáris* erőtvényt követi: a visszatérítő erő nagysága arányos a megnyúlással. Az állandósult mozgás ilyenkor szabályos: átveszi a gerjesztés periódusidejét. Ha a szabad rugó rezgésének periódusideje közel esik a gerjesztéséhez, akkor az amplitúdó igen nagygyá válhat, kialakul az ismert *rezonancia*jelenség. Nagy amplitúdókra a rugóerő általában már nem egyenesen arányos a megnyúlással, az erőtvény *nemlineáris*. A rezonancia tehát jellemző példa a nemlinearitás megjelenésére.

Nemlineáris erőtvény esetén a visszahúzó erő a megnyúlással arányosnál gyorsabban vagy lassabban nő: ennek megfelelően beszélünk keményedő vagy lágyuló rugóról. Bármelyik típusú nemlinearitásról van is szó, a gerjesztett rezgés állandósult állapota kaotikus is lehet. Szemléletesen fogalmazva az történik, hogy a rugó nem képes arra, hogy pontosan átvegye a gerjesztés szinuszos, harmonikus mozgását, hiszen saját periodikus viselkedése már nem harmonikus. Ezért az állandósult mozgás csak átlagos értelemben követi a gerjesztést, részleteiben attól mindig eltér (az autóban vagy a centrifuga mellett ilyenkor nem egyenletes bűgás, hanem szabálytalan hangjelenség figyelhető meg). Sem az amplitúdó, sem a frekvencia nem állandó, az egyensúlyi mozgás nem ismétli önmagát, kaotikus.

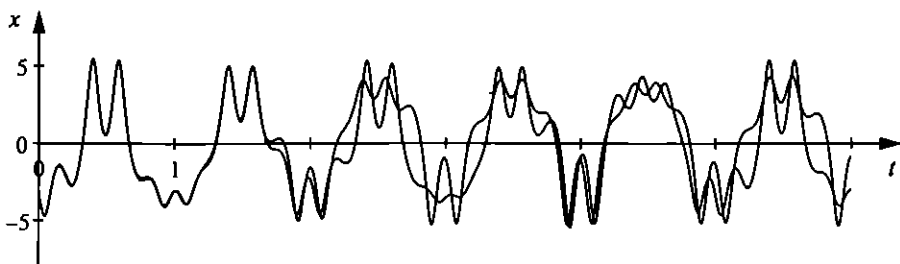
Az 1.2. ábra egy keményedő rugó végére kötött test szinuszos időbeli gerjesztés hatására kialakuló mozgását mutatja.¹ A kitérés–idő grafikonon jól látszik, hogy semmilyen ismétlődés nem fedezhető fel benne, a mozgás szabálytalan.

Ugyanakkor két, igen kevésbé eltérő kezdőfeltétel mellett a kitérések már rövid idő múlva is jelentősen különböznek (1.3. ábra): a mozgás előre jelezhetetlen. Az ábráról az is látszik, hogy a hosszú idejű viselkedés azonos jellegű mindkét esetben, a két mozgás statisztikus értelemben egyenértékű.

¹E szakasz példáinak mozgásegyenletei megtalálhatók az 5.5.2. és 5.5.3. szakaszban.



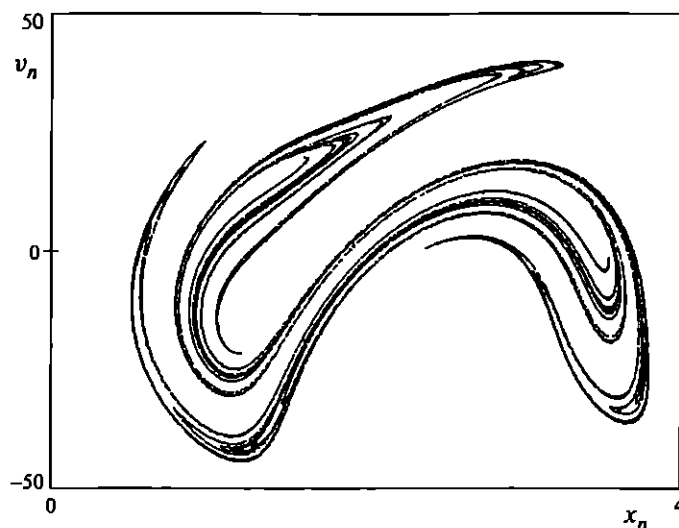
1.2. ábra. Egy keményedő rugó végén levő tömegpont szabálytalan állandósult rezgése gerjesztés hatására sűrűlódás jelenlétében. A kitérés–idő függvény képe szabálytalan görbe.



1.3. ábra. Két, közel azonos helyzetből induló mozgás kitérés–idő függvénye. A kis kezdeti eltérés gyorsan növekszik: a mozgás érzékeny a kezdőfeltételre, előre jelezhetetlen.

Érdekes szerkezet tárul elénk, ha a mozgást nem folytonosan követjük, hanem azonos időközönként „mintát veszünk” belőle. Az 1.4. ábrát és az I. színes táblát úgy kapjuk, hogy a gerjesztési periódusidő egész számú többszöröseinek megfelelő időpontokban megadjuk az állandósult mozgás hely- és sebességkoordinátáit, majd ezeket több ezer perióduson keresztül egy síkon ábrázoljuk.

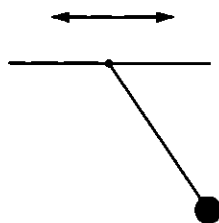
Meglepő, hogy számos olyan x értéket találunk, amelyekhez sok (a pontos vizsgálat szerint végtelen!) különböző sebességérték is tartozhat. Ugyanakkor az egyetlen x helykoordináta-hoz tartozó lehetséges sebességértékek sehol sem alkotnak folytonos intervallumot. A teljes ábra szálas, fonalas szerkezetű, ami jól mutatja, hogy a káoszhoz határozott struktúra tartozik. Ez a mintázat eltér a hagyományos síkgeometriai alakzatokétól, annál jóval bonyolultabb: *fraktálnak* nevezett szerkezet. Ne feledjük, hogy a periodikus mozgásnak ebben az ábrázolásban *egyetlen*



1.4. ábra. Az állandósult szabálytalan rezgés képe a hely–kitérés ábrázolásban, a gerjesztési periódusnak megfelelő időközönként vett mintákon. Az n periódus utáni hely- és sebességkoordináta x_n , ill. v_n .

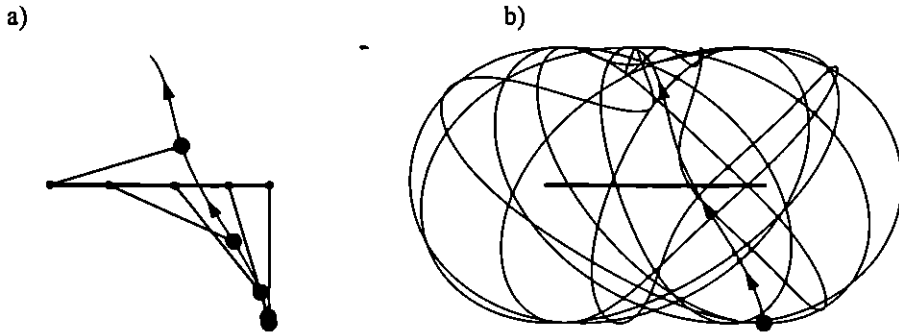
pont felelne meg! A kaotikus mozgás tehát végtelenszer bonyolultabb, mint a periodikus.

Másik példánk a gerjesztett inga viselkedése (1.5. ábra). A hagyományos fonál- inga nagy amplitúdójú lengése eleve nemlineáris, hiszen a visszatérítő erő nem a kitérés szögével, hanem annak szinuszával arányos. Gerjesztés hiányában a lengés a súrlódás vagy közegellenállás miatt leáll, állandósult mozgás nem lehetséges. Az inga többféleképpen gerjeszthető, mi azt az esetet vizsgáljuk, amikor az inga



1.5. ábra. Rezegtetett inga: az ingát felfüggesztési pontja vízszintes síkbeli periodikus mozgásával gerjesztjük.

felfüggesztési pontját vízszintesen, időben szinuszosan mozgatjuk. Annak érdekében, hogy a fonál begyűrődésével ne kelljen foglalkozni, az ingát igen könnyű, vékony rúd végéhez rögzített tömegpontnak tekintjük. Kellően erős gerjesztés esetén a mozgás kaotikussá válhat. Az 1.6. ábra a tömegpont pályáját mutatja a függőleges síkban.

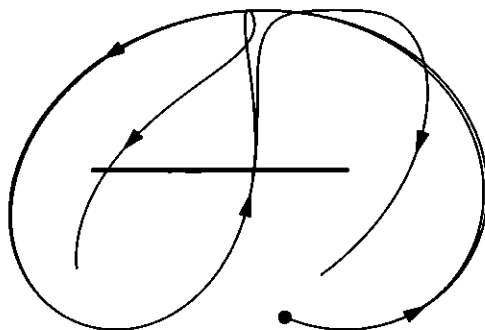


1.6. ábra. Egy szinuszosan mozgatott felfüggesztésű inga mozgása. Az a) képen az ingát is berajzoltuk az indulás utáni néhány pillanatban. A b) kép az inga végpontjának pályáját mutatja hosszabb ideig: az inga szabálytalanul csapdos, gyakran átfordul.

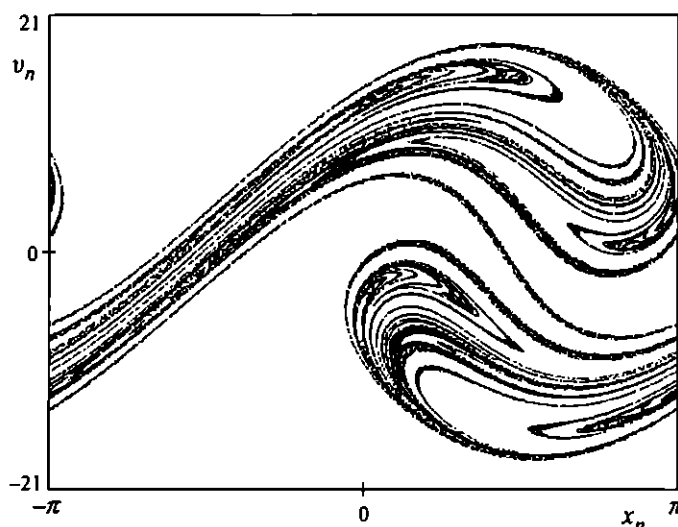
Vegyük észre, hogy az inga mozgása során többször átfordul. A „fejfel lefelé” állapot különösen instabil helyzet, ugyanolyan, mint a hegyére állított ceruzáé. Két közeli kezdőpontból induló pálya csak addig marad közel egymáshoz, amíg egy instabil, pl. egy „fejfel lefelé” állapot szét nem választja őket: ott az egyik továbbfordul, a másik pedig az eredeti forgásával ellenkező irányba dől (1.7. ábra). Az előrejelezhetetlenség oka az, hogy a mozgás *instabil állapotok sorozatán* vezet keresztül.

A szabálytalan mozgásban rejlő szerkezet most is úgy tehető láthatóvá, hogy az 1.6. ábrán megkezdett mozgást hosszan követjük, és mintákat veszünk belőle úgy, hogy a gerjesztési periódusidő egész számú többszöröseinek megfelelő pillanatokban ábrázoljuk a hely- (szögkitérés) és sebesség- (szögsebesség) koordinátákat (1.8. ábra és II. színes tábla).

Állandósult mozgás súrlódásos rendszerben csak külső energiabefektetés, gerjesztés hatására jöhet létre. Bármilyen kezdőfeltételből indult is a rendszer, hosszú idő eltelte után valamilyen állandósult mozgáshoz tart, amit ezért vonzó objektumnak, *attraktornak* nevezünk (pontos definíciójáról a 3.1.2. szakaszban lesz szó). Szabályos mozgásoknak vagy a mozgás leállításának *egyszerű* attraktorok felelnek meg. Elegendően nagy energiabefektetés esetén, amikor a rendszer nemlinearitása



1.7. ábra. Két közeli helyzetből induló rezgetett inga pályájának szétválása egy instabil állapot közelében. A kép az 1.6. ábrához hasonlóan készült, a nyilak az inga végpontjának elmozdulási irányát érzékeltetik.

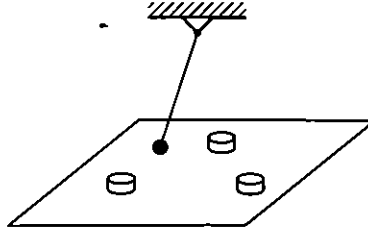


1.8. ábra. A rezgetett inga kaotikus mozgásának képe, a kitérés–sebesség koordináta-rendszerben periódusidőnként ábrázolva az inga állapotát.

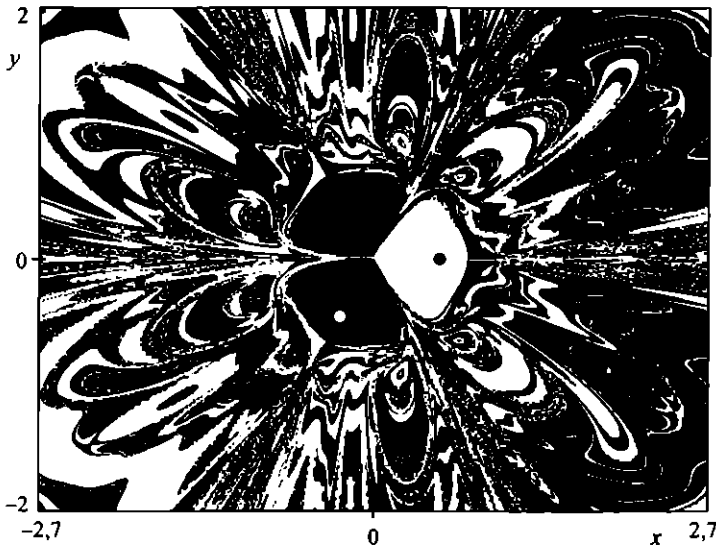
óhatatlanul megnyilvánul, az állandósult mozgás rendszerint szabálytalan, kaotikus. Ezzel egy *kaotikus attraktor* megjelenése társul, melyet sajátos szerkezete miatt szokás *különös attraktornak* is nevezni. Az 1.4. és 1.8. ábrák kaotikus attraktorok képei.

1.2.2. Mágneses és rezegtetett ingák – fraktál vonzási határ, tranziens káosz

Tekintsünk egy mágneses testből készített fonálingát, mely a síkban egy szabályos háromszög csúcsain elhelyezett három azonos mágnes fölött mozoghat (1.9. ábra).



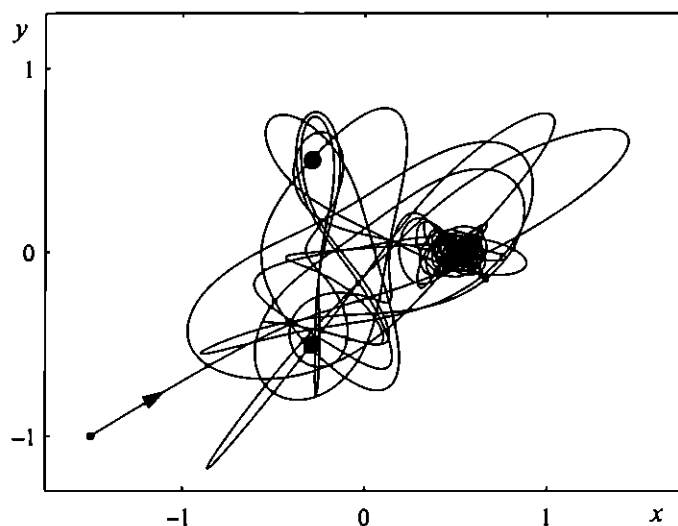
1.9. ábra. A mágneses inga: a fonálinga végén és az asztallapon mágneseket helyezünk el, melyek vonzzák az inga végén levő testet. Az inga előbb-utóbb valamelyik mágnes irányában állapodik meg, de előtte szabálytalan mozgást végez.



1.10. ábra. A mágneses inga három nyugalmi helyzetének (fekete és fehér pontok) vonzási tartományai. A mágnesek síkjának egyes pontjaihoz aszerint rendeljük a színeket, hogy a fölöttük sebesség nélkül induló inga melyik nyugalmi helyzetben állapodik meg.

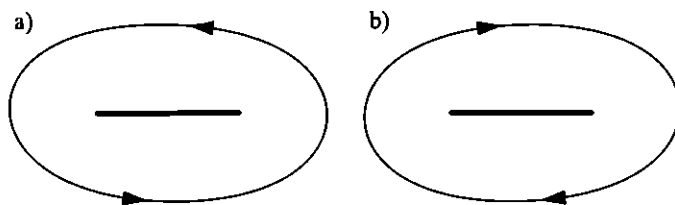
Ha a fonálinga vége és a három mágnes között vonzóerő hat, akkor az inga bármelyik mágnes közelében megállhat. Ennek megfelelően a rendszerben három egyszerű attraktor létezik. A sík akármelyik pontja fölött elengedve, szimulálással eldönthető, hogy az inga melyik mágnes mellett áll majd meg. A három attraktorhoz egy-egy színt rendelve, kiszínezhető az egész sík. Minden azonos színű terület egy-egy vonzási tartomány. Meglepő módon határaik bonyolultan összegabalyodnak (1.10. ábra és III–VI. színes táblák), ezek az attraktorok *fraktál vonzási határral* rendelkeznek. (Természetesen az egyes attraktorpontok közelében csak egy szín látható, oda a fraktálhatár nem jut el.)

A fraktálhatár közelében indított mozgás hosszú ideig szabálytalan, *tranzien*s káoszt, azaz véges ideig tartó káoszt mutat (1.11. ábra), de végül megáll valamelyik attraktoron.

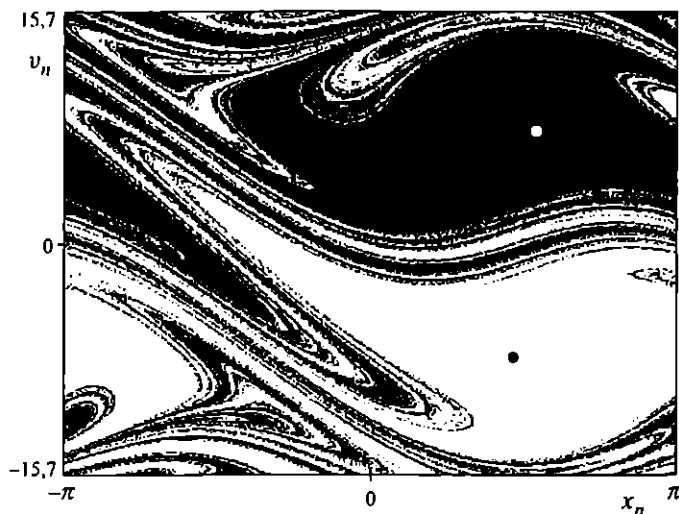


1.11. ábra. A mágneses inga végpontjának pályája felülnézetből. Mielőtt valamelyik nyugalmi helyzetet eléri, a mozgás szabálytalan: tranziensen kaotikus. (A rögzített mágneseket fekete pontok jelzik.)

A rezgetetett inga (1.5. ábra) maga is mutathat tranziens káoszt. Elegendően nagy súrlódás mellett az inga tartósan csak periodikus mozgást végezhet, de ezekből két különböző is létezik. Az 1.12. ábra ezt a két különböző, egyszerű attraktorhoz tartozó pályát mutatja a függőleges síkban. A vonzási tartományokról áttekintő képet most úgy kapunk, hogy megadjuk a kezdeti hely- (szögkitérés) és kezdeti sebesség- (szögsebesség) koordinátákat annak megfelelően színezve, hogy az onnan induló mozgás melyik attraktorhoz tart (1.13. ábra és VII. színes tábla).



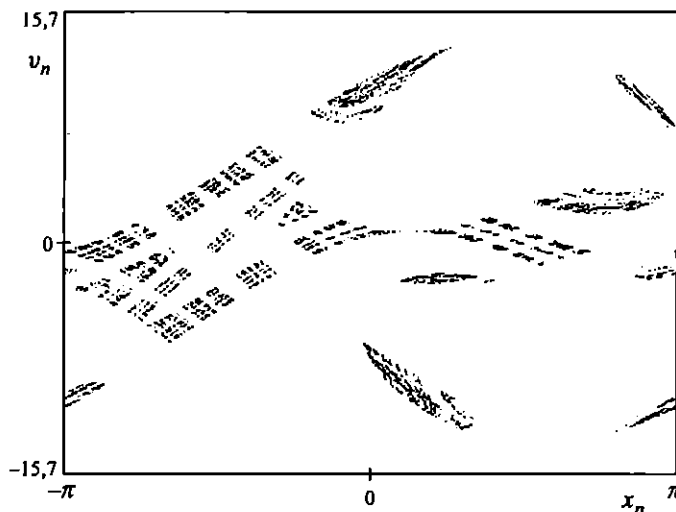
1.12. ábra. Jelentős súrlódás esetén a gerjesztett ingának csak ez a két periodikus állandósult mozgása alakulhat ki. A legkülönfélébb kezdőfeltételekből induló pályák előbb-utóbb e két mozgás valamelyikét végzik, melyekhez egy-egy egyszerű attraktor tartozik.



1.13. ábra. A rezgetett inga két egyszerű mozgásához (l. 1.12. ábra) tartozó vonzási tartományok. Az attraktorok képe egy-egy pont. Az egyikhez, illetve a másikhoz tartó kiindulási állapotokat (kezdőfeltételeket) fehérrel, illetve feketével jelöljük.

A határ közvetlen közeléből indított mozgás eleinte hasonló ahhoz, melyet a kaotikus attraktorhoz tartozó mozgásnál láttunk, de most az egyik periodikus attraktorhoz konvergál. A véletlenszerű mozgás véges ideig tart, tranzienst. Léteznek azonban olyan kivételes kezdőfeltételek, melyekből sohasem lehet eljutni egyik attraktorhoz sem. Az ezekhez tartozó mozgások tetszőlegesen hosszú ideig kaotikusak. Végtelen sok ilyen mozgás létezik (1.14. ábra), de kezdőfeltételeik mégsem alkot-

nak síkbeli tartományt, hanem izolált pontokból álló fraktálfelhőt képeznek, az ún. *kaotikus nyereghalmazt*.

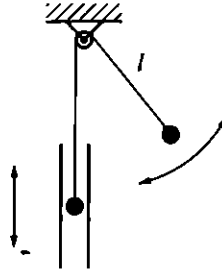


1.14. ábra. A rezgetetelt inga azon állapotainak összessége az 1.13. ábrán, melyekből kiindulva egyik egyszerű attraktor sem érhető el: minden egyes pont a vonzási határon helyezkedik el, és az ábrán látható valamelyik másik pontba jut egy gerjesztési periódus után. Ez a kaotikus nyereghalmaz felelős a tranzienst kaotikus mozgásért, és a fraktál vonzási határon helyezkedik el.

Súrlódásos rendszerben kaotikus viselkedés tehát akkor is felléphet, ha az állandósult mozgásforma szabályos, de több ilyen mozgásforma lehetősége is fennáll. Ilyenkor több egyszerű attraktor létezik együtt, és mindegyikhez tartozik egy-egy vonzási tartomány, a lehetséges mozgások olyan részhalmaza, melyek az adott attraktorhoz tartanak. A vonzási tartományok gyakran egymásba gyűrődnek, s határaik lehetnek szálak fraktálgörbék is. Az ilyen fraktál vonzási határhoz közel induló pályák sokáig a határ mentén bolyonganak, mintegy nehezen döntenek el, hogy melyik attraktort válasszák. Ebben a bizonytalansági időszakban a mozgás szabálytalan, s egyben fraktálszerkezethez kötött.

1.2.3. Csigán lengő test, lejtőkön pattogó labda – kaotikus sávok

Vizsgáljuk meg, mi történhet súrlódásmentes rendszerekben! Tekintsünk egy kicsiny csigán átvett fonállal összekötött két tömegpontot. Jól ismert középiskolai feladat annak az esetnek a vizsgálata, amikor mindkét pont csak függőlegesen mozoghat, miközben egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Most megengedjük



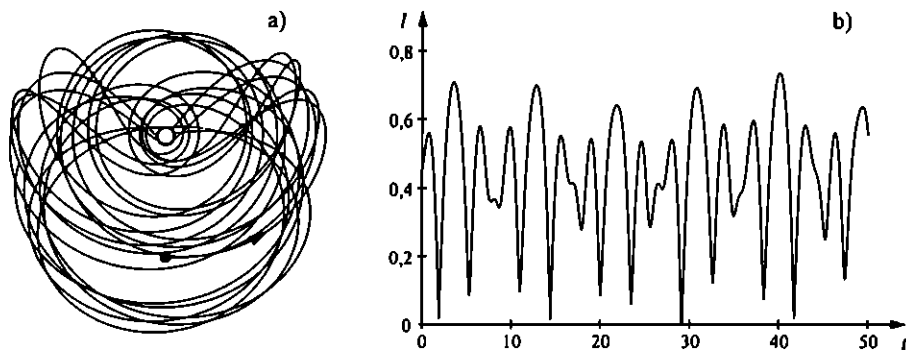
1.15. ábra. Csigán lengő test: két tömegpontot egy elhanyagolható sugarú csigán átvett kötéllel összekötünk, melyek közül az egyik síkban szabadon lenghet, míg a másik csak függőlegesen mozoghat.

azonban, hogy az egyik tömegpont függőleges síkban kilenghessen (az egyszerűség kedvéért mindig feszes fonállal). Megmutatjuk, hogy ekkor alapvetően más típusú mozgások jönnek létre.²

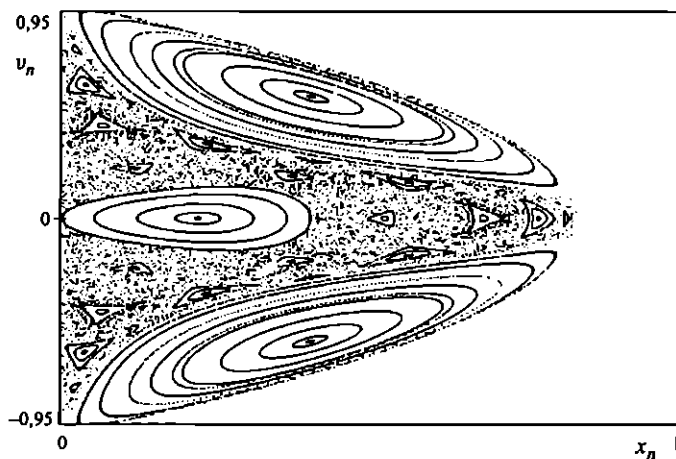
A kitérésre képes tömegpont fonálon leng, melynek pillanatnyi l hossza a rendszer egyik helykoordinátája (kitérés szöge a másik). A csak függőleges elmozdulást megengedő hagyományos elrendezésben a nehezebb tömeg mindig lehúzza a könnyebbet, azonban az általánosított esetben sokkal érdekesebb a helyzet. Ha ugyanis oldalirányban elegendően meglökjük a lengésre képes testet, akkor – még ha a másik tömegpont nehezebb is, és lefelé mozog – az egyre rövidülő lengő fonálon a könnyebb test többször átfordul, egyre jobban bepörög, s ezzel képessé válik arra, hogy a nehezebbet visszahúzza. (Feltesszük, hogy a lengő test nem ütközik semmibe, és a fonál átfordulásakor sem esik le az ingáról). Így hosszú ideig tartó bonyolult kaotikus mozgás jöhet létre. A kilengésre képes test pályáját az 1.16a. ábra, a fonál hosszának változását az 1.16b. ábra mutatja. Két közeli kezdőfeltétel mellett a pályák ismét gyorsan szétválnak, a mozgás nem jelezhető előre.

Az adott összenergiához tartozó mozgásokról áttekinthető képet ismét valamilyen mintavétel segítségével kaphatunk. Mivel a rendszer most nem gerjesztett, ezért nem adott időközönként, hanem adott helyzetben veszünk mintát: a lengő fonáldarab függőlegesen lógó helyzete elérése pillanatában annak $l_n \equiv x_n$ hosszát és v_n változási sebességét a sík egy pontjaként ábrázoljuk. A kaotikus mozgáshoz így egy rendszertelenül ugráló pontsorozat tartozik, amely a sík egy véges tartományát, a *kaotikus sávot* bepötytyözi (1.17. ábra). Más kezdőfeltételhez tartozhat egyetlen pont, néhány pont együttese vagy egy folytonos vonal, melyek mind szabályos mozgásoknak felelnek meg. Együttesen ezek rendszerint egy zárt tartományt alkotnak,

²E szakasz példáinak mozgásegyenletei megtalálhatók a 6.4.3. és 6.4.1. szakaszban.



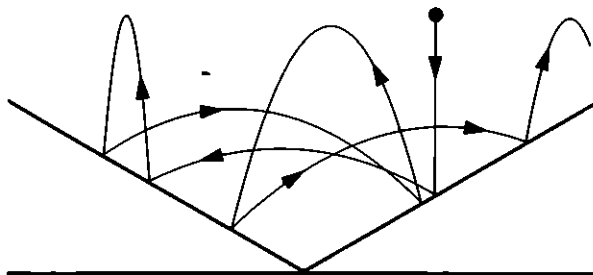
1.16. ábra. A csigán lengő test súrlódásmentes mozgása adott kezdőfeltétel mellett. A lengő test térbeli pályája (a) (a kezdőhelyzetet egy fekete pont, a csigát egy kör jelöli) és a lengő fonál hosszának időfüggése (b) ugyanabban az időintervallumban.



1.17. ábra. A csigán légüres térben lengő test adott összenergiához tartozó mozgásainak áttekintő képe a függőleges helyzetben vett mintavételek alapján. A pöttyözött tartományok a kaotikus sávok. Mindegyiket egyetlen kezdőfeltételből induló mozgás is kirajzolja.

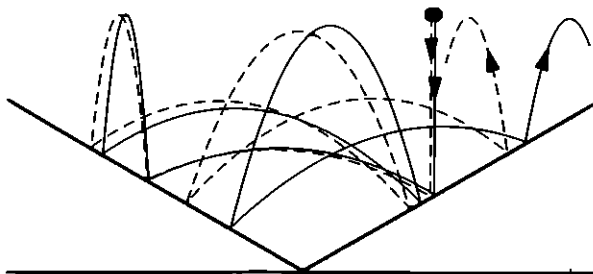
melyet káoszmentes szigetnek nevezhetünk. A kaotikus rendszere a kaotikus sávok és a szigetek egymásba ágyazódása jellemző. Összességük egy érdekes texturájú bonyolult szerkezet, mely az eddig látott fraktáloktól eltérő jellegű (1.17. ábra, VIII. színes tábla).

Második példánk azt illusztrálja, hogy a sima felületekről való rugalmas ütközések is vezethetnek kaotikus mozgásra. Talán a legegyszerűbb ilyen lehetőséget a két szemben álló lejtőn pattogó rugalmas labda jelenti (ehhez nagyon hasonló mozgás megvalósítható atomokkal végzett kísérletekben is) (1.18. ábra). A kaotikus visel-



1.18. ábra. Két azonos dőlésszögű, szemben álló lejtőn tökéletesen rugalmasan pattogó labda gravitációs erőterében.

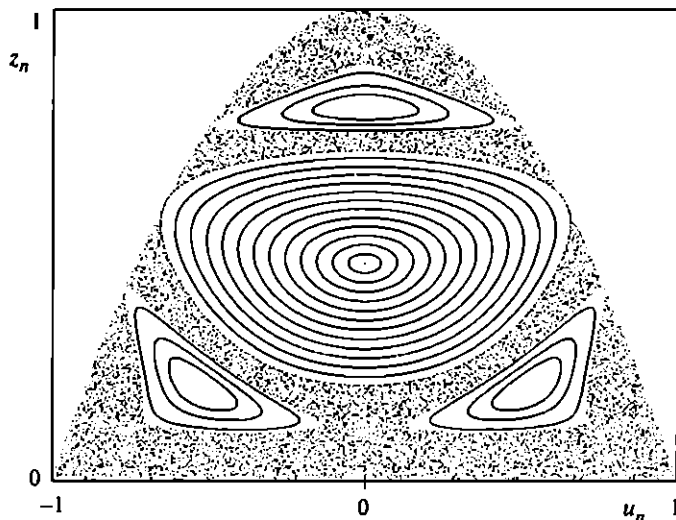
kedés abból adódik, hogy a másik lejtőre való átugrás után a labda nem feltétlenül pattan vissza oda, ahonnan jött. A nemlinearitást és a belső instabilitást a két lejtő közötti törésvonal okozza. A két, azonos magasságból kissé eltérő helyzetben leejtett labda kaotikus mozgása ismét gyors szétválásra vezet (1.19. ábra).



1.19. ábra. A kettős lejtő fölött közel azonos kezdőhelyzetből leejtett labdák pályája (a folytonos vonal megegyezik az 1.18. ábrán rajzolttal). A mozgás érzékeny a kezdőfeltételre.

A mozgásról áttekintő képet adó mintavétel most az, hogy ütközési pillanatokban ábrázoljuk az elpattanási sebesség két komponensét a sík egy pontjaként (1.20. ábra).

A súrlódásmentes rendszerekben történő mozgások fenntartásához nem szükséges külső gerjesztés, mert nincs disszipáció, az energia megmarad. Ekkor viszont

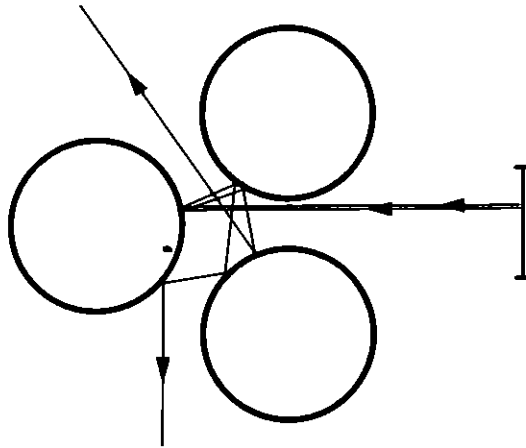


1.20. ábra. A kettős lejtőn pattogó labda lehetséges mozgásainak képe adott összenergia mellett olyan ábrázolásban, ahol a vízszintes tengelyre az elpatatlanási sebesség lejtővel párhuzamos u komponensét, a függőlegesre pedig a lejtőre merőleges komponens négyzetét (z) mérjük fel. A pöttyözött tartományok kaotikus sávok. A lejtők dőlésszöge 50° .

a mozgások nem is tarthatnak egy jól meghatározott állandósult mozgás felé, sűrűlódásmentes rendszerekben *nem* léteznek attraktorok. Következésképpen, minden mozgás jellege erősen függ a kezdőfeltételtől és az összenergiától. Bizonyos kezdőfeltétel-családokhoz szabályos, más kezdőfeltétel-családokhoz kaotikus mozgás tartozik. Az utóbbiak alkotják a kaotikus sávokat, melyek a kaotikus attraktortól szemben síkkitöltő alakzatok.

1.2.4. Korongok között pattogó golyó, tükröződő karácsonyfadíszek – kaotikus szórás

A vízszintes síkban egy szabályos háromszög csúcsaira három azonos korongot helyezünk el, melyek határáról egy pontszerű részecske rugalmasan továbbpattan – mint a flipperjátékban (l. 1.21. ábra). Feltesszük, hogy a részecske nem sűrűlódik, sebességének nagysága ezért az egész mozgás során állandó. Egy adott pontból indulva a mozgás a sebességvektor kezdeti irányától függ. Bizonyos kezdőfeltételek esetén a részecske nagyon *hosszú ideig* pattog a korongok között, és eközben mozgása bonyolult, aperiodikus. Két, kissé eltérő kezdőfeltétellel a pályák gyorsan szét-

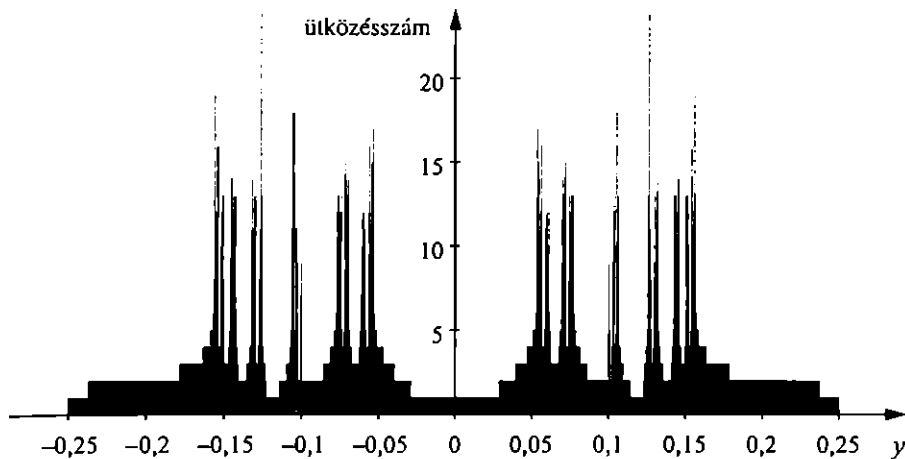


1.21. ábra. A háromkorong-probléma: egy szabályos háromszög csúcsain rögzített egyforma korongokról tökéletesen rugalmasan visszapattanó részecskék mozgása. A két közeli kiindulási állapotból induló pályák gyorsan szétválnak.

válnak (1.21. ábra), ezért ez a mozgás is kaotikus. A szétszóródás megérthető, hiszen a korongok szórótükröként működnek, a pályák egyenes szakaszai közötti szögkülönbség minden egyes ütközéssel nő. A mozgással kapcsolatos fraktálszerkezet többféleképpen is megmutatkozik. Az egy szakasz mentén adott irányban indított részecskék korongokkal történő ütközéseinek száma erősen függ a kezdeti helyzettől. Bizonyos pontokban az ütközések száma igen nagy (1.22. ábra). Azon pontok összessége, melyekhez elvileg tetszőlegesen sok ütközés tartozik (melyek csapdába eshetnek a három korong között), végtelen, de nem alkotnak intervallumot, szétszórt fraktálpontfelhőben helyezkednek el.

Három vagy négy érintkező karácsonyfadísz esetén a fénysugarak verődnek vissza a sima felületekről, s számos újabb visszaverődésen mennek át, mielőtt szemünkbe jutnak. A karácsonyfagömbök egymáson való tükröződésének érdekes fraktálképei (IX–X. színes tábla) tehát a kaotikus szórás hétköznapi életben is megfigyelhető következményei.

Szórási folyamatról általában akkor beszélünk, ha egy súrlódásmentes rendszerben számottevő erő csak egy véges kiterjedésű tartományban hat, és ezt a hatást távolról érkező részecskék mozgásával vizsgáljuk. Ez eleinte egyenes vonalú egyenletes mozgás, de ahol erők hatnak, ott a pálya elgörbül, majd a részecske ismét egyenes vonalú egyenletes mozgással kikerül a szórási folyamatból. A szórás kaotikus jellege abból adódik, hogy abban a tartományban, ahol véges erők hatnak, a



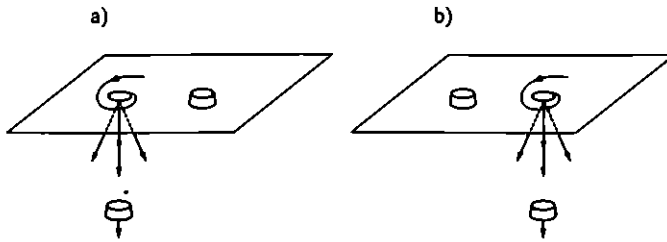
1.22. ábra. Az 1.21. ábrán berajzolt szakaszra merőlegesen egységnyi sebességgel indított, összesen 20 000 részecske ütközéseinek száma a kezdeti y helykoordináta függvényében. (A korongok középpontjai egységnyi távolságra vannak egymástól.)

mozgás szabálytalan és hosszú ideig tartó lehet. Ekkor beszélünk *kaotikus szórásról*. A káosz átlagos élettartama, a fraktál vonzási határoknál látott folyamatokhoz hasonlóan véges. Annak ellenére, hogy most nem léteznek attraktorok, a különböző kimeneti állapotok hasonló szerepet játszanak az egyszerű attraktorokéhoz. A kaotikus szórás is mindig tranzienk káosszal jár.

1.2.5. Szennyeződések sodródása – a káosz alkalmazása

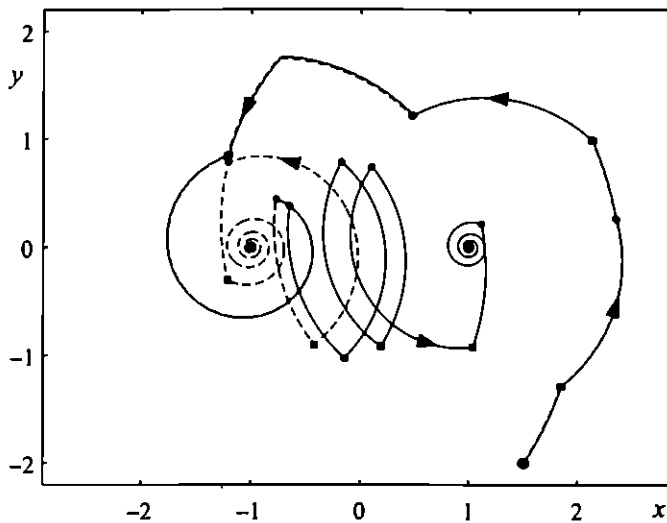
Kaotikus mozgás számos gyakorlati alkalmazással kapcsolatos jelenségben is előfordul. Ezek közül mi itt egyet említünk: a szennyezések áramló közegekben (levegőben vagy vízben) való terjedését. Ennek a kérdésnek környezetvédelmi jelentősége nyilvánvaló.

Képzeljünk el egy egyszerű elrendezést, melyben az áramlás időben periodikus. Tekintsünk egy nagyon széles, lapos edényt két pontszerű lefolyóval. Lefolyás közben a víz örvénylő mozgást is végez. A két lefolyót felváltva működtetjük, fél periódusideig csak az egyiket, utána ugyanennyi ideig csak a másikat, és így tovább (1.23. ábra). Ez meghatároz egy időben periodikus áramlási teret. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy festékrészecske hogyan mozog ebben az áramlásban. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a festékrészecske anyagi tulajdonsága azonos a folyadékéval, attól csak színében különbözik. Ekkor mozgását az a



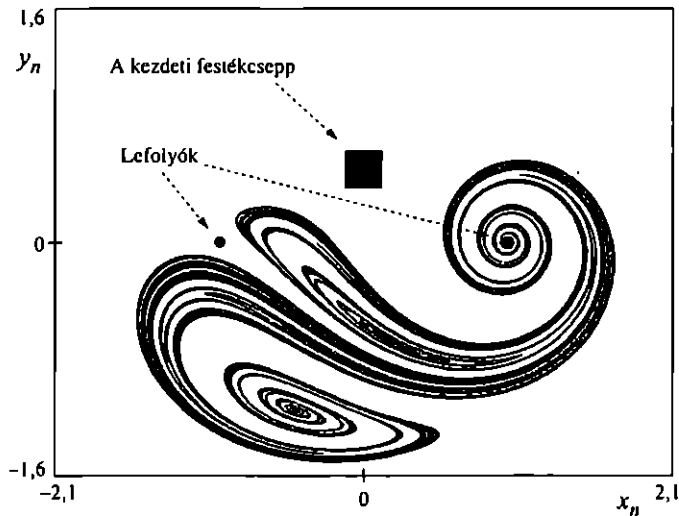
1.23. ábra. Kétfolyós kád: a felváltva nyitva tartott lefolyók egy széles lapos edényben kaotikus sodródást okoznak. Az a) ábra az első, a b) a második félperiódusra jellemző áramlást mutatja. Az áramlás maga egyszerű, a részecskesodródás ennek ellenére lehet kaotikus.

feltétel határozza meg, hogy a részecske pillanatnyi sebessége azonos a folyadék sebességével. A részecskepálya így könnyen végigkövethető. A kaotikusság eredete ebben a példában az, hogy ha az egyik lefolyó felé tartó részecske fél periódus alatt nem éri el a lefolyót, akkor utána a másik lefolyó felé kezd mozogni, de esetleg



1.24. ábra. Két, közelről induló festékrészecske pályája kétfolyós kádban (folytonos és szaggatott vonalak). A fekete pontok a bal oldali lefolyó nyitásának pillanataihoz tartozó helyzetek. A jobb oldali lefolyó nyitásának pillanatait a pályák mentén kis négyzetek jelzik. A kezdőpillanatban éppen a bal oldali lefolyó nyílik ki. A kifolyásig eltelt idők is lényegesen különböznek.

azt sem éri el addig, amíg az nyitva van. Utána megint az első lefolyó felé halad, és így tovább, s esetleg igen hosszú ideig tart, amíg végül kifolyik az edényből. Az 1.24. ábra két bonyolult pályát mutat, melyek közelről indultak, és mégis különböző lefolyókon keresztül hagyják el a rendszert.



1.25. ábra. Egy festékcsepp kezdeti és 5 periódus utáni alakja a kétfolyós kádban.

A szennyezésterjedési problémában különösen fontos egy festékcsepp vagy szennyezéscsepp mozgásának követése. Ez nem más, mint egy részecskesokaság vizsgálata, amelynek minden eleme egy kezdeti tartományból, a csepp kezdeti alakjából indul. A meglepő felismerés az, hogy a csepp eredeti kompakt formáját rövid idő alatt úgy veszíti el, hogy minden egyes elemének kaotikus mozgása ellenére jól definiált szálas, fraktálalakzatot rajzol ki (1.25. ábra és XI. színes tábla).

A szennyezések szálas formákban történő terjedése jól megfigyelhető számos jelenségben, az utcai olajfoltok mintázataitól kezdve, a tej kávéban történő keveredésén keresztül a kémiai szennyezések légköri szétterjedéséig. Ebből a szálas alakból egyértelműen következik az egyes szennyező elemek kaotikus mozgása.

Az, hogy a sodródási problémában a káosz melyik fajtáját találjuk, függhet a rendszer paramétereitől vagy a közelítés pontosságától. A kétfolyós kád példája a fenti elrendezésben analóg a fraktál vonzási határok problémájával. Ha a lefolyókat bezárjuk, de helyükön a váltakozó örvénylő mozgást keverőkkel biztosítjuk, akkor az ún. pislogó örvény modellhez jutunk. Itt nincs kifolyás, ami a kétdimenziós áram-

lásban sodródó részecske számára az egyszerű attraktorok megfelelője lenne, ezért a szennyező részecskék káosza a súrlódásmentes rendszerek káosza lesz. A szennyezés konkrét fajtájának ismeretében fontos lehet annak figyelembevétele, hogy a részecske sűrűsége nem azonos a folyadékéval és hogy a részecske véges méretű (pl. aeroszolok esetén). Ennek következtében a részecske sebessége általában eltér a folyadékétól. Belátható, hogy ezért a sodródási folyamat lefolyók nélkül is súrlódásos mozgásnak felel meg. A részecskemozgás ekkor rendelkezhet attraktorokkal, sőt kaotikus attraktorokkal is. Ez utóbbi helyzet annak felel meg, hogy a (szennyező) részecskék az áramló folyadék felszínén egy fraktáلالakzaton halmozódnak fel. E jelenség a káosz közvetlen megnyilvánulásaként valóban megfigyelhető tavakban, öblökben és kikötőkben!

1. A káosz különböző tudományokban

A példáinkban bemutatott rendszereken kívül számos hétköznapi jelenség is kapcsolatos kaotikus folyamattal. Ilyen például a térsztagyúrás, melynek során az egyes anyagok (só, vaj stb.) részecskéi kaotikusan mozognak, s éppen ez vezet a jó keveredéshez (l. [13.] olvasmány). A turmixgép annál hatékonyabb, minél kaotikusabb benne a folyadék részecskék mozgása. A környezeti szennyezések terjedése szempontjából a kaotikusság csökkentése lenne célszerű.

Az áramkörök begerjedése sokszor a káosz következménye. Ugyanez a szabálytalan működés használható azonban titkosított üzenetek továbbítására és áramkörök szinkronizálására is. Az egyes műszaki alkatrészek, kerekék és szerszámgépelemek mozgása is gyakran kaotikus. A kisléptékű kaotikus viselkedés elkerülhetetlen a nagy léptékben periodikus mozgásokat biztosító szabályozás-technikai eljárásokban.

A meteorológiai előrejelzések ígéretes javítási módszere azon a megfigyelésen alapul, hogy a légkör bizonyos földrajzi

helyeken és bizonyos időpontokban úgy viselkedik, mintha kevés összetevőből álló rendszer lenne. Az ún. sokaság-előrejelzési módszer alkalmas ennek kimutatására, és megadja, hogy hol különösen érzékeny a légkör a kezdőfeltételekre. Az ezeken a földrajzi helyeken a megfelelő időpontban végrehajtott „célzott” repülőgépes megfigyelések adatai alapján az előrejelzés lényegesen pontosítható.

Kaotikus folyamatok geofizikai és csillagászati jelenségekben is fellépnek, és emberi léptékkel mérve igen hosszú időskálán érvényesülnek (l. [17.] olvasmány).

A kémiai és biokémiai reakciók egy osztálya időbeli periodicitással, például szabályos időközönként visszatérő elszíneződéssel jár. Más paraméterek mellett ezek – kísérletileg is igazolt módon – időben szabálytalanul változó kaotikus oszcillációkat (színváltozásokat) mutatnak. Ez lehet az alapja annak, hogy bizonyos élettani jelenségek is kapcsolatosak kaotikus viselkedéssel. Az egyik legjobban ismert példa a szív elektromos tevékenysége. Az ezt mérő EKG-jel

egészséges emberben periodikusnak tűnik, de részletes elemzése az egzakt periodicitástól való kaotikus eltérést is feltár. Általánosan is igaz, hogy az egészséges életfunkciók állandó kis kaotikus fluktuációkat mutatnak a normál érték körül (hasonlóan a szabályozástechnikai káoszhoz), és a kaotikus járulék csak betegségekben tűnik el. Egyes járványok (pl. a kanyaró) időbeli alakulása nagyvárosokban kaotikus folyamat. Az élőlények létszámváltozása adott területen szintén lehet kaotikus, melyet bizonyos rovarpopulációk esetén laboratóriumi kísérletek is bizonyítanak. Kaotikus jelenségek számos más biológiai folyamatot is kísérhetnek: így pl. a táplálékláncok, az élőlények viselkedése és a fajok versengése dinamikáját.

Mivel a káosz a kevés összetevőből álló rendszerek időben bonyolult meg-

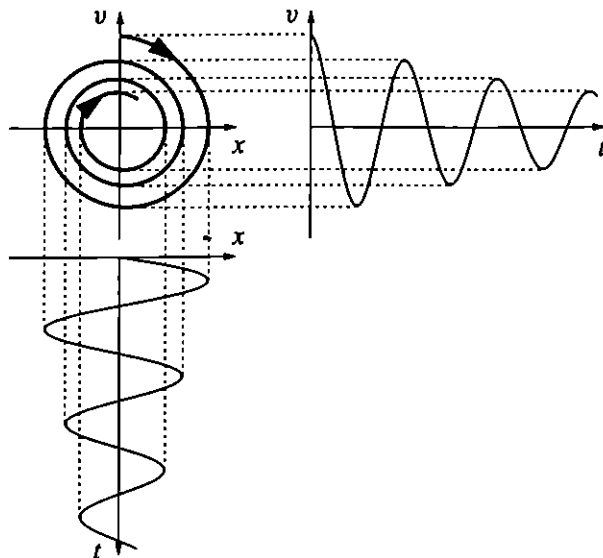
nyilvánulása, egy *jelenséget* csak akkor tekinthetünk kaotikusnak, ha sikerül olyan egyszerű *modellt is* találni, mely a szabálytalan viselkedést kellő pontossággal visszaadja. Ilyen értelemben ki lehet mutatni bizonyos gazdasági részfolyamatok kaotikusságát is, és mára a legkülönbözőbb tudományterületek jelenségei egész soráról bizonyosodott be azok kaotikus jellege.

Végül megemlítjük a káosz szabályozásának lehetőségét, mely – azokban az esetekben, amelyekben a káoszból fakadó előrejelezhetetlenség az emberi felhasználás szempontjából hátrányos (mint pl. az űrhajózásban) – biztosítja, hogy jól megválasztott kis külső hatás következményeként a mozgás kaotikussága ne alakulhasson ki.

1.3. A fázistér

Az eddigi példákban láttuk, hogy a kaotikus viselkedés hagyományos kitérés–idő vagy sebesség–idő grafikonon való ábrázolása nem alkalmas a mozgás áttekintésére, hiszen akármeddig követjük is a kitérést, a következőkben mindig számíthatunk újabb viselkedésformára. A káoszban megjelenő rend nem a kitérés–idő, hanem a kitérés–sebesség ábrázolásban mutatkozik meg.

Egy mechanikai rendszer pillanatnyi *állapotát* a hely- és sebességkoordináták együttes megadása jelenti, hiszen ezen koordináták és a dinamikai egyenlet ismeretében a mozgás egyértelműen folytatható. A hely- és sebességváltozók definiálják a rendszer *fázistérét* (részletesebben l. 3.5. szakasz). Egydimenzióban zajló mozgásokra a fázistér tehát az (x, v) sík. A fázistérben egy pont jeleníti meg a rendszer mozgásállapotát, és a pont annak megfelelően vándorol a fázistérben, ahogyan a rendszer mozog. A mozgás fázistérbeli pályáját *trajektóriának* nevezzük (1.26. ábra). A trajektória maga nem tükrözi, hogy milyen gyorsan telik az idő. A hozzárendelt nyíl a mozgás irányát jelzi. A trajektóriák összessége viszont áttekintő képet ad a rendszer különböző mozgási lehetőségeiről (1. 1.2. táblázat).



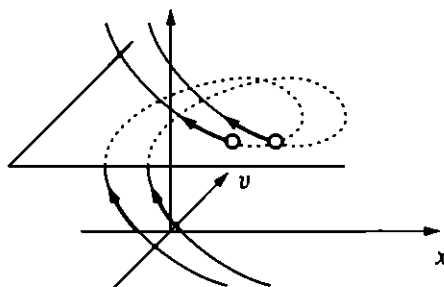
1.26. ábra. A fázistérbeli trajektória (vastag vonal). Egy mozgás $x(t)$ és $v(t)$ grafikonjának megfelelő vetületeivel megszerkeszthető a mozgás fázistérbeli pályája. Az idő irányát a trajektórián lévő nyíl mutatja.

1.2. táblázat. A mozgások hagyományos és fázistérbeli leírásának összehasonlítása.

HAGYOMÁNYOS LEÍRÁS	FÁZISTÉRBELI LEÍRÁS
pillanatnyi koordináták	fázistérbeli pont
időfüggés $(x(t), v(t))$	trajektória $(v(x))$
időbeli struktúra	fázistérbeli struktúra
egyedi	áttekintő

Sokszor a rendszer állapotának egyértelmű meghatározásához nem elegendő egyetlen hely- és sebességkoordináta, azaz a fázistér három- vagy többdimenziós (a kaotikus esetekben mindig az a helyzet). Ilyenkor érdemes a magasabb dimenziós fázistérből valamilyen szabály szerint mintát venni. Ez rendszerint úgy történik, hogy a fázistérről egy „metszetet” készítünk, s a trajektóriák pontjait csak a metszeten tartjuk számon, miként azt a szemléletes 1.27. ábra szemlélteti. Gerjesztett esetekben célszerű a periódusidő egész számú többszöröseinek megfelelő időpon-

tokban „ránézni” a rendszerre. Az így kapott ábrázolást *stroboszkopikus leképezésnek* nevezzük. Az 1.4., 1.8. ábrák tehát stroboszkopikus leképezések eredményét mutatták. A nem gerjesztett esetekben a metszetet valamilyen helyzet bekövetkeztére



1.27. ábra. Mozgások követése leképezésen. A magasabb dimenziós fázistérben futó trajektóriákról valamely metszeten érdemes mintát venni.

utaló feltétel teljesülésével definiáljuk. Ezzel egy *Poincaré-leképezést* határozunk meg, amint azt az 1.17. ábrán tettük. Példáinkból kiderült, hogy a kaotikus mozgás fraktálszerkezete ilyen leképezésben válik nyilvánvalóvá. Csak egészen kivételes esetekben (mint pl. a mágneses inga, tükröződő gömbök és sodródás) tapasztaljuk azt, hogy a fraktálstruktúrák a valódi térben is megjelennek. A káosszal járó szerkezet megértéséhez tehát elkerülhetetlen a fázistér használata (de az a szabályos mozgások feltérképezésében is igen hasznos).

1.4. Összefoglalás

A kaotikus viselkedés az egyszerű, a kevés változóval leírható rendszerek olyan mozgása, időbeli viselkedése, melynek fő tulajdonságai:

- időben szabálytalan, nem áll elő véges számú periodikus mozgás összegeként sem, aperiodikus,
- hosszú távon előre jelezhetetlen és érzékeny a kezdőfeltételre,
- fázistérben komplex, de rendezett: fraktálszerkezetű.

Ezek a tulajdonságok általában egymást feltételezik, egyszerre vannak jelen. Ha tehát egy egyszerű fizikai rendszer hosszú távon aperiodikus, akkor időbeli fejlődése megjósolhatatlan és egyben alkalmas ábrázolásban fraktálszerkezetű. A hagyományos szemlélet oldaláról nézve mindhárom tulajdonság újszerű és meglepő.

Mögöttük egyetlen közös vonás áll: az, hogy a hosszú idejű viselkedés véletlenszerű, s ezért csak *valószínűségi* fogalmakkal írható le.

Ugyanakkor nem minden bonyolult időbeli viselkedés tekintendő kaotikusnak, csak azok, melyek egyszerű törvényekből következnek. A zajos mozgás a nagyon sok összetevőből álló rendszerek valamely komponensének véletlenszerű viselkedése (pl. egy részecske Brown-mozgása), mely a környezettel (a többi összetevővel) való bonyolult kölcsönhatás következménye. *A káosz átmenet a szabályos és a zajos mozgás között.* A szabályos mozgástól az különbözteti meg, hogy véletlenszerű, a zajostól pedig az, hogy véletlenszerűsége a kevés összetevő elem erős (de egyszerű törvényt követő) kölcsönhatásából, a *belső* dinamikából adódik. A zajos mozgások a fázisteret egyenletesen töltik ki, bennük fraktálstruktúrák *nem* alakulhatnak ki.

A mozgások *hagyományos* tárgyalása óhatatlanul a szabályos, periodikus viselkedést mutatja be, hiszen a használt klasszikus matematikai eszközök nem alkalmasak a kaotikusság jellemzésére. Káoszra ezek az eszközök csak azzal utalhatnak, hogy csődöt mondanak, értelmezhetetlen eredményt szolgáltatnak. Az új, numerikus vizsgálatokkal is alátámasztott megközelítés világossá teszi, hogy a szabályos mozgások a kivételesek.

A kaotikus időfejlődés két nagy osztálya (az eddig csak egyszerűen káosznak nevezett) *permanens káosz* és a *tranziens káosz*. Az utóbbi esetben csak kivételes kezdőfeltételekhez tartozik állandósult kaotikus mozgás, a tipikus kezdőfeltételek véges idejű kaotikus viselkedést mutatnak (melynek hossza azonban tetszőleges lehet). Mindkét osztály előfordulhat mind súrlódásos, mind súrlódásmentes rendszerekben. A káosz fő típusait az 1.3. táblázat foglalja össze.

1.3. táblázat. A káosz alapvető típusai és a velük kapcsolatos jelenségek.

	PERMANENS KÁOSZ	TRANZIENS KÁOSZ
SÚRLÓDÁSOS	mozgás kaotikus attraktoron	fraktál vonzási határok
SÚRLÓDÁSMENTES	mozgás kaotikus sávon	kaotikus szórás

Érdeemes még az energiabefektetés szempontjából is áttekinteni, hogy milyen fajta káosz alakulhat ki. Nem gerjesztett súrlódásos rendszerekben a mozgások leállnak, a káosz csak tranziens formájában lehet jelen (mellyel gyakran fraktál vonzási határ is társul). A gerjesztett súrlódásos mozgások kapcsolatosak lehetnek kaotikus attraktorokkal. Súrlódásmentes esetekben káosz (kaotikus sávon vagy kaotikus szórás formájában) gerjesztés nélkül is fellép, már síkbeli mozgásokban is.

1.5. Hogyan vizsgáljuk a kaotikus mozgást?

Mielőtt a mozgások részletes elemzésére rátérnénk, néhány pontban összefoglaljuk a bemutatott példákból is leszűrhető tanulságokat:

- Értsük meg az instabil viselkedést (melyet a hagyományos szemlélet érdektelennek ítélt) már nem kaotikus rendszerekben is!
- Szokjuk meg a mozgások fázistérbeli ábrázolását, geometriai megközelítését, a stroboszkopikus, ill. a Poincaré-leképezés használatát!
- Ne reménykedjünk abban, hogy a mozgás ismert függvényekkel analitikusan jellemezhető (még a leírásokra kidolgozott végtelen sorok sem konvergálnak)!
- A mozgásegyenletet numerikus módszerekkel oldjuk meg!
- A helyes megértés érdekében vezessünk be új fogalmakat és keressünk új elméleti összefüggéseket!
- Ne feledkezzünk meg a megfigyeléssel, szimulálással óhatatlanul együtt járó mérési bizonytalanságról, hibáról, s vizsgáljuk annak időbeli alakulását!
- Fogadjuk el a részecskesokaságok követésének és ezzel a statisztikus leírás, a valószínűségi fogalmak (eloszlás, tipikus viselkedés, átlag) használatának szükségességét!
- Ismerkedjünk meg a fraktálok geometriájával!

Javasoljuk az Olvasónak, hogy e szempontokat a továbbiakban végig tartsa szem előtt.

2. A káosz rövid története

A kaotikus mozgás lehetőségét először Henri Poincaré francia matematikus fogalmazta meg (természetesen a maitól erősen eltérő szóhasználattal) a Naprendszer stabilitásáról írott dolgozatában az 1890-es években. Valamivel később Szonja Kovalevszkája orosz matematikusnő bebizonyította, hogy a súlyos,

aszimmetrikus pörgettyű (aszimmetrikus bűgőcsiga) mozgása általában kaotikus (csupán speciális tehetetlenségi nyomtatók mellett szabályos). Ezek az eredmények nagyrészt feledésbe merültek, s a 20. század első felében csak George Birkhoff amerikai és Eberhard Hopf német matematikusok statisztikus

mechanikai, ergodelméleti munkáiban élték tovább. E fejleményektől függetlenül a második világháború idején kaotikus viselkedést találtak bizonyos nemlineáris áramkörökben, de az eredményt nem tudták értelmezni. A Birkhoff–Hopf-vonal folytatásaként az 1960-as évek közepére Andrej Kolmogorov és „Vlagyimir Arnold orosz, valamint Jürgen Moser német matematikus megalkotta az azóta a nevük kezdőbetűi alapján KAM-tételnek nevezett állítást, mely megfogalmazza a gyenge kaotikus mozgás feltételét sűrűlódásmentes rendszerekben. Az erős káosz tanulmányozására a számítógépek megjelenése teremtette meg a feltételt. A sűrűlódásos rendszerbeli kaotikus attraktorhoz kapcsolódó viselkedést először Edward Lorenz amerikai meteorológus írta le 1963-ban. A róla elnevezett modell numerikus

megoldása kapcsán felismerte a kaotikus viselkedés előrejelezhetetlenségét. Magát a káosz kifejezést egy 1975-ös cikkében James Yorke amerikai matematikus vezette be az egyszerű determinisztikus rendszerek véletlenszerű viselkedésére. A fogalom elterjedésében nagy szerepet játszott Mitchell Feigenbaum amerikai fizikus 1978-as munkája, melyben bizonyította a kaotikus viselkedés egyik lehetséges kialakulási módjának rendszerfüggetlenségét, univerzalitását. A káosz statisztikus tulajdonságainak felderítésében többek között B. Chirikov, C. Grebogi, M. Hénon, E. Ott, O. Röessler, D. Ruelle, S. Smale és J. Szinaj játszottak fontos szerepet. A káosz előfordulásának lehetősége mára új gondolkodásmódot honosított meg a legkülönbözőbb területeken (l. az [1.] olvasmányt).

Fraktálalakzatok

2.1. Mi a fraktál?

2.1.1. Nagy felületű alakzatok

Hagyományos geometriai alakzatokra, pl. gömbre, kockára gondolva természetesen vesszük, hogy felületük, térfogatuk jól definiált. Valóban, ha egyre kisebb méretű kockákkal töltjük ki őket, akkor egyre pontosabb közelítésüket kapjuk, s a kockarendszer térfogata gyorsan tart a teljes alakzatéhoz. Jól tudjuk, hogy az F felület arányos az alakzat L lineáris mérete négyzetével, a V térfogat pedig a köbével. Az F/V felület/térfogat arány ezek szerint a térfogat $-1/3$ -adik hatványával, $V^{-1/3}$ -nal arányos. (Síkidomok K kerületének és T területének viszonya $T^{-1/2}$ -nel arányos.) A felület/térfogat arány tehát véges, és annál *kisebb*, minél nagyobb a test. Hagyományos geometriájú makroszkopikus rendszerekben ezért a felületi jelenségek kevésbé fontosak, elhanyagolhatóak a térfogatiakhoz képest.¹

Másrészt viszont tudjuk, hogy léteznek nagy felületű makroszkopikus alakzatok. Ezek mindig porózusak, szerteágazó vagy rücskös felületűek. A hatékony kémiai katalizátoroknak nagy felületűeknek kell lenniük. A gyors gázcsere szükségessége magyarázza a légzőszervekre jellemző nagy felület/térfogat arányt. Az emberi tüdő felülete (mikroszkópos felbontással mérve) akkora, mint egy teniszpályáé (kb. 100 m^2), térfogata viszont csak néhány liter (10^{-3} m^3). Arról, hogy a

¹Ezt alapvetően kihasználjuk pl. a termodinamikában, amikor a teljes rendszer belső energiáját a véges térfogatelemek belső energiái összegének tekintjük, s ezzel elhanyagoljuk a felület közelében elhelyezkedő részecskék kölcsönhatását.

vattacukor vagy a sör habja milyen kevés anyagot tartalmaz, egyetlen harapással meggyőződhetünk; felületük mérőszáma sokkal nagyobb, mint térfogatuké. Az ilyen rendszerek nyilván nem követik a hagyományos alakzatokra vonatkozó $F/V \sim V^{-1/3}$ szabályt, sőt velük kapcsolatban a felületmérésre vonatkozó képünk is módosításra szorul.

A tapasztalat szerint a nagy felületű rendszerek felületéhez *nem* rendelhető mérőszám, mert a felület alapvetően *függ a mérés pontosságától*. A felület mérőszáma növekszik a mérési felbontás finomításával, s ez a tulajdonság a finomítás több nagyságrendjén keresztül megfigyelhető. Gondoljunk pl. egy tagolt partvonalú szigetre, melynek kerületét úgy szeretnénk meghatározni, hogy a sziget egy jó felbontású térképén lemérjük, hogy adott körzőnyílásnyi távolság hányszor fér a partvonalra. Egyre kisebb körzőnyílásokat választva, egyre több öböl és félsziget jelenléte válik megfigyelhetővé, s ezért a leméréshez szükséges körzőnyílások száma gyorsabban nő, mint egy sima kerületű alakzat esetén. A kerületre mindig más és más mérőszámot kapunk, a kerület nő a körzőnyílás csökkentésével. Ugyanezt a tendenciát tapasztalnánk, ha egy lánchegység felületét akarnánk egyre kisebb négyzetlapok ráillesztésével megmérni.

Érdeemes bevezetni a *megfigyelt* felület vagy kerület fogalmát. Ehhez tekintsünk ε oldalhosszú négyzetlapokat vagy ilyen méretű szakaszokat. Az $F(\varepsilon)$ megfigyelt felület vagy a $K(\varepsilon)$ megfigyelt kerület azt mutatja meg, hogyan függ a megfelelő mérőszám az ε felbontástól vagy pontosságtól. Az egyszerűség kedvéért a pontosságot a rendszer L lineáris méretének egységében adjuk meg, azaz a használt szakasz vagy élhossz az L méret ε -szorosa. Az ε felbontás tehát dimenziótlan szám, mely eleve kisebb egynél, hiszen a teljes kiterjedésnél kisebb mérőegységet érdemes csak tekintenünk. A felbontás finomítása ε csökkenését jelenti. A tapasztalat szerint a megfigyelt felület vagy kerület az ε felbontás negatív hatványaként nő:

$$F(\varepsilon), K(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\gamma}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1, \quad (2.1)$$

ahol γ egy nemtriviális (általában nem egész értékű) pozitív kitevő, ún. *exponens*.² Mivel a felület, kerület mérőszáma nincs értelmezve, a felületet, kerületet ilyenkor érdemesebb a γ exponenssel jellemezni. Látni fogjuk, hogy ez viszont a fraktáldimenzió nevű mennyiséggel áll egyszerű összefüggésben (l. következő szakasz, (2.5)).³

A valóságban előforduló fraktálok csak megközelítik azt a matematikai tulajdonságot, hogy a (2.1) összefüggés az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben is érvényes. Ezt meg-

²A \sim jelölés arányosságot fejez ki, melyben az arányossági tényezőt nem írjuk ki.

³A fraktálok egy másik osztályáról, a kövér fraktálokról a 2.2.3. szakaszban lesz szó.

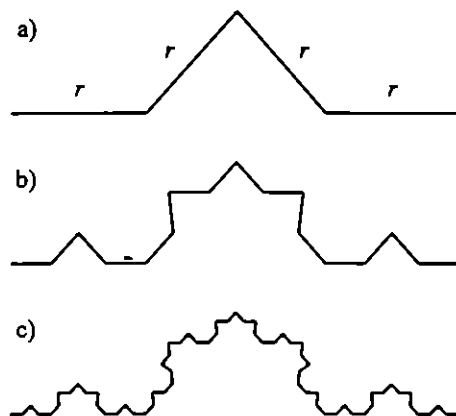
követelni nem csak azért nem tudjuk, mert a felbontás sohasem lehet végtelenül kicsi, hanem azért sem, mert a fraktáltulajdonság bizonyos felbontás alatt általában megszűnik, vagy értelmetlenné válik. (A tüdő felülete a sejtek néhány mikrométeres szintjén már nyilván sima, azaz kétdimenziós, a szigetek területét pedig értelmetlen a néhány méteres skálán vizsgálni, hiszen az ott már a tengerjárás miatt sincs egyértelműen definiálva.)

Az a tény, hogy egy fraktál kerülete, felülete nincs definiálva, azt jelenti, hogy az alakzat nem közelíthető meg jól négyzetekkel, kockákkal. Szerkezete azokétól alapvetően különbözik. Másrészt, az a tény, hogy a (2.1) összefüggés több nagyságrenden keresztül érvényes ε -ban, arra utal, hogy az alakzatot az ebbe a tartományba eső felbontásokkal megfigyelve, az ugyanolyan szerkezetűnek látszik. Ezt röviden úgy szokták megfogalmazni, hogy a fraktálok *önhasonlóak*. Jó példa erre a Hold felszíne, melyen a jellegzetes kráterek uralta szerkezet a milliméteres szinttől a Hold sugarához közelítő 1000 km-es skáláig mindenütt jellemző. A Hold felszíne így mintegy kilenc nagyságrenden keresztül önhasonló. Ezért szükséges a felszint mutató képek mellett megadni a jellegzetes Hold-kráterek méretét vagy nevét is. Amint ez a példa is mutatja, az önhasonlóság általában nem azt jelenti, hogy egy felnagyított részlet egybevágó az egészszel, hanem csak azt, hogy a mintázat jellege ugyanolyan minden skálán.

2.1. táblázat. A hagyományos és a fraktálalakzatok összehasonlítása. $K(\varepsilon)$, $F(\varepsilon)$ az ε pontossággal megfigyelt kerületet és területet jelöli.

HAGYOMÁNYOS ALAKZAT	FRAKTÁLALAKZAT
K kerület és F felület létezik	K vagy F nem definiált
$K(\varepsilon)$ és $F(\varepsilon)$ véges	$K(\varepsilon)$ és $F(\varepsilon)$ nő a felbontással
kis részletei simák	kis részletei tagoltak

A partvonal egy matematikai modelljeként tekintjük az ún. Koch-görbét. Ezt úgy szerkesztjük meg, hogy első lépésként az egységszakasz közepéről szimmetrikusan eltávolítunk egy ($1/2$ -nél rövidebb) darabot, majd az így keletkező két új végponthoz a megmaradó szakaszokkal azonos két új szakaszt illesztünk, háztető alakban (2.1a. ábra). A megmaradó szakaszok hosszát r -rel jelölve ($1/4 < r < 1/2$), így egy $4r$ hosszúságú tört vonalhoz jutunk. Ezután megismételjük az eljárást, ezúttal az r hosszúságú szakaszokon. Az új szakaszok hossza tehát r^2 lesz (2.1b. ábra). A szerkesztés lényege, hogy az eljárást tovább ismételjük, mindig a legújabb szakaszra alkalmazva. Eközben a görbe egyre töredezettebbé válik, s hossza nő. A



2.1. ábra. A Koch-görbe szerkesztésének első három lépése $r = 0,3$ paraméter mellett.

határértékként előálló görbét Koch-görbének nevezzük. Az eljárás n -edik lépésében a szakaszok r^n hosszúságúak, számuk 4^n , a görbe hossza tehát $(4r)^n \gg 1$, hiszen $r > 1/4$. Ebből következik, hogy az $\varepsilon = r^n$ felbontással megfigyelt kész Koch-görbe kerülete, hossza⁴

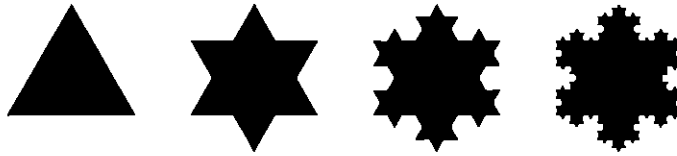
$$K(\varepsilon) = 4^n r^n = 4^{\ln \varepsilon / \ln r} \varepsilon = \varepsilon^{1 + \ln 4 / \ln r}. \quad (2.2)$$

A (2.1)-gyel definiált exponens $\gamma = \ln 4 / \ln(1/r) - 1 > 0$. A Koch-görbe hossza tehát nem definiált, számértéke a felbontás egy pozitív hatványával nő. A kész görbének az egyik eredeti, r hosszú szakaszra eső része az egész Koch-görbe r -szerese. Ugyanez igaz bármely r^m ($m > 1$) hosszúságú szakaszra is, csak akkor a kicsinyítési arány is r^m . A Koch-görbe a fraktálok egyik tipikus példája, ami ráadásul egzakt geometriai értelemben is önhasonló. Érdeemes felismerni, hogy az általa modellezett partvonal annál tagoltabb, minél nagyobb az r paraméter, és ezzel a γ exponens. Az $r \rightarrow 1/4$ határesetben viszont a görbe egy egyenes vonalszakaszba megy át, hiszen az intervallumok túl rövidek ahhoz, hogy háromszöget alkothassanak. A sima vonalak hossza nem függ a felbontástól, s ennek megfelelően a γ kitevő ekkor tényleg eltűnik.

2.1. feladat. Vizsgáljuk meg, hogyan változik egy hagyományos alakzat, az egység sugarú kör kerülete a felbontással, ha a kör kerületét a beleírt szabályos n -szög kerületével közelítjük, s annak élhossza adja a felbontást ($n \gg 1$).

⁴Ebben a fejezetben az \ln jelölés tetszőleges alapú logaritmusnak is tekinthető.

2.2. feladat. Határozzuk meg a három triadikus ($r = 1/3$) Koch-görbéből alkotott Koch-sziget területét! A sziget szerkesztésének első négy lépése a következő:



A Koch-sziget területe véges marad, kerülete azonban végtelenhez tart.

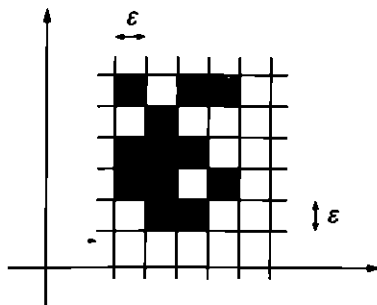
2.1.2. A fraktáldimenzió

A nagy felületű, kerületű alakzatok tehát igen tagoltak, felületük, kerületük mérőszáma nő a felbontással, miközben az egész alakzat véges térrészre korlátozódik. A felület hagyományosan kétdimenziós, a kerület hagyományosan egydimenziós fogalma tehát fellazul, hiszen ezek az alakzatok jelentősen behatolnak a náluk eggyel magasabb dimenziós térbe. Kézenfekvően adódik ezért a dimenzió fogalmának olyan általánosítása, melyben a nagy felületű (kerületű) alakzatok dimenziója kettőnél (egynél) nagyobb, de háromnál (kettőnél) kisebb *tört vagy irracionális szám*, s a dimenzió annál nagyobb, minél tagoltabb az alakzat.

A dimenzió definíciója szempontjából fontos szerepet játszik az alakzat *lefedése* ε lineáris méretű dobozokkal, kockákkal. A hagyományos térbeli testek lefedéséhez szükséges kockák száma nyilván ε^{-3} -al arányos, míg a síkbeli alakzatok ε élű négyzetekkel, ill. a vonalak ε hosszúságú szakaszokkal való lefedése az ε^{-2} , ill. az ε^{-1} szabály szerint nő a lefedés finomításával. A kitevő tehát maga a dimenzió, ami hagyományos alakzatokra nézve egész szám. A Koch-görbe $\varepsilon = r^n$ méretű szakaszokkal való lefedése viszont 4^n darabbal lehetséges, s ez a szám az ε felbontással kifejezve az $\varepsilon^{-\ln 4 / \ln(1/r)}$ szabály szerint nő. A negatív kitevő nagy felületű alakzatokra tehát nem egész szám.

A fraktáldimenzió általános definíciójához tekintsünk egy ponthalmazt, melyet a $d = 1$ -, 2 - vagy 3 -dimenziós euklideszi térben (azaz egy vonal mentén, síkon vagy térben) helyeztünk el. Legyen $N(\varepsilon)$ az alakzat ε lineáris méretű d -dimenziós kockákkal történő lefedéséhez szükséges kockák *minimális száma* (2.2. ábra). Ez a szám a felbontással nyilván nő, ráadásul a tapasztalat szerint a felbontás negatív hatványaként, de a D_0 kitevő nem feltétlenül egyezik meg a tér d dimenziójával. Az

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1 \quad (2.3)$$



2.2. ábra. A fraktáldimenzió mérése. Egy ponthalmazt (vagy bármilyen alakzatot) ε élhosszúságú d dimenziójú kockákkal fedünk le, s megszámloljuk, hogy hány kockába esik pont (szürke dobozok). Ez a szám $N(\varepsilon)$. Az ε felbontás nagyságát csökkentve $N(\varepsilon)$ nő az $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}$ összefüggés szerint, ahol D_0 a keresett fraktáldimenzió.

összefüggés definiálja a vizsgált alakzat D_0 fraktáldimenzióját. Átrendezve,

$$D_0 = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1. \quad (2.4)$$

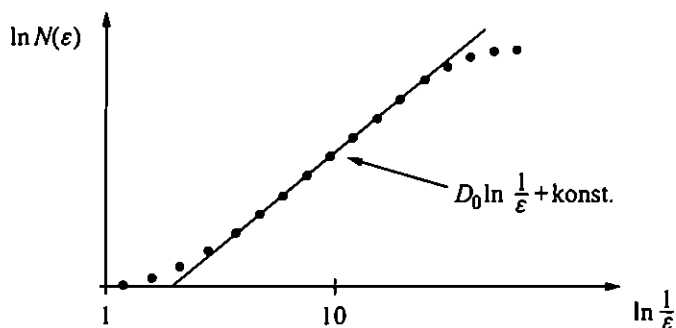
A fraktáldimenzió tehát leolvasható a lefedő dobozok számának felbontásfüggéséből (2.3). Ez a szám hagyományos alakzatokra megegyezik d -vel, de fraktálokra annál általában *kisebb*. A (2.3) összefüggésnek (2.1)-hez hasonlóan több ε -nagyságrenden keresztül kell teljesülnie (l. 2.3. ábra).

2.3. feladat. Határozzuk meg az egységintervallum és az egységnyi oldalhosszúságú derékszögű háromszög lefedéséhez szükséges dobozok számát! Mutassuk meg, hogy dimenziójuk a (2.3) definícióval valóban 1, ill. 2.

Ezek után nyilvánvaló a megfigyelt kerülettel és felülettel való kapcsolat is, ami a lefedő dobozok száma megszorozva a dobozok hosszával, ill. területével: $K(\varepsilon) = \varepsilon N(\varepsilon)$, ill. $F(\varepsilon) = \varepsilon^2 N(\varepsilon)$. A (2.1)-ben fellépő γ kitevő tehát

$$\gamma = D_0 - 1, \quad \text{ill. } \gamma = D_0 - 2 \quad (2.5)$$

attól függően, hogy kerületről vagy felületről van-e szó. A megfigyelt felület vagy kerület növekedési üteme a fraktáldimenzió egyértelmű függvénye. Az ilyen rendszerek jellemzésére kerületük vagy felületük mérőszáma helyett fraktáldimenziójuk (vagy γ exponensük) alkalmas.



2.3. ábra. A fraktáldimenzió a dobozszám és a felbontás reciprokának log-log skálán történő ábrázolásakor adódó egyenes meredeksége. Az $\ln N - \ln 1/\varepsilon$ görbe az egységhez közeli felbontásokra és a nagyon kicsikre eltér a D_0 meredekségű egyenestől. Az eltérés oka, hogy durva felbontással nem várható hatványviselkedés, ill. az, hogy nagyon finom skálán új effektusok lépnek be, s a rendszer másként kezd viselkedni.

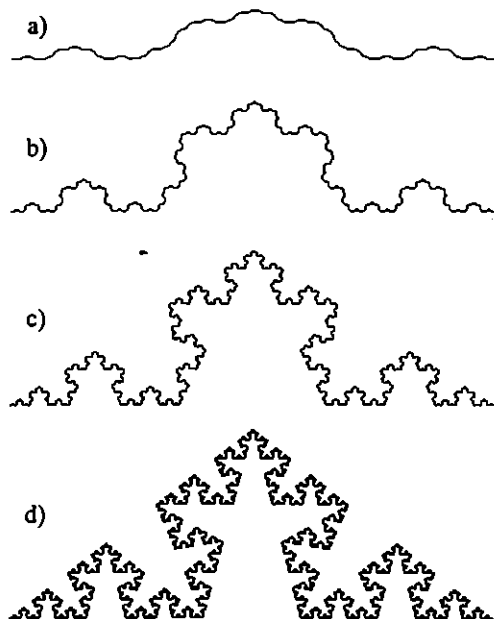
A Koch-görbe fraktáldimenziója a fentiek szerint

$$D_0 = \frac{\ln 4}{\ln(1/r)}, \quad (2.6)$$

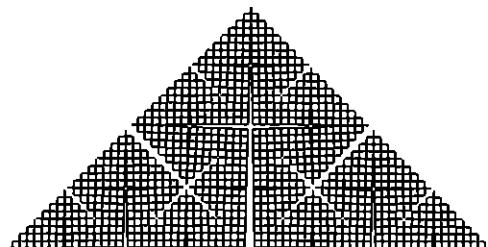
ami 1 és 2 közé eső szám. A triadikus ($r = 1/3$) esethez a $D_0 = \ln 4 / \ln 3 = 1,262$ dimenzió tartozik.⁵ A megfigyelt terület, mint láttuk, az ε^{1-D_0} összefüggés szerint nő, a megfigyelt felület viszont ε^{2-D_0} szerint csökken. Ez azt jelenti, hogy ha a Koch-görbét ε oldalélű négyzetekkel fedjük le, akkor az alakzat területe zérushoz tart, a görbe tehát a sík semmilyen részét nem tölti ki. Bonyolultabb viszont bármely sima görbénél, s ezt mutatja 1-nél nagyobb dimenziója is.

Az érdekesség mértékét megadó r paraméterrel a dimenzió monoton növekszik. Az $r = 1/4$ választás a sima szakasznak, s ennek megfelelően egydimenziós objektumnak felel meg. Az $1/4$ -hez közeli r paraméterű Koch-görbék csak enyhén rücskösök (mint pl. egy karfiolszelet pereme), az $r = 1/3$ körüli $D_0 = 1,2 - 1,3$ értékek tartoznak a szigetek átlagos dimenziójához vagy a Hold-felszín egy metszetének dimenziójához (2.4. ábra). Az $r = 1/2$ -hez közeli értékek igen tagolt görbékhez tartoznak, melyek dimenziója közel esik kettőhöz (l. 2.5. ábra). A természetben érthető módon gyakoriak a közel síkkitöltő görbék és térkitöltő felületek. Ilyenek

⁵Az irracionális számokat most és a továbbiakban három tizedesre adjuk meg.



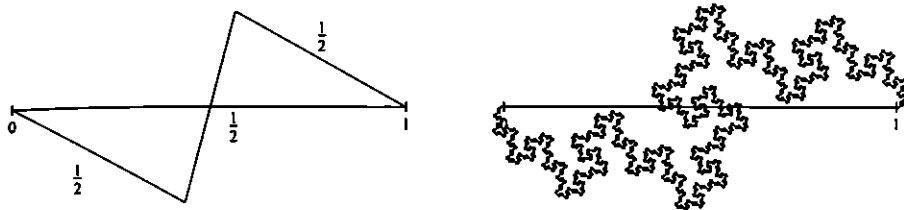
2.4. ábra. Koch-görbék az $r = 0,26, 0,3, 0,35, 0,4$ paraméterekkel. Nagyobb r paraméterhez „rücskösebb” görbe és nagyobb fraktáldimenzió tartozik. A dimenziók rendre $D_0 = 1,029, 1,151, 1,321$ és $1,513$.



2.5. ábra. Egy $r = 0,49$ paraméterű Koch-görbe az első hat szerkesztő lépést követően. A kész Koch-görbe majdnem síkkitöltő, dimenziója $D_0 = 1,943$.

a folyóhálózatok az egész vízgyűjtő területükre kiterjedő mellékfolyók, patakok, vízfolyások rendszerével, az élőlények érhálózata a nyirokkeringéssel és a fák sűrű lombkoronája is.

2.4. feladat. Számoljuk ki az ábrán látható Koch-típusú fraktál dimenzióját!



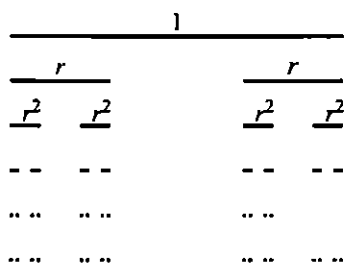
(Egységnyi hosszúságú szakaszra mérjük fel három $1/2$ hosszúságú szakaszt, s ezt arányosan lekicsinyítve ismétljük az újonnan keletkezett szakaszokon.)

2.2. Fraktáltípusok

2.2.1. Egzaktnál önhasonló fraktálok

Az egyszerű képletekkel megadható dimenziójú fraktálok fontos csoportját alkotják az egzaktnál önhasonló fraktálok, melyeknek nem csak kis részletei hasonlítanak egymáshoz, hanem ezek egyben az egészhez is hasonlóak.

Az *egyskálájú fraktálok* N azonos részből állnak, melyek mindegyike pontosan ugyanazon $r < 1$ faktorral kicsinyített mása az egésznek. A Koch-görbe is nyilván ilyen típusú. Egy másik jellegzetes példa az ún. Cantor-halmaz. Ezt úgy kapjuk, hogy az egységintervallumból először a két szélső r hosszú szakaszt tartjuk meg, majd ugyanilyen arányú kivágást végzünk a megmaradt r , majd r^2 stb. hosszú szakaszokon (2.6. ábra). Mivel az $\varepsilon = r^n$ hosszú szakaszokkal történő lefedéshez szükséges szakaszok száma 2^n , a lefedő intervallumok száma $N(\varepsilon) = \varepsilon^{\ln 2 / \ln r}$, s a



2.6. ábra. A Cantor-halmaz szerkesztésének első öt lépése $r = 0,3$ paraméter mellett. A kész halmaz dimenziója $D_0 = 0,576$.

fraktáldimenzióra a

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln(1/r)} \quad (2.7)$$

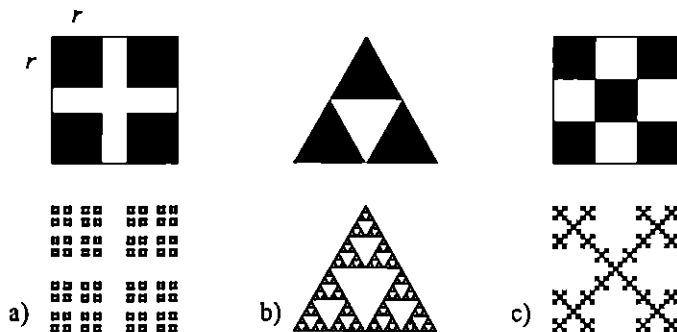
összefüggést kapjuk. A Cantor-halmaz nem alkot folytonos görbét, hanem egy szét-szórt ponthalmaz, mely (megszámlálhatatlanul) végtelen sok pontból áll. Dimenziója ennek megfelelően még egynél is kisebb.

A teljes Cantor-halmaz $N = 2$, a teljes Koch-görbe $N = 4$ azonos részből áll, melyek egyben a teljes fraktál \tilde{r} arányban kicsinyített részei. Az ilyen, N egységből képzett önhasonló alakzatok fraktáldimenziójára a fentiek alapján azt várjuk, hogy

$$D_0 = \frac{\ln N}{\ln(1/r)} \quad (2.8)$$

legyen. Ez valóban be is látható, hiszen az ε felbontáshoz tartozó dobozok minimális $N(\varepsilon)$ száma nyilván $NN_1(\varepsilon)$, ahol $N_1(\varepsilon)$ az egyes részek lefedéséhez szükséges dobozok száma. Ez viszont a hasonlóság miatt nem más, mint a teljes rendszert lefedő dobozok száma az $1/r$ -szer megnövelt dobozmérettel: $N_1(\varepsilon) = N(\varepsilon/r)$. Összesen tehát $N(\varepsilon) = NN(\varepsilon/r)$. Ebbe a (2.3) definíciót behelyettesítve az $Nr^{D_0} = 1$ kapcsolatra jutunk, ami (2.8)-cal ekvivalens.

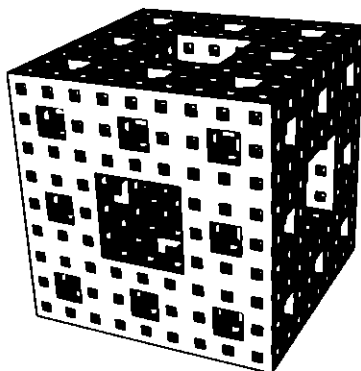
2.5. feladat. Határozzuk meg az alábbi szerkesztési eljárások sokszoros ismétlésével előállítható fraktálok, a) a Cantor-felhő, b) a Sierpinski-háromszög és c) a hópehelyfraktál dimenzióját.



Az ábrák felső részén feltüntetett kiindulási fekete alakzatból kivágjuk a fehér részeket, majd a megmaradó síkidom megfelelő részeiből önhasonló módon újra kivágjuk, s ezt ismételve kapjuk az alsó képeken ábrázolt fraktálokat.

2.6. feladat. Határozzuk meg a Cantor-felhő megfigyelt kerületének és területének arányát! Milyen paraméterértékekre divergál a kerület?

2.7. feladat. A porózus, nagy felületű anyagok egyszerű modelljéhez jutunk az ún. Menger-szivacs szerkesztésével. Az egységkockából vágjunk ki egy olyan térbeli szabályos keresztet, mely 7 egybevágó, $1/3$ élhosszú kockából áll. Majd ugyanezt végezzük el a megmaradt, egyre kisebb kockákban is. Mi a Menger-szivacs fraktáldimenziója?

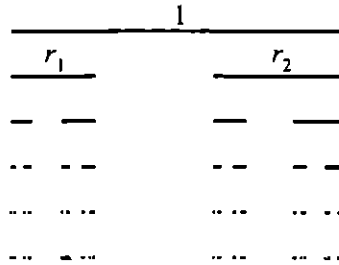


Többskálájú fraktálról akkor beszélünk, ha az N olyan részből áll, melyek mindegyike valamely $r_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, N$ faktorial kicsinyített mása az egésznek. Ekkor a lefedéshez szükséges teljes dobozzám $N(\varepsilon) = \sum_{j=1}^N N_j(\varepsilon)$. Másrészt viszont a hasonlóság miatt a j -edik részt lefedő dobozok száma ugyanaz, mint a teljes rendszert lefedő dobozok száma az $1/r_j$ -szer megnövelt dobozmérettel: $N_j(\varepsilon) = N(\varepsilon/r_j)$. Ezzel $N(\varepsilon) = \sum_{j=1}^N N(\varepsilon/r_j)$, s a (2.3) definíciót behelyettesítve a

$$\sum_{j=1}^N r_j^{D_0} = 1 \quad (2.9)$$

kapcsolatra jutunk. A fraktáldimenziót ilyenkor tehát egy implicit egyenlet határozza meg, melyet csak numerikusan lehet megoldani, explicit képlet már nem létezik rá.

Egyszerű példa többskálájú fraktálokra a kétskálájú Cantor-halmaz. Szerkesztésének első lépésében a bal oldalon r_1 , a jobb oldalon r_2 hosszúságú szakaszt tartunk meg az egységintervallumból. Ezt a szabályt ismétljük az egyre kisebb megmaradó

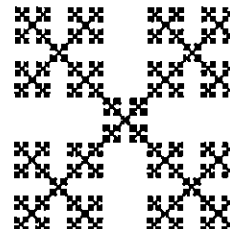
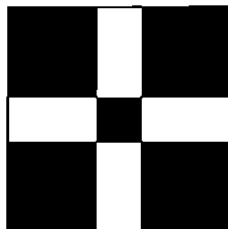


2.7. ábra. Kétskálájú Cantor-halmaz szerkesztésének első öt lépése $r_1 = 0,25$, $r_2 = 0,4$ paraméterek mellett. Rekurzív módon vágunk ki középen szakaszokat úgy, hogy bal oldalon az r_1 -szerese, jobb oldalon pedig az r_2 -szerese maradjon meg az eredetinek.

szakaszokon is (l. 2.7. ábra). Legyen például $r_1 = 0,25$ és $r_2 = 0,4$. A $(0,25)^{D_0} + (0,4)^{D_0} = 1$ egyenlet numerikus megoldása a kitevőre a $D_0 = 0,605$ fraktáldimenziót adja.

2.8. feladat. Határozzuk meg a kétskálájú Cantor-halmaz dimenzióját az $r_2 = r_1^2$, $r_1 = 1/2$ speciális esetben.

2.9. feladat. Határozzuk meg annak a kétskálájú hópehelyfraktálnak a dimenzióját, melyet az egységnégyzetből úgy kapunk, hogy az első lépésben a négy sarokban



egy-egy $2/5$ élhosszúságú négyzetet tartunk meg, középen pedig egy $1/5$ élhosszúságút, s az eljárást minden megmaradt négyzetre ugyanígy alkalmazzuk.

2.2.2. Összevetített fraktálok

A fraktáloknak – akár egzaktul önhasonlók, akár nem – létezik egy fontos osztályuk, amelyben a fraktálok mintegy részekre bonthatók. Ez akkor áll fenn, ha egy fraktál két egyszerűbb fraktál összevetítésekként adódik.

Első példaként tekintsük a Cantor-szálak esetét. Ezt úgy szerkesztjük, hogy az egységnégyzetből kivágunk középről szimmetrikusan egy téglalapot oly módon, hogy a két megmaradó téglalap r vastagságú és egységnyi magasságú legyen. A következő lépésekben ugyanilyen módon ritkítjuk a megmaradó, mindig egységnyi magasságú, de egyre keskenyebb téglalapokat (2.8. ábra). Az eredmény végtelen sok



2.8. ábra. Cantor-szálak szerkesztésének első négy lépése $r = 0,4$ paraméter mellett. Hasonlóan szerkesztjük, mint a Cantor-halmazt, csak most nem egy szakaszból, hanem egy négyzetből indulunk ki, s középről nem szakaszokat, hanem téglalapokat vágunk ki. A dimenzió $D_0 = 1,756$.

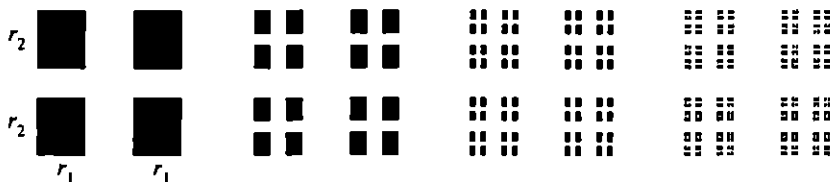
párhuzamos egységintervallum halmaza, melyek egy vízszintes vonallal elvágva az r paraméterű Cantor-halmazt adják. A Cantor-szálak együttese az egységintervallum és az r paraméterű Cantor-halmaz összevetítése, más szóval azok direkt (vagy Descartes-féle) szorzata. A Cantor-szálak dimenziójának meghatározásakor vegyük észre, hogy az $\varepsilon = r^n$ élhosszú négyzetekkel való lefedéskor 2^n számú oszlopot kapunk, melyek mindegyike $1/\varepsilon$ számú dobozt tartalmaz. A lefedő dobozok száma ezért $N(\varepsilon) = \varepsilon^{(\ln 2 / \ln r - 1)}$. A Cantor-szálak dimenziója tehát

$$D_0 = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/r)}, \quad (2.10)$$

azaz eggyel nagyobb a Cantor-halmazénál. A Cantor-szálak érdekes tulajdonsága, hogy kerületük nő, területük pedig csökken a felbontással. A K megfigyelt kerület kifejezhető a T megfigyelt terület egy *negatív* hatványaként: $K \sim T^{-\beta}$, ahol β pozitív. A kerület tehát annál nagyobb, minél kisebb a terület!

2.10. feladat. Fejezzük ki a β kitevőt a fraktáldimenzióval!

Az aszimmetrikus Cantor-felhőt úgy kapjuk, hogy az egységnégyzet közepéből egy olyan keresztet vágunk ki szimmetrikusan, hogy utána négy egybevágó, r_1 vastagságú és r_2 magasságú téglalap maradjon vissza (2.9. ábra). Utána ezt a kivágási eljárást ismételjük minden téglalapban az r_1 és r_2 arányokat megtartva. Eredményül egy ponthalmazt kapunk, mely egyre kisebb téglalapokban koncentrálódik. Az $\varepsilon =$



2.9. ábra. Aszimmetrikus Cantor-felhő szerkesztésének első négy lépése $r_1 = 0,3$, $r_2 = 0,4$ paraméterek mellett. Az egységnégyzetből szimmetrikus kereszt alakban úgy vágunk ki téglalapokat, hogy a megmaradó kis téglalapok az eredeti hosszúságnak r_1 -, illetve r_2 -szeresei legyenek, majd ezt rekurzív módon ismételjük.

r_1^n élhosszú négyzetekkel való lefedés $2^n = \varepsilon^{\ln 2 / \ln r_1}$ számú oszloppal lehetséges. Ezek mindegyike most kevesebb, mint $1/\varepsilon$ számú dobozt tartalmaz, hiszen a függőleges irányban is fraktálról van szó, egy r_2 paraméterű Cantor-halmazról. Az $\varepsilon = r_1^n$ élhosszú dobozok tehát ritkábban helyezkednek el, mint egy függőlegesen folytonos alakzat esetén. Egy oszlopba eső számuk $\varepsilon^{-\ln 2 / \ln(1/r_2)}$ -ként becsülhető, ahol $\ln 2 / \ln(1/r_2)$ a függőleges irányban kialakuló Cantor-halmaz fraktáldimenziója. A lefedő dobozok száma ezért $N(\varepsilon) = 2^n \varepsilon^{-\ln 2 / \ln(1/r_2)} = \varepsilon^{(\ln 2 / \ln r_1 - \ln 2 / \ln(1/r_2))}$. A fraktáldimenzió tehát

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln(1/r_1)} + \frac{\ln 2}{\ln(1/r_2)}. \quad (2.11)$$

Ha $r_1 = r_2 \equiv r$, akkor $D_0 = \ln 4 / \ln(1/r)$, ami $r > 1/4$ -re formálisan ugyanakkora, mint a Koch-görbe dimenziója. A két fraktál alapvetően különbözik, hiszen az egyik egy töredezett vonal, a másik pedig egy síkban szétszórt pontthalmaz. Ez a példa jól mutatja, hogy a fraktáldimenzió az alakzatoknak csak egyetlen mérőszáma, melynek azonosságából az alakzatok azonossága nem következik.

A két, egyenes szakaszba ágyazott tetszőleges fraktál összevetítésével kapott összetett fraktál dimenziójának meghatározása azon alapul, hogy bármely ε méretű négyzettel való lefedéséhez szükséges dobozok száma szorzat alakban áll elő: $N(\varepsilon) = N^{(1)}(\varepsilon)N^{(2)}(\varepsilon)$, ahol $N^{(1)}(\varepsilon)$ a vízszintes tengelyre merőlegesen álló ε vastagságú oszlopok száma, $N^{(2)}(\varepsilon)$ pedig a vízszintes tengellyel párhuzamos ε vastagságú sávok száma. Mindegyik $N^{(i)}$ a hozzá tartozó fraktál $D_0^{(i)}$ dimenziója szerint növekszik, azaz $N^{(i)}(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0^{(i)}}$. Ezek összevetítéséből $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0^{(1)} - D_0^{(2)}}$, azaz a teljes fraktáldimenzió

$$D_0 = D_0^{(1)} + D_0^{(2)}. \quad (2.12)$$

Az összetett fraktálok dimenziója tehát az egyes összetevők dimenzióinak összege. Az egyes komponensek $D_0^{(i)}$ dimenzióit szokás *parciális dimenzióknak* is nevezni.

Ez az összegszabály nemcsak egydimenzióba ágyazott, hanem tetszőleges fraktálok direkt szorzatára is érvényes, és a komponensek száma is tetszőleges lehet. Ugyanez az összefüggés érvényes a hagyományos alakzatokra is, hiszen a sík pl. két egyenes direkt szorzata, s dimenziója valóban $1 + 1$. Fontos hangsúlyozni, hogy az összegszabály nemcsak egyenesek mentén, hanem tetszőleges sima görbe vonalak mentén összevetített fraktálokra is érvényes. Az ilyen görbék menti vetítés ugyanis egy sima transzformáció, ami csak a (2.3) definícióban ki nem írt együttthatót módosítja, de a hatványfüggés kitevőjét, a dimenziót nem képes megváltoztatni.

2.11. feladat. Hogyan adható meg az egységkocka kivágásaival az a szerkesztés, ami a kocka élei mentén elhelyezett három, $r = 1/3$ paraméterű Cantor-halmaz direkt szorzatához vezet? Hogyan viszonyul ezen halmaz megfigyelt térfogata a Menger-szivacséhoz (2.7. feladat), ugyanannál az $\varepsilon = 3^{-n}$ felbontásnál?

2.2.3. Sovány fraktálok – kövér fraktálok

Ha egy d -dimenzióba ágyazott fraktált d -dimenziós, ε méretű kockákkal fedünk le, akkor a fraktál $V(\varepsilon)$ *megfigyelt térfogatát* a

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^d N(\varepsilon) \quad (2.13)$$

összefüggés szerint kapjuk. Ez a hagyományos térfogatfogalom általánosítása.⁶ A megfigyelt térfogat a lefedő dobozok számának (2.3) felbontásfüggése miatt a

$$V(\varepsilon) \sim \varepsilon^{d-D_0}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1 \quad (2.14)$$

szabály szerint változik. A tér és a fraktál dimenziója közötti különbséget szokás a fraktál kiegészítő dimenziójának, *kodimenziójának* nevezni. Az eddig vizsgált esetek fraktáldimenziója kisebb, mint a tér dimenziója, a megfigyelt térfogat tehát *csökken* a felbontással. Ezeket a fraktálokat *sovány fraktáloknak* nevezhetjük, hiszen megfigyelt térfogatuk eltűnne az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben. Ezt úgy is szokták mondani, hogy az ilyen fraktálok *nem térkitöltők*, matematikai értelemben *nullmértékű halmazok*. *Nincs térfogatuk*, de van kiterjedésük, sőt végtelen a megfigyelt felületük. Ezt láttuk a síkba ágyazott Koch-görbe példáján, ahol a kétdimenziós térfogat – a felület – csökkent, a hossz pedig nőtt a felbontással.

⁶A megfigyelt felület ebben az általánosított képből az $F(\varepsilon) = \varepsilon^{d-1} N(\varepsilon)$ mennyiség, ami $d = 2$ -re pl. a megfigyelt kerület.

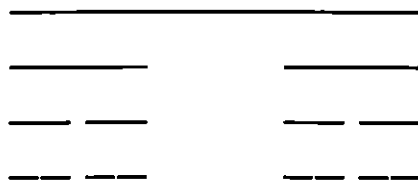
Az a tény, hogy egy halmaz fraktáldimenziója megegyezik a tér dimenziójával, azaz $D_0 = d$, nem feltétlenül jelenti azt, hogy a halmaz egy szokásos alakzat vagy test. Annak ellenére, hogy a megfigyelt térfogata elegendően kis felbontással valamely véges V érték, előfordulhat, hogy az alakzat szerkezete alapvetően tagolt. Az ilyen alakzatot *kövér fraktálnak* nevezzük: ezek egyes részei lyukacsosak, más részei viszont simának tűnnek. Ezért a fraktálgörbével határolt „tömör” síkbeli alakzatok, mint pl. a 2.2. feladat Koch-szigete, nem kövér fraktál.

A kövér fraktálok egy mérhető tulajdonsága, hogy a viszonylag durva felbontással megfigyelt térfogat függ a felbontástól, de úgy, hogy a V térfogattól mért *eltérés* a felbontás egy hatványával arányosan csökken:

$$\boxed{V(\varepsilon) - V \sim \varepsilon^\alpha.} \quad (2.15)$$

Itt α egy pozitív szám, ami rendszerint 1-nél kisebb, a kövér fraktál exponense. Ez nem dimenzió, hanem a véges felbontással megfigyelt alakzat és az alakzat különbségének kodimenziója.

Egyszerű példákat kaphatunk kövér fraktálokra a Cantor-féle szerkesztés módosításával. Kezdődjön pl. a szerkesztés az első lépésben az egységintervallum középső egyharmada eltávolításával, de ezután már a maradék $1/3$ hosszú szakaszoknak csak az $1/9$ -ét távolítsuk el (ne az $1/3$ -át), az így keletkezetteknek az $1/27$ -ét, az n -edik lépésben a megfelelő intervallum $1/3^n$ -szeresét (2.10. ábra). A kivágott szakaszok hossza jóval gyorsabban csökken, mint a triadikus Cantor-halmaz esetében.



2.10. ábra. Kövér fraktál. A Cantor-halmazzal ellentétben az egyes szakaszoknak nem azonos hányadát távolítjuk el, hanem csökkenőt, esetünkben rendre $1/3$, $1/9$, $1/27$, ..., $1/3^n$ -szeresét. Az így szerkesztett halmaz teljes hossza nem nullához, hanem egy nullánál nagyobb véges számhoz tart, dimenziója $D_0 = 1$, kövér fraktál exponense $\alpha < 1$.

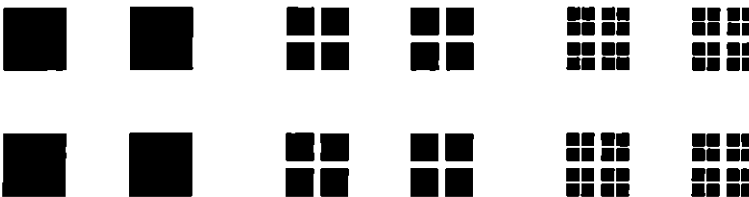
2.12. feladat. Határozzuk meg a fenti eljárással kapott kövér fraktál V térfogatát (hosszát) és exponensét.

2.13. feladat. Tekintsünk egy olyan Cantor-szerkesztést, melyben az első lépésben megtartott intervallumok hossza $r_1 < 1/2$, a másodikban ezek $r_2 < 1/2$ -szerese, az n -edikben az előző $r_n < 1/2$ -szerese. Határozzuk meg az (r_1, r_2, \dots) sorozat ismeretében a D_0 fraktáldimenziót. Mi a fraktál kövérségének, $D_0 = 1$ -nek a feltétele?

Kétdimenziós kövér fraktálokat kaphatunk a 2.10. ábra szerkesztése és egy intervallum összevetítéséből és a kövér Cantor-halmaz önmagával való direkt szorzataként is. Ezek a kövér Cantor-szálak (2.11. ábra), ill. a kövér Cantor-felhő (2.12) is olyan síkbeli alakzatot képeznek, melyekben a fehér és fekete részek mindketten véges területűek, de mégis igen bonyolultan egymásba ágyazottak.



2.11. ábra. A kövér Cantor-szálak szerkesztésének első három lépése.



2.12. ábra. A kövér Cantor-felhő szerkesztésének első három lépése.

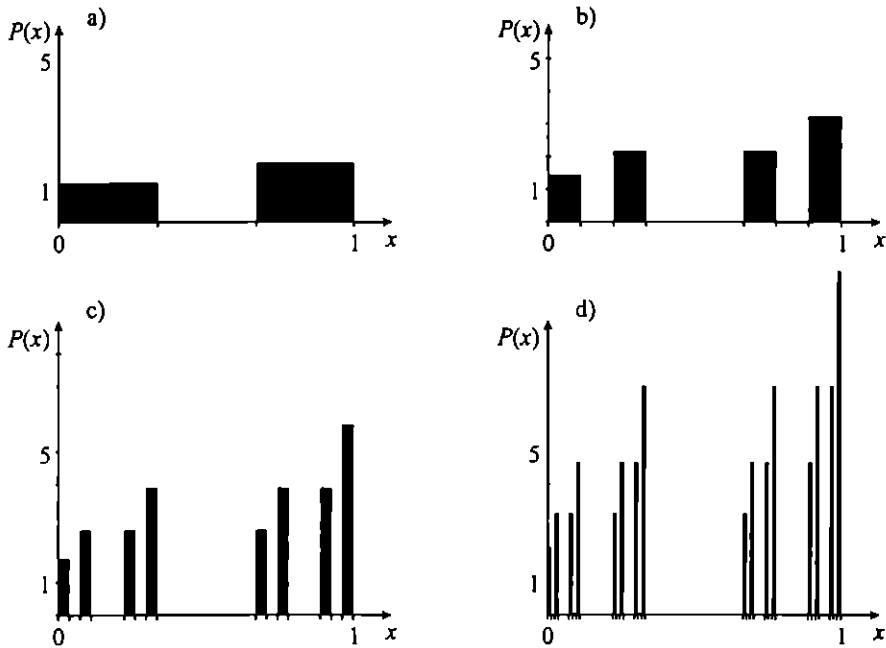
A továbbiakban a sovány fraktálok jelzőjét elhagyjuk, egyszerűen fraktáloknak nevezzük őket, a kövér fraktálokat viszont mindig pontosan megnevezzük.

2.3. Fraktáeloszlások

A természeti jelenségekben a fraktálok rendszerint nem csupán a geometriai szerkezetet jelentik, hanem egyben valami „történik is” rajtuk. A fraktálokon zajló

folyamatok valamely mérhető mennyiség *eloszlását* hozzák létre. Ez rendszerint gyorsan időfüggetlenné válik. Az ilyen *stacionárius eloszlások* jellege függ a fraktálon zajló folyamat természetétől. Katalizátorokra gondolva, elképzelhető, hogy a reakciótermék nem oszlik el mindenütt egyenletesen, a fraktál bizonyos részein nagyobb, másutt kisebb a reakciósebesség. Ha a fraktál összefüggő szerkezetű és elektromos áram vezetésére képes, akkor, ha feszültséget kapcsolunk a vezető két pontjára, a fraktál különböző helyein erősen különböző árameloszlást tapasztalhatunk. Olyan fraktálokra viszont, melyek valamely lassú kiválási folyamat következtében jönnek létre (pl. elektrolitkiválások), a felület minden pontjához hozzárendelhető annak valószínűsége, hogy éppen ahhoz a ponthoz kötődik egy újabb részecske. Amennyiben a fraktálon részecskék mozognak véletlenszerűen, akkor az alakzat bizonyos pontjait gyakrabban, másokat ritkábban látogathatják meg. Kaotikus rendszerekben a mozgásegyenlet következménye, hogy időfüggetlen eloszlás alakul ki a fázistér valamely részalmazán. Mivel mindegyik eloszlás nemnegatív mennyiségekre vonatkozik, az egész fraktálon ezért egyre normálható. Az ilyen eloszlás tehát tekinthető *valószínűség-eloszlásnak* is, melynek normáltsága azt fejezi ki, hogy az esemény a teljes fraktálon valahol biztosan bekövetkezik. A tapasztalat szerint a fraktálok kialakuló eloszlások igen inhomogének, s maguk is bizonyos értelemben fraktáloknak tekinthetők. Nemcsak az eloszlás tartója (az a halmaz, ahol a függvényérték nullától különbözik) fraktál, hanem az eloszlás belső szerkezete is fraktáltulajdonságokat mutat, de ennek dimenziója eltér a tartó D_0 dimenziójától.

A továbbiakban ilyen erősen inhomogén valószínűség-eloszlásokat vizsgálunk, az egyszerűség kedvéért egydimenzióba ágyazott fraktálokon. Legyen a vizsgált fraktál a triadikus ($r = 1/3$) Cantor-halmaz. Ezen a tartón különböző eloszlások létezhetnek. Példaként tekintsünk egy olyat, melyet a Cantor-halmaz szerkesztésével párhuzamosan konstruálunk meg. Az első lépésben a bal oldali megtartott $1/3$ hosszú intervallumon legyen az eloszlás konstans, és az egész intervallum valószínűsége legyen valamely $p_1 < 1$ szám. Ez lesz az egész eloszlás egyetlen paramétere. Az eloszlás legyen a jobb oldali intervallumon is konstans, de ezen intervallum teljes valószínűsége akkor értelemszerűen $p_2 = 1 - p_1$. A következő lépésben a valószínűségek ugyanilyen arányban osztódnak. Ez azt jelenti, hogy a bal szélső intervallum valószínűsége p_1^2 , a két középső $p_1 p_2$, a jobb szélső pedig p_2^2 . Vegyük észre, hogy a négy intervallum teljes valószínűsége továbbra is 1. A harmadik lépésben az egyes intervallumok valószínűségei balról jobbra rendre p_1^3 , $p_1^2 p_2$, $p_1 p_2^2$, p_2^3 (2.13. ábra). Az n -edik lépésben minden egyes valószínűség a $p_m \equiv p_1^m p_2^{n-m}$ lehetséges értékek egyike, ahol m egész szám, mely legfeljebb az n értéket veheti fel: $m = 0, 1, \dots, n$. Adott m paraméterrel annyi intervallum létezik, ahányféleképpen m elem kiválasztható n közül. Összesen tehát $N_m = \binom{n}{m}$



2.13. ábra. Fraktáeloszlás: valószínűség-eloszlás szerkesztésének első négy lépése, egy $r = 1/3$ paraméterű Cantor-halmazon. Az eloszlás paramétere: $p_1 = 0,4$ ($p_2 = 0,6$). Az a) képen a bal oldali oszlop területe p_1 , a jobb oldalié p_2 . A b) képen az oszlopok rendre p_1^2 , $p_1 p_2$, $p_2 p_1$ és p_2^2 területűek. A c) és d) képeken hasonlóan eljárva, az eloszlás egyre inhomogénebbé válik.

olyan intervallum létezik, melynek valószínűsége $p_m = p_1^m p_2^{n-m}$. Felmerül a kérdés, hogy melyek a *tipikus* intervallumok ebben az eloszlásban. Tipikusnak az olyan, adott m -hez tartozó intervallumokat tekintjük, melyek teljes valószínűsége a lehető legnagyobb.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy a p_1 valószínűség kisebb, mint p_2 . A legkisebb valószínűségű doboz nyilván a bal szélső, a legvalószínűbb viszont a jobb szélső. Ez utóbbi azonban szintén nem tipikus, hiszen csak egyetlenegy létezik belőle. A tipikus dobozok azok, melyek nem túl valószínűtlenek, és egyben *elegetően sokan vannak* ahhoz, hogy a fő járulékot adják a teljes valószínűséghez a szerkesztés bármelyik szintjén, ha $n \gg 1$, vagyis, melyekre $N_m p_m$ maximális. Ráadásul kiderül, hogy a legvalószínűbb dobozok teljes valószínűsége közel egységnyi! Ezek tehát *hűen* reprezentálják az egész eloszlást (l. 2.14. feladat), annak ellenére, hogy az extrémén valószínű vagy valószínűtlen dobozokat nem tartalmaz-

zák. A legvalószínűbb intervallumok ismeretében tehát gyakorlatilag *nem hagyunk ki valószínűséget*. Ezek a dobozok viszont csak az eredeti Cantor-halmaz egy részhalmazához tartozhatnak, mely maga is fraktál. A tipikus dobozok által alkotott fraktál dimenzióját az eloszlás *információs dimenziójának* nevezzük, és D_1 -gyel jelöljük. A tipikus dobozok N^* száma tehát úgy változik a felbontással (ami példánkban $\varepsilon = 3^{-n}$), hogy

$$N^*(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_1}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1. \quad (2.16)$$

Az információs dimenzió a tartó egy részhalmazához, a legvalószínűbb intervallumokhoz tartozik, ezért nem lehet nagyobb a fraktáldimenziónál:

$$D_1 \leq D_0. \quad (2.17)$$

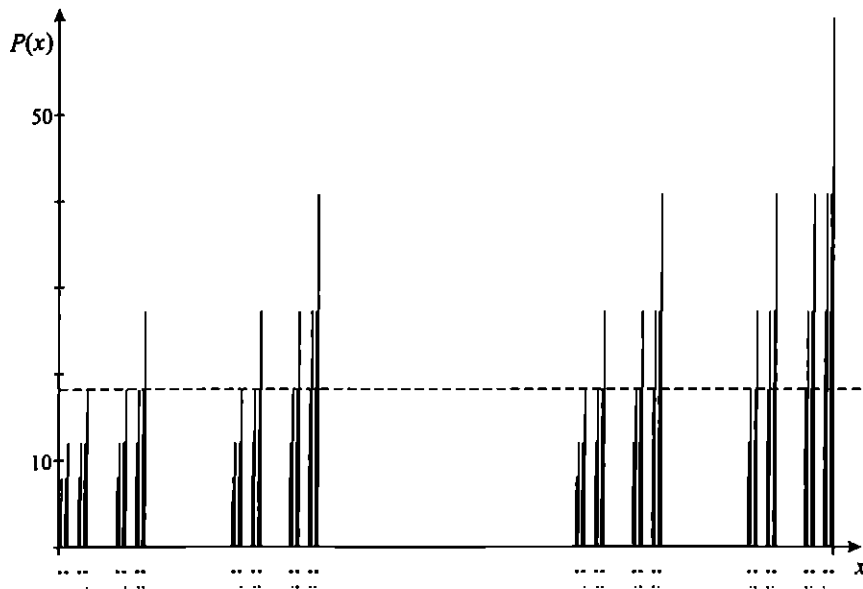
Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az eloszlás homogén: csakis homogén eloszlás információs dimenziója lehet ugyanakkora, mint a fraktáldimenziója. *Fraktáleloszlásokra a (2.17) összefüggés mindig egyenlőtlenségként teljesül.*

Az információs dimenzió annál jobban eltér a fraktáldimenziótól, minél inhomogénebb az eloszlás. Az a halmaz, mely az adott eloszlás szempontjából *tipikusan* viselkedik, azért kisebb (D_1) dimenziójú a teljes fraktálnál,⁷ mert a nagyon valószínű vagy valószínűtlen tartományokat nem tartalmazza (2.14. ábra).

2.14. feladat. A Stirling-formula ($\ln n! = n \ln n$, ha $n \gg 1$) segítségével fejezzük ki a 2.13. ábrán bemutatott példa legvalószínűbb intervallumaihoz tartozó m^* értéket, s abból a D_1 információs dimenziót.

Az információs dimenzió egy numerikus kiértékelésre különösen alkalmas definíciója, mely egyben az elnevezést is indokolja, az eloszlás egy véges ε felbontással történő meghatározásán alapul. Tegyük föl, hogy a lefedő dobozok $P_i(\varepsilon)$ valószínűség-tartalma külön-külön ismert. Az i dobozindex 1-től a nem üres dobozok teljes számáig, $N(\varepsilon)$ -ig terjed. A normáltság azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) = 1$. Az eloszlások inhomogenitását általában *információtartalmuk* jellemzi, ami az eloszlás logaritmusának negatív átlaga. Minimális értékét a homogén esetekben veszi fel, ami azt fejezi ki, hogy a homogén eloszlás hordozza a legkevesebb információt.

⁷Hasonlóan meghatározható annak a halmaznak a fraktáldimenziója, mely az intervallumvalószínűségek q -adik hatványaiból képzett (nem normált) eloszláshoz adja a legnagyobb járulékot, ahol q valós szám. Ez a D_q általánosított dimenzió. Mivel a q súlyozó kitevő tetszőleges lehet, ez mutatja, hogy a fraktáleloszlásokhoz *végtelen* sok dimenzió tartozik. A fraktáleloszlásokat ezért szokás multifraktáloknak is nevezni.



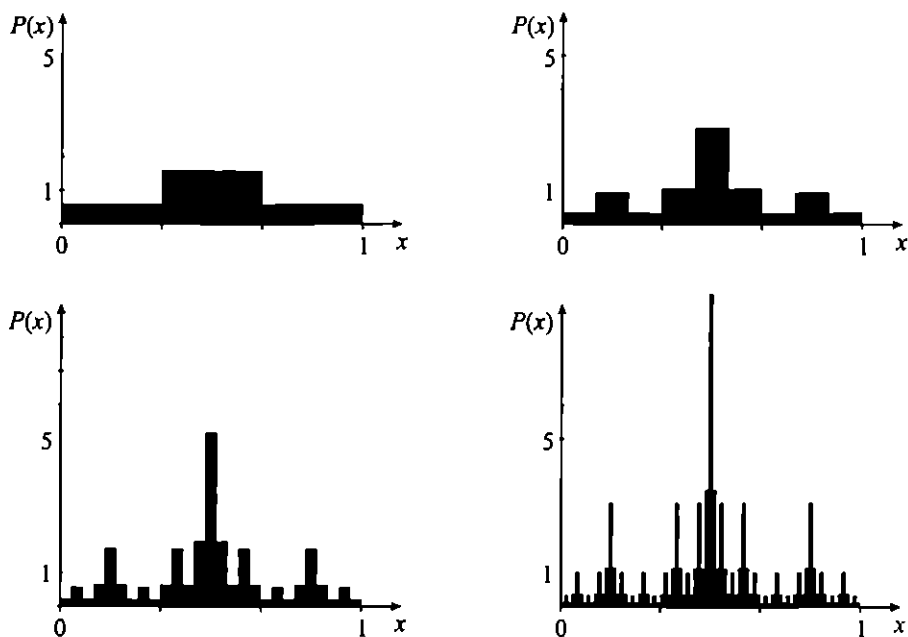
2.14. ábra. A tipikus intervallumok, melyek fraktáldimenziója a D_1 információs dimenzió. Hét szerkesztési lépés után berajzoltuk mind az egész eloszlás tartóját, mind a tipikus intervallumokat. Az ezekhez tartozó oszlopok magasságát szaggatott vonal jelzi. További szerkesztő lépésekben az aktuális tipikus intervallumok egyre dominánsabb hányadát hordozzák a teljes valószínűségnek.

A véges felbontással meghatározott eloszlás $-\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)$ információját nyilván függ a felbontástól. Minél finomabb a felbontás, annál tagoltabb, egyenetlenebb az eloszlás, s annál nagyobb az információ. A tapasztalat szerint az információtartalom növekedése $\ln(1/\varepsilon)$ -nal arányos. Az együtttható az információs dimenzió:

$$-\sum_{i=1}^N P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon) = D_1 \ln(1/\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1. \quad (2.18)$$

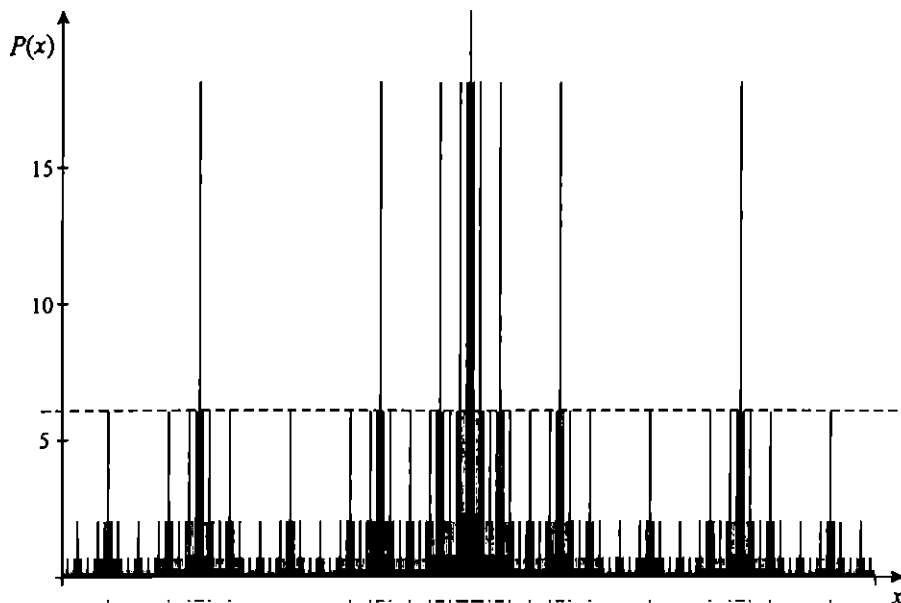
Az információs dimenzió tehát nemcsak a lefedő dobozok számától függ, hanem attól is, hogy azok *mennyire* betöltöttek. A tipikus dobozok, melyek száma $N^*(\varepsilon)$, hűen reprezentálják az egész eloszlást. Teljes valószínűségük gyakorlatilag 1, az egyes dobozoké ezért $1/N^*$. Ennek ismeretében tehát a fenti összeg jó közelítéssel a $\sum_{i=1}^{N^*(\varepsilon)} 1/N^*(\varepsilon) \ln N^*(\varepsilon) \equiv \ln N^*(\varepsilon)$ alakban írható. Innét ismét azt kapjuk, hogy $N^*(\varepsilon) = \varepsilon^{-D_1}$, azaz D_1 valóban a tipikus dobozok fraktáldimenziója. A (2.16) és (2.18) definíciók tehát egyenértékűek.

Megjegyezzük, hogy egy sima tartón, pl. egy folytonos intervallumon is definiálható olyan inhomogén eloszlás, melynek információs dimenziója egynél kisebb törtszám. Erre ad példát a 2.15. és a 2.16. ábra: az egységnyi hosszúságú tartót három egyenlő részre osztjuk, majd p_1 , $p_2 = 1 - 2p_1$, $p_3 = p_1$ valószínűségeket rendelünk hozzájuk. A következő lépésben minden egyes részt ismét háromfelé osztunk, a p_1^2 , $p_1 p_2$, p_2^2 , $p_1 p_2$ és a p_1^2 , $p_1 p_2$, p_1^2 valószínűségeket rendelve az egyes szakaszokhoz. Ha ezt az eljárást a végtelenségig folytatjuk, akkor egy folytonos tartójú eloszlást kapunk, amelynek az információs dimenziója egynél kisebb. Példánk azt mutatja, hogy az eloszlások fraktáltulajdonsága független attól, hogy a tartó fraktál-e vagy sem.



2.15. ábra. Egy folytonos tartójú fraktál-valószínűségeloszlás szerkesztésének első négy lépése a $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,6$, $p_3 = 0,2$ paraméterek mellett.

2.15. feladat. Határozzuk meg a 2.15. és 2.16. ábrákon szerkesztett eloszlás információs dimenzióját.



2.16. ábra. A 2.15. ábrán bemutatott szerkesztés hetedik lépése utáni eloszlás. A 2.14. ábrához hasonlóan – a grafikon alatt – itt is berajzoltuk a tartónak a tipikus intervallumokhoz tartozó részét, valamint egy szaggatott vonallal az ehhez tartozó oszlopok magasságát. (A folytonos tartót külön nem jelöltük, és a középű, a 61,2 magasságú oszlopnak is csak egy része látszik.)

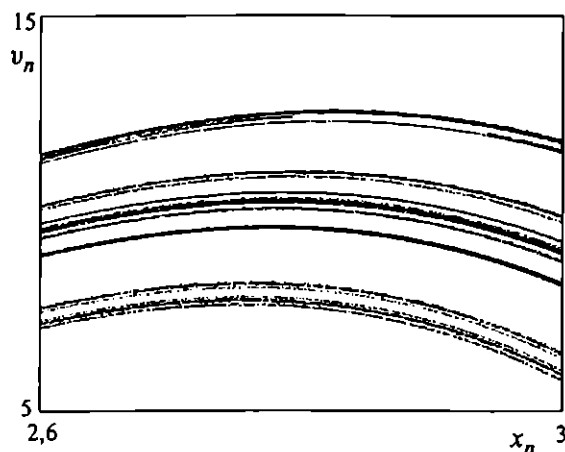
2.4. Fraktálok és káosz

A fraktálok széles csoportjai bonyolult és gyakran véletlen elemeket is tartalmazó folyamatok eredményeként alakulnak ki. Gondoljunk például a partvonalra, a Hold felszínére, a katalizátorokra, a tüdőre vagy a fák lombkoronájára. E folyamatok nagy részéről ma még ahhoz is keveset tudunk, hogy matematikai eszközökkel közelítően modellezni tudnánk őket.

A káosszal kapcsolatos fraktálok különlegesen abban az értelemben, hogy időbeli viselkedéssel, mozgással kapcsolatosak, s véletlen elemeket nem tartalmaznak. Eredetükről jóval többet tudunk, mint a többi fraktáléről. Az ilyen fraktálok egyértelmű következményei a dinamika kaotikusságának. Az eddig vizsgált fraktálokkal ellentétben a szerkesztési szabály nem egy egyszerű, kigondolt utasítás, hanem az magából a *mozgásegyenletből következik*. A szabály rendszerint elég bonyolult ahhoz, hogy a fraktáldimenzió ne legyen megadható képlettel. Az is igaz, hogy a megfigyelt fraktálszerkezetből a mozgás kaotikussága következik. A

kaotikus rendszerekben tehát a *dinamika és a geometria egysége* figyelhető meg. Minél kaotikusabb a mozgás, általában annál bonyolultabb a vele kapcsolatos fraktálszerkezet. A szabályos mozgásokkal nem fraktálok, hanem a hagyományos geometria körébe tartozó egyszerű struktúrák társulnak. A kaotikus mozgás fraktálszerkezete rendszerint nem a valódi térben, hanem a fázistéren figyelhető meg.

A káosz különböző típusaival különböző típusú fraktálok kapcsolatosak. A kaotikus attraktorok jellegzetes szálas szerkezetű alakzatok. Ha egyre kisebb négyzeteket nagyítunk ki egy kaotikus attraktorból (l. 2.17. ábra), akkor nyilvánvalóvá



2.17. ábra. Az 1.4. ábráról (az anharmonikus oszcillátor kaotikus attraktoráról) készített tízszeres nagyítás. További nagyításoknál is megmarad a szálas fraktálszerkezet, egyre inkább egyenes vonalakat adva.

válik, hogy ezek a kis részletek egymáshoz hasonlóak. A majdnem párhuzamos vonalak hasonlítanak a Cantor-szálakra kapott 2.8. ábrához. A *kaotikus attraktor* szerkezete tehát enyhén deformált (többskálájú) *Cantor-szálaknak felel meg*, azaz az attraktor lokálisan egy Cantor-halmaz és egy sima görbe direkt szorzata. A sima görbék a közeli pontok eltávolodási irányának felelnek meg, a Cantor-szerkezet pedig ezekre közel merőleges, és a disszipáció az attraktorhoz vonzódás következtében alakul ki.

Az attraktorok közötti fraktál vonzási határon bolyongó vagy a kaotikus szórásban részt vevő test mozgása még törékenyebb (l. 1.14. ábra). Az ezzel a *tranzien káosszal* kapcsolatos fraktálhalmaz nem tartalmaz folytonos görbét, hanem az *aszimmetrikus Cantor-felhő* szerkezetét mutatja. A halmaz két Cantor-halmaz direkt szorzatának felel meg (l. 2.9. ábra).

Ismét más típusúak a zárt, súrlódásmentes rendszerek káoszáat jellemző fraktálok. A leképezésen az egyszerű mozgásokra jellemző szigetek határa nagyon cakkos, valamelyest hasonlít egy Koch-görbéhez. Ennél sokkal lényegesebb tulajdonság azonban az, hogy a kaotikus sáv kiterjed a sík kétdimenziós tartományaira. Egyre kisebb és kisebb skálán azonban ismét egyszerű mozgásokat mutató szigetek szakítják meg (1.17. ábra). *A kaotikus sáv ezért egy kétdimenziós kövér fraktál.*

A kaotikus attraktoron maga a kaotikus mozgás definiál egy valószínűség-eloszlást. Ez azt adja meg, hogy az attraktor egyes részeit a mozgó test milyen valószínűséggel látogatja meg hosszú ideig tartó kaotikus mozgása során. Ez az eloszlás rendszerint erősen inhomogén, s ezért D_1 információs dimenziója kisebb a kaotikus attraktor D_0 fraktáldimenziójánál, tehát fraktáeloszlás. A dinamika és a geometria fent említett egysége abban nyilvánul meg, hogy a D_1 információs dimenzió és a közeli pályák széttartását jellemző paraméter között *egyértelmű* kapcsolat áll fenn, ahogy azt majd az 5.4.6. szakaszban megmutatjuk.

3. A fraktálok rövid története

A fraktálok első példái matematikai kuriózumként jelentek meg a 19. század második felében. A Cantor-halmazt Georg Cantor, a modern halmazelmélet megalapítója írta le 1883-ban. A Koch-görbe Helge van Koch svéd matematikustól származik 1904-ből. Az ilyen és hasonló példákra biztossá vették, hogy semmilyen természeti jelenséggel nem lehetnek kapcsolatosak, de a matematika épületében mégis meg akarták találni a helyüket. A Koch-görbe például folytonos, de sehol sem sima. Karl Weierstrass talált olyan folytonos függvényt, mely sehol sem differenciálható. Ezeket a felfedezéseket eleinte sokan visszatetszéssel fogadták, amit jól példáznak Ch. Hermite-nek T. Stieltjeshez írott sorai a 19. század végén: „Rémülettől és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, melyeknek nincs deriváltjuk!”. E fejlemények alapjaiban rázták meg a klasszikus matematikát, s az új fogalmak befogadását absztrakt irányokban történő

fejlődés követte. Annak ellenére, hogy a véletlen bolyongás és a fraktálok kapcsolata már a 20. század első negyedében kezdett kirajzolódni, a fraktálok széles körű tudományos jelentőségének felismeréséig még fél évszázadot kellett várni. Ez Benoit Mandelbrot lengyel-francia-amerikai matematikus nevéhez fűződik (1977–1982) éppúgy, mint a *fraktál* elnevezés megalkotása és a fraktáldimenzió fogalmának kialakítása (ez utóbbi F. Hausdorff és A. N. Kolmogorov munkái nyomán). A kaotikus mozgásban a szokatlan fázistérbeli szerkezet jelenlétére Edward Lorenz már 1963-ban rámutatott. A fraktálokkal való pontos kapcsolatot és az információs dimenzió fontosságát a kaotikus attraktorok jellemzésében E. Ott, J. Yorke, C. Grebogi, P. Grassberger és I. Procaccia mutatta ki (1981–83). Érdemes megemlíteni, hogy az információs dimenzió először Rényi Alfréd valószínűségelméleti munkáiban jelent meg az ötvenes években.

II.

Előkészületi fogalmak

Egyszerű mozgások

A legegyszerűbb mozgások egyetlen helykoordináta időbeli változásával kapcsolatosak, olyan rendszerekben, melyek környezete nem hat a testre külső, időfüggő gerjesztőerő formájában. A szabályos, nem kaotikus mozgások legfontosabb tulajdonságait az egyenes menti mozgások példáján tekintjük át, de ennek során lehetőségünk nyílik az általános tulajdonságok megfogalmazására is. Áttekintésünket az instabil és a stabil nyugalmi állapotok környékére jellemző mozgások vizsgálatával kezdjük, melyek lényege *lineáris* közelítésben is megmutatkozik. Ezután megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett jogos a lineáris viselkedés feltételezése. A nyugalmi állapot kis környezetén kívül általában *nemlineáris* viselkedést tapasztalunk, melynek egyik lehetséges megnyilvánulása több stabil és instabil állapot együttlétézése, ill. ilyenek kialakulása a paraméterek változása során. A mozgást a fázistérben követjük nyomon, és feltérképezzük a szabályos időbeli viselkedésre jellemző fázistérbeli geometriai struktúrákat. Ezek közül az instabil állapotból kiinduló görbék, az ún. *stabil és instabil sokaságok*, játsszák a legfontosabb szerepet, mert a lehetséges mozgásoknak mintegy a vázát alkotják. Súrlódás jelenlétében a hosszú idejű mozgások a fázistér attraktoraira húzódnak rá. A szabályos mozgások világában az attraktorok is egyszerűek: nyugalmi állapotnak (fixpontattraktor) vagy időben periodikus viselkedésnek (határciklus-attraktor) felelnek meg.

3.1. Instabilitás, stabilitás

3.1.1. Mozgás instabil állapot környékén, hiperbolikus pont

Az egyszerű mozgások vizsgálatát – a hagyományos megközelítéssel ellentétben – az instabil nyugalmi állapottal és az annak környezetében megfigyelhető viselkedéssel kezdjük.¹

Egy test nyugalmi állapotát valamely x^* helyzetben akkor nevezzük instabilnak (vagy labilisnak), ha a testet egy kissé kimozdított helyzetben elengedve, az az x^* -től egyre távolodó mozgásba kezd. Egyszerű példa erre egy domború edény tetejére helyezett golyó vagy egy hegyére állított ceruza esete (3.1. ábra). Magában



3.1. ábra. Az instabil állapot a domború felület tetejére helyezett golyó és a hegyére állított ceruza példájában. Csak egy pontban lehetséges nyugalmi állapot, amitől bármilyen kis kimozdítás után a test gyorsulva távolodni kezd.

az instabil állapotban nincs mozgás, a hozzá tartozó sebesség eltűnik. Az (x, v) fázistérben az instabil állapot tehát egy $(x = x^*, v = v^* \equiv 0)$ pont, amit ezért *fixpontnak* nevezünk. Egyelőre egyetlen ilyen pontot vizsgálunk, és a koordináta-rendszer kezdőpontját éppen ebbe a pontba helyezzük, vagyis az $x^* = 0$ választással élünk. Az instabil állapot környékén az erő mindig taszító jellegű, a kitéréssel $n\delta$. Egyszerű modellünkben az erőtvény² lineáris, azaz

$$F(x) = s_0^2 x, \quad (3.1)$$

ahol s_0 az instabilitás erősségére jellemző *taszítási paraméter*. Ebben a szakaszban feltesszük, hogy ez a taszítási modell minden kitérésre érvényes. Az együtttható azért írjuk s_0^2 alakban, hogy egyértelmű legyen pozitívítása.

¹Az instabil (és stabil) nyugalmi állapotok általános matematikai meghatározását a 3.5.4. szakasz adja meg.

²Erőn a továbbiakban az egységnyi tömegre ható erőt értjük, ezért ha egyellen lestről van szó, akkor nem lesz szükségünk annak m tömegére.

Súrlódásmentes eset

A mozgást meghatározó Newton-egyenlet azt fejezi ki, hogy a gyorsulás megegyezik az egységnyi tömegre ható erővel. Mivel a gyorsulás a kitérés–idő függvény idő szerinti második deriváltja:³ \ddot{x} , és a súrlódásmentes esetben az egységnyi tömegre csak az instabil állapottól eltávolító $F(x)$ erő hat, a mozgásegyenlet $\ddot{x} = F(x)$. A (3.1) erőtvénnyel az

$$\ddot{x} = s_0^2 x \quad (3.2)$$

egyenletre jutunk.

3.1. feladat. Mutassuk meg, hogy a hegyére állított ceruza függőleges állapota közelében a mozgást a (3.2) egyenlet írja le. Írjuk fel a függőlegestől mért kis φ szögkitérésekre érvényes mozgásegyenletet! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a ceruza egységnyi tömege a hegyétől l távolságban koncentráliódik.

Mint minden lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletnek, (3.2)-nek a megoldása is kereshető exponenciális alakban. Az $x = \exp(\lambda t)$ feltevéssel a $\lambda^2 = s_0^2$ megszorításra jutunk, vagyis a λ kitevő csak a taszítási paraméter, s_0 vagy annak ellentettje, $-s_0$ lehet. Az általános megoldás ezen alapmegoldások lineáris kombinációja, azaz

$$x(t) = c_+ e^{s_0 t} + c_- e^{-s_0 t}, \quad (3.3)$$

amiből a sebesség

$$v(t) = c_+ s_0 e^{s_0 t} - c_- s_0 e^{-s_0 t}. \quad (3.4)$$

Az $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ általános kezdőfeltételhez tartozó megoldásra a (3.3), (3.4) alakból következik, hogy $x_0 = c_+ + c_-$, $v_0 = (c_+ - c_-)s_0$, amiből

$$c_+ = \frac{s_0 x_0 + v_0}{2s_0}, \quad c_- = \frac{s_0 x_0 - v_0}{2s_0}. \quad (3.5)$$

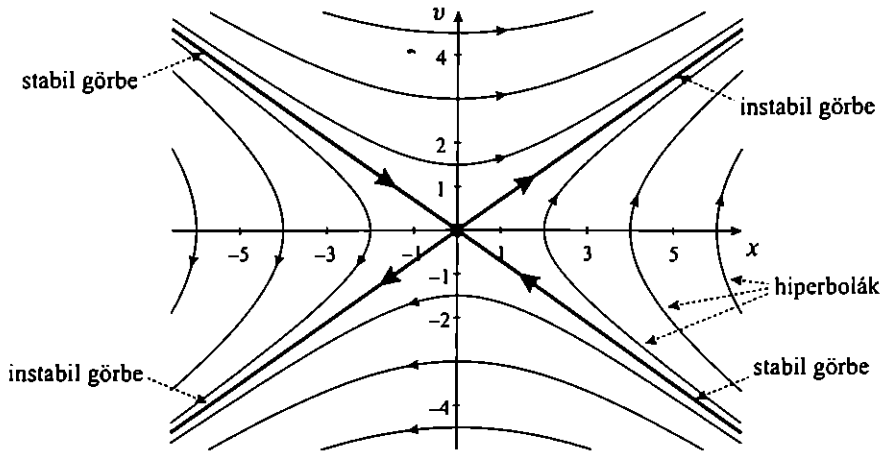
Adott (x_0, v_0) kezdőfeltételhez csak egyetlen c_+ , c_- együtthatópár tartozik, ami mutatja a megoldás egyértelműségét.

A fázistérbeli görbéket az idő kiküszöbölésével kapjuk. Képezzük a $v - s_0 x$ és a $v + s_0 x$ mennyiségeket, melyek (3.3), (3.4) szerint $\exp(\mp s_0 t)$ -vel arányosak, szorzatuk tehát nem függ az időtől. Így a mozgás során bármely x, v értékre fenn kell állnia, hogy

$$v^2 - s_0^2 x^2 = \text{állandó} = v_0^2 - s_0^2 x_0^2. \quad (3.6)$$

³Az időderiváltat a továbbiakban ponttal jelöljük.

A fázistérbeli trajektóriák tehát a fixpont körüli hiperbolák (3.2. ábra). A fixpontot ezért *hiperbolikusnak* nevezük.⁴ A hiperbolák aszimptotái az origón átmenő $v = \pm s_0 x$ egyenletű egyenesek. A hiperbolasereg jellegét tehát a dinamika egyetlen s_0 paramétere egyértelműen meghatározza. Gyenge taszítás (kis s_0) esetén az aszimptoták kis szöget zárnak be az x tengellyel.



3.2. ábra. A hiperbolikus fixpont és környezete (súrlódásmentes eset): néhány hiperbola-trajektória (vékony vonalak) és az aszimptoták (vastag vonalak). A mozgás a vonalakon a nyilakkal jelölt irányban történik. A hiperbolikus pontba bejutni csak az egyik aszimptota, a stabil görbe mentén lehetséges. A taszítási paraméter: $s_0 = 0,7$.

Szinte bármilyen kezdőfeltétel esetén a mozgás egy hiperbolához tartozik, melyen a fázistérbeli pont esetleges kezdeti közeledés után elkanyarodik az origótól, és végül a részecske egyre gyorsabban távolodik. Vegyük észre, hogy az általános eltávolodás ellenére léteznek olyan speciális kezdőfeltételek, *melyekből a fixpontba jutunk*. Ha ugyanis pozitív kezdeti helykoordináta mellett olyan negatív kezdősebességet adunk, mely a

$$v = -s_0 x \quad (3.7)$$

egyenesre esik, vagyis, ha a jól meghatározott sebességgel lökjük az instabil állapot felé a testet, akkor az a (3.3) és (3.5) egyenletek értelmében az

$$x(t) = x_0 e^{-s_0 t} \quad (3.8)$$

⁴Használatos a nyeregpontra elnevezés is.

törvény szerint éppen eljut az origóba (a ceruza éppen a hegyén áll meg). A fixpontba jutás elvileg végtelen hosszú ideig tart, de gyakorlatilag az $1/s_0$ idő néhányszorosa után a test már nagyon jó közelítéssel eléri a fixpontot. Ugyanez érvényes a $v = -s_0x$ aszimptota negatív koordinátaértékekhez tartozó szakaszára, amelyhez pozitív kezdősebességek tartoznak, s amely mentén a mozgás ellentétes irányú.

A másik,

$$v = s_0x \quad (3.9)$$

egyenletű aszimptota mentén az eltávolodás az

$$x(t) = x_0 e^{s_0 t} \quad (3.10)$$

törvény szerint történik, azaz kezdettől fogva tisztán exponenciális ütemű (l. (3.3), (3.5)). Minél közelebbi a kezdőpont a fixponthoz, minél kisebb x_0 , annál tovább marad a test a hiperbolikus fixpont környékén; minél közelebb van a ceruza kezdeti állapota a függőlegeshez, annál tovább tart, amíg feldől.

A $v = -s_0x$ egyenletű aszimptota a fentiek szerint azt a speciális mozgást írja le, mely a fixpontba történő eljutásnak felel meg. Ez utóbbi irányt ezért a hiperbolikus fixpont stabil irányának nevezzük, szemben a másik aszimptota által definiált instabil irányval. Az ezekben az irányokban elhelyezkedő egyenes szakaszok a fixpontból kiinduló *stabil és instabil görbék* részei. A 3.2. ábrán is látható, hogy a fázissíkot a stabil és instabil görbék négy síknegyedre osztják. Vegyük észre, hogy a stabil görbe egyben a *választóvonal* szerepét játssza. A „felette” induló trajektóriák ugyanis a jobbra történő eltávolodásra, a ceruza jobbra dőlésére vezetnek, az „alatta” levők pedig az ellenkező irányú mozgásra.

Az instabilitás a fázistérben mindig hiperbolikus pontok megjelenésével kapcsolatos. Az a naiv (és téves) várakozás, hogy az instabil pont körül a fázistér minden irányában távolodás történjék, arra vezethető vissza, hogy a hétköznapi szóhasználatban akkor mondunk egy nyugalmi állapotot instabilnak, ha egy onnét *kezdősebesség nélkül* kibillentett test távolodik. A stabil irány jelenléte azt mutatja, hogy kezdősebességet is megengedve, nem ennyire egyszerű a helyzet. Az instabil állapot és környezete leginkább áttekinthető képe a fázistérbeli leírásban tárul elénk.

Általános kezdőfeltételek esetén, elegendően hosszú idő eltelte után ($t \gg 1/s_0$) a (3.3) kifejezésben az exponenciálisan növekvő első tag dominál:

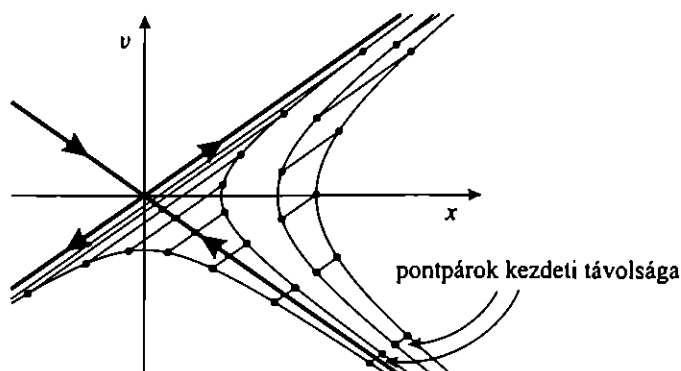
$$x(t) \approx \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{s_0} \right) e^{s_0 t}. \quad (3.11)$$

A részecskék tehát exponenciális ütemben hagyják el az instabil állapotot. Ebből az is következik, hogy *közeli kezdőpontokból induló részecskék egymástól is exponenciális időfüggéssel távolodnak*. Ha ugyanis a kezdőfeltételek kis δx_0 , δv_0 értékekkel

különböznek, akkor a helykoordináták különbsége (3.11) alapján

$$\delta x(t) \approx \frac{1}{2} \left(\delta x_0 + \frac{\delta v_0}{s_0} \right) e^{s_0 t} \quad (3.12)$$

szerint nő. Hasonlóan viselkedik a sebességkülönbség is, $\delta v(t) \approx s_0 \delta x(t)$. A fázistérbeli távolság is exponenciálisan növekszik, s az eltávolodás mindig az instabil görbe mentén történik (3.3. ábra). A hiperbolikus fixpontok körül tehát a rendszer mindig *érzékeny a kezdőfeltételre*, mert a közeli pályák igen gyorsan távolodnak. Ez alól kizárólag a stabil görbe mentén elhelyezkedő pontok kivételek, amelyek az origó felé, s emiatt egymás felé is közelednek.



3.3. ábra. Pontpárok távolodása egymástól és az instabil fixponttól. A gyors eltávolodás mindig az instabil görbe mentén történik, még akkor is, ha a kezdőpontok a stabil görbe különböző oldalára esnek. A taszítási paraméter $s_0 = 0,7$, a pontpárok távolságát $\Delta t = 0,5$ pillanatonként ábrázoltuk.

A súrlódás hatása

Makroszkopikus testek mozgásának meghatározásában rendszerint *disszipatív*, azaz energiaemésztő folyamatok is szerepet játszanak. Erre legegyszerűbb példa a *súrlódási erő* (közeg-ellenállási erő), amely a környezetet alkotó nagyszámú részecskével való kölcsönhatás következményét írja le egyszerű tapasztalati összefüggések alapján. A súrlódási erő tipikusan a sebesség valamilyen függvénye, de nem függ a helytől. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy a súrlódási erő *egyenesen* arányos a sebességgel.⁵ A helyfüggő $F(x)$ külső erőn kívül fellép tehát

⁵A sebességtől független „lapadási súrlódás” a kiterjedt rugalmas testek nyugalmi helyzetből történő kimozdulásának leírására bevezetett egyszerűsítő fogalom. Pontszerű testek mozgásának leírásakor használatára nincs szükség.

a $-\alpha v$ súrlódási erő is. Itt $\alpha > 0$ a konstansnak tekintett súrlódási együttható. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódás fékezi a mozgást. Vegyük észre, hogy az ilyen típusú, sebességgel arányos súrlódás a nyugalmi állapot helyét nem befolyásolja, hiszen abban a pontban nincs mozgás, s ezért ott nem hat súrlódási erő sem.

A mozgásegyenlet véges súrlódási együttható mellett

$$\ddot{x} = +s_0^2 x - \alpha \dot{x} \quad (3.13)$$

alakú. E homogén, lineáris differenciálegyenlet megoldását is $\exp(\lambda t)$ alakban keressük, a $\lambda^2 + \alpha\lambda - s_0^2 = 0$ másodfokú egyenletre jutunk, amiből λ -ra két lehetséges értéket kapunk:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + s_0^2}. \quad (3.14)$$

Ezek valósak, λ_+ pozitív, λ_- pedig negatív. Az $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldás a két exponenciális kifejezés lineáris kombinációja:

$$x(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t} \quad (3.15)$$

és

$$c_+ = \frac{-\lambda_- x_0 + v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad c_- = \frac{\lambda_+ x_0 - v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}. \quad (3.16)$$

A trajektóriák egyenlete

$$\frac{(v - \lambda_- x)^{\lambda_-}}{(v - \lambda_+ x)^{\lambda_+}} = \text{állandó} = \frac{(v_0 - \lambda_- x_0)^{\lambda_-}}{(v_0 - \lambda_+ x_0)^{\lambda_+}}. \quad (3.17)$$

Ezek is hiperbolákhoz hasonló görbék, két aszimptotával.

3.2. feladat. Vezessük le (3.15) alapján a trajektóriák (3.17) egyenletét!

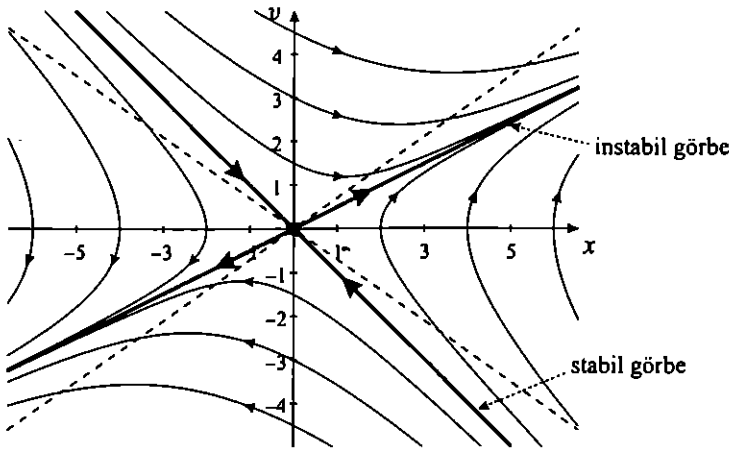
A trajektóriák döntő többsége elhagyja az origó bármely környezetét, de ismét létezik egy speciális vonal, a $v = \lambda_- x$ egyenes, mely mentén az instabil pontba jutunk (3.4. ábra).

A fázissíkon az origót ezért továbbra is hiperbolikus fixpontnak nevezzük. Most is létezik a stabil és instabil irány, melyeket a

$$v = \lambda_- x, \quad x(t) = x_0 e^{\lambda_- t}, \quad (3.18)$$

ill. a

$$v = \lambda_+ x, \quad x(t) = x_0 e^{\lambda_+ t} \quad (3.19)$$



3.4. ábra. Hiperbolikus fixpont súrlódás jelenlétében. A fixpont körüli szerkezet jellege nem változik, csak az aszimptoták fordulnak el. (A súrlódásmentes eset aszimptotáit szaggatott vonal mutatja.) A paraméterek: $s_0 = 0,7$, $\alpha = 0,5$.

aszimptoták és kitérés-idő függvények definiálnak. Ezek a (3.8) és (3.10) összefüggések általánosításai. Az instabil irány menti eltávolodást jellemző λ_+ paraméter *instabilitási exponensnek* nevezzük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy λ_+ már nem azonos az erőtvényben fellépő s_0 tasztási paraméterrel, hanem a teljes (3.13) dinamikát tükrözi, s függ a súrlódási együtthatótól is. A súrlódás következtében az eltávolodás lassabb, mint súrlódás nélkül, ezért az instabil irány egyenese kisebb szöget zár be az x tengellyel, mint a súrlódásmentes esetben.

3.3. feladat. Mutassuk meg, hogy a stabil és instabil irányok által definiált keresztalakzat gyenge súrlódás esetén merev testként fordul el negatív irányban a súrlódásmentes eset alakzatához képest.

Lényeges tapasztalat, hogy a súrlódás *nem* szüntette meg a fixpont hiperbolikus jellegét. Ezt a tulajdonságot úgy szokás kifejezni, hogy a hiperbolikus viselkedés *strukturálisan stabil* a paraméterek kis változtatására, jelen esetben a súrlódás megjelenésére.

Továbbra is érvényes a közeli pályák exponenciális eltávolodási szabálya:

$$\boxed{\delta x(t), \delta v(t) \sim e^{\lambda_+ t}}, \quad (3.20)$$

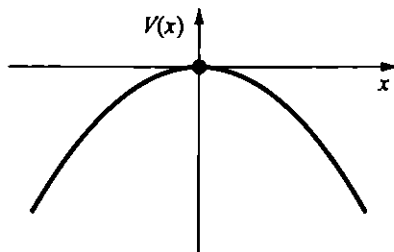
ha $t \gg 1/|\lambda_-|$. Nem szabad azonban elfelejteni azt sem, hogy a stabil irány men-

tén fekvő kivételes trajektóriapárok viszont exponenciális gyorsasággal közelednek egymáshoz és a hiperbolikus ponthoz is az $e^{\lambda_- t}$ ($\lambda_- < 0$) időfüggés szerint.

Végül megjegyezzük, hogy az adott $F(x)$ erőtvénnyről szemléletes képet nyerünk a *potenciálfüggvény* vagy potenciál fogalmának bevezetésével. Ha a részecskére helyfüggő erő hat, akkor annak potenciális energiája is függ a helytől. A $V(x)$ potenciálfüggvény a részecske egységnyi tömegre eső potenciális energiáját adja az x helyen. Az erő a potenciális energia változási gyorsaságával arányos. Ha az erő visszahúzó, akkor a potenciál nő az x távolsággal, és fordítva. Az $F(x)$ erőtvény és a $V(x)$ potenciál közötti kapcsolat általános alakja ezért

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \equiv -V'(x). \quad (3.21)$$

Amennyiben a potenciálváltozás a mozgás során csekély, még az a tulajdonság is igaz, hogy a részecske úgy mozog, mintha egy $V(x)$ alakú domborzaton haladna gravitációs térben. A domborzaton történő mozgásban általában a függőleges sebesség is szerepet játszik, de ez elhanyagolható, ha a potenciál keveset változik. A továbbiakban a potenciál-domborzat hasonlatot mindig ezzel a megköttéssel alkalmazzuk. Az instabil állapot környékén érvényes (3.1) erőtvénynek megfelelő potenciál⁶ $V(x) = -s_0^2 x^2/2$ (3.5. ábra). A vizsgált potenciál tehát valóban egy dombnak felel meg, s a domb teteje (az $x^* = 0$ helyzet) az instabil állapot, összhangban a 3.1. ábra kvalitatív képével.⁷



3.5. ábra. Az instabil állapot körüli erőtvény potenciálja. Az instabil viselkedés egy „domb tetején” zajló mozgásnak felel meg.

⁶Mivel a potenciál csak egy állandó erejéig meghatározott, mindig megtehetjük, hogy a fixpontoz tartozó értéket nullának választjuk.

⁷A súrlódásmentes esetben a trajektóriák az állandó $v^2/2 - s_0^2 x^2/2 \equiv \mathcal{E}$ egységnyi tömegre eső energiához tartozó vonalak; a stabil és instabil görbék a domb tetejének megfelelő $\mathcal{E} = 0$ értékhez tartoznak.

4. Instabilitás, véletlen és káosz

Az instabil állapot (vagy a fázistérben annak stabil görbéje) körüli igen kis eltérések drasztikusan különböző végkifejletre vezetnek. Ha a lehető legpontosabban hegyére állítunk egy ceruzát, elengedése előtt nem tudjuk megjósolni, melyik oldalra dől. Ez olyan kiszámíthatatlan hatásokon múlik, mint kezünk remegése vagy egy enyhe légmozgás. A makroszkopikus megfigyelő számára tehát véletlen esemény, hogy a jobb vagy bal oldalra történő dőlés következik be. Hasonló jelenség a feldobott pénzdarab mozgása (az élére is eshet!), aminek végeredményét mindig is véletlen folyamatnak tekintették. Az instabilitás tehát eleve előrejelezhetetlenséggel, véletlenszerű viselkedéssel jár, önmagában azonban *nem* jelent kaotikusságot. A hegyére állított ceruza mozgása

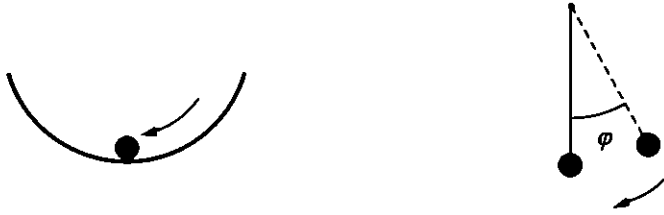
a feldőlés megkezdése után nem instabil többé, s ezért nem is tekinthető kaotikusnak. Az instabilitás csak szükséges feltétele a káosznak. Az elégséges feltétel az, hogy az instabilitás a mozgás során tetszőlegesen hosszú ideig fennálljon, újra és újra felbukkanjon. *A káosz az állandósult instabilitás.* Kaotikus viselkedés csak akkor lehetséges, ha a mozgás mindig újabb és újabb instabil állapotok közelébe kerül. *A káoszhoz az szükséges, hogy végtelen sok instabil, hiperbolikus állapot legyen jelen.* A káosz az egyszerű hiperbolikus pont körüli viselkedés végtelenszeres megszorozódása. Az instabil állapot körüli mozgás megismerése tehát csak egy elemi lépés a káosz felé. Ezt ki kell egészíteni a nemlineáris hatások és az instabilitás kialakulásának vizsgálatával is.

3.1.2. Mozgás a stabil állapot körül

Egy test nyugalmi helyzetét az x^* pontban akkor nevezzük stabilnak, ha a testet egy kissé kimozdított helyzetben elengedve, az nem távolodik el, az x^* egyensúlyi helyzet felé visszahúzó erő hat. Súrlódás jelenlétében ráadásul a részecske egyre jobban lelassul és a nyugalmi helyzetben megáll. Egyszerű példa erre egy homorú edény aljára helyezett golyó, vagy az inga lengése függőleges ($\varphi = 0$) állapota körül (3.6. ábra). Az (x, v) fázistérben a stabil állapotot is egy $(x^*, v^* \equiv 0)$ fixpont jellemzi, melynek helykoordinátáját most is az origónak választjuk: $x^* = 0$. A stabil állapot környékén az erő visszahúzó, a kitéréssel *ellentett*en nő. Egyszerű modellünkben az erőtörvény legyen

$$F(x) = -\omega_0^2 x \quad (3.22)$$

alakú, ahol az ω_0 paraméter a vonzás erősségére jellemző. A (3.22) erőtörvény a rugók lineáris visszatérítő hatását írja le, s az ω_0 paraméter négyzete az egységnyi



3.6. ábra. A stabil állapot a homorú felület aljára helyezett golyó és az inga példájában. Itt is egyetlen pontban lehetséges csak nyugalmi állapot, de ha a rendszert kimozdítjuk onnan, akkor az a nyugalmi pont felé indul.

tömegre eső rugóállandó. Az ω_0 paramétert sajátfrekvenciának nevezzük, mert a súrlódásmentes esetben a rezgés periódusidejét határozza meg. Az egyszerűség kedvéért ebben a szakaszban feltesszük, hogy ez a vonzási modell minden kitérésre érvényes. Az együtthatót azért írjuk $-\omega_0^2$ formában, hogy egyértelmű legyen negatív előjele.

Csillapítatlan kis rezgések, elliptikus pont

A súrlódásmentes eset mozgásegyenlete $\ddot{x} = F(x)$, azaz

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x. \quad (3.23)$$

Ez nem más, mint az ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgés egyenlete.

3.4. feladat. Mutassuk meg, hogy az inga függőleges állapota körüli mozgását – kis kitérések esetén – a (3.23) egyenlet írja le.

Az egyenlet $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (3.24)$$

ami behelyettesítéssel ellenőrizhető. Ez az

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (3.25)$$

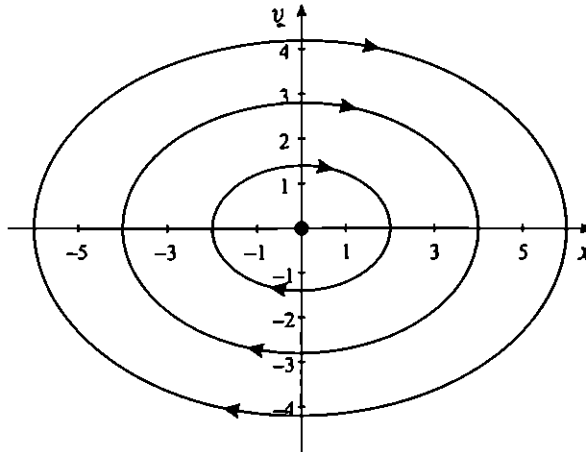
alakba is írható, ahol az A amplitúdót és a δ fázist az $A^2 = x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2$ és a $\tan \delta = v_0/(x_0 \omega_0)$ egyenletek határozzák meg.⁸

⁸Ez a megoldás is írható a (3.15), (3.16) alakba, csak most $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$, amiből (3.24) az imaginárius argumentumú exponenciális és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolatok felhasználásával adódik.

Az (x, v) fázissíkon a trajektóriák az origó körüli ellipszisek (3.7. ábra), ugyanis a (3.25) megoldást és az abból képzett sebesség négyzetét véve következik, hogy

$$v^2 + \omega_0^2 x^2 = v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 = \omega_0^2 A^2 = \text{állandó} \quad (3.26)$$

minden t pillanatban. Az ilyen fixpontot ezért *elliptikus* fixpontnak nevezzük.



3.7. ábra. Az elliptikus fixpont és környéke. A mozgás irányát most is nyíl jelöli. A körüljárás mindig az óramutató járásával megegyező (mert pozitív sebességek pozitív elmozdulást eredményeznek). A sajátfrekvencia: $\omega_0 = 0,7$.

Különböző kezdőfeltételek csak akkor kerülnek különböző ellipszisekre, ha a mozgások amplitúdója különböző. A hiperbolikus fixponttal szemben a trajektóriák az elliptikus fixpont környezetét nem hagyják el, sőt a szomszédos trajektóriák közötti távolság sem nő állandóan, hiszen

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\delta v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (3.27)$$

A különbség tehát hol nő, hol csökken, de mindig korlátos nagyságú marad. Az exponenciális távolodás *csak* a hiperbolikus pont jellemzője.

A súrlódás hatása, pontattraktorok

Súrlódási erő jelenlétében a mozgásegyenlet így módosul:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x}. \quad (3.28)$$

A megoldást $\exp(\lambda t)$ alakban keresve a $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ másodfokú egyenletre jutunk, amiből két lehetséges λ értéket kapunk:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (3.29)$$

Az általános megoldás most is

$$x(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t}, \quad (3.30)$$

$$c_+ = \frac{-\lambda_- x_0 + v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad c_- = \frac{\lambda_+ x_0 - v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad (3.31)$$

alakú. Mivel azonban a λ_{\pm} kitevők valós része mindig negatív, a megoldás a fixponthoz tartást írja le. A disszipatív rendszerek általános tulajdonsága az, amit itt konkrét példán látunk, hogy az ilyen rendszerek *elfelejtik* kezdőfeltételeiket. Ez azt jelenti, hogy a fázistérnek van olyan *részhalmaza*, melyet minden trajektória elér. Ezt a vonzó részhalmazt attraktornak nevezzük. Esetünkben minden trajektória az origóhoz tart, az attraktor eszerint egyszerű halmaz, egyetlen pont.

Az elliptikus fixpont tehát a leggyengébb súrlódás hatására is elveszti alapvető tulajdonságát, *strukturálisan instabil*. Azt az érdekes megfigyelést tettük tehát, hogy míg a stabil dinamikát jellemző viselkedés a súrlódás bekapcsolásakor alapvetően megváltoztatja jellegét, addig az instabil dinamikát jellemző viselkedés csak enyhén „deformálódik” (3.1.1. szakasz).

Az, hogy az origó elérése pontosan hogyan történik, a pontattraktor milyen típusú, függ a súrlódás erősségétől.

Gyenge csillapítás, spirális attraktor. Ha az $\alpha/2$ súrlódási együttható a vonzás erősségét jellemző sajátfrekvenciájánál kisebb,

$$\frac{\alpha}{2} < \omega_0, \quad (3.32)$$

akkor a (3.29)-ben szereplő gyökjel alatt negatív szám áll, a λ_{\pm} együtthatónak lesz képzetes része. Ez oszcilláló lecsengésnek felel meg

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \quad (3.33)$$

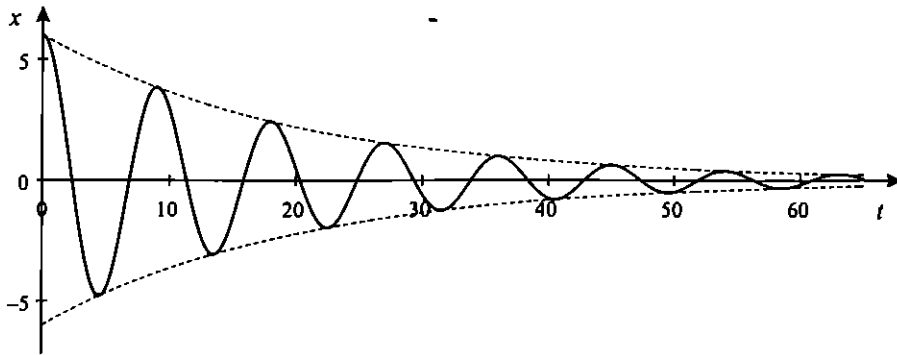
frekvenciával. Az x_0, v_0 kezdőfeltételt kielégítő megoldás ezért (3.30), (3.31) alapján és az exponenciális és trigonometrikus függvények közötti kapcsolatok felhasználásával

$$x(t) = x_0 e^{-(\alpha/2)t} \cos(\omega_{\alpha} t) + \frac{v_0 + (\alpha/2)x_0}{\omega_{\alpha}} e^{-(\alpha/2)t} \sin(\omega_{\alpha} t), \quad (3.34)$$

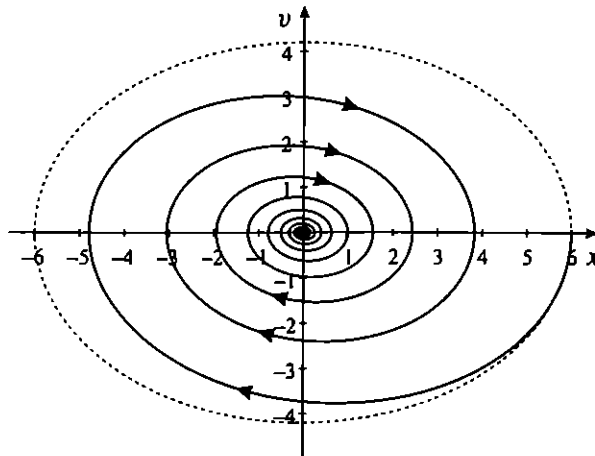
ami átírható az

$$x(t) = Ae^{-(\alpha/2)t} \sin(\omega_\alpha t + \delta) \quad (3.35)$$

alakba is. Innét jól látszik, hogy a mozgás exponenciálisan lecsengő amplitúdójú harmonikus rezgés (3.8. ábra). Az ω_α frekvencia *csökken* a súrlódás erősödésével, a rezgések tehát lassulnak α növelésekor.



3.8. ábra. A stabil állapot környékén gyenge csillapítás mellett kialakuló exponenciálisan lecsengő amplitúdójú harmonikus rezgés. A szaggatott vonalak egyenlete: $\pm Ae^{-(\alpha/2)t}$. A paraméterek: $\omega_0 = 0,7$, $\alpha = 0,1$, a kezdőfeltétel: $x_0 = 6$, $v_0 = 0$.



3.9. ábra. A spirális attraktor és környéke. A szaggatott vonal a súrlódás nélküli trajektória ellipsziséjét mutatja. A paraméterek és kezdőfeltételek ugyanazok, mint a 3.8. ábrán.

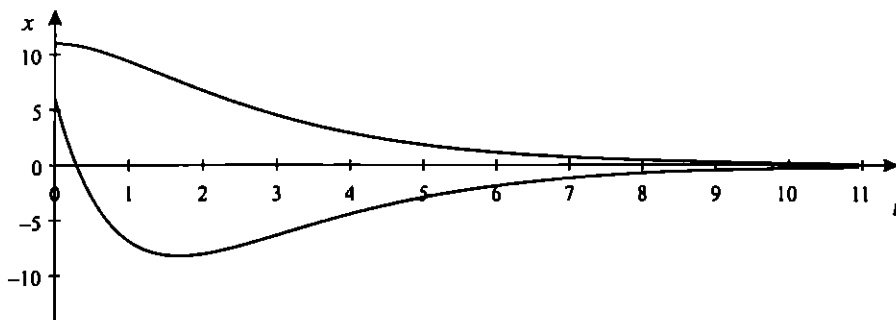
A fázistérbeli trajektóriák *spirál* mentén közelítik meg az origót, a kitérés és a sebesség előjelváltásainak megfelelően (3.9. ábra). Az origót ezért vonzó spirális fixpontnak vagy *spirális attraktornak* nevezzük. A (3.35) megoldásból látszik, hogy a trajektória *exponenciális* ütemben tart az attraktorhoz. Matematikai értelemben csak végtelen hosszú idő után éri el azt, de az exponenciális függvény gyors lecsengése miatt az $1/\alpha$ időállandó néhányszorosa után már gyakorlatilag megállt a test.

3.5. feladat. Mutassuk meg, hogy a spirális fixpont körüli trajektóriák logaritmikus spirált alkotnak.

Erős csillapítás, csomópontattraktor. A csillapított rezgés $2\pi/\omega_\alpha$ periódusideje végtelenhez tart, ha $\alpha/2 \rightarrow \omega_0$, ami azt jelzi, hogy a mozgás más jellegű, amint a gyenge csillapítás tartományából kilépünk (ismét egy strukturális instabilitás). A túlcillapított esetben, amikor az $\alpha/2$ súrlódási együttható az ω_0 sajátfrekvenciájánál nagyobb,

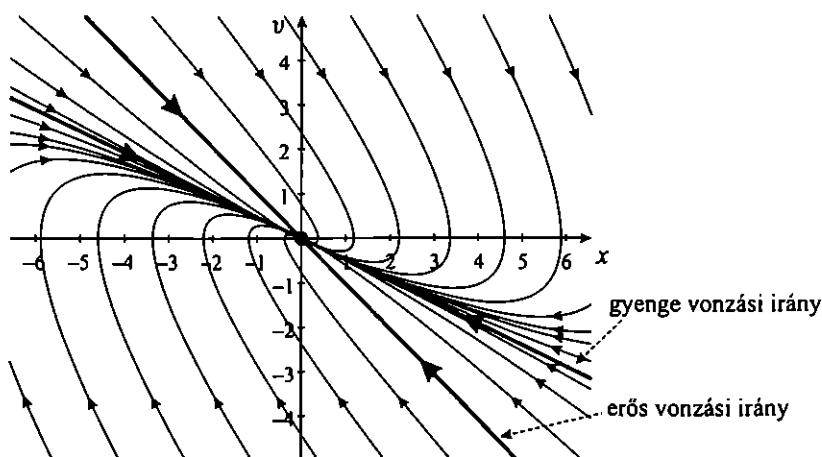
$$\frac{\alpha}{2} > \omega_0, \quad (3.36)$$

a λ_\pm kitevők valósak, amihez *oszcillációmentes* lecsengés tartozik (3.10. ábra). Az x_0, v_0 kezdőfeltételt kielégítő megoldás (3.30), (3.31) alakú, de most mindkét kitevő negatív, s a lecsengést nem kísérik oszcillációk. Az erős csillapítás szemléletesen azt jelenti, hogy a test olyan sűrű közegben mozog, hogy már csillapított rezgések sem tudnak kialakulni, hanem a lehető leggyorsabban megáll.



3.10. ábra. A stabil állapot környékén erős csillapítás mellett kialakuló oszcillációmentes lecsengés. Az egyik esetben ($x_0 = 11, v_0 = 0$) úgy áll meg a test, hogy kitérése nem vált előjelet, míg a másikban ($x_0 = 6, v_0 = -25$) átkerül a túloldalra. A paraméterek: $\omega_0 = 0,7, \alpha = 1,5$.

A fázissíkon két speciális vonal található, a $v = \lambda_{\pm}x$ egyenesek, melyek mentén a lecsengést egyetlen exponenciális függvény írja le (s nem két különböző exponenciális függvény lineárkombinációja). Mivel abszolút értékben λ_- nagyobb, mint λ_+ , (3.30)-ban a második tag gyorsabban cseng le, s hosszú idő után az első tag dominál. A trajektóriák a $v = \lambda_+x$ egyeneshez tartanak, mely mentén időfüggésüket a λ_+ együttható szerinti exponenciális lecsengés jellemzi. Az ilyen típusú vonzó fixpontot *csomópontattraktor*nak nevezzük (3.11. ábra). A $v = \lambda_-x$ egyenes mentén



3.11. ábra. A csomópontattraktor és környéke: néhány általános trajektória (vékony vonalak) és a $v = \lambda_{\pm}x$ aszimptoták (vastag vonalak). A paraméterek: $\omega_0 = 0,7$, $\alpha = 1,5$.

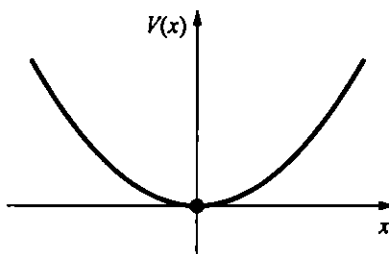
elhelyezkedő pontok kivételesek abban az értelemben, hogy ezek kezdettől fogva az erősebb, λ_- szerinti exponenciális viselkedés szerint tartanak az origóhoz. Ez az egyenes az erős vonzási irányt adja, a $v = \lambda_+x$ görbe pedig a gyenge vonzási irányt.

Megjegyezzük, hogy a stabil állapot körüli mozgásra vonatkozó minden eredmény megkapható az instabil esetre érvényes összefüggésekből az $s_0 \rightarrow i\omega_0$ helyettesítéssel, ahol ω_0 valós. Az erős és a gyenge vonzási irány ezért a stabil és az instabil irányokból kapható a fenti transzformációval. Képletesen azt is mondhatjuk, hogy a csomópontattraktor körüli viselkedés úgy adódik a hiperbolikus pont körülből, hogy az instabil irány az erőtvény megváltozása miatt a fázissík első és harmadik szögnegyedéből a második, negyedikbe fordul. Eközben természetesen jellege is megváltozik, s tasztó irányból (gyenge) vonzási irányává válik.

A csomópontattraktor elérése is exponenciális ütemben történik. Ezért a szomszédos pontok távolsága is exponenciálisan *csökken*: $\delta x(t), \delta v(t) \sim \exp(\lambda_+ t)$, az attraktorhoz tartás közben. Párunkénti exponenciális közeledés tapasztalható a spirális fixpont körül is. A pontattraktorok környékén a mozgás *nem* érzékeny a kezdőfeltételekre.

3.6. feladat. Határozzuk meg a trajektóriák egyenletét a csomópontattraktor körül!

A stabil állapotot jellemző (3.22) erőhöz tartozó potenciál $V(x) = \omega_0^2 x^2 / 2$ (a stabil fixponthoz tartozó értéket nullának választva). A vizsgált potenciál tehát valóban egy völgynek felel meg (3.12. ábra), s a völgy alja, az $x^* = 0$ helyzet a stabil állapot, összhangban a 3.6. ábrával.⁹



3.12. ábra. A stabil állapot körüli erőtvénynek megfelelő potenciál. A stabil mozgás egy „völgy alján” zajlik.

3.2. Stabilitásvizsgálat

3.2.1. Nyugalmi helyzetek stabilitása az erőtvényből

A mozgást létrehozó $F(x)$ erő sohasem egzaktul lineáris függvénye a helynek, a mozgásegyenlet sohasem egzaktul lineáris. Mielőtt egy általános $F(x)$ erőtvényhez tartozó esetben a mozgást egy kiterjedt tartományban vizsgálnánk, érdemes feltérképezni, hogy hol lehetnek egyáltalán egyensúlyi helyzetek. Ezek csak olyan x^* fixpontok lehetnek, melyekben az erő eltűnik, vagyis, ahol

$$F(x^*) = 0. \quad (3.37)$$

⁹A súrlódásmentes eset ellipszisizrajektóriái az állandó energiához tartozó görbék.

Ezek egyben a (3.21) összefüggéssel definiált potenciál szélsőérték helyei, ahol $V'(x^*) = 0$.

A fixpont megtalálása még semmit sem mond arról, hogy az a bizonyos egyensúlyi helyzet milyen típusú. Elvileg ugyan az x^* pontba helyezett test mindig ott is marad, a gyakorlatban azonban számos csekély külső hatás is éri. Ezek következtében a pont kissé kitér nyugalmi helyzetéből. Az ilyen kis külső zavarok következményeit az alapján deríthetjük fel, hogy az x^* -tól kissé eltérő helyzetekből induló mozgásokat követünk. A kérdés az, hogy a részecske tovább távolodik-e a fixponttól, vagyis, hogy rá az x^* egyensúlyi helyzet felé visszahúzó, vagy ellenkezőleg, attól eltávolító erő hat. Amennyiben az utóbbi eset áll fenn, akkor az egyensúlyi helyzet instabil, és a valóságos mozgásokban a rendszer nem maradhat tartósan ebben az állapotban.

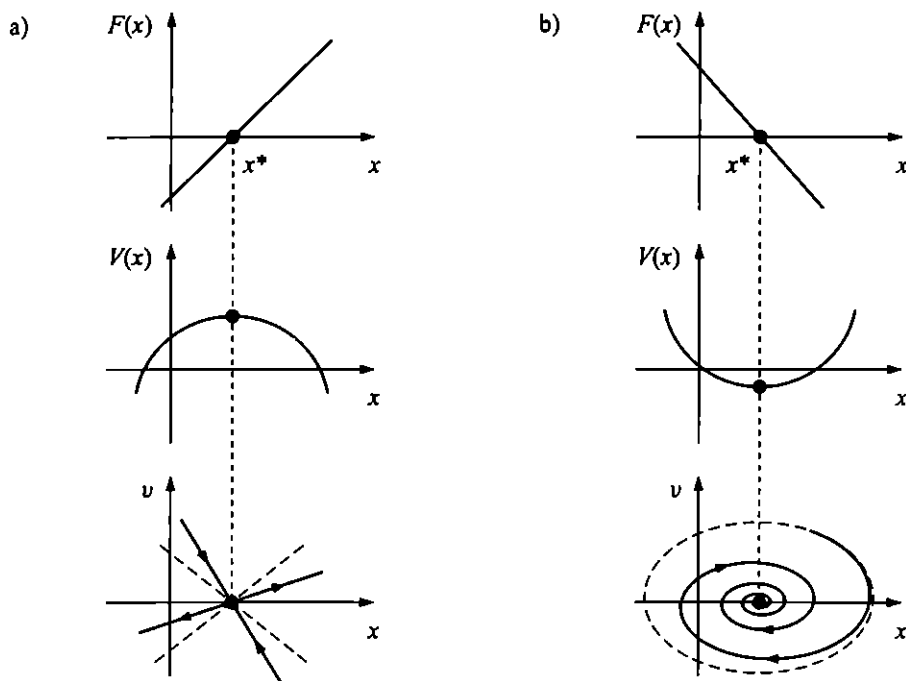
Az, hogy a fixpont instabil-e vagy sem, attól függ, hogy az erőtvény hogyan néz ki a *fixpont kis környezetében*. Tetszőleges x^* fixpont körül minden simán változó erőtvény az

$$F(x) \approx F'(x^*)(x - x^*) \equiv -V''(x^*)(x - x^*) \quad (3.38)$$

alakkal közelíthető. Ez azt fejezi ki, hogy a nyugalmi helyzetből kissé kimozdulva az erő lineárisan változik. Itt figyelembe vettük a (3.37) összefüggést is, miszerint az erő a fixpontban eltűnik. A (3.38) kifejezés tulajdonképpen az erőtvény alakjának Taylor-sorfejtése első rendig. Mivel $x - x^*$ kicsi, a sorfejtés magasabb hatványait nem írtuk ki. Ebből az összefüggésből leolvasható a fixpont stabilitása: vonzóerő, negatív $F'(x^*)$ esetén, vagyis a potenciál *minimumában stabil* a nyugalmi állapot, míg taszítóerő pozitív $F'(x^*)$ esetén, vagyis a potenciál *maximumában instabil*. A potenciál használata tehát azért hasznos, mert ismeretében rögtön a fixpont stabilitásáról is információhoz jutunk, összhangban a korábban említett, domborzaton történő mozgásról kialakított képünkkel. A fixpont kvalitatív tulajdonságát az $F'(x^*)$ előjele meghatározza, a stabilitás vagy instabilitás mértékéhez azonban szükség van a deriváltak számértékére. Egy állapot annál stabilabb, minél gyorsabban nő ott a visszatérítőerő, vagyis minél élesebb minimuma van a potenciálnak. Az előző szakaszokban használt s_0 , ill. ω_0 paraméterek tehát a fixpont közelében mindig meghatározhatók nemlineáris erőtvény esetén is, és értéküket az erőtvény deriváltjának számértéke adja:

$$F'(x^*) = -V''(x^*) = s_0^2 \quad \text{vagy} \quad -\omega_0^2. \quad (3.39)$$

A stabilitás az erőtvény fixpont körüli meredekségének előjelétől függ (3.13. ábra), a meredekség számértéke (vagyis a potenciál lokális görbülete) pedig egyértelműen meghatározza a fixpont tasztási, illetve vonzási erősségét.



3.13. ábra. A fixpont stabilitásának függése az erőtvény és a potenciál lokális alakjától, s az ehhez tartozó fázistérbeli szerkezet (a súrlódásmentes eset pályáit szaggatott vonalak jelzik). a) Instabil, b) stabil állapot.

3.7. feladat. Vizsgáljuk az $F(x) = ax(x - c)$ erőtvényben az $x^* = c$ pont stabilitását a paraméterek függvényében.

3.2.2. A lineáris közelítés érvényessége

Az erőtvény pontosabb helyi alakját kapjuk, ha az eltérésben másodrendű tagot is megtartjuk:¹⁰

$$F(x) \approx F'(x^*)(x - x^*) + \frac{F''(x^*)}{2}(x - x^*)^2. \quad (3.40)$$

Ebből meg tudjuk becsülni azt is, hogy a (3.38) lineáris közelítés meddig jogos. A feltétel az, hogy a második tagból adódó erő elhanyagolható legyen az elsődöz

¹⁰Ha az erőtvény pontszimmetrikus, azaz az erő $F''(x^*)$ deriváltja is eltűnik (a potenciálgörbe tengelyszimmetrikus a fixpontban), akkor a Taylor-sorfejtés harmadrendű tagjáig kell elmenni.

képeket, azaz fennálljon, hogy

$$|x - x^*| \ll \left| \frac{2F'(x^*)}{F''(x^*)} \right|. \quad (3.41)$$

A kitérésnek tehát $|2F'(x^*)/F''(x^*)|$ -nál kell sokkal kisebbnek lennie ahhoz, hogy a (3.38) egyenlet jó közelítéssel teljesüljön.

A stabil és az instabil állapot körüli mozgás alapvetően különbözik abból a szempontból, hogy a lineáris közelítés milyen hosszú ideig lehet érvényes a mozgás során. Ha a kezdőhelyzetre (3.41) fennáll és a kezdősebesség nem túl nagy, akkor stabil fixpontok körül a feltétel a mozgás egésze során is általában teljesül. Nem ez a helyzet instabil fixpontok körül, ugyanis ott a lineáris közelítés érvényességi tartományát előbb-utóbb elhagyjuk (hacsak nem a stabil görbére esik a kezdőfeltétel). Az instabil irány mentén, ahol a fixponttól mért $\Delta x(t) \equiv x(t) - x^*$ távolság a $\Delta x(t) = \Delta x_0 \exp(\lambda_+ t)$ összefüggés szerint nő, a lineáris közelítés érvényességének feltétele (3.41)-ből az, hogy

$$t \ll \frac{1}{\lambda_+} \ln \left| \frac{2s_0^2}{\Delta x_0 F''(x^*)} \right|. \quad (3.42)$$

A kezdőhelyzet origóhoz közelítésével ennek az időtartamnak a hossza növelhető, a növekedés azonban logaritmikusan lassú. A döntő fontosságú függés a λ_+ instabilitási exponenssel való fordított arányosság: ugyanazon kezdeti távolság mellett a részecske tovább marad a kevésbé instabil pontok közelében.

A lineáris mozgásegyenlet alkalmazásának feltétele még az instabil fixponthoz igen közeli kezdőfeltétel esetén is csak *véges* időkre korlátozódik. Ez az oka annak, hogy a hagyományos tárgyalások nem fordítanak figyelmet az instabil fixpont körüli mozgásra. Számunkra viszont ez a tulajdonság arra jelent útmutatást, hogy tovább kell követnünk a részecskék mozgását a nemlineáris tartományba. Így felmerül az az alapvető kérdés, hogy hogyan folytatódnak a stabil és instabil görbék, melyek lokálisan egyenes szakaszok voltak.

3.8. feladat. Becsüljük meg, hogy hány másodpercig érvényes a lineáris közelítés (a (3.1) egyenlet) a feldőlő ceruza mozgása során különböző, egyre kisebb kezdeti szögkitérések esetén.

3.3. Az instabilitás kialakulása

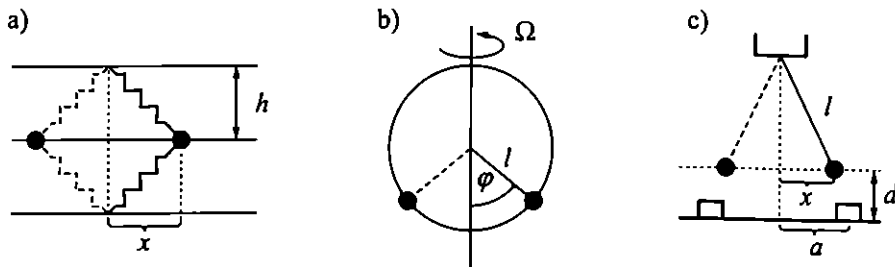
Az erőtvény nemlinearitása lehet olyan jellegű, hogy több nyugalmi helyzet is lehetséges, és a rendszer fázissterében instabil és stabil állapotok egyszerre lehetnek

jelen. Ebben a szakaszban azt is vizsgáljuk, hogyan fordulhat elő, hogy egy stabil állapot instabillá válik, vagyis, a paraméterek változtatásával hogyan jöhet létre az instabilitás. Látni fogjuk, hogy ez rendszerint egy vagy több új stabil állapot megjelenésével jár együtt.

A nemlinearitás miatt a 3.1. szakasz eredményei óhatatlanul csak lokálisan, az instabil és stabil állapotok kis környezetében érvényesek. A mozgást ezen pontoktól távol, *globálisan* is meg kell értenünk. Ehhez nagy segítségünkre lesz a fázistér fixpontok körüli szerkezetének ismerete, ugyanis annak figyelembevételével, hogy a trajektóriák nem metszhetik egymást, a lokális tulajdonságok teljes egészévé illeszthetők össze. Általánosan fogalmazva, e szakaszban a nemlineáris mozgások geometriai leírását adjuk meg a fázissíkon. Az itt bevezetésre kerülő fogalmak fontos szerepet játszanak majd bonyolultabb mozgások megértésében is. Megmutatjuk, hogy a teljes mozgás szervezésében a hiperbolikus (instabil) fixpontok játszanak alapvető szerepet.

3.3.1. Bistabil rendszerek

Valamilyen külső hatás következtében egy eredetileg stabil rendszer „elbizonytalanítható”, bistabillá tehető. Ekkor az eredetileg egyetlen stabil állapot megszűnik, s két különböző stabil egyensúlyi állapot is lehetségessé válik. Az instabillá vált állapot környékén a rendszernek döntenie kell arról, hogy az egyik vagy másik új stabil állapot felé haladjon. Példaként gondoljunk egy két rugóhoz rögzített tömegpontra, amely egy vízszintes rúd mentén mozoghat (3.14a. ábra). Amíg a rudak távol



3.14. ábra. Bistabil rendszerek: a) Két összenyomott rugóhoz rögzített, egy sín mentén vízszintesen elmozduló tömegpont. b) Egy gyűrű mentén elmozduló tömegpont elegendően nagy Ω szögsebességű forgatás mellett. c) Egy mágneses inga két vonzó mágnes közelében. Mindhárom esetben a két új, stabil helyzet egyikében állapodik meg a rendszer, melyek egymás tükörképei.

vannak, a kitérésmentes állapot a stabil egyensúlyi állapot. Ha a rudak elegendően közel kerülnek, akkor a pont vagy jobbra, vagy balra kitér, s fellép két új stabil helyzet valamilyen x^* és $-x^*$ koordinátákkal. Ez a rendszer egyben a hossztenge-lyük irányában terhelt rudak jobbra vagy balra történő kihajlásának egyszerű modelle is. Analóg jelenség (3.14b. ábra) a forgatott körgyűrűn mozgó tömegpont esete, amely lassú forgatás esetén csak a gyűrű legalsó pontján van stabil állapotban, de elegendően gyors forgatás mellett egy véges szögkitéréssel jellemzett pontban áll meg. Harmadik példa lehet egy acélgolyót tartalmazó inga (3.14c. ábra), melynek stabil egyensúlyi állapota a függőleges síkbeli kitérésmentes állapot. Ha azonban az inga mellé két vonzó mágneset helyezünk, akkor már valamely jobbra vagy balra kitérülő állapot lesz a stabil egyensúlyi helyzet.

Számos hasonló példa létezik, melyekben az egyensúlyi állapotok egymás tükörképei. Ezeket együttesen az

$$F(x) = -ax(x - x^*)(x + x^*) \quad (3.43)$$

erőtörvénnyel modellezhetjük. Itt $a > 0$ pozitív paraméter, $x^* > 0$ a jobb oldali, $-x^* < 0$ a bal oldali stabil állapot helykoordinátája.

A fenti erőtörvénynek megfelelő potenciál

$$V(x) = -bx^2 + dx^4, \quad (3.44)$$

melyben $b = ax^{*2}/2$, $d = a/4$ rögzített paraméterek. Mivel a másodfokú tag együtt-hatója negatív, az origóban a potenciálnak lokális maximuma van, mely két poten-ciál völgyet választ el. A (3.44) potenciált ezért kétvölgyűnek nevezük. A bistabil rendszerek viselkedése tehát megfelel két gödör és egy köztük levő domb környékén történő mozgásnak (3.15. ábra). A domb tetején $F'(x_0^* = 0) = ax^{*2}$, s így a tasztítási paraméter

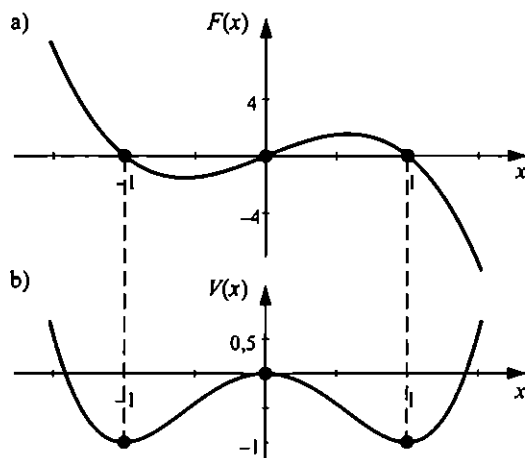
$$s_0 = \sqrt{ax^*} = \sqrt{2b}. \quad (3.45)$$

A völgyek alján az erő vonzó, deriváltja negatív: $F'(\pm x^*) = -2ax^{*2}$, a sajátfrekven-cia ott ezért

$$\omega_0 = \sqrt{2ax^*} = 2\sqrt{b}. \quad (3.46)$$

A rendszer globális viselkedése tehát az origóbeli instabil és a $\pm x^*$ pontokban talál-ható stabil állapotokból építendő fel.

3.9. feladat. Határozzuk meg a (3.43) erőtörvénnyel jellemzett súrlódásmentes bi-stabil rendszer fázistérbeli trajektóriájának kvalitatív képét!



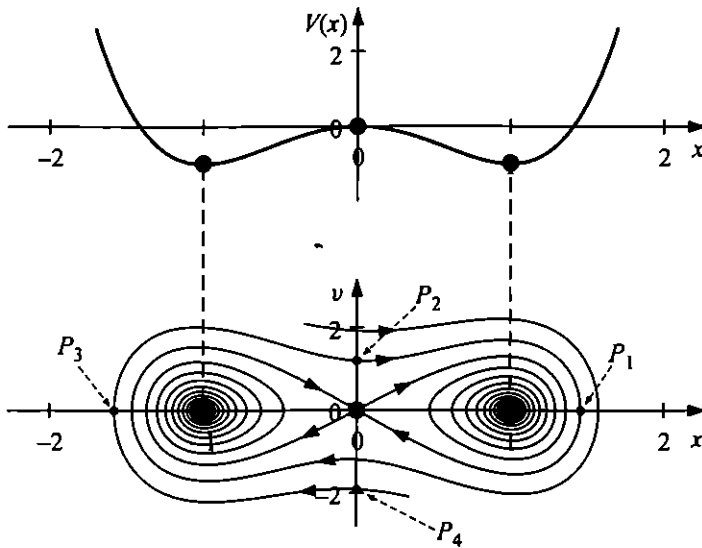
3.15. ábra. A szimmetrikus bistabil rendszerek erőtorvényének (a) és potenciáljának (b) általános modellje. Ezek a grafikonok a (3.43) és a (3.44) függvényeknek felelnek meg az $a = 4$, $x^* = 1$ ($b = 2$, $d = 1$) paraméterek mellett.

A globális fázistérbeli viselkedést súrlódás jelenlétében tárgyaljuk részletesen. Tudjuk, hogy a stabil állapot jellege függ a súrlódás erősségétől; vizsgálatunkhoz a gyenge csillapítás esetét ($\alpha/2 < \omega_0$) választjuk.

A fázistérben az $(x^*, 0)$, $(-x^*, 0)$ fixpontok spirális attraktorok, az origó pedig hiperbolikus pont. Kis környezetükben a fázisgörbék alakja az előző szakaszban látottak (l. 3.13. ábra) alapján kapható meg. Az origó mint hiperbolikus pont környékén léteznek stabil és instabil görbék, az ezek által kijelölt keresztalakzat a súrlódás miatt kissé jobbra fordított. A $v = \lambda_{\pm} x$ aszimptotaalakok (a λ_{\pm} paraméterek a (3.14) és (3.45) összefüggésekből következnek) csak az origó kis környezetében érvényesek. Most megvizsgáljuk, hogy mi ezeknek a görbéknek a *folytatása*.

Az origó környékén a $v = \lambda_{-} x$ stabil irányba eső pontok azok, amik időben az origó felé haladnak. Nyilvánvalóan léteznek ilyen tulajdonságú pontok az origótól távolodva is: a lokálisan egyenes vonal görbe vonalként folytatódik. A görbe pontjaiból induló trajektóriák az origóba jutnak. A fixpont felé tartás az origó környékén lassú, exponenciális ütemű, ezért elvileg végtelen hosszú időt vesz igénybe (de gyakorlatilag az $1/|\lambda_{-}|$ idő néhányszorosának elteltével a részecske már az origóban van). Azon fázistérbeli pontok összességét, amelyekből indítva a részecske a hiperbolikus pontba juthat, a hiperbolikus pont *stabil sokaságának* nevezzük.

A sokaságnak *két* ága van, annak megfelelően, hogy jobbról vagy balról jutunk az origóba. A jobbra induló ág lassan felfelé fordul, ugyanis a gödrök alján túljutva



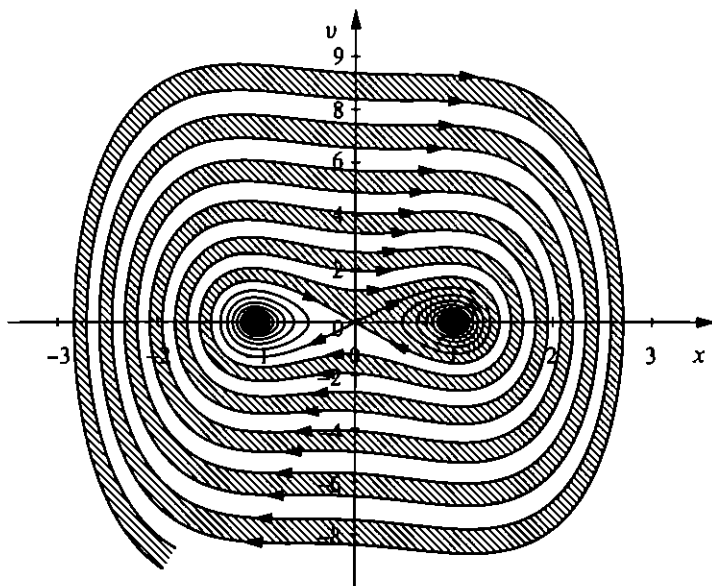
3.16. ábra. Bistabil rendszer potenciálja és alatta fázisterének globális szerkezete. A két völgy alja egy-egy spirális attraktor, míg a potenciálhegy csúcsa egy hiperbolikus pont. A hegyre éppen feljutó test trajektóriája az instabil pont stabil sokasága. A potenciálhegyről kezdősebesség nélkül lecsúszó test trajektóriája az instabil sokaság, mely az egyes pontattraktorokba vezet. A paraméterek: $a = 4$, $x^* = 1$, $\alpha = 0,2$.

már visszatérítő erő hat, s ezért egyre kisebb abszolút értékű negatív kezdeti sebesség szükséges ahhoz, hogy a test feljusson a dombra (3.16. ábra). A görbe metszi az x tengelyt. Az első metszéspon (P_1) az a hely, melyből a testet kezdősebesség nélkül indítva, az lassan felfut a dombra. A stabil sokaság ezután visszakanyarodik, mert véges pozitív sebességre van szükség ahhoz, hogy a jobbra ellökött részecske olyan magasra jusson fel a hegyoldalán, hogy visszafordulása után éppen meg tudjon állni a dombon. A sokaság tovább is folytatódik. A v tengellyel vett első metszéspon (P_2) annak a sebességnek felel meg, amellyel a testet a domb tetején jobbra kell meglöknünk ahhoz, hogy visszatérve ugyanott álljon meg. A sokaság ezután megkerüli a bal oldali gödröt, metszi a negatív x tengelyt (P_3). A negatív v tengellyel vett első metszéspon (P_4) az a kezdőfeltétel, mellyel a pont először balra mozog, megfordulás után véges sebességgel áthalad az origón, s ismét megfordulva, éppen megáll az origóban. A balra induló ág a jobbra induló pontszimmetrikus tükörképe. A stabil sokaság mindkét ága egyre többször kerüli meg a gödröket, miközben egyre távolabb kerülünk az origótól. A stabil sokaság tehát egy végtelen hosszú görbe.

Hasonlóan beszélhetünk a hiperbolikus pont *instabil sokaságáról*. Ez a hegy tetején kezdősebesség nélkül elengedett test trajektóriája. Úgy is tekinthető, mint azon (x, v) pontok összessége, melyekből a test az időben megfordított mozgásban (az (x, v) kezdőfeltétellel a negatív időirányban indítva) jut el a hiperbolikus fixpontba.

Az instabil sokaság a fixpont környezetében olyan egyenes vonal darab, melynek iránya a fixpont instabil irányával esik egybe. Az instabil sokaság tehát olyan görbe, melynek két ága két oldalra, két ellentétes irányban fut ki a fixpontból. Szemléletesen fogalmazva, az instabil sokaság az a görbe, amely mentén a fixpont környezetében levő pontok eltávolodnak. Természetes, hogy esetünkben az origó instabil sokaságának két ága befut a két attraktorba, $(x^*, 0)$ -ba, illetve $(-x^*, 0)$ -ba. A fixpontattraktorok közvetlen közelében a sokaság alakja megfelel a csillapított harmonikus rezgés fázisterét jellemző spirális formának.

A binstabil rendszerben két egyszerű attraktor létezik egyszerre. A fázistér minden egyes pontjából kiinduló trajektória vagy az egyik, vagy a másik attraktorba fut. A fázistér tehát két részre bontható attól függően, hogy az adott pontból in-



3.17. ábra. Binstabil rendszer attraktorainak vonzási tartományai. A paraméterek: $a = 4$, $x^* = 1$, $\alpha = 0,2$. Az origó stabil sokasága a fázistér két attraktor vonzási tartományára vágja ketté. A jobb oldali attraktor vonzási tartományára sötétített, a bal oldalié fehér. A paraméterek ugyanazok, mint az előző ábrán.

duló mozgás elegendően hosszú idő eltelte után a jobb vagy bal oldali völgy alján áll meg. Ezek az egyes attraktorok *vonzási tartományai*. Földrajzi hasonlattal, a vonzási tartományok olyanok, mint a folyók (attraktorok) vízgyűjtő területei.

Az origó stabil sokaságának két ága az egész fázissíkot két feltekeredő sávra osztja, a két fixpontattraktor vonzási tartományaira. Az instabil hiperbolikus pont stabil sokasága a vonzási tartományok határát alkotja (3.17. ábra). Az olyan fázistérbeli görbét, mely különböző jellegű mozgásoknak megfelelő trajektóriákat választ le egymástól, *szeparátrixnak* nevezzük. A teljes stabil sokaság nyilván mindig szeparátrix. Az említett földrajzi hasonlattal, a stabil sokaság a „vízválasztó” szerepét játssza.

A hiperbolikus fixpontok stabil és instabil sokaságai és néhány jellegzetes más trajektória megrajzolásával áttekintő geometriai képet kapunk a fázistér egészéről, a mozgás globális lefolyásáról. Ezt az ábrát szokás *fázistérképnek* nevezni.

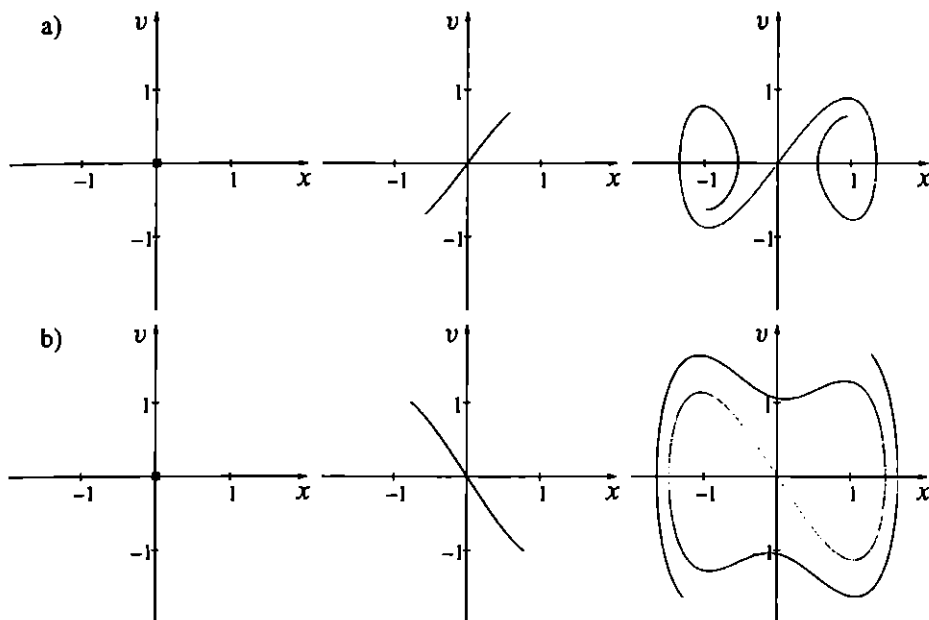
Érdeemes hangsúlyozni, hogy már ebben az egyszerű problémában sem lehet a mozgás kitérés–idő függvényét (vagy trajektóriáját) egyszerű képletekkel megadni. Azok számára, akik a közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldásában nem járatosak, javasoljuk a 8.1., 8.2., 8.4. függelékek tanulmányozását.

3.10. feladat. Vizsgáljuk az $F(x) = ax(x - c)$ erőtvény ($a > 0, c < 0$) (a $V(x) = acx^2/2 - ax^3/3$ potenciál) hatására kialakuló mozgás fázistérképét súrlódásmentes és súrlódásos esetben egyaránt. Ezt az erőtvényt használják a hajók felborulásának egyszerű modelljében. Ha feltesszük, hogy erős szél fúj a bal oldalról, akkor az egy magas felépítésű hajót könnyen a jobb oldalra billenthet. Ugyanakkor a hajó egy bizonyos, balra dőlt állapota stabil lehet állandó szélerősség esetén. A potenciálvölgy minimuma ennek az állapotnak felel meg, a jobb oldali állandó csökkenés pedig a felborulásnak.

5. A sokaságok numerikus meghatározása

Röviden megadjuk, hogyan rajzolhatók meg a stabil és instabil sokaságok numerikus eljárással. A hiperbolikus fixpont meghatározása után képezzünk több tízezer pontból egy kis négyzetet vagy korongot a fixpont körül. Mivel az idő múlásával ezen alakzat a stabil irányban összehúzódik, az instabilban viszont megnyúlik, a pontsokaság az $1/\lambda_-$ idő néhány-

szorosa után már kiterjedés nélküli vonalnak tűnik, s az instabil görbe egyre hosszabb szakaszát rajzolja ki (3.18a. ábra). A stabil sokaság ugyanebből a kezdeti alakzathoz hasonlóan kapható meg, csak a programban az időlépést negatívnak kell választani, hiszen ez felel meg az időben visszafelé futó dinamika használatának (3.18b. ábra).



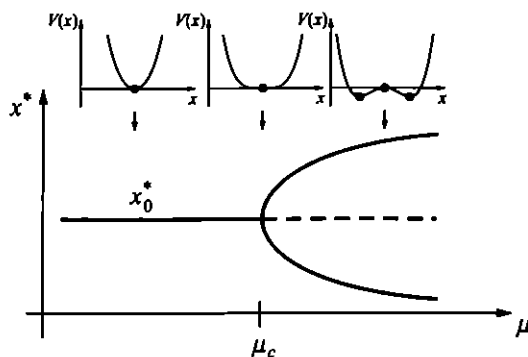
3.18. ábra. Az origó instabil (a) és stabil (b) sokaságának numerikus előállítása a bistabil problémában az $\alpha = 0,2$, $a = 2$, $x^* = 1$ paraméterek mellett. A kiindulásként használt négyzet $0,1$ oldalhosszúságú, melyben egyenletesen elosztva $40\,000$ pontot helyeztünk el. Az ábrák a kezdeti állapotot, valamint az ezen pontok által 2 és 6 időegység után kirajzolt alakot mutatják (időegységnek az $1/\sqrt{b}$ paramétert választottuk).

3.3.2. Bifurkációk

Érdeemes végigkövetni, hogyan áll elő az instabil állapot egy bistabilitásra hajlamos rendszerben, melynek helyzetét az x koordináta jellemzi. A rendszer valamelyik külső paraméterét változtatjuk, amit általánosságban μ -vel jelölünk. Feltesszük, hogy a rendszer tükrözésre szimmetrikus valamely x_0^* koordinátája körül, s hogy μ viszonylag kis értékeire az erő mindenütt vonzó. Ekkor egyetlen stabil nyugalmi állapot létezik, az $x^* = x_0^*$ koordinátával. Ahogy μ -t növeljük, a fixpont egyre kevésbé stabil, és valamilyen μ_c kritikus értéknél elveszti stabilitását. Ugyanekkor két új stabil fixpont keletkezik a szimmetriaponton kívül, de arra szimmetrikusan.

Ha a lehetséges nyugalmi állapotok, fixpontok értékét μ függvényében felrajzoljuk, jellegzetes szerkezetet kapunk (3.19. ábra). A $\mu > \mu_c$ tartományban három

görbe van jelen, melyek μ növelésével egymástól eleinte gyorsan, majd egyre lassabban távolodnak. A $\mu < \mu_c$ tartománybeli egyetlen egyenes vonallal a görbék egy villaszerű alakzatot rajzolnak ki. Az egész folyamatot ezért szokás villásodásnak, *bifurkációnak* nevezni. A bifurkáció során egy állapot elveszti stabilitását, s ezzel egy időben új stabil állapotok keletkeznek. A $\mu = \mu_c$ instabilitási pontot *bifurkációs pontnak*, ezt a szimmetrikus bifurkációs folyamatot pedig *vasvilla-bifurkációnak* nevezzük.



3.19. ábra. Bifurkációs diagram: vasvilla-bifurkáció (sematikus rajz). Egy rendszer nyugalmi helyzeteinek x^* koordinátája a μ paraméter függvényében. A szaggatott vonal a megszűnt stabil állapot helyén maradó instabil állapotot mutatja. Néhány paraméterértékhez felrajzoltuk az erőtvényt megadó potenciál alakját is.

A (3.44) potenciállal jellemzett rendszer jó modellje a vasvilla-bifurkációknak, ha a $\mu \equiv b$ paramétert mind a negatív, mind a pozitív tartományban változtathatjuk. A $b < 0$ tartományban csak az origó lehet fixpont, s az stabil. A bifurkációs pont a $b_c = 0$ értékhez tartozik, előlött az origó instabil, de megjelenik két stabil fixpont az $x^* = \sqrt{b/(2d)}$ és a $-x^*$ helyeken.

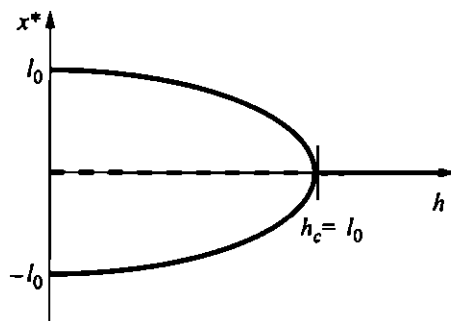
Az instabilitás közeledtének egyértelmű jele, hogy a stabil állapot(ok) körüli kis rezgések frekvenciája *csökken*, azaz a periódusidő *nő*, bármelyik oldalról közeledünk is a bifurkációs ponthoz, hiszen a potenciál egyre laposabb. Ezt a jelenséget kritikus lelassulásnak nevezik.¹¹

¹¹A vasvilla-bifurkáció analóg a termodinamikából ismert másodrendű fázistátalukulással. A legismertebb példa a mágneses rendeződés, amely egy kritikus hőmérséklet alatt spontán jelenik meg (főként a rendszer nem mutat állandó mágnesezettséget).

Egyszerű fizikai példaként tekintsük a 3.14a. ábra elrendezését. Két, egymással szemben elhelyezkedő, l_0 hosszúságú, k rugóállandójú rugó végén egységnyi tömegű test helyezkedik el. A test csak egy vízszintes egyenes mentén mozoghat. A rugók másik végpontja ezen egyenesen kívül, azonos h távolságban rögzített. Tekintsük h -t a bifurkációs paraméternek. Amíg h nagyobb a nyugalmi hosszánál, $h > l_0$, addig az $x = 0$ helyzet nyilván stabil egyensúlyi állapot. Ha a rögzítési pontokat a nyugalmi hosszánál közelebb visszük az x tengelyhez, akkor a test egyensúlyi állapota egy nullától különböző kitérésű helyen lesz. Annak érdekében, hogy ezt pontosan leírjuk, határozzuk meg a testre ható erő vízszintes komponensét az x kitérésű helyen. A rugók hossza $\sqrt{h^2 + x^2}$, az erők abszolút értéke ezért $k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0)$, x komponensük (3.6a. ábra) pedig $-k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0)x/\sqrt{h^2 + x^2}$. Az eredő erő tehát vízszintes, és nagysága

$$F(x) = -2kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}} \right). \quad (3.47)$$

Innen látszik, hogy $h > l_0$ -ra csak az $x^* = 0$ állapot lehet fixpont, s az stabil. A $h < l_0$ esetben három megoldás létezik, $x^* = [l_0^2 - h^2]^{1/2}$, 0 és $-x^*$, amelyek közül az origó nyilván instabil. A $h_c = l_0$ értéknél tehát vasvilla-bifurkáció történik (3.20. ábra). Az általános μ paraméternek például a $\mu = l_0 - h$ különbség feleltethető meg.



3.20. ábra. A 3.14a. ábrán bemutatott rendszer vasvilla-bifurkációja a h paraméter függvényében.

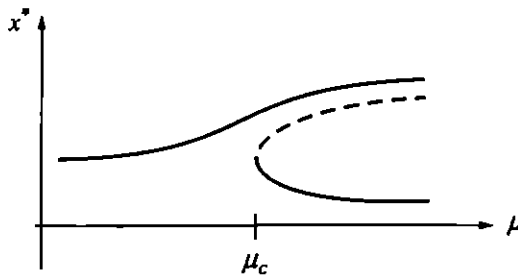
3.11. feladat. Határozzuk meg a 3.14a. ábrán bemutatott rendszer stabil állapotai körüli kis rezgések ω_0 frekvenciáját a bifurkációs pont mindkét oldalán!

3.12. feladat. Mutassuk meg, hogy a bifurkációs pont közelében a (3.47) erő-törvény egyenértékű a bistabil rendszerek modellezésére használt (3.43) erő-törvénnyel.

3.13. feladat. Elemezzük a forgatott gyűrűn mozgó test (3.14b. ábra) nyugalmi állapotait az Ω forgási szögsebesség függvényében.

3.14. feladat. Írjuk fel a mágneses inga (3.14c. ábra) nyugalmi állapotait meghatározó egyenletet. Használjuk a Coulomb-törvényt, s az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az inga olyan hosszú, hogy a test mozgása gyakorlatilag a vízszintes síkban zajlik, s a mágnes e sík alatt d távolságra helyezkedik el.

A szimmetriával nem rendelkező rendszerekben a bifurkáció másképpen történik. Ilyenkor a μ paraméter növelésekor a stabil állapot nem szűnik meg, de egy kritikus μ_c értéknél két új stacionárius megoldás születik, melyek közül az egyik stabil, a másik pedig instabil (3.21. ábra). A μ paraméter nagy értékekről történő



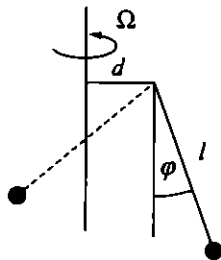
3.21. ábra. Torzított vasvilla-bifurkáció (sematikus rajz). Aszimmetrikus rendszerekben a μ_c paraméterértéknél egy második stabil nyugalmi állapot alakul ki ugrásszerűen, ami egy hiperbolikus állapottal együtt (szaggatott vonal) jelenik meg.

csökkentésekor azt tapasztaljuk, hogy az egyik nyugalmi helyzet hirtelen eltűnik. A korábban ezen az ágon tartózkodó rendszer állapota ekkor ugrásszerűen megváltozik.¹² Ezt a jelenséget ezért néha katasztrófának is nevezik. Az egész bifurkációs folyamat a *torzított vasvilla-bifurkáció*.

A bifurkációk során nemcsak a stabil nyugalmi állapotok (súrlódásos rendszerekben attraktorok) helyzete, hanem az egész fázistérkép, és ennek megfelelően a mozgás jellege is *alapvetően megváltozik*.

3.15. feladat. Tekintsünk egy függőleges tengely körül Ω szögsebességgel forgatott d hosszúságú vízszintes rúdon lógó ingát (kórhintamodell). Határozzuk meg

¹²Ez a termodinamikai elsőrendű fázisátalakulásokkal analóg jelenség.



a nyugalmi szögkitérést megadó egyenletet. Mutassuk meg, hogy kis d rúd-hosszúságok esetén a rendszer a $\mu = \Omega$ szögsebesség függvényében torzított vasvilla-bifurkáción megy keresztül.

3.16. feladat. Tekintsük a 3.14a. ábra rendszerét a vízszintes iránytól α szöggel kissé elforgatva. Mutassuk meg, hogy a rendszerben torzított vasvilla-bifurkáció történik a h paraméter változtatásakor.

3.4. Állandósult periodikus mozgás: a határciklus

3.4.1. Periodikus erőtvény

Tekintsük az

$$F(x) = -A \sin x \quad (3.48)$$

erőtvényt. Mivel F egységnyi tömegre ható erőt jelent, az A paraméter ($A > 0$) jelentése a test maximális gyorsulása. Az ehhez tartozó potenciál

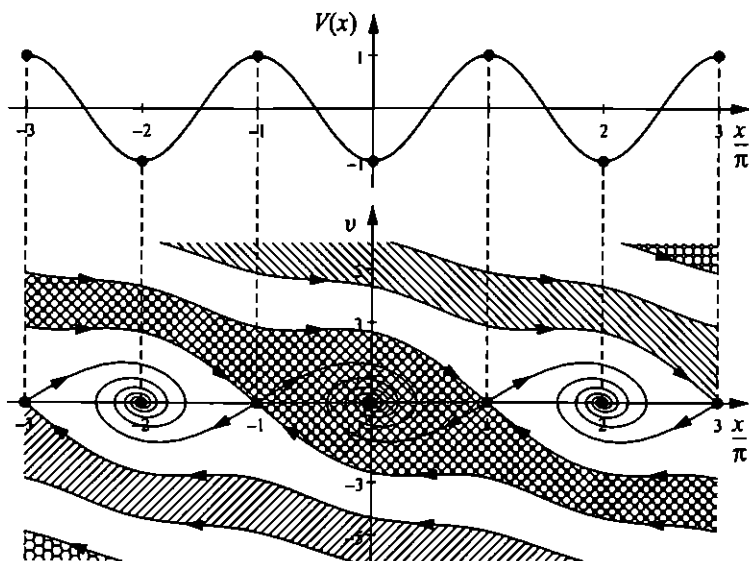
$$V(x) = -A \cos x. \quad (3.49)$$

A potenciál 3.1.1. szakaszban tárgyalt szemléletes jelentése szerint a probléma a $V(x)$ -szel arányos felületen történő mozgásnak felel meg gravitációs térben, amennyiben a felület függőleges irányban csak keveset változik. Ebben a képből a (3.48) erőtvény egy 2π periodicitású hullámzó felületen, enyhén gödrös úton történő mozgást ír le.¹³

3.17. feladat. Adjuk meg a (3.48) erőtvénnyel jellemzett súrlódásmentes rendszer fázistérképét!

¹³Vegyük észre, hogy az $x \rightarrow \varphi$ megfeleltetéssel a matematikai inga erőtvényét kapjuk vissza, ahol φ a szögkitérés. Ekkor az A amplitúdót a gravitációs gyorsulás és az inga l hosszának hányadosával kell azonosítanunk, $A = g/l$.

Gyenge súrlódás esetén a gödrök alját jelentő $x_+^* = 2\pi n$ pontok (n egész szám) spirális attraktorok. A sajátfrekvencia a stabil egyensúlyi pontok körül az $F'(x_+^*) = \omega_0^2$ összefüggés szerint $\omega_0 = \sqrt{A}$. Az $x_-^* = \pi + 2\pi n$ pontok, a lokális potenciálmaximumok viszont hiperbolikusak, az $s_0 = \sqrt{A}$ tasztási paraméterrel. Az úton vízszintesen ellökött test a gödrök alján gyorsul, a buckák tetején lassul, de energiája a súrlódás miatt összességében csökken, és a test előbb-utóbb megáll valamelyik gödör alján. Egy bucka tetején egészen kis kezdősebességgel elengedett test nem képes átjutni a következő akadályon, ezért a szomszédos gödörben áll meg néhány rezgés után. Mindennek megfelelően a hiperbolikus pontok instabil sokaságai a szomszédos spirális attraktorokba futnak, a stabil sokaságok pedig azok a görbék, melyek mentén a fázistérben a buckák tetején levő nyugalmi állapot éppen elérhető. Ezek most is a szomszédos attraktorok vonzási tartományát választják el (3.22. ábra). A periodikus erő ellenére a test mindig megáll, állandósult periodikus mozgás nem alakulhat ki a súrlódás miatt.



3.22. ábra. A gödrös úton történő mozgás potenciálja és fázistérképe. Minden második attraktor vonzási tartományát besatíroztuk. A fázistérkép szerkezete periodikusan ismétlődik. A paraméterek: $A = 1$, $\alpha = 0,3$.

3.4.2. Lecsúszás gördrös lejtőn

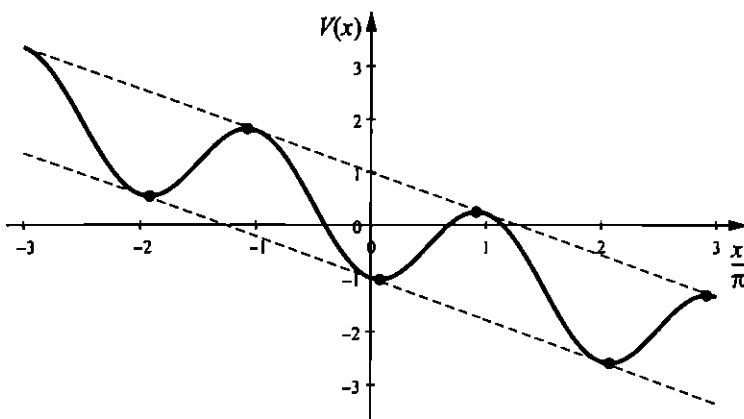
Vizsgáljuk meg, mi történik, ha az előző erőtvényhez egy konstans erőt adunk, azaz a potenciált egy lineáris kifejezés hozzáadásával megdöntjük. Ekkor

$$F(x) = -A \sin x + F_0 \quad (3.50)$$

az erőtvény, és

$$V(x) = -A \cos x - F_0 x \quad (3.51)$$

a potenciál. Az $F_0 > 0$ a lejtő meredekségére jellemző paraméter, a megdöntésből származó erő. A szemléletes értelmezés szerint a mozgás egy gördrös lejtőn történő mozgásnak felel meg (3.23. ábra). A súrlódásos eset az ilyen lejtőn való sílécés le-siklás modelljének is tekinthető, ahol a sebességgel arányosak a fékezőerők.¹⁴



3.23. ábra. A gördrös lejtőn történő mozgás (3.51) potenciálfüggvénye. A paraméterek: $A = 1$, $F_0 = 0,25$.

A nyugalmi helyzeteket a

$$\sin \Delta = F_0/A \quad (3.52)$$

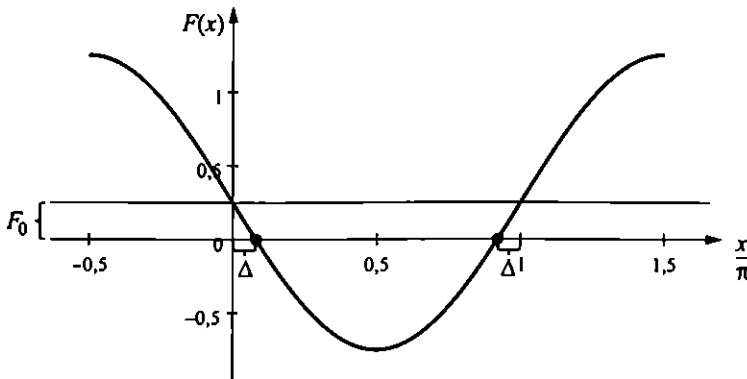
feltétel határozza meg (3.24. ábra), ahol $\Delta > 0$ a fixpontok eltolódását megadó paraméter. Mivel a szinuszfüggvény csak egynél kisebb abszolút értékű lehet, a

¹⁴Az $x \rightarrow \varphi$ helyettesítéssel az állandó forgatónyomatéknak kitett inga esetét kapjuk vissza. A mozgásegyenlet egyben az ún. Josephson-átmenetekben létrejövő feszültség kialakulását is leírja. Véges sebesség véges feszültségességnek felel meg.

fenti egyenletnek csak addig van megoldása, amíg

$$F_0 \leq A. \quad (3.53)$$

Ha ez teljesül, akkor létezik egy megoldássereg: $x_+^* = \Delta + 2\pi n$, a gödrök alján elhelyezkedő nyugalmi állapotok, melyeket a $2\pi n$ pontok véges Δ értékkel való jobbra tolásával kapunk. Hasonlóan, a $\pi + 2\pi n$ pontok ugyanezen Δ értékkel való balra tolásával adódnak az $x_-^* = \pi - \Delta + 2\pi n$ értékek, a lokális maximumoknak megfelelő instabil nyugalmi állapotok (3.24. ábra). (Ha a (3.53) feltétel nem teljesül, a lejtő olyan meredek, hogy egyensúlyi helyzetek nem léteznek, a síelő mindenhol lecsúszik.)

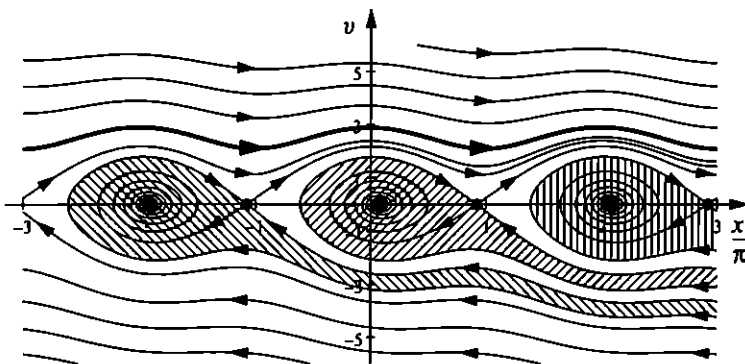


3.24. ábra. A gödrös lejtőn lecsúszó testre ható periodikus erő és a Δ eltolás jelentése. Azok a fixpontok, ahol $F(x)$ csökken, stabilak, ahol $F(x)$ nő, instabilak. A paraméterek: $A = 1$, $F_0 = 0,25$.

3.18. feladat. Határozzuk meg a gödrös lejtőn mozgó test fázistérképét a súrlódásmentes esetben.

Enyhe súrlódás jelenlétében az x_+^* pontok spirális attraktorok, az x_-^* pontok pedig hiperbolikusak. Az utóbbiak instabil sokaságának balra induló ágai a legközelebbi spirális attraktorba vezetnek (3.25. ábra).

Mivel a súrlódás nem erős, ha a lejtő elegendően meredek, a buckák tetejéről kezdősebesség nélkül jobbra elindított test nemcsak feljut a szomszéd bucka tetejére, hanem azon véges sebességgel át is halad. Ezután már a többi bucka fölött is átsiklik. A sebessége azonban nem nőhet tetszőlegesen, mert a súrlódási erő egyre jobban fékezi. Ezért elegendő hosszú idő elteltével egy *állandósult periodikus*



3.25. ábra. A gödrös lejtőn történő mozgás fázistérképe kis súrlódás mellett. A paraméterek: $A = 1$, $F_0 = 0,25$, $\alpha = 0,1$. A hiperbolikus pontok instabil sokaságainak egyik ága most is a gödrök aljának megfelelő attraktorokba vezet, azonban a másik águk a súrlódás miatt korlátos sebességű lecsúszás hullámvonalához, a határciklushoz (vastag vonal) tart. A határciklus vonzási tartománya nem csak a pozitív sebességű félsíkra, hanem a negatívra is kiterjed. A stabil sokaságok a spirális attraktorok vonzási tartományainak határát rajzolják ki, melyeket eltérő sátrózással megkülönböztettünk.

mozgás alakul ki. Ez nem lehet állandó sebességű, hiszen a gödrökben a mozgásnak gyorsabbnak kell lennie, mint a buckákon. A síelési hasonlatban ez a lüktető sebességű állandósult lesiklás.¹⁵ Ennek a mozgásnak egy új típusú attraktor felel meg a fázistérben, aminek alakja egy periodikus görbe. Az ilyen periodikus attraktort *határciklusnak* nevezzük. Az eddig tárgyalt pontattraktorokkal szemben ez nem a mozgás leállítását, hanem éppen fennmaradását mutatja. Ez a periodikus mozgás állandó energiafelvétel következtében jön létre, amit esetünkben a gravitációs erő lejtővel párhuzamos gyorsító hatása biztosít. A határcikluson éppen annyi energia emésztődik fel átlagosan a súrlódás következtében, mint amennyivel a síelő helyzeti energiája csökken a gravitációs térben. A határciklus az első általunk részletesen tárgyalt *dinamikai* attraktor.

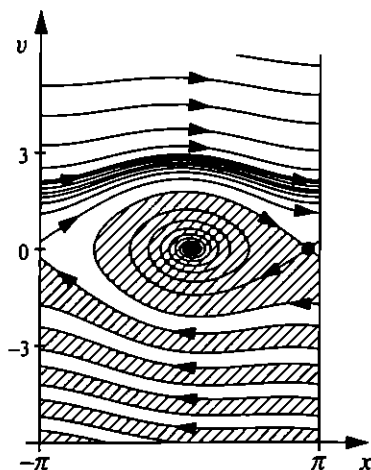
A határciklus a fázistéren felülről (a nagy sebességek irányából) és alulról is elérhető. Ez annak felel meg, hogy a gyorsan lefelé induló síelők mind fékeződnék és előbb-utóbb átveszik a határciklusnak megfelelő mozgást. Ugyanakkor a buckák tetején alig meglökött síelő átsiklik a következő buckákon, és sebessége fokozatosan

¹⁵Az állandó forgatónyomatéknak kitett inga esetében ez állandósult forgást, a Josephson-átmenetben pedig állandósult feszültségkülönbség megjelenését jelenti.

nő a határciklusmozgás eléréséig. Az instabil sokaságok jobbra induló ágai a határciklus felé tartanak.

A hiperbolikus fixpontok instabil sokaságának alsó ága a balra eső szomszédos fixpontattraktorba vezet be, amely a bucka fölötti gödörben való megállást írja le. A rendszerben tehát végtelen sok fixpontattraktor létezik együtt egy határciklussal. A hiperbolikus pontok stabil sokaságai a tőlük balra levő fixpontattraktor vonzási tartományát határolják. Az ezeken a tartományokon kívül induló pontok mind a határciklushoz tartanak (l. 3.25. ábra).

Megemlítjük, hogy az erő periodicitása miatt minden 2π hosszúságú távolság-intervallumhoz ugyanaz a fázistérkép tartozik. Ha a fixpontattraktorokat nem kívánjuk megkülönböztetni egymástól, a teljes probléma vizsgálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon is, vagyis a térbeli periódusra megszorítva. Ez annak felel meg, hogy a fázistér mintegy „hengerré hajtható össze”.¹⁶ A fázistérképet a 3.26. ábra mutatja. Ebben az ábrázolásban a spirális attraktor azt reprezentálja, hogy a test valahol megáll. A trajektóriáknak a határciklus körüli sűrűsödése a határciklus vonzó jellegét mutatja.



3.26. ábra. A gödrös lejtőn történő mozgás fázistérképe periodikus ábrázolásban. A π helyen kilépő vonalak a $-\pi$ helyen ugyanakkora sebességértékkel lépnek be, és fordítva. A határciklus (vastag vonal) vonzási tartománya fehér, a fixpontattraktoré pedig sáfrányos. (A határciklus felett a lassú konvergencia miatt számos vonalat elhagytunk.)

¹⁶Különösen természetes ez az állandó forgatónyomatéknak kitelt inga esetében, ahol a helyzeti a szögkitérés jellemzi, ami 2π -periodikus.

3.19. feladat. Adjuk meg, hogyan változik a gödrös lejtőn történő mozgás fázistérképe a súrlódási együttható növelésekor (amint a hó egyre vizezsebbé válik).

3.5. Az általános fázistér

3.5.1. A fázistér általános definíciója

A folytonos időben zajló folyamatok leírása differenciálegyenletekkel történik. Ha ezek eredeti alakjukban magasabb rendű (elsőnél magasabb időderiváltat tartalmazó) egyenletek is, új változók bevezetésével (pl. az első deriváltfüggvényt új függő változónak tekintve) *elsőrendű* differenciálegyenletek rendszereként írhatók. Autonómnak azokat a differenciálegyenleteket nevezzük, melyek az időt nem tartalmazzák expliciten. Tekintsük az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.54)$$

alakkal megadott autonóm rendszert, ahol $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ az ismeretlen időfüggvények, a függő változók n -dimenziós vektora, az $\mathbf{f} \equiv (f_1, f_2, \dots, f_n)$ függvények egyike sem függ expliciten az időtől.¹⁷ Az időbeli viselkedés n független kezdőfeltétellel, azaz az \mathbf{x}_0 kezdővektor megadása esetén egyértelmű. A rendszer mozgása n független koordináta követését jelenti, melyek egy n -dimenziós koordináta-rendszer tengelyein egyértelműen megadhatók. Ez a koordináta-rendszer feszíti ki a vizsgált probléma fázistérét.

A rendszer pillanatnyi állapotának a fázistér \mathbf{x} pontja felel meg. Ahogyan az állapot változik, a pont vándorol a fázistérben, s egy trajektóriát rajzol ki.

A fizikai, sőt általában a természettudományok (és gazdaságtudományok) által vizsgált rendszerek *döntő többségében* a differenciálegyenletekben szereplő f_i függvények simán és viszonylag lassan változnak, vagyis deriválhatóak, s a deriváltjuk mindenütt véges. A továbbiakban differenciálegyenleteken ilyen tulajdonságú egyenleteket értünk. Ezekben adott kezdőfeltételekhez mindig *egyértelmű* megoldások tartoznak. Ez azt jelenti, hogy a mozgásnak megfelelő fázistérbeli trajektóriák *nem metszhetik* egymást (ellenkező esetben ugyanis a metszéspontnak megfelelő kezdőfeltételből két megoldás indulna ki). A fázistérbeli viselkedés hasonlít a folyadék mozgásához, ahol a részecskepályák szintén nem metszhetik egymást, s ezért szokás azt mondani, hogy az \mathbf{f} vektor egy *folyamot* definiál a fázistérben. A trajektóriák a hiperbolikus pont körül „ütkezhetnek”, de ott sem metszik egymást. A stabil sokaság két ágának megfelelő trajektória egymás felé tart, de csak

¹⁷A nemautonóm, gerjesztett esetekkel a 4.1.2. szakaszban foglalkozunk.

végtelen hosszú idő múlva érintkeznek. Egy rendszert akkor nevezünk *egyszerűnek*, ha kevés változó jellemzi dinamikáját, azaz fázistere *alacsony dimenziós* (a gyakorlatban legfeljebb 4–10 dimenziós).

A fázistérbeli leírásban az idő nem jelenik meg expliciten, de a fázistér elvileg az összes lehetséges mozgást tartalmazza. Már egyetlen trajektória is végtelen sok egyedi mozgásnak felel meg, mindazoknak, melyek kezdőfeltétele lehet a trajektória valamelyik pontja (l. 1.2. táblázat).

Kétdimenziós fázistérben a dinamika

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (3.55)$$

alakú, ahol f_1 és f_2 tetszőleges függvények.

Az egy egyenes mentén zajló súrlódásos mozgások eddig vizsgált esetében a mozgásegyenlet

$$\ddot{x} = F(x) - \alpha \dot{x}, \quad (3.56)$$

ami az $x \equiv x_1$, $v \equiv \dot{x} \equiv x_2$ jelöléssel az

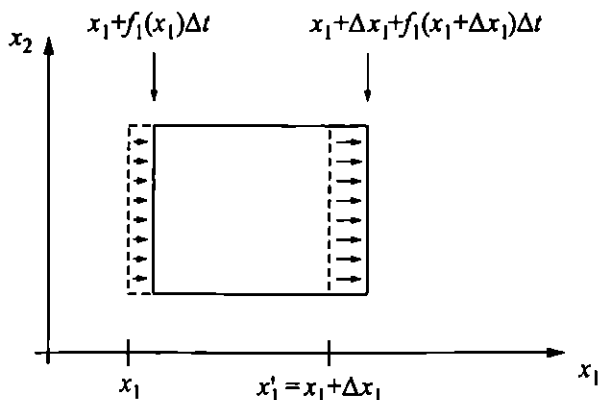
$$f_1(x_1, x_2) = x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = F(x_1) - \alpha x_2 \quad (3.57)$$

választásnak felel meg. Annak ellenére, hogy ez nem a matematikailag legáltalánosabb alak, a legfontosabb dinamikai viselkedéstípusok a newtoni mechanika keretein belül a (3.57) rendszerben mind megfigyelhetők.

3.5.2. A fázistérfogat dinamikája

A fázistér használata felvet egy olyan kérdést, mely a hagyományos egyrészecske-viselkedésben nem merül fel: hogyan mozog a fázistér valamely részhalmaza (pontosabban az ezt reprezentáló pontok összessége), s eközben hogyan változik térfogata. A fázistérfogat mozgásán azt értjük, hogy egy tetszőleges, összefüggő fázistér-részt pontokkal (kezdőfeltételekkel) folytonosan kitöltünk, s követjük, hogy t idő múlva ez a pontsokaság hová kerül. A fázistérfogat mozgásának követése tehát annak felel meg, hogy részecskék sokaságát vizsgáljuk. Ennek az az előnye, hogy ha egyes kezdőfeltételek esetleg nem is tipikusak, a sokaság mindenképpen valamiféle átlagos viselkedést mutat. A fázistérfogat időbeli változásának vizsgálata tehát egy lépés a mozgások statisztikus leírása felé.

Természetesen a kezdeti alakzat formája időben változik, de általában az alakzat által kitöltött térfogat is függ az időtől. A fázistérfogat változási aránya könnyen leolvasható. Tekintsünk egy síkbeli problémát, és az (x_1, x_2) pont körüli kis téglalapot. Az élhossz az x_1 tengely mentén $\Delta x_1 \equiv x'_1 - x_1$ (3.27. ábra), az x_2 tengely mentén pedig $\Delta x_2 \equiv x'_2 - x_2$.



3.27. ábra. A fázistérfogat változása téglalap alakú kezdeti forma, ha csak x_1 -ben történik változás. A bal oldalél Δt idő múlva az $x_1 + f_1(x_1)\Delta t$ helyzetbe kerül, a jobb oldalél pedig az $x_1' + f_1(x_1')\Delta t$ helyzetbe. Az alapél hosszváltozása ezért $(f_1(x_1) - f_1(x_1'))\Delta t \approx (\partial f_1/\partial x_1)\Delta x_1 \Delta t$, változási sebessége pedig $\Delta \dot{x}_1 = (\partial f_1/\partial x_1)\Delta x_1$. Hasonló összefüggés igaz a magasság változási sebességére is.

Ezen élhosszak időbeli változása (3.55) alapján $\Delta \dot{x}_1 = (\partial f_1/\partial x_1)\Delta x_1$ és $\Delta \dot{x}_2 = (\partial f_2/\partial x_2)\Delta x_2$. A $\Gamma = \Delta x_1 \Delta x_2$ fázistérfogat időderiváltja

$$\dot{\Gamma} = \Delta \dot{x}_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta \dot{x}_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \Gamma. \quad (3.58)$$

Ez azt mutatja, hogy a

$$\dot{\Gamma} = -\sigma \Gamma \quad (3.59)$$

összefüggéssel definiált σ fázistérfogat-összehúzóási ráta

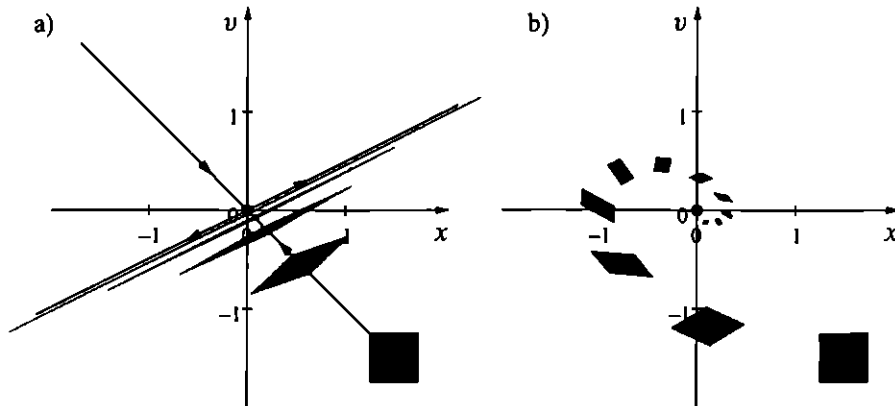
$$\sigma = - \left(\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \right) \equiv - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \equiv -\text{div } f. \quad (3.60)$$

Az összehúzóási rátát tehát a folyam mint vektortér divergenciája határozza meg. Ez az eredmény az általánosított *Liouville-tétel*. A levezetésből látszik, hogy az állítás tetszőleges dimenziós fázistérben is igaz. Általános folyam esetén σ függ a fázistérbeli helytől, s előjele sem feltétlenül állandó. Negatív σ a fázistérfogat tágulásának felel meg.

A (3.56) Newton-egyenlethez a

$$\sigma = \alpha \quad (3.61)$$

fázistérfogat-összehúzódási ráta tartozik. Ezek szerint egyedül a súrlódás, a disszipáció okozza a fázistérfogat változását. Mivel α állandó, az általunk eddig vizsgált (3.56) dinamikában a fázistérfogat-összehúzódási arány egyben független a fázistérbeli helyzettől. A (3.59) egyenlet szerint a Γ fázistérfogat tehát exponenciálisan változik, $\Gamma(t) = \Gamma_0 e^{-\alpha t}$, ami igen gyors csökkenést jelent. A fázistérfogat az $1/\alpha$ lecsengési idő néhányszorosa alatt gyakorlatilag zérusra zsugorodik össze. Ennek során alakja azonban változhat (3.28. ábra).



3.28. ábra. A fázistérfogat csökkenése a hiperbolikus fixpont (a) és a spirális attraktor körül (b). A paraméterek $\omega_0 = s_0 = 0,7$, $\alpha = 0,5$. Mindkét esetben egy $(1,5, -1,5)$ középpontú, négyzet alakú, $0,5$ oldalú fázistérfogatot indítottunk, s egységnyi időnként ábráztuk helyzetét.

A fázistérfogat összehúzódása a folyamat irreverzibilitásával, végső soron a termodinamika *második főtételével* függ össze, mely megszabja a makroszkopikus rendszerek időfejlődésének irányát. Fázistérfogat-növekedés csak negatív súrlódás esetén lenne lehetséges. Magukra hagyott rendszerekben ez a második főtétel miatt lehetetlen.¹⁸

A vizsgált mozgások fontos speciális esetét alkotják a *konzervatív* mozgások, melyek során a fázistérfogat *nem* változik, $\Gamma =$ állandó. A (3.59) összefüggés alapján ilyenkor a súrlódásnak elhanyagolhatónak kell lennie, $\alpha = 0$. Ezért $\sigma \equiv 0$,

¹⁸A fázistérfogat tágulása csak olyan kivételes esetekben fordulhat elő, amelyekben a rendszer jelentős energiát vesz fel környezetétől. Állapota ilyenkor alapvetően eltér a termikus egyensúlytól, annyira, hogy σ – legalábbis helyenként – pozitívvá válhat. Az ilyen esetek leírása természetesen csak a (3.56)-tól különböző egyenletekkel lehetséges.

(Liouville-tétel), amely azonban nem zárja ki, hogy maga a fázistérbeli alakzat jelentős változáson menjen át, miközben térfogata állandó marad. A sűrűlódás hiánya azt is jelenti, hogy a teljes mechanikai energia $\mathcal{E} = v^2/2 + V(x)$ időben megmarad.

Az, hogy az instabil állapot a fázistérben hiperbolikus pontok megjelenésével kapcsolatos, a fázistérfogot csökkenésének (ill. megmaradásának) következménye. Az instabil irány menti távolodás csak úgy lehetséges, hogy a stabil irányban közeledés történik.

3.20. feladat. Határozzuk meg az

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \alpha(x_1^2 - 1)x_2$$

egyenletek által definiált folyam (az ún. van der Pol-oszcillátor) fázistérfogat-összehúzódsági rátáját!

3.5.3. Az idő irányának megfordítása

Az időfejlődéseket leíró differenciálegyenletekben az idő iránya megfordítható. A negatív időirányban lezajló folyamatokat – éppen úgy, mint az eredetieket – a kezdőfeltétel egyértelműen meghatározza. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy a *dinamika invertálható*. Az általános (3.54) egyenlet megfordított, invertált alakja

$$\dot{x} = -f(x), \tag{3.62}$$

ami nem más, mint a negatív időirányban futó dinamika. A numerikus megoldásban ez egyszerűen az időlépés negatív értékű választásának felel meg. Az invertált dinamika fázistérfogat-összehúzódsági rátája az eredeti σ ellentettje, tehát $-\sigma$. Az időirány megfordítása azt jelenti, hogy az $x_i(t)$ függvényeket adott kezdő- és végpont között visszafelé olvassuk le. A megfelelő fázistérbeli trajektória alakja ezért *nem* változik, csak a nyíl irányát kell megfordítanunk. A fázistér tehát *egyszerre tartalmazza mind az eredeti, mind a időben fordított dinamika trajektóriáit*. Hangsúlyozzuk, hogy a megfordíthatóság *nem* jelent termodinamikai értelemben reverzibilitást. Minden disszipatív folyamat irreverzibilis, mert a rendszer mindig az attraktor mint végállapot elérése felé halad. Ennek ellenére létezik a (3.62) megfordított, invertált dinamika, ami viszont az attraktor bármely kis környezetéből való eltávolodást ír le.

A (3.56) Newton-egyenletben végrehajtható az ún. időtükrözés is, aminek hatására a koordináta nem változik, a sebesség viszont előjelet vált. Az ennek megfelelő transzformáció:

$$t \rightarrow -t, \quad x \rightarrow x, \quad v \rightarrow -v. \tag{3.63}$$

A (3.56) súrlódásos mozgás időtükrözött párját az

$$\ddot{x} = F(x) + \alpha \dot{x} \quad (3.64)$$

egyenlet írja le. Ebben a súrlódás nem fékezi, hanem gyorsítja a testet. A dinamika invertálhatósága annyit jelent, hogy az időtükrözött mozgás, a megfordított dinamika ugyanúgy egyértelműen meghatározott, mint az eredeti (csak nem feltétlenül bír fizikai tartalommal).

Azok a rendszerek, melyekben az időtükrözött mozgások mind valóságos mozgások, az ún. *időtükrözésre invariáns* rendszerek. Az ilyen rendszerek filmen visszafelé lejátszott mozgása is megvalósul, ezek termodinamikai értelemben is reverzibilis mozgások. A súrlódásmentes konzervatív rendszerek időtükrözésre invariánsak: $\alpha = 0$ esetén a mozgásegyenlet invariáns a (3.63) transzformációra. Ezzel sajátos szimmetria jelenik meg a fázistérben. Ilyenkor ugyanis minden (x_0, v_0) ponthoz tartozik egy $(x_0, -v_0)$ pont, melyből mint kezdőpontból szintén kiindul egy ugyanolyan alakú trajektória. Ez azt jelenti, hogy a trajektóriaseregnek a sebesség előjelének megváltoztatására invariánsnak kell lennie: a görbék *szimmetrikusak az x tengelyre*. Ennek a szimmetriának a következménye, hogy véges kiterjedésű súrlódásmentes mozgások kétdimenziós fázistérben a hiperbolikus fixpontok teljes stabil és instabil sokaságai egybeesnek (l. pl. 3.9. feladat).

3.5.4. Fixpontok és stabilitásuk az általános kétdimenziós fázistérben

A fixpontok azok a fázistérbeli pontok, melyekben $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0}$, azaz, ahol $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, vagyis, ahol a folyam eltűnik. Tegyük fel, hogy megtaláltuk a (3.55) egyenlet valamely (x_1^*, x_2^*) fixpontját. (A gyakorlatban ez nem mindig egyszerű, hiszen az $f_1(x_1^*, x_2^*) = 0, f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ nemlineáris egyenletrendszer kell megoldanunk.) A fixpont továbbra is időfüggetlen állapotot jelent, de a második koordináta most nem feltétlenül tűnik el, mert az nem a sebesség.

A fixpont stabilitását úgy határozzuk meg, hogy felírjuk a kis környezetében érvényes egyenletet. Feltesszük, hogy a fixponttól való $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ eltérés kicsi, s ebben az eltérésben a vezető, lineáris tagokat tartjuk csak meg. A linearizált (3.55) egyenletek az

$$(x_1 - x_1^*)' = a_{11}(x_1 - x_1^*) + a_{12}(x_2 - x_2^*), \quad (3.65)$$

$$(x_2 - x_2^*)' = a_{21}(x_1 - x_1^*) + a_{22}(x_2 - x_2^*)$$

alakban írhatók. Ez a lineáris egyenletrendszer a $\Delta \mathbf{x} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*)$ vektoriális jelöléssel

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A \Delta \mathbf{x}, \quad (3.66)$$

ahol az A valós mátrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Az A stabilitási mátrix elemei tehát az $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ deriváltak a fixpontban kiértékelve.

A (3.65) egyenletek megoldását a $\Delta x_i = u_i e^{\lambda t}$ ($i = 1, 2$) alakban keresve azt találjuk, hogy λ -nak ki kell elégítenie a

$$\lambda u_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2, \quad \lambda u_2 = a_{21} u_1 + a_{22} u_2 \quad (3.68)$$

egyenletrendszert, vagyis λ az A mátrix sajátértéke, hiszen $Au = \lambda u$. A (3.68) homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldása létezésének feltétele az, hogy


$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr} A + \det A = 0. \quad (3.69)$$


Itt $\text{Tr} A \equiv a_{11} + a_{22}$ a mátrix átlósösszege, nyoma (idegen szóval trace-e vagy spúrja), $\det A \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ pedig a determinánsa. Ennek az egyenletnek két különböző λ_{\pm} komplex megoldása lehet. Összegük mindenképpen a diagonális elemek összege, a mátrix nyoma. Ez azonban nem más, mint a (3.65) linearizált egyenlet divergenciája, azaz általánosan igaz, hogy


$$\lambda_+ + \lambda_- = -\sigma. \quad (3.70)$$


A sajátértékek összegének ellentettje tehát a fixpont környékén érvényes fázistér-fogat-összehúzóráta, s ezért valós. Konzervatív rendszerben $\sigma = 0$.



A fixpont jellegét a sajátértékek tulajdonságai alapján a következőképpen határozzuk meg:

 **Hiperbolikus pont**, ha λ_{\pm} valós, $\lambda_+ > 0 > \lambda_-$. A korábban definiált instabilitási exponens az általános lineáris probléma λ_+ pozitív sajátértéke.

 **Elliptikus pont**, ha λ_{\pm} tisztán képzetes (csak konzervatív esetben, $\sigma = 0$ mellett lehetséges). A korábban definiált ω_0 sajátfrekvencia az általános lineáris probléma sajátértékeinek abszolút értéke.

 **Csomópontattraktor**, ha λ_{\pm} valós és mindkét λ negatív ($\sigma > 0$).

 **Spirális attraktor**, ha λ_{\pm} komplex és ha valós része, $\text{Re} \lambda_{\pm} < 0$ ($\sigma > 0$).

-  *Csomópontrepellor*,¹⁹ ha λ_{\pm} valós és mindkét λ pozitív ($\sigma < 0$, ami csak táguló fázistérben lehetséges).
-  *Spirális repellor*, ha λ_{\pm} komplex és $\text{Re}\lambda_{\pm} > 0$ (szintén csak táguló fázistérben, $\sigma < 0$ esetén lehetséges).

Itt megadtuk a repellorfixpontokat is, mert az eredeti probléma fixpontattraktora az invertált dinamikában mindig fixpontrepellorokként jelennek meg. A könnyű áttekinthetőség érdekében a különböző eseteket a 3.1. táblázatban is összefoglaltuk.

3.1. táblázat. Fixpontok osztályozása λ_{\pm} valós és képzetes részei alapján.

	$\text{Re}\lambda_{\pm} = 0$	$\text{Re}\lambda_{\pm} < 0$	$\text{Re}\lambda_- < 0 < \text{Re}\lambda_+$	$\text{Re}\lambda_{\pm} > 0$
$\text{Im}\lambda_{\pm} = 0$	–	csomópont-attraktor	hiperbolikus pont	csomópont-repellor
$\text{Im}\lambda_{\pm} \neq 0$	elliptikus pont	spirális attraktor	–	spirális repellor

A csomópont és a spirális fixpont csak disszipáció jelenlétében fordulhat elő, s ilyenkor szükségszerűen vonzó. Egyedül a hiperbolikus fixpont jelenhet meg mind konzervatív, mind pedig disszipatív rendszerekben (sőt táguló fázistérben is), s ez is indokolja jelentőségét.

A (3.65) lineáris egyenlet általános megoldása mindig két exponenciális függvény lineárkombinációja, melyek kitevője a két sajátérték:

$$\mathbf{x}(t) = c_+ \mathbf{u}_+ e^{\lambda_+ t} + c_- \mathbf{u}_- e^{\lambda_- t}. \quad (3.71)$$

Itt az \mathbf{u}_{\pm} vektorok az A mátrix (jobb oldali) *sajátvektorai*, az $A \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ ($i = \pm$) egyenletnek megfelelően. A sajátvektorok azok a vektorok, amelyeket az A mátrix nem forgat el, hanem csak megnyújt, s a megnyújtási arány éppen a sajátérték. A c_{\pm} együtthatókat az $\mathbf{x}_0 = c_+ \mathbf{u}_+ + c_- \mathbf{u}_-$ kezdőfeltétel határozza meg. Annak ellenére, hogy a sajátértékek és a sajátvektorok komplex számok is lehetnek, a (3.71) kifejezés mindig valós. A lineáris egyenlettel leírt mozgás tehát felbontható független mozgások összegére, amelyeket a sajátértékek és sajátvektorok határoznak meg. Ha az A mátrix sajátértékei (és ezért a sajátvektorai is) valósak, a sajátvektorok irányt

¹⁹Repellor a fázistér taszító objektuma.

jelölnek ki a fázistérben. Ezen irányok mentén *egyetlen* exponenciális függvény írja le az időfejlődést. A trajektóriák aszimptotikusan ahhoz a sajátvektorirányhoz tartanak, amely a nagyobb sajátértékhez tartozik. Konkrétan, a hiperbolikus fixpont esetében a *stabil és instabil irány megegyezik a negatív, illetve a pozitív sajátértékhez tartozó sajátvektor irányával*. Hasonlóan a csomópont gyenge és erős vonzási iránya megegyezik a nagyobb, ill. kisebb (most mindkettő negatív) sajátértékhez tartozó sajátvektor irányával.

3.21. feladat. Határozzuk meg a (3.57) mechanikai probléma fixpontja körül linearizált egyenletének A stabilitási mátrixát, és mutassuk meg, hogy a fixpontok általános osztályozása szerint ugyanazokat a típusokat kapjuk, mint a 3.1.1. és 3.1.2. szakaszban.

3.22. feladat. Vizsgáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

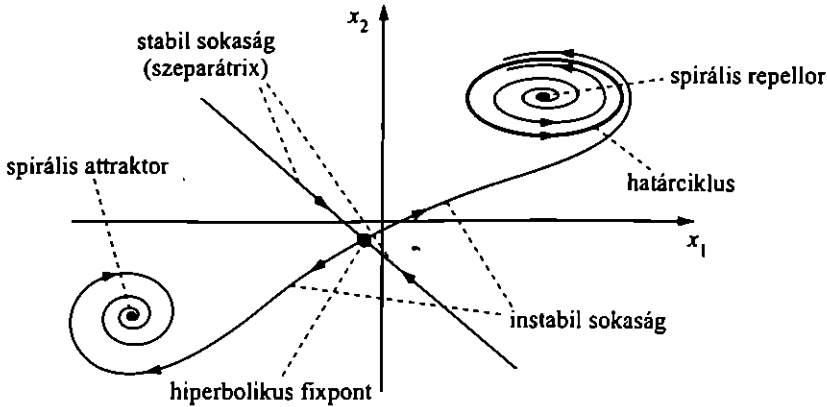
mátrixszal definiált lineáris probléma stabilitását az a paraméter függvényében!

3.23. feladat. Határozzuk meg a fixpont jellegét a σ és a $\det A$ paraméterek által definiált sík különböző tartományaiban nemnegatív fázistérfogat-összehúzódsági ráták esetén: $\sigma \geq 0$.

3.5.5. Általános kétdimenziós dinamika fázistérképe

A (3.55) dinamika feltérképezésének első lépése az $f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ és $f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ egyenletek fixpontjainak és azok stabilitásának meghatározása. A fixpontok kis környezetében érvényes trajektóriákat már ismerjük (l. előző és 3.1.1., 3.1.2. szakasz), s ezekből mint építőkövekből összeállíthatjuk az egész fázistérképet. Ebben különösen fontos szerepet játszanak a *hiperbolikus pontok stabil és instabil sokaságai*. Mindkét sokaság végtelen hosszú görbe vonal lehet, mely a fázistér jelentős tartományára kiterjedhet. A korábbi példáinkban megfigyelt tulajdonságok általánosan is igazak. Disszipatív rendszerekben a stabil sokaság mindig különböző attraktorokat választ szét, az attraktorok vonzási tartományai határát alkotja. Az instabil sokaság viszont befut valamelyik attraktorba.

Az ún. *Poincaré–Bendixson-tétel* azt mondja ki, hogy kétdimenziós fázistérben, fixponton kívül csak határciklus-attraktorok létezhetnek (3.29. ábra). Ez a tulajdonság szemléletesen azt fejezi ki, hogy a fázissík nem eléggé bő ahhoz, hogy bonyolult trajektóriák is megjelenhessenek benne. Azok ugyanis csak úgy futhatnának, hogy



3.29. ábra. Általános kétdimenziós disszipatív rendszer sematikus fázistérképe. A rajz tartalmazza a legbonyolultabb attraktort: a határciklust, aminek képe itt egy zárt görbe.

közben metszenék egymást, viszont ez a fázistérben sohasem lehetséges. A kétdimenziós fázistér legbonyolultabb attraktorai a határciklusok.

A Poincaré–Bendixon-tétel állítása tehát nem meglepő. Az viszont igen (s ez tétellel nem fejezhető ki, hanem csak numerikus szimulációkkal igazolható), hogy amint egyetlen dimenzióval továbblépünk, a fázistér már elegendően bő ahhoz, hogy benne bonyolult, kaotikus mozgások elérjenek.

A kétdimenziós fázistérben a határciklus-attraktorok külön megkeresésére végső soron nincs is szükség, hiszen azok már megkaphatók úgy, hogy egyszerűen követjük az instabil sokaságokat.²⁰ *E sokaságok kvalitatív ismeretében áttekintő geometriai képet kaphatunk a mozgásról vagy akár annak paraméterfüggéséről is anélkül, hogy a feladatot minden részletében meg kellene oldanunk.* Ez az a szemlélet, amely hasznos lesz a kaotikus mozgások leírásakor is.

3.24. feladat. A hiperbolikus fixpont sokaságainak numerikus szimulálásával határozzuk meg az $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_1 - x_1^2 + x_1 x_2$ rendszer ($\alpha > 0$) fázistérképét. Vizsgáljuk az α paramétertől való függést!

3.25. feladat. A fixpont körüli trajektóriák numerikus követésével határozzuk meg az $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - \alpha(x_1^2 - 1)x_2$ ($\alpha > 0$) van der Pol-oszcillátor fázistérképét.

²⁰Vagy az esetleges repellorpontokból kifutó trajektóriákat.

Gerjesztett mozgások

Gyakran előfordul, hogy egyszerű rendszerek környezete időben nem állandó, hanem periodikusan változó hatást gyakorol a rendszerre. Gondoljunk egy motorral hajtott testre vagy természetes környezetünk napi, ill. éves ciklusaira. A környezet változása a rendszer szempontjából *gerjesztésnek* felel meg. Egyetlen részecske egyenes menti mozgásában megvizsgáljuk, milyen hatással van rá egy külső, periodikus gerjesztőerő. Ez a fázistér dimenzióját megnöveli, s annak érdekében, hogy továbbra is könnyen áttekinthető, kétdimenziós módon szemléltethessük a mozgást, egy *leképezést* érdemes bevezetni. Célunk annak bemutatása, hogy a leképezésen hogyan követhetőek a különböző mozgástípusok. A határciklusok a leképezésen fixpontokként jelennek meg. Megadjuk, hogy mik az ilyen fixpontok stabilitásának feltételei. Az instabil, hiperbolikus fixpontból kiinduló görbék, a stabil és instabil sokaságok a leképezésen is a lehetséges mozgások vázát alkotják. Megmutatjuk, hogy folytonos idejű mozgásegyenletből csak bizonyos tulajdonságú leképezések következhetnek. Végezetül eljutunk annak általános összefoglalásához, hogy milyen rendszerben várható kaotikus viselkedés.

4.1. Általános vonások

4.1.1. A mozgásegyenlet

A gerjesztési erő az explicit időfüggés mellett a rendszer pillanatnyi helyzetétől is függhet.¹ A mozgásegyenlet általános alakja

$$\ddot{x} = F(x) - \alpha \dot{x} + F_g(x, t), \quad (4.1)$$

ahol az F_g gerjesztés valamilyen T időbeli periódussal ismétlődő értékeket vesz fel:

$$F_g(x, t + T) = F_g(x, t). \quad (4.2)$$

Mivel egységnyi tömegre vonatkoztatott mennyiségeket tekintünk, F_g a gerjesztőerő által okozott gyorsulás. A Newton-egyenlet jobb oldala az időt expliciten is tartalmazza, ezért ún. *nemautonóm* egyenletté vált. E látszólag csekély módosítás jelentős következményekkel jár, mert amint megmutatjuk, a fázistér dimenziója eggyel nagyobb lesz. Ezáltal a periodikusnál sokkal bonyolultabb, kaotikus viselkedés is kialakulhat.

Az előző fejezetben taglalt autonóm mozgások ugyanúgy játszódtak le, bár-mikor indítottuk is azokat, s ezért választhattuk a kezdő időpontot tetszőlegesen. A gerjesztett mozgások esetén viszont nem mindegy, hogy a kezdőpillanatban mekkora a gerjesztőerő értéke. Adott (x, v) pontból két vagy több mozgás is indulhat, ha a kezdőpont a gerjesztőerő különböző értékeihez tartozik. Az (x, v) síkon felrajzolt trajektóriák ezért rendszerint metszik egymást, ami alól még az a speciális eset sem kivétel, amikor azonos pillanatban indított trajektóriákat hasonlítunk össze. Az (x, v) sík ugyanis *nem* azonos a teljes fázistérrel, mert benne az egyes pontokhoz tartozó állapotok nem egyértelműek.

4.1.2. A fázistér

A fentiekből következik, hogy a mozgás egyértelmű jellemzéséhez szükséges annak megadása is, hogy a T periódusú gerjesztés éppen milyen „fázisban” van. Ennek érdekében bevezetjük a

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \quad (4.3)$$

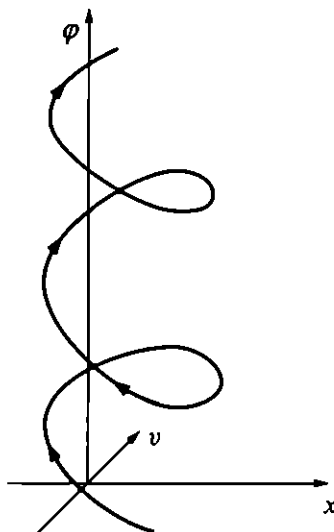
gerjesztési fázist, amely definíció szerint szög jellegű, azaz 2π periódussal ismétlődő mennyiség. Az $\Omega = 2\pi/T$ kifejezést a gerjesztés frekvenciájának nevezzük.

¹Sőt, a sebességétől is, de ezzel nem foglalkozunk.

A gerjesztőerőt az idő helyett a fázis függvényeként is felírhatjuk valamilyen $F_g(x, \varphi)$ alakban. A kezdőállapot egyértelmű megadásához szükséges a φ_0 kezdőfázis ismerete is. A nemautonóm (4.1) egyenlet átírható három elsőrendű differenciálegyenlet autonóm rendszerére, a v sebesség és a φ fázis mint új változó bevezetésével:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = F(x) - \alpha v + F_g(x, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \equiv \Omega. \quad (4.4)$$

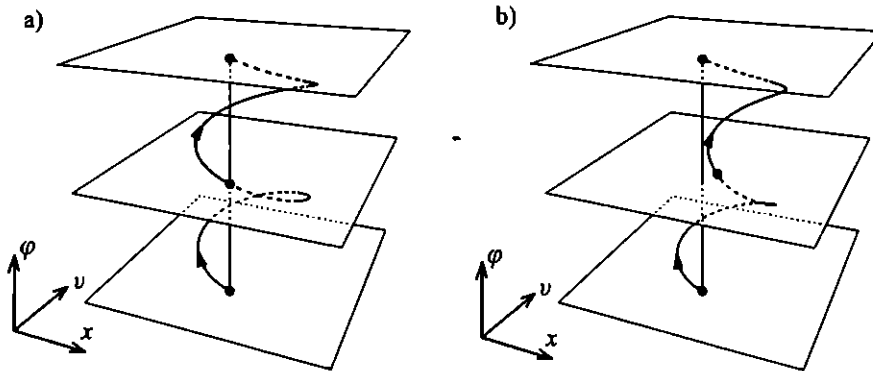
Gerjesztett esetben tehát a fázistér (l. 3.5.1. szakasz) *háromdimenziós*, három adat: x , v és φ határozza meg egyértelműen az állapotot. A gerjesztett mozgást térben ábrázolhatjuk (4.1. ábra), ahol a fázistengely menti sebesség időben állandó, hiszen a fázis időderiváltja az Ω konstans.



4.1. ábra. Gerjesztett mozgás trajektóriája a háromdimenziós (x, v, φ) fázistérben.

A gerjesztés egyik fontos következménye, hogy a mechanikai energia még akkor *sem* marad meg, ha nincs súrlódás, hiszen a rendszer a gerjesztés hatására hol fölvesz (amikor a külső erő gyorsítja), hol pedig lead (amikor a külső erő lassítja) energiát. Mivel időfüggő gerjesztés mellett nyugalmi állapot nem érhető el, a v sebesség tartósan sohasem zérus, s ezért az energia időben állandóan változik. Olyan állapotok azonban létezhetnek, amelyekben a mozgás, és ennek megfelelően az energia időben periodikusan változik. Az ilyen állandósult mozgások a *határciklusok*. A legegyszerűbbek éppen átveszik a gerjesztés T periódusidejét. Jelen lehetnek azon-

ban olyan határciklusok is, melyek periódusideje $2T, 3T, \dots$, általában a T periódusidő $n > 1$ egészszámszorosa. Ezeket n -es ciklusoknak nevezzük (4.2. ábra).



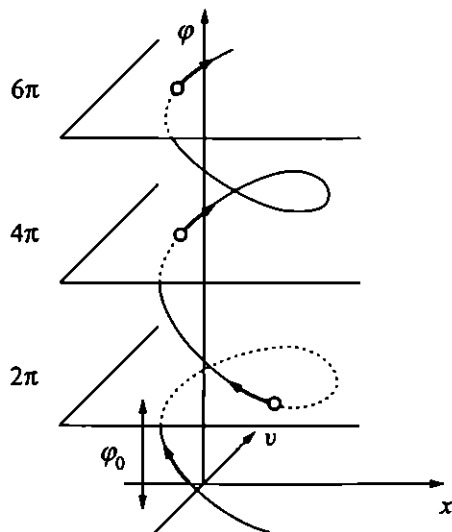
4.2. ábra. Határciklusok a gerjesztett rendszer fázisterében. A síkok egymástól 2π fázissal (T idővel) különböző állapotokat jelölnek. a) T periódusú egyes ciklus. A dőféspontok egymás fölé esnek. b) $2T$ periódusú kettes ciklus. Csak a második dőféspontok esnek egymás fölé.

4.1.3. A stroboszkopikus leképezés

A trajektóriák térbeli követése helyett sokszor célszerű a rendszert csak adott fázisú állapotaiban vizsgálni. Csak olyan pillanatokban nézünk a rendszerre, vagy készítenk fényképfelvételt, amelyek a gerjesztőerő T periódusidejének egész számú többszöröseivel különböznek. Minden egyes ilyen pillanatban megállapítjuk a hely- és sebességkoordinátákat. Ezek az egymás utáni képeken véges értékekkel térnek el egymástól, hiszen véges időintervallum telt el a felvételek között. Ez úgy is tekinthető, mint a térbeli trajektória elmettszése a $\varphi - \varphi_0 = 2\pi, 4\pi, \dots, 2\pi n, \dots$ síkokkal (4.3. ábra).

Jelöljük az n -edik metszeten a hely- és sebességkoordinátákat x_n -nel és v_n -nel. Az n -edik síkon levő koordináták *egyértelmű* kapcsolatban vannak az $n + 1$ -edik síkon lévőkkel, ugyanis a (4.1) egyenlet megoldása adott x_0, v_0, φ_0 kezdőfeltétellel egyértelmű, s az adott trajektória két pontjáról van szó. A diszkrét koordinátákat összekapcsoló

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = M(x_n, v_n) \quad (4.5)$$



4.3. ábra. A stroboszkopikus leképezés vázlata. A fázistérbeli trajektóriáról T periódusidő (2π fázisváltozás) után rendre az időtengelyre (fázistengelyre) merőleges síkmetszeteket készítünk.

szabályt *leképezésnek* nevezzük.² Az egyes koordinátákban kiírva ez az

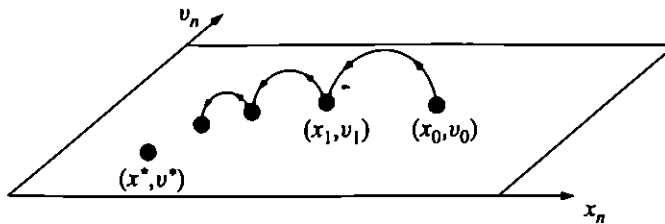
$$x_{n+1} = M_1(x_n, v_n), \quad v_{n+1} = M_2(x_n, v_n) \quad (4.6)$$

alak, ahol M_1 , M_2 a leképezés egyes komponenseit megadó függvények. Az (x_{n+1}, v_{n+1}) pont az (x_n, v_n) képe, a leképezés alkalmazását pedig *iterálásnak* mondjuk. Ez a leképezés nem más, mint a (4.1) differenciálegyenlet *diszkrét idejű* alakja, differenciaegyenlet, amely mindig létezik, bár konkrét meghatározása nem feltétlenül könnyű. A periódusidő többszöröseit tartalmazó megfigyeléssorozat szempontjából a (4.5) leképezés a mozgásegyenlet.

Az időben periodikus, szaggatott megvilágítást biztosító eszköz a stroboszkóp, ezért a fenti típusú leképezést *stroboszkopikusnak* nevezzük. Mivel a stroboszkopikus leképezés időpillanataiban a gerjesztés mindig azonos fázisú, a leképezés alakja már *független* attól, hogy hányadik síkmetszeten alkalmazzuk: a stroboszkopikus leképezés autonóm, az M szabály maga *nem függ* a diszkrét idő szerepét játszó n -től.

²Ha nem kívánjuk hangsúlyozni, hogy éppen hányadik leképezési lépésről van szó, akkor az $(x', v') = M(x, v)$ jelölés használatos.

A stroboszkopikus leképezés előnye, hogy az egyenes menti mozgást végző gerjesztetlen rendszernél megszokott koordinátákkal dolgozik. Ezen a síkon a mozgás azonban most nem folytonos (4.4. ábra). A térben érvényes egydimenziós görbe



4.4. ábra. A stroboszkopikus leképezésen a mozgás diszkrét, ugráló pontsorozat. Itt az (x^*, v^*) ponthoz közelít a trajektória.

vonal helyett a stroboszkopikus leképezésen egy pontsorozat a trajektória. Általánosan igaz, hogy a leképezésen az egyes alakzatok dimenziója *eggyel kisebb*, mint a teljes fázistérben. Így pl. a T periódussal ismétlődő határciklus a stroboszkopikus leképezésen egyetlen fixpontként jelenik meg. A kettes ciklus képe pedig két, egymás között ugráló pont (l. 4.2. ábra). A differenciálegyenlet és a leképezés dinamikája közötti kapcsolatot a 4.1. táblázat foglalja össze.

4.1. táblázat. A folytonos és diszkrét dinamika összehasonlítása. A Λ_{\pm} és J mennyiségek definícióját a 4.5. és 4.6. szakaszok adják meg.

DIFFERENCIÁLEGYENLET	LEKÉPEZÉS
trajektória	pontsorozat
határciklus	fixpont
fraktáldimenzió: D_0	fraktáldimenzió: $D_0 - 1$
stabilitási sajátértékek: λ_{\pm}	stabilitási sajátértékek: Λ_{\pm}
fázistérfogat-összehúzódás: σ	fázistérfogat-összehúzódás: J

Természetesen a stroboszkopikus leképezés kevesebb információt tartalmaz, mint az eredeti mozgás, hiszen a két felvétel közötti viselkedést nem vizsgáljuk. Ennek ellenére a mozgás általános jellegéről hű képet kapunk a leképezés követésével.

Sőt, az elveszett információt is visszanyerhetjük, ha nemcsak egy rögzített fázisnál vizsgáljuk a leképezést, hanem azok egész családját tekintjük a φ_0 kezdőfázis függvényében.

A leképezés síkját ezért szokás a rendszer diszkrét idejű fázisterének tekinteni, s a benne lezajló mozgást diszkrét trajektóriának. A leképezés használatának sok előnye van, s érdemes a háromdimenziós térbeli gondolkodásról áttérni az ilyen síkbeli, de diszkrét idejű mozgások megértésére. Ezt célozzák a következő fejezetek.

A továbbiakban a folytonos idejű gerjesztések két nagy családját vizsgáljuk, s egy-egy esetben levezetjük az ezeknek megfelelő stroboszkopikus leképezést:

- i) A *harmonikus*, más néven *szinuszos gerjesztés* esetén az erő az időnek koszinusz- vagy szinuszfüggvénye és

$$F_g(x, t) = f_0(x) \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (4.7)$$

ahol $\Omega = 2\pi/T$ a gerjesztés frekvenciája. Az $f_0(x)$ amplitúdó tetszőleges függvénye lehet a pillanatnyi helykoordinátának. A legegyszerűbb esetben az amplitúdót konstansnak választjuk.

- ii) A periodikus *lökdösés* T periódusidővel ismétlődő pillanatszerű impulzusátadás-sorozatnak felel meg. A lökdösések között tehát nem hat gerjesztőerő. Feltesszük, hogy a Δv impulzusátadás mértéke csak a pillanatnyi x helykoordinátától függ egy adott $uI(x)$ függvény szerint. Az impulzusátadás tehát

$$\Delta v = uI(x(t)), \quad \text{ha } t = \frac{\varphi_0}{\Omega} + nT, \quad (4.8)$$

és zérus egyébként. Itt u a sebességugrás tipikus nagysága, $I(x)$ dimenziótlan mennyiség, amely véges helykoordináták mellett egységnyi nagyságrendű. Az $I(x)$ függvény alakját egyelőre nem rögzítjük le.

4.1. feladat. Fejezzük ki a periodikus lökdöséskor fellépő gerjesztőerőt a $\delta(t)$, ún. Dirac-féle deltafüggvény segítségével! (A $\delta(t)$ függvény a $t \neq 0$ értékekre eltűnik, az origóban azonban olyan nagy értéket vesz fel, hogy integrálja az origót tartalmazó bármilyen kicsi intervallumra egységnyi.)

4.2. Harmonikusan gerjesztett mozgás stabil állapot körül

4.2.1. A folytonos idejű mozgás

A stabil állapot környékén (a gödör alján) a test mozgása várhatóan a gerjesztés hatására is stabil marad. Súrlódás jelenlétében a rendszer nyilván rendelkezik attraktorral, de az ahhoz tartozó mozgás most nem a nyugalmi állapot, hanem időben periodikus mozgás. Állandó amplitúdójú gerjesztést vizsgálva, a mozgásegyenlet az eredeti nyugalmi állapot körüli kis x kitérésekre

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x} + f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (4.9)$$

ahol f_0 állandó. Az ω_0 sajátfrekvencia általában különbözik az Ω gerjesztési körfrekvenciától. Az egyszerűség kedvéért gyenge csillapítást tételezünk fel: $\alpha/2 \ll \omega_0$. A fenti lineáris, inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0 - \delta) \quad (4.10)$$

alakban keressük. A szögek összegére vonatkozó trigonometrikus azonosságok felhasználásával azt találjuk, hogy ilyen megoldás valóban létezik, és az amplitúdóra és a fázisra

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2 \Omega^2}}, \quad (4.11)$$

illetve

$$\delta = \arctg\left(\frac{\alpha \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad (4.12)$$

adódik. Az amplitúdó éles maximuma az $\omega_0 \approx \Omega$ tartományban a jól ismert rezonanciajelenség. Vegyük észre, hogy a partikuláris megoldás nem függ a kezdőfeltételtől.

A teljes megoldás tartalmazza a homogén rész általános megoldását is, azaz

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0 - \delta) + A_1 e^{-(\alpha/2)t} \cos(\omega_\alpha t) + A_2 e^{-(\alpha/2)t} \sin(\omega_\alpha t). \quad (4.13)$$

A két utolsó tag azonos a csillapított harmonikus rezgés megoldásával (l. 3.34), és egy lecsengő részt ír le. Így az első tag felel meg a hosszú idejű viselkedésnek. Figyelembe véve, hogy a csillapítási együttható elhanyagolható a sajátfrekvencia mellett, a sebességre

$$v(t) = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0 - \delta) - A_1 \omega_0 e^{-(\alpha/2)t} \sin(\omega_0 t) + A_2 \omega_0 e^{-(\alpha/2)t} \cos(\omega_0 t) \quad (4.14)$$

adódik. Mivel α kicsi, az α -val arányos tagokat nem írtuk ki, s a szögfüggvények argumentumában ω_α -t ω_0 -lal helyettesítettük.

Az

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0 - \delta), \quad v(t) = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0 - \delta) \quad (4.15)$$

aszimptotikus mozgás tehát a fázistérben egy vonzó halmaz, egy *határciklus-attraktor* jelenlétének következménye. Ennek geometriai megjelenése egy szabályos térbeli csavarvonal (hélix), az (x, v) síkon ellipszis alakú vetülettel, ahol az ellipszis féltengelyei A és ΩA (l. 4.2a. ábra).

4.2.2. A stroboszkopikus leképezés

A fenti egzakt megoldásból könnyen megkapható a stroboszkopikus leképezés. Válasszuk φ_0 -t nullának, azaz képezzük a stroboszkopikus metszeteket a $t = nT$ pillanatokban. Ekkor $x_n = x(nT)$, $v_n = v(nT)$. A tetszőlegesen választott x_0 , v_0 kezdőfeltétel (4.13), (4.14) alapján egyértelműen meghatározza az A_1 , A_2 amplitúdókat:

$$x_0 = A \cos \delta + A_1, \quad v_0 = A\Omega \sin \delta + A_2\omega_0. \quad (4.16)$$

A (4.15) határciklus koordinátái a leképezésen:

$$x^* = A \cos \delta, \quad v^* = A\Omega \sin \delta, \quad (4.17)$$

hiszen a $t = nT$ pillanatokban $\Omega t = 2n\pi$, s a (4.15)-ben szereplő trigonometrikus függvények értéke független n -től. A határciklus koordinátaival az A_1 , A_2 amplitúdók:

$$A_1 = x_0 - x^*, \quad A_2 = \frac{v_0 - v^*}{\omega_0}. \quad (4.18)$$

Az egy periódussal későbbi állapot $x_1 = x(T)$, $v_1 = v(T)$ koordinátái a (4.13), (4.14) kifejezések $t = T$ helyen vett értékei. Ezekben bizonyos paraméter-kombinációk többször is előfordulnak, ezért célszerű bevezetni az

$$E \equiv e^{-(\alpha/2)T}, \quad S \equiv \sin(\omega_0 T), \quad C \equiv \cos(\omega_0 T) \quad (4.19)$$

rövidített jelölést. Közülük E a rezgési amplitúdónak a súrlódás miatt bekövetkező csökkenési aránya T idő alatt, míg S és C a rezgés fázisát jellemzik a T pillanatban. Ezeket és a kezdőfeltételeket tartalmazó (4.18) összefüggéseket felhasználva (4.13), (4.14)-ből megkapjuk az $n = 0$ és az $n = 1$ pillanatokot összekapcsoló stroboszkopikus leképezést:

$$x_1 = x^* + E \left(C(x_0 - x^*) + \frac{S}{\omega_0}(v_0 - v^*) \right), \quad (4.20)$$

$$v_1 = v^* + E(-S\omega_0(x_0 - x^*) + C(v_0 - v^*)). \quad (4.21)$$

Mivel (x_0, v_0) tetszőleges, játszhatja az n -edik stroboszkopikus szinten érvényes koordináták szerepét is, amihez viszont az $(n+1)$ -edik szint jellemzői tartoznak a fenti szabály szerint. Ezért a $0 \rightarrow n$ és $1 \rightarrow n+1$ helyettesítéssel a stroboszkopikus leképezés általános alakját kapjuk:

$$x_{n+1} = x^* + EC(x_n - x^*) + \frac{ES}{\omega_0}(v_n - v^*) \equiv M_1(x_n, v_n), \quad (4.22)$$

$$v_{n+1} = v^* - ES\omega_0(x_n - x^*) + EC(v_n - v^*) \equiv M_2(x_n, v_n). \quad (4.23)$$

A határciklusnak megfelelő fixpont koordinátáitól való $\Delta \mathbf{x}_n = (x_n - x^*, v_n - v^*)$ és $\Delta \mathbf{x}_{n+1} = (x_{n+1} - x^*, v_{n+1} - v^*)$ eltérések tehát egy *lineáris*

$$\Delta \mathbf{x}_{n+1} = L \Delta \mathbf{x}_n \quad (4.24)$$

leképezésnek tesznek eleget, melyet az

$$L = \begin{pmatrix} EC & ES/\omega_0 \\ -ES\omega_0 & EC \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

mátrix ír le. A mozgásegyenlet linearitását a leképezés tehát örökli.

Vizsgáljuk meg, hogyan tartanak a stroboszkopikus leképezés pontjai a fixpont-hoz. Feltesszük, hogy az eltérések valamely Λ szám n -edik hatványával arányosak, azaz

$$\Delta x_n \equiv x_n - x^* = u_x \Lambda^n, \quad \Delta v_n \equiv v_n - v^* = u_v \Lambda^n, \quad (4.26)$$

ami a folytonos idejű eset exponenciális viselkedésével analóg. Ezt (4.22), (4.23)-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\Lambda \mathbf{u} = L \mathbf{u}, \quad (4.27)$$

azaz Λ az L mátrix *sajátértéke*, \mathbf{u} pedig (jobb oldali) sajátvektora. A sajátérték-egyenlet $(EC - \Lambda)^2 + (ES)^2 = 0$, amely szerint Λ két értéket vehet fel:

$$\Lambda_{\pm} = E(C \pm iS) = e^{(-\alpha/2 \pm i\omega_0)T}. \quad (4.28)$$

Mindkét sajátérték abszolút értéke egynél kisebb, így a fixpont tényleg vonzó.

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az $x_n - x^* \pm (v_n - v^*)/(i\omega_0)$ kombináció a leképezés hatására mindig a Λ_{\pm} sajátértékkel szorzódik. Ezért általános kezdőfeltétel esetén a stroboszkopikus leképezésen történő mozgás a két különböző sajátérték hatványainak lineáris kombinációja:

$$\Delta x_n = c_+ \Lambda_+^n + c_- \Lambda_-^n, \quad (4.29)$$

$$\Delta v_n = i\omega_0 c_+ \Lambda_+^n - i\omega_0 c_- \Lambda_-^n. \quad (4.30)$$

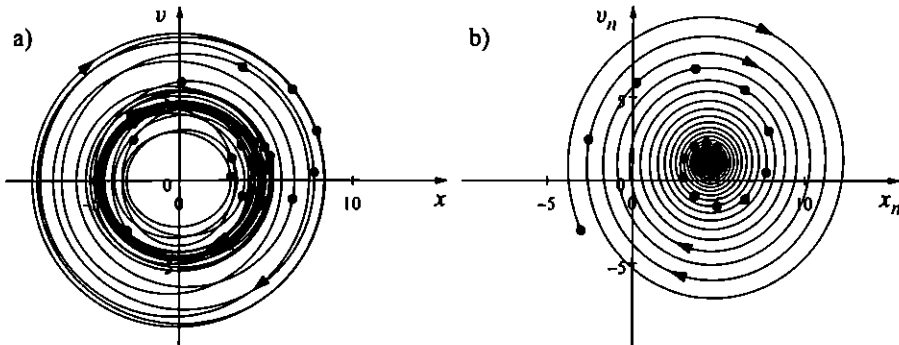
A kezdőfeltétel x_0 , v_0 értéke meghatározza a c_{\pm} együtthatókat: $c_{\pm} = \Delta x_0/2 \pm \Delta v_0/(2i\omega_0)$. Ezt és a (4.28) sajátértékeket behelyettesítve, a teljes megoldás előáll a

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= \Delta x_0 e^{-n(\alpha/2)T} \cos(\omega_0 n T) + \frac{\Delta v_0}{\omega_0} e^{-n(\alpha/2)T} \sin(\omega_0 n T), \\ \Delta v_n &= -\omega_0 \Delta x_0 e^{-n(\alpha/2)T} \sin(\omega_0 n T) + \Delta v_0 e^{-n(\alpha/2)T} \cos(\omega_0 n T) \end{aligned} \quad (4.31)$$

valós alakban is. A fixponttól mért távolság tehát n lépés után $e^{-(n\alpha/2)T}$ -vel arányosan csökken. Ugyanakkor a fázistérbeli pontok a fixpont körül minden lépésben elfordulnak. Annak ellenére, hogy az attraktor megközelítése ugrásokkal történik, a pontok egy spirál alakú görbén mozognak (4.5. ábra).

4.2. feladat. Határozzuk meg, milyen egyenletű görbén mozognak a pontok a stroboszkopikus leképezés spirális attraktora környékén.

Az ilyen attraktorpontot ezért a leképezésen is vonzó *spirális fixpontnak* nevezük. A gerjesztett rendszer határciklusa körüli mozgás a stroboszkopikus leképezésen tehát hasonló a gerjesztetlen rendszerek kétdimenziós fázisterében a stabil nyugalmi állapot körüli mozgáshoz.



4.5. ábra. Spirális fixpont a gerjesztett rezgés esetén. A paraméterek: $\alpha = 0,05$, $\Omega = 1$, $\omega_0 = 1,1$, $f_0 = 1$ ($E = 0,855$, $S = 0,120$, $C = 0,993$). a) Az (x, v) síkon az $x_0 = -3$, $v_0 = -3$ pontból induló trajektória vetülete és b) az erről készített stroboszkopikus leképezés pontjai. A vetületen a határciklus egy zárt görbe (vastag vonal), a stroboszkopikus leképezésen egy álló pont. A b) képen spirállal kötöttük össze a pontokat (l. a 4.2. feladatot!).

Megjegyezzük, hogy a stroboszkopikus leképezés *megfordítható, invertálható*. Ez azt jelenti, hogy létezik egy egyértelmű leképezés, amely az időben visszafelé futó dinamikát írja le. Ezt természetesen az L^{-1} inverz mátrix vezérli, melynek sajátértékei az L -ének reciprokai. Ebből következik, hogy az invertált dinamikában a fixpont spirális repellor.

4.3. feladat. Határozzuk meg a szinuszosan gerjesztett harmonikus oszcillátor stroboszkopikus leképezését tetszőleges csillapítás esetén! Mik a sajátértékek?

4.3. Harmonikusan gerjesztett mozgás instabil állapot környékén

4.3.1. A folytonos idejű megoldás

Azt várjuk, hogy az instabil állapot körüli mozgás a gerjesztés jelenlétében is instabil marad. Megtörténhet azonban, hogy a gerjesztés mindig olyan fázisban érkezik, hogy az eltávolodásra kész testet „visszafordítja”. Ennek következtében létezik egyetlenegy periodikus mozgás, mely az instabil állapot környékét *sohasem* hagyja el, szemben a közeléből induló össze többi mozgással. Ezt a jelenséget az eredeti nyugalmi állapot körüli kis x kitérésekre az

$$\ddot{x} = s_0^2 x - \alpha \dot{x} + f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (4.32)$$

egyenlet írja le, ahol s_0 a valós taszítási paraméter, f_0 az állandónak feltételezett gerjesztési amplitúdó, és a gyenge csillapítás miatt $\alpha/2 \ll s_0$. A probléma megoldása ezért az $\omega_0 \rightarrow i s_0$ helyettesítéssel megkapható a 4.2.1. szakaszban tárgyaltakból. A (4.32) egyenlet partikuláris megoldása továbbra is egy (4.15) alakú határciklus. Az általános megoldásban a trigonometrikus függvények helyett azonban hiperbolikusak lépnek fel, melyek általában exponenciális eltávolodást írnak le. A határciklus most tehát *instabil*. A stroboszkopikus leképezésen az is világossá válik, hogy a sík egy kivételes vonala mentén az instabil határciklus megközelíthető, instabilitása tehát ugyanúgy *hiperbolikus* jellegű, mint a hegyére állított ceruza nyugalmi állapotáé.

4.4. feladat. Határozzuk meg a szinuszosan gerjesztett instabil állapot körül kialakuló instabil határciklus amplitúdóját és fázisát.

4.3.2. A stroboszkopikus leképezés

A $t = nT$ pillanatokban képzett ($\varphi_0 = 0$) stroboszkopikus metszeteken a határciklusnak megfelelő fixpont koordinátái továbbra is a (4.17) alakban adhatók meg. A fixpont körüli viselkedést leíró mátrix most

$$L = \begin{pmatrix} EC' & ES'/s_0 \\ ES's_0 & EC' \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

ahol

$$C' \equiv \text{ch}(s_0T), \quad S' \equiv \text{sh}(s_0T) \quad (4.34)$$

a rövidített jelölés. A sajátértékek

$$\Lambda_{\pm} = E(C' \pm S') = e^{(-\alpha/2 \pm s_0)T}. \quad (4.35)$$

Mindkét sajátérték valós, az egyikük (Λ_+) nagyobb, a másik (Λ_-) kisebb egynél. A sajátvektorok $\mathbf{u}_{\pm} = (1, \pm s_0)$. Az (x_0, v_0) kezdőfeltételhez tartozó megoldás

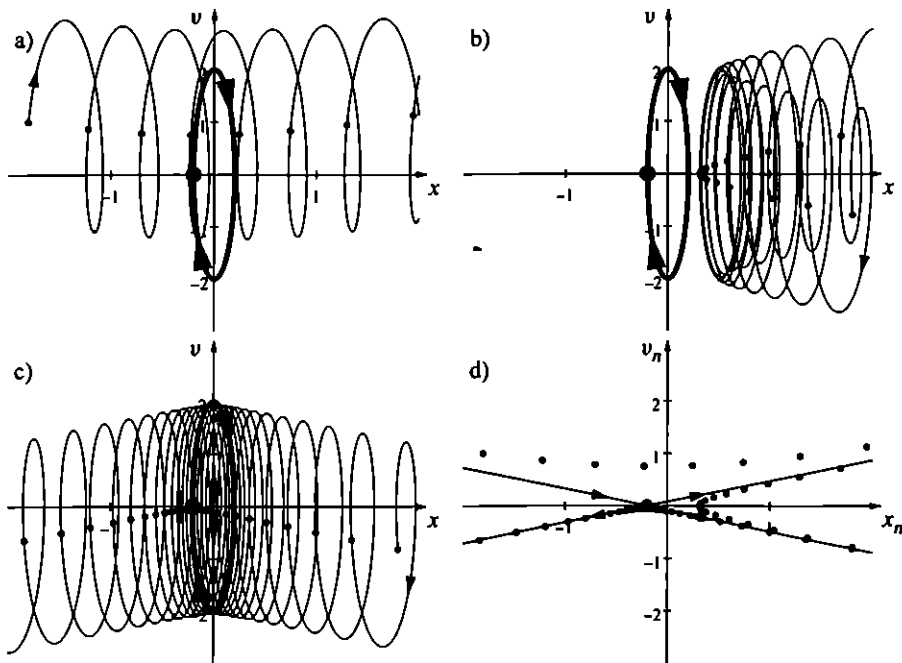
$$\Delta x_n = c_+ \Lambda_+^n + c_- \Lambda_-^n, \quad (4.36)$$

$$\Delta v_n = s_0 c_+ \Lambda_+^n - s_0 c_- \Lambda_-^n, \quad (4.37)$$

ahol $c_{\pm} = \Delta x_0/2 \pm \Delta v_0/(2s_0)$. Elegendően hosszú idő elteltével ($n \gg 1$) a fixponttól való eltávolodás általában Λ_+^n -nel arányosan történik:

$$\Delta x_n, \Delta v_n \sim \Lambda_+^n. \quad (4.38)$$

Olyan kezdőfeltételekre, melyek a $v_n - v^* = s_0(x_n - x^*)$ egyenesen fekszenek, a trajektória végig ezen az egyenesen marad, s minden egyes lépésben a Λ_+ sajátértékszer távolabbra kerül. A $v_n - v^* = -s_0(x_n - x^*)$ egyenes mentén viszont *közeledés* történik, s minden lépésben Λ_- -szor ($\Lambda_- < 1$) közelebb kerül a pont az instabil határciklust jelentő (x^*, v^*) állapothoz. Ezért az ilyen stroboszkopikus leképezésbeli fixpontot is *hiperbolikusnak* nevezzük. A két fent említett egyenes szakasz a fixpont instabil és stabil sokasága (4.6. ábra). Vegyük észre, hogy ezek az irányok éppen az L mátrix sajátvektorainak irányai. Fontos hangsúlyozni, hogy a stabil és instabil sokaság $v_n - v^* = s_0(x_n - x^*)$ egyenesre egy-egy *invariáns görbe*, azaz olyan görbe, melynek egésze a leképezés hatására önmagára képződik. Annak ellenére, hogy a mozgás diszkrét, ugráló, van értelme tehát a hiperbolikus fixpont körül a szokásos folytonos keresztalakzat berajzolásának, mert az egyenes darabokon történő mozgások mind olyanok, hogy ha egyszer az egyenes mentén elindultak, akkor rajta is maradnak.



4.6. ábra. A gerjesztett instabil állapot hiperbolikus fixpontja. A paraméterek: $\alpha = 0,01$, $\Omega = 10$, $s_0 = 0,4$, $f_0 = 20$ ($E = 0,997$, $S' = 0,254$, $C' = 1,032$). Az a), b) és c) képeken három különböző kezdőfeltételből (rendre: $(x_0, v_0) = (-1,8, 1)$, $(1,8, -0,78)$ és $(1,8, -0,81)$) indított trajektória vetülete látható, a vastag vonal az instabil határciklust jelöli. A stroboszkopikus leképezésen kapott pontsorozatot is ábrázoltuk, melyek a d) képen együtt is megtekinthetők a hiperbolikus fixpont stabil és instabil sokaságával együtt.

4.5. feladat. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amely mentén a pontok a leképezés hiperbolikus fixpontja környezetében mozognak.

A leképezés most is invertálható, s az inverz leképezést az L^{-1} mátrix írja le. A megfordított dinamikában a stabil irányból lesz az instabil és fordítva, és rajtuk a mozgás az eredeti sajátértékek reciprokai szerint történik. A hiperbolikus pont tehát invertálás után is hiperbolikus marad.

Érdekes általános összefüggésre jutunk, ha az utolsó két fejezetben számolt leképezés sajátértékeit összehasonlítjuk a gerjesztetlen csillapított rezgés vagy – általánosabban – a linearizált folytonos idejű dinamika sajátértékeivel. Mindkét

esetben igaz, hogy

$$\Lambda_{\pm} = e^{\lambda_{\pm} T}, \quad (4.39)$$

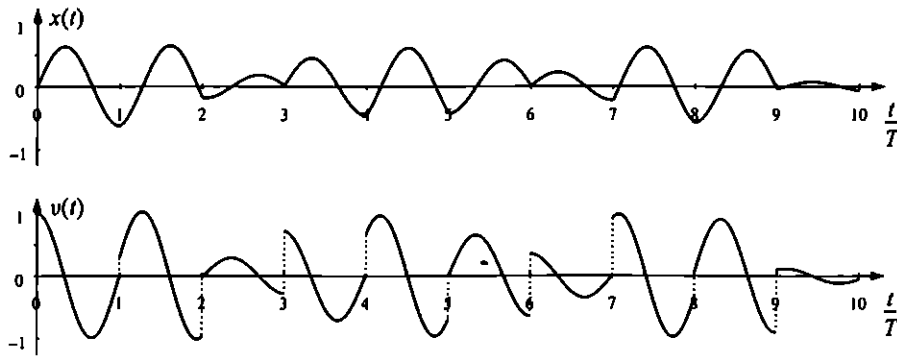
ahol λ_{\pm} a folytonos idejű eset (3.14), (3.29) sajátértékei. A fenti képlet érvényben marad tetszőleges csillapítás mellett is (l. 4.3., 4.6. feladat). Ez azt fejezi ki, hogy *a határciklus körüli viselkedés a gerjesztett rendszer stroboszkopikus leképezésén ugyanolyan, mint a gerjesztetlen rendszer nyugalmi állapota körüli. Az attraktor elérése vagy az instabil határciklustól való távolodás ugyanúgy történik, mint a nem gerjesztett probléma (x, v) fázissíkján, ha arra csak T időnként nézünk rá.*³

4.6. feladat. Határozzuk meg a szinuszosan gerjesztett instabil állapot stroboszkopikus leképezésének sajátértékeit tetszőleges csillapítás esetén!

4.4. A lökdösött harmonikus oszcillátor

Vizsgáljuk most az egyensúlyi állapot körül gyenge csillapítással mozgó test gerjesztését a (4.8) lökdösés hatására. Ez annak felel meg, hogy egy rugó végére kötött tömegpont mozog a csillapított rezgés törvényei szerint, amit T időközökben impulzusátadásnak teszünk ki. A gerjesztés most nem hat állandóan, hanem csak bizonyos időpillanatokban. Az impulzusátadás a pillanatnyi x helykoordináta függvénye (l. (4.8)). A hirtelen impulzusátadás a helyet nem változtatja meg. Gondoljunk egy labdára, amelybe belerúgunk. A rúgás pillanatában a labdának hirtelen megváltozik a sebessége, de még nem mozdul el. Az egész mozgás során az $x(t)$ kitérésfüggvény tehát folytonos, míg a $v(t)$ sebesség–idő függvényben T időnként ugrások fordulnak elő. Ezek nagysága $uI(x)$. Mivel a sebesség a kitérés deriváltja, az $x(t)$ függvény *megettör* ugyanezekben a pontokban (4.7. ábra), s a jobb és bal oldali érintők meredeksége közötti különbség éppen $uI(x)$. Amennyiben az $I(x)$ függvény nem állandó, sőt nem is egyszerűen arányos a hellyel, hanem annak adott nemlineáris (pl. kvadratikussal) függvénye, akkor az impulzusátadások sorozata és a kitérés–idő függvény bonyolult kapcsolatban lesz egymással. Nemperiodikus, kaotikus mozgások is kialakulhatnak. Ennek részletes elemzése a következő rész témája, most csak annak megmutatása a célunk, hogy ebben az egyszerű rendszerben *egzaktil* levezethető a stroboszkopikus leképezés bármilyen $I(x)$ lökdösési amplitúdó mellett.

³Ez az állandó együththatós lineáris differenciálegyenletek azon tulajdonságán alapul, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása tartalmazza a homogén egyenlet (a gerjesztetlen eset) általános megoldását.



4.7. ábra. A T periódussal lökösített oszcillátor mozgása. A lökés amplitúdófüggvénye, az ún. parabolaamplitúdó: $I(x) = 1 - ax^2$. A paraméterek: $a = 1,8$, $\mu = 1$, $T = 3\pi/(2\omega_0)$ (a lökösítés periódusideje a rezgés periódusidejének háromnegyede), $\alpha T = 0,01$.

Mivel a lökösítés pillanatszerű, a test sebessége abban a pillanatban nem egyértelmű (de tetszőlegesen kis idővel később már az). Ezért el kell döntenünk, hogy közvetlenül a lökés előtti vagy utáni állapotot vizsgáljuk. Mindkettő egyformán jogos, csak arra kell ügyelnünk, hogy a választásunkat végig következetesen alkalmazzuk. Mi a lökés *utáni* állapotokat fogjuk összehasonlítani.

Az egyszerűség kedvéért a kezdőfázist zérusnak választjuk, $\varphi_0 = 0$, azaz az első lökés a $t = 0$ pillanatban történik, a második a $t = T$ időpontban és így tovább. A leképezés megadása két részre bontható. Először követjük a mozgást az nT pillanatban bekövetkezett lökés utáni (x_n, v_n) értékektől az $(n+1)T$ pillanatbeli lökés előtti (x_{n+1}, \bar{v}_{n+1}) értékekig. A jelölés már kifejezi, hogy a lökés maga nem befolyásolja a helykoordinátát, azaz x_{n+1} már egyben az $(n+1)$ -edik lökés utáni helyzet. Ez nem áll fenn a sebességre, ezért a második lépés éppen az, hogy kifejezzük a lökés utáni v_{n+1} sebességet a lökés előtti \bar{v}_{n+1} -gyel.

Az $(x_n, v_n) \rightarrow (x_{n+1}, \bar{v}_{n+1})$ kapcsolat meghatározásához azt kell észrevennünk, hogy a két lökés közötti nyílt intervallumban a testet külső, gerjesztő hatás nem éri. A T időintervallum alatti változások megkaphatók a (3.34) kitérés–idő függvényből és annak deriváltjából. Használhatjuk a szinuszosan gerjesztett oszcillátorra vonatkozó (4.22), (4.23) összefüggéseket is úgy, hogy ezeket a képleteket a gerjesztés nélküli esetre ($x^* = v^* = 0$) alkalmazzuk.

Kizárólag a rövidebb alak kedvéért, a periódusidőt speciálisan választjuk meg. Tekintsünk olyan lökösítést, melynek T periódusideje a harmonikus oszcillátor $2\pi/\omega_0$ periódusidejének éppen a negyede. Ekkor $\omega_0 T = \pi/2$. A (4.19) jelölés

értelmében az $\omega_0 T$ szög szinusza és koszinusza jelenik meg a dinamikában, és ebben a speciális esetben $S = 1$ és $C = 0$. A keresett kapcsolat így (pl. az (4.22), (4.23) összefüggésből)

$$x_{n+1} = \frac{E}{\omega_0} v_n, \quad \bar{v}_{n+1} = -E\omega_0 x_n, \quad (4.40)$$

ahol $E = e^{-(\alpha/2)T} < 1$. Az n -edik lökés utáni (x_n, v_n) koordináták és az oszcillátor paraméterei tehát egyértelműen meghatározzák a következő lökés előtti értékeket. Ez természetesen egy lineáris kapcsolat, hiszen a probléma nemlinearitásának forrását, a lökdösést még nem tartalmazza.

A lökés hatása egyszerűen az, hogy a sebességet egy pillanat alatt eltolja az $uI(x_{n+1})$ értékkel. A lökés utáni sebesség tehát

$$v_{n+1} = \bar{v}_{n+1} + uI(x_{n+1}). \quad (4.41)$$

A lökdösött harmonikus oszcillátor teljes stroboszkopikus leképezése

$$x_{n+1} = \frac{E}{\omega_0} v_n, \quad v_{n+1} = -E\omega_0 x_n + uI(x_{n+1}). \quad (4.42)$$

Ez az

$$x_{n+1} = M_1(v_n), \quad v_{n+1} = M_2(x_n, v_n) \quad (4.43)$$

alakba is írható, ahol az M leképezésfüggvény komponensei

$$M_1 = \frac{E}{\omega_0} v_n, \quad M_2 = -E\omega_0 x_n + u_0 I\left(\frac{E}{\omega_0} v_n\right). \quad (4.44)$$

Ez az első példánk nemlineáris leképezésre (természetesen akkor, ha I nemlineáris függvény).

Érdeemes áttérni a leképezés dimenziótlan alakjára. Mérjük a sebességet az u tipikus sebességugrás-egységeiben, a távolságot pedig az u/ω_0 egységekben! Ez az

$$x_n \rightarrow \frac{u_0}{\omega_0} x_n, \quad v_n \rightarrow u_0 v_n \quad (4.45)$$

áthelyettesítésnek felel meg, ahol a nyíl után álló tényezők a dimenziós egységek a második tényezők pedig az új dimenziótlan x_n, v_n koordináták. Ezt (4.42)-be helyettesítve az

$$x_{n+1} = E v_n, \quad v_{n+1} = -E x_n + I(x_{n+1}) \quad (4.46)$$

dimenziótlan leképezést kapjuk. Ebben az ω_0 sajátfrekvencia és az u jellegzetes lökés erősség nem jelenik meg. A leképezésnek az I dimenziótlan függvényen kívül egyetlen lényeges paramétere tehát az E csillapítási állandó.

Fontos megemlíteni, hogy a leképezés inverze is létezik. Az (x_{n+1}, v_{n+1}) képpont ismeretében ugyanis kiszámítható az (x_n, v_n) *őskép*. A megfordított leképezést megadó szabály a (4.46) alakot használva az $n \rightarrow n+1$, $n+1 \rightarrow n$ csere után

$$x_{n+1} = -\frac{1}{E}v_n + \frac{1}{E}I(x_n), \quad v_{n+1} = \frac{1}{E}x_n. \quad (4.47)$$

Ez a lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezésének inverze, ami időben hátrafelé követett dinamikát ír le. Az inverz leképezés egyértelmű, függetlenül az $I(x)$ függvény alakjától. A leképezés invertálhatósága az eredeti mozgásegyenlet időbeli megfordíthatóságának következménye a stroboszkopikus képben.

4.7. feladat. Vezessük le a lökdösött harmonikus oszcillátor stroboszkopikus leképezését a lökdösés előtti pillanatokra.

4.8. feladat. Vezessük le a lökdösött harmonikus oszcillátor stroboszkopikus leképezését a lökdösés utáni pillanatokra tetszőleges gerjesztési periódusidő és tetszőleges súrlódási együttható esetén. Adjuk meg az inverz leképezést is!

4.5. Fixpontok általános osztályozása kétdimenziós leképezésekben

Tekintsük az x_1, x_2 mennyiségek diszkrét időfüggését meghatározó általános kétdimenziós

$$x'_1 = M_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = M_2(x_1, x_2) \quad (4.48)$$

leképezést. A többszörös indexek használatának elkerülésére az általános leképezés koordinátáinak $n, n+1$ diszkrét időváltozóit most nem írjuk ki, hanem a képpontot vesszővel jelöljük. A leképezés fixpontjai azok az (x_1^*, x_2^*) számpárok, melyek kielégítik az $x_1^* = M_1(x_1^*, x_2^*)$ és az $x_2^* = M_2(x_1^*, x_2^*)$ egyenleteket. A fixpont körüli kis eltérések dinamikája alapján dönthető el a fixpont stabilitása. A $\Delta x_1 = x_1 - x_1^*$ és $\Delta x_2 = x_2 - x_2^*$ változóknak elég a vezetõ, lineáris járulékot megtartani, ha az eltérések kicsik. Az így kapott linearizált leképezés

$$\begin{aligned} \Delta x_1' &= m_{11}\Delta x_1 + m_{12}\Delta x_2, \\ \Delta x_2' &= m_{21}\Delta x_1 + m_{22}\Delta x_2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

A $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ vektoriális jelöléssel ez a

$$\Delta \mathbf{x}' = L \Delta \mathbf{x} \quad (4.50)$$

alakot ölti, ahol az

$$L = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial M_1 / \partial x_1 & \partial M_1 / \partial x_2 \\ \partial M_2 / \partial x_1 & \partial M_2 / \partial x_2 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

stabilitási mátrixban fellépő deriváltak a fixpont \mathbf{x}^* helyén veendőek.

A $\Delta x_{i,n} = u_i \Lambda^n$ ($i = 1, 2$) alakban keresve (4.49) megoldását, azt találjuk, hogy Λ -nak ki kell elégítenie a


$$\begin{aligned} \Lambda u_1 &= m_{11}u_1 + m_{12}u_2, \\ \Lambda u_2 &= m_{21}u_1 + m_{22}u_2 \end{aligned} \quad (4.52)$$


egyenleteket, vagyis Λ az L mátrix sajátértéke, egyben a


$$\Lambda^2 - \Lambda \text{Tr } L + \det L = 0 \quad (4.53)$$


másodfokú egyenlet gyöke. A stabilitási mátrix nyoma $\text{Tr } L = m_{11} + m_{22}$.


A fixpont jellegét a sajátértékek tulajdonságai alapján a következőképpen határozzuk meg (l. 4.2. táblázat):


 *Hiperbolikus pont*, ha Λ_{\pm} valós, valamelyik sajátérték abszolút értéke nagyobb egynél, a másiké kisebb: $|\Lambda_+| > 1$, $|\Lambda_-| < 1$.

 *Elliptikus pont*, ha Λ_{\pm} komplex és abszolút értékük 1-gyel egyenlő: $|\Lambda_{\pm}| = 1$ (csak súrlódásmentes esetben lehetséges).

 *Csomópontattraktor*, ha Λ_{\pm} valós, és mindkét abszolút érték kisebb egynél: $|\Lambda_{\pm}| < 1$.

 *Spirális attraktor*, ha Λ_{\pm} komplex, és abszolút értékük kisebb egynél: $|\Lambda_{\pm}| < 1$.

 *Csomópontrepellor*, ha Λ_{\pm} valós, és mindkét abszolút érték nagyobb egynél: $|\Lambda_{\pm}| > 1$ (csak táguló fázistérben lehetséges).

 *Spirális repellor*, ha Λ_{\pm} komplex, és abszolút értékük nagyobb egynél: $|\Lambda_{\pm}| > 1$ (csak táguló fázistérben lehetséges).

Az osztályozás hasonló a folytonos idejű fázisíkon megismert fixpontokéhoz (3.5.4. szakasz), amennyiben a Λ_{\pm} sajátértékek abszolút értékének logaritmusát feleltetjük meg az ottani λ_{\pm} sajátértéknek.

4.2. táblázat. A leképezés fixpontjainak osztályozása a sajátértékek abszolút értéke és képzetes része alapján. A táblázat analóg a 3.1. táblázattal.

	$ \Lambda_{\pm} = 1$	$ \Lambda_{\pm} < 1$	$ \Lambda_- < 1 < \Lambda_+ $	$ \Lambda_{\pm} > 1$
$\text{Im}\Lambda_{\pm} = 0$	–	csomópont- attraktor	hiperbolikus pont	csomópont- repellor
$\text{Im}\Lambda_{\pm} \neq 0$	elliptikus pont	spirális attraktor	–	spirális repellor

Elliptikus fixpont csak súrlódásmentes esetekben fordulhat elő, csomópont és spirális pont csak súrlódás jelenlétében. Az utóbbiak szükség szerint vonzóak. Egyedül a hiperbolikus fixpont jelenhet meg mind súrlódásmentes, mind súrlódásos rendszerekben. A síkbeli leképezések fixpontjai ugyanolyan típusúak, mint a kétdimenziós fázistér fixpontjai.

Az általános megoldás mindig két hatványfüggvény lineárkombinációja:

$$\mathbf{x}_n = c_+ \mathbf{u}_+ \Lambda_+^n + c_- \mathbf{u}_- \Lambda_-^n. \quad (4.54)$$

Itt az \mathbf{u}_{\pm} vektorok az L mátrix sajátvektorai, az $L\mathbf{u}_{\pm} = \Lambda_{\pm}\mathbf{u}_{\pm}$ egyenletnek megfelelően. A c_{\pm} együtthatókat az $\mathbf{x}_0 = c_+ \mathbf{u}_+ + c_- \mathbf{u}_-$ kezdőfeltétel határozza meg. Amennyiben a sajátértékek és sajátvektorok valósak, az utóbbiak irányt jelölnek ki a fázistérben. Ezen irányok mentén egyetlen hatványfüggvény írja le az időfejlődést. A hiperbolikus fixpont esetében a *stabil és instabil irány megegyezik az egynél kisebb, illetve az egynél nagyobb abszolút értékű sajátértékhez tartozó sajátvektor irányával.*

4.9. feladat. Határozzuk meg az állandó $I(x) \equiv I_0 = \text{konst.}$ amplitúdóval lökdösött harmonikus oszcillátor határciklusának megfelelő fixpontot és annak stabilitását a (4.46) alakból.

4.6. A terület-összehúzóási arány

A leképezéseken követett dinamikának is fontos tulajdonsága, hogy az adott kezdőpontok által kijelölt fázistérfohat időben hogyan változik. Mivel diszkrét idejű mozgásról van szó, a fázistérfohat egy lépés alatt is jelentősen módosul, súrlódásos rendszerekben csökken. Az a szám, amely megadja, hogy egy kis fázistérfohat egy lépés alatt hányszorosára csökken, a *terület-összehúzóási arány.*

Egy általános kétdimenziós (4.48) leképezés terület-összehúzóási arányát a sík egy adott (x_1, x_2) pontjában az ott linearizált leképezés (4.51) derivált mátrixának

$$J(x_1, x_2) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} & \frac{\partial M_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_2} & \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Jacobi-determinánsa adja meg.

4.10. feladat. Kis, téglalap alakú kezdeti tartományt véve mutassuk meg, hogy annak képe egy parallelogramma, melynek területe a téglalap területének J -szerese, ahol J a kiindulási helyzet Jacobi-determinánsa.

Leképezésekben a Jacobi-determináns ugyanazt a szerepet játssza, amit a $\sigma = -\text{div} f$ fázistérfogat-összehúzóási ráta a folytonos idejű folyamatokban. Az 1-nél kisebb abszolút értékű Jacobi-determináns lokális területcsökkenést ír le, az 1-nél nagyobb abszolút értékű pedig növekedést. A területtartás tehát csak a $|J| = 1$ esetben következik be. Hangsúlyozzuk, hogy a Jacobi-determináns semmilyen véges értéke sem garantálja, hogy a terület alakja a kiinduláshoz hasonló marad. Látni fogjuk, hogy a kaotikus és a nem kaotikus rendszerek közötti egyik legszembevetőbb különbség az, hogy az előbbiben a fázistérbeli alak nagyon gyorsan szétfolyik, tagolttá válik, és valamilyen bonyolult (fraktál) halmazra húzódik rá, míg az utóbbiban csak gyenge deformációt szenved. Mindkét eset megtörténhet J ugyanazon értéke mellett is (ha egyéb paraméterek különböznek).

A fixpontok körüli viselkedést az abban a pontban képzett (4.50) linearizált leképezés írja le. Mivel a sajátértékek szorzata a determináns, általánosan igaz, hogy a

$$\Lambda_+ \Lambda_- = J \quad (4.56)$$

szorzat a fixpontban érvényes terület-összehúzóási arány.

A megfordított, invertált leképezés Jacobi-determinánsa az eredeti Jacobi-determináns reciproka. Ez összhangban van azzal, hogy a sajátértékek is az eredetiek reciprokai.

A Jacobi-determinánst az eddig levezetett (4.25), (4.33) és (4.46) leképezésekre kiértékelve, azt találjuk, hogy az mindegyik esetben

$$J = E^2 = e^{-\alpha T} = e^{-\sigma T}, \quad (4.57)$$

ahol $\sigma = \alpha$ a folytonos idejű folyam fázistérfogat-összehúzóási rátája. A Jacobi-determináns tehát a fázistérbeli helyzettől független, ami nyilván annak a következménye, hogy a súrlódási együttható konstans. Az a tény, hogy a lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezése is konstans Jacobi-determinánssal, azzal függ össze,

hogy a lökés disszipációmentes folyamat, így nem ad járulékot J -hez. A (4.46) leképezésben megjelenő E paraméter tehát egyszerre jellemzi a csillapítás erősségét és a terület-összehúzódság mértékét. Érdeemes megjegyezni, hogy a leképezésen érvényes csillapítás még gyenge súrlódás esetén is lehet erős, amennyiben a periódusidő hosszú, E ugyanis az αT szorzattól függ.

4.11. feladat. Milyen típusú az

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

stabilitási mátrixszal jellemzett fixpont az a paraméter függvényében, abban a tartományban, ahol a Jacobi-determináns 0 és 1 közé esik?

4.12. feladat. Határozzuk meg a fixpont jellegét a $\text{Tr } L$ és a $\det L \equiv J$ paraméterek által definiált sík különböző tartományaiban (a Jacobi-determináns egynél nem nagyobb pozitív értékeire)!

4.7. A differenciálegyenletekkel kapcsolatos leképezések általános tulajdonságai

A tetszőlegesen felírt kétdimenziós leképezések általában nem olyanok, hogy következhetnének három elsőrendű közönséges differenciálegyenlet rendszeréből. Ha viszont következnek, akkor az a lehetséges alakokra jelentős megszorítást jelent, melyet eddigi tapasztalatunk alapján meg is fogalmazunk.

A leképezésnek *invertálhatónak* kell lennie, hiszen a folytonos idejű differenciálegyenlet is az volt (l. 3.5.3. szakasz). Az invertálhatóság szükséges feltétele az, hogy a Jacobi-determináns nullától különböző legyen az egész síkon.

Példáinkból az derült ki, hogy a Jacobi-determináns pozitív (de kisebb 1-nél). Egyszerű esetekben ellenőrizhető, hogy egy negatív Jacobi-determinánsú leképezés a síkbeli alakzatok körüljárását egy leképezési lépés után megfordítja. Valóságos rendszerben ez azonban nem lehetséges. A háromdimenziós térbeli trajektóriák ugyanis mind a fázistengely irányában haladnak. Ezért egy kisméretű alakzat, pl. egy téglalap csúcsai menet közben mindig egy síkba esnek (a $\phi =$ állandó síkba), egymáshoz képest e síkban elmozdulnak, az alakzat parallelogrammává deformálódik, de a körüljárása nem változik (ahhoz a területnek egyszer zérussá kellene válnia, azaz a trajektóriáknak metszeniük kellene egymást).

Annak szükséges feltétele, hogy egy leképezés differenciálegyenletből következessen, az, hogy

- a leképezés megfordítható legyen, létezzen egyértelmű inverze,
- J Jacobi-determinánsa mindenütt pozitív legyen,
- és disszipatív rendszerben a Jacobi-determináns 1-nél kisebb legyen (súrlódásmentes rendszerben éppen 1).

Ezek a feltételek érvényesek a később részletesen tárgyalandó Poincaré-leképezésekre is.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező (4.48) dinamika globális feltérképezése hasonló módon történik, mint a folytonos idejű kétdimenziós dinamikáé. Az első lépés a fixpontok és stabilitásuk meghatározása. A fixpontok kis környezetében érvényes trajektóriákat már ismerjük (l. 4.2.–4.5. szakaszok), s ezekből mint építőkövekből összeállíthatjuk az egész fázistérképet. Ebben ismét különösen fontos szerepet játszanak a *hiperbolikus pontok stabil és instabil sokaságai*. A leképezés síkjában azon pontok összességét, amelyekből az iterálás a hiperbolikus pontba visz, a hiperbolikus pont *stabil sokaságának* nevezzük. A hiperbolikus pont *instabil sokasága* az invertált leképezésben ugyanazon pont *stabil sokasága*.

Mindkét sokaság végtelen hosszú görbe vonal, mely a fázissík jelentős tartományára kiterjedhet. A sokaságok egyben *invariáns* görbék is, azaz a leképezés hatására *önmagukra* képződnek. A sokaságok szerepe a leképezésen is hasonló ahhoz, amit a kétdimenziós fázistéren megfigyeltünk. Disszipatív leképezésekben a stabil sokaság mindig különböző attraktorokat választ szét, az attraktorok vonzási tartományai határát alkotja. Az instabil sokaság viszont befut valamelyik attraktorba.

A stroboszkopikus leképezésen megjelenhetnek n -es ciklusok is (4.2. ábra). Ezek képe n különböző pont, melyek egymásba képződnek, s mindegyikük n lépés után kerül vissza kiindulási helyére. *Az n -es ciklus minden egyes pontja tehát az n -szeresen iterált leképezés fixpontja*. Természetesen az n -es ciklusok is lehetnek instabilak. Ekkor az n -szer iterált leképezés nekik megfelelő fixpontjai hiperbolikusak. Ez azt jelenti, hogy az n -szer iterált leképezésen a ciklus minden különálló pontjának van stabil és instabil sokasága.

A Poincaré–Bendixson-tételhez hasonló állítás *nem* létezik diszkrét idejű, kétdimenziós leképezésekre. Ezért az attraktorok határciklusnál jóval bonyolultabbak, kaotikusak is lehetnek. Egy általános kétdimenziós leképezés fázistérképe hasonló jellegű, mint a fázissík (3.29. ábra), de részleteiben sokkal gazdagabb annál (l. 5.51. ábra).

6. A nem megfordítható leképezések világa

Ha bármilyen mozgást filmre veszünk, és a filmet visszafelé játsszuk le, akkor azon is egy egyértelmű, noha esetleg furcsa mozgást látunk. Ez felel meg annak, hogy a dinamika (a mozgásegyenlet vagy a belőle következő leképezés) megfordítható, invertálható. Ha a dinamikának nincs inverze, az azzal analóg, hogy a filmet nem lehet visszatekeríteni. Sokszor a nem invertálhatóság abból adódik, hogy az inverz leképezés nem egy-, hanem többértékű. Ekkor a megfordított dinamikának nem fázistere az eredeti fázistér, mert benne egy pontból több trajektória is indul. A filmes hasonlatban ez annak a furcsa helyzetnek felel meg, hogy minden egyes visszafelé lejátszott kocka megjelenése előtt el kell dönteni, hogy több lehetséges kép közül melyiket válasszuk. A valós világ azonban nem ilyen.

Számos olyan matematikai modell létezik, melyekben nem invertálható leképezések jelennek meg. Ezek olyan leképezések, melyek nem feleltelhetők meg differenciálegyenleteknek. Az ilyen leképezések tehát valóságos, fizikai folyamatokat nem modellezhetnek hűen, legfeljebb csak erősen idealizált közelítésként. Az egyik legismertebb példa

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 \quad (4.59)$$

($a > 0$) logisztikus leképezés.⁴ Minden x_{n+1} pontba két ősképből, az $x_n =$

$\pm\sqrt{1 - x_{n+1}/a}$ pontok valamelyikéből lehet eljutni. Ezért az invertált leképezés

$$x_{n+1} = \pm\sqrt{1 - x_n/a}. \quad (4.60)$$

Ez nem egyértelmű, hiszen most tudnunk kellene azt is, melyik előjel veendő. Hasonló tulajdonságú a logisztikus leképezés komplex síkra történő kiterjesztésével kapott kvadratikus leképezés, melyet leggyakrabban a $z_{n+1} = C - z_n^2$ alakban szokás felírni, ahol z komplex szám, és C komplex paraméter.⁵

A nem megfordítható dinamikák stabilitási tulajdonságait tekintve más jellegűek, mint a megfordíthatóak. A nem megfordítható leképezésekben *hiperbolikus viselkedés nem létezik*. Ehhez ugyanis szükséges az idő irányának megfordíthatósága: az instabil sokaság mindig az invertált dinamika stabil sokasága. A nem megfordítható rendszerekben az instabil állapotokat repellorpontok jellemzik.

Mivel a stroboszkopikus leképezés rendszerint nem vezethető le egzaktul, sokszor célszerű a diszkrét idejű viselkedést egy egyszerű alakban felvett modell-leképezéssel követni. Ilyenkor azonban ügyelnünk kell arra, hogy a leképezés invertálható legyen, mert különben egy valóságos, megfordítható folyamatot a nem megfordítható világban modellezünk.

⁴A logisztikus leképezés gyakran használt másik alakja $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, $r = \sqrt{1 + 4a} + 1$, ami a (4.59) alakból az $x \rightarrow x(r - 2)/4 + 1/2$ változócserevel következik.

⁵Azok a C paraméterek, melyekre az origóból induló iteráció nem fut ki a végtelenbe, az ún. Mandelbrot-halmazt alkotják.

4.8. Milyen rendszerben várható kaotikus viselkedés?

Semmilyen kétdimenziós folytonos idejű rendszer nem lehet kaotikus a Poincaré–Bendixson-tétel következményeként.

Ha a dinamika *lineáris*, tetszőlegesen magas dimenziójú rendszerben *sem* lehet káosz. A lineáris mozgás egzaktul felbontható exponenciális időfüggésű komponensekre, ún. normál módusokra (l. (3.71), (4.54)). Más szóval, az időfejlődés véges számú egyszerű, független mozgástípus lineáris kombinációja. Ez a tulajdonság nem igaz kaotikus esetekben, a kaotikus mozgás nem bontható fel elemi összetevőkre.

A kaotikus viselkedés szükséges feltétele az, hogy a rendszer

- legyen nemlineáris, és
- mozgását legalább 3 független, elsőrendű autonóm differenciálegyenlet írja le.

Káosz tehát minden legalább háromdimenziós fázisterű nemlineáris rendszerben felléphet.

A 4.7. szakasz szerint azok a kétdimenziós leképezések, melyek invertálhatóak és Jacobi-determinánsuk pozitív, megfeleltethetők differenciálegyenleteknek. Az ilyen leképezések által leírt mozgás ezért szintén lehet kaotikus. *Káosz jelen lehet bármilyen kétdimenziós, nemlineáris, invertálható leképezésben is.*

(A tapasztalat szerint kaotikus viselkedés a nem invertálható leképezésekben is megjelenik, de ezekhez nem tartozhat reális, folytonos idejű mozgás. A legegyszerűbb matematikai modellek, melyekben kaotikus viselkedés már lehetséges, az egydimenziós nem invertálható leképezések.)

Egy rendszert akkor mondunk kaotikusnak, ha *léteznek olyan paraméterértékei, melyek mellett kaotikus mozgás lehetséges.* A tapasztalat szerint a legalább háromváltozós autonóm differenciálegyenlettel leírt nemlineáris rendszerek *általában* kaotikusak, körükben a kaotikusság tehát nem a kivétel, hanem a tipikus viselkedés. Azt azonban, hogy egy ilyen rendszerben adott paraméterértéknél fellép-e kaotikus mozgás vagy sem, az egyenletek alakjából *nem* lehet eldönteni. Ez csak a numerikus megoldás után derül ki.

III.

A kaotikus mozgás vizsgálata

Káosz disszipatív rendszerekben

A disszipatív rendszerekben megfigyelhető kaotikus viselkedés részletes vizsgálatát egy egyszerű „modell”-leképezés, az ún. *pékleképezés* keretein belül kezdjük meg. Ennek kapcsán vezetjük be a káosz legfontosabb mérőszámait, egyelőre a konkrét esethez kötve. Egyszerűsége miatt a pékleképezés a kaotikus viselkedés számos vonásának egzakt tárgyalását is lehetővé teszi, ami kivételes tulajdonság a kaotikus mozgást mutató rendszerek világában. Ezután rátérünk egy fizikai rendszer, a lökdösött oszcillátor vizsgálatára, különböző lökési amplitúdófüggvények mellett. Ezeket a függvényeket úgy választjuk meg, hogy az első esetben a kaotikus attraktor még hasonlít a pékleképezésére. A második esetben már eltérő szerkezetű, és egyben rendelkezik a kaotikus attraktorok azon általános tulajdonságával, hogy egyetlen összefüggő görbe vonalnak tűnik. Az amplitúdófüggvény speciális alakja itt még lehetővé teszi az attraktor egzakt megszerkesztését is. A harmadik függvényválasztás mellett, amivel egy valóban tipikus kaotikus rendszert kapunk, ez már nem lehetséges, csak numerikus módszerek alkalmazhatók. A lökdösött oszcillátor esetére támaszkodva megvizsgáljuk a kaotikus rendszerek viselkedésének paraméterfüggését. Az eddigi tapasztalatok alapján már összefoglalhatók a káosz legfontosabb tulajdonságai, egyelőre a leképezések szintjén. A rendezetlen mozgás mérőszámaként bevezetjük a topologikus entrópiát, az előrejelezhetetlenség mérőszámaként a Ljapunov-exponenst, a fázistérbeli komplex struktúra mérőszámaként pedig a kaotikus attraktor fraktáldimenzióját. Külön hangsúlyt helyezünk a kaotikus attraktoron kialakuló valószínűség-eloszlás bemutatására és jellemzésére. Ez az a mennyiség, mely matematikai értelemben is kifejezi a káosz véletlenszerű jellegét, s egyben az ilyen mozgások hosszú idejű jellemzésének egyetlen helyes eszközét jelenti. Ezután röviden áttekintjük, hogyan jelenik meg mindez a teljes fázistérben. Folytonos idejű

gerjesztett rendszereket mutatunk be, melyeknek általában már a stroboszkopikus leképezése sem adható meg egzakt formában, csak numerikus módszerekkel. Végül az eső hatására kaotikus mozgásba lendülő vízikerek példáján egy egészen más fizikai eredetű kaotikus viselkedést vizsgálunk, melynek leírása a káosztudomány történetében fontos szerepet játszó Lorenz-moddal rokon egyenleteken alapul.

5.1. A pékleképezés

5.1.1. A leképezés bemutatása

A pékleképezés (az elnevezés eredetéről l. a 13. olvasmányt) rendelkezik mindazokkal az általános tulajdonságokkal, melyeket a 4.7. szakaszban a differenciálegyenletekkel kapcsolatos leképezésektől megkívántunk: megfordítható, Jacobi-determinánsa pozitív és kisebb 1-nél. A pékleképezés a kaotikus dinamikai rendszerek mintapéldája. Hasonló szerepet játszik ezen a területen, mint a harmonikus oszcillátor a szabályos, nem kaotikus mozgások világában.

A disszipatív pékleképezés az (x_n, v_n) sík egységnyezetének tetszőleges pontjához hozzárendeli az

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = B(x_n, v_n) \quad (5.1)$$

pontot, ahol a B leképező függvény alakja függ attól, hogy a $v_n = 1/2$ kritikus vonal alatt vagy fölött helyezkedik el a vizsgált pont:

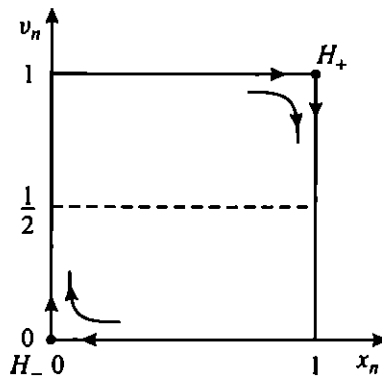
$$B(x_n, v_n) = \begin{cases} B_-(x_n, v_n) \equiv (ax_n, 2v_n), & \text{ha } v_n \leq 1/2, \\ B_+(x_n, v_n) \equiv (1 + a(x_n - 1), 1 + 2(v_n - 1)), & \text{ha } v_n > 1/2, \end{cases} \quad (5.2)$$

s teljesülnie kell a $0 < a < 1/2$ megszorításnak. Az egyes komponensekben kifejezve:

$$x_{n+1} = B_1(x_n) \equiv \begin{cases} ax_n, \\ 1 + a(x_n - 1), \end{cases} \quad v_{n+1} = B_2(v_n) \equiv \begin{cases} 2v_n, \\ 1 + 2(v_n - 1), \end{cases} \quad (5.3)$$

ahol a felső sor a $v_n \leq 1/2$, az alsó pedig a $v_n > 1/2$ feltétellel érvényes. A pékleképezést a $0 \leq x_n \leq 1$, $0 \leq v_n \leq 1$ tartományban definiáljuk, a fázistér tehát az egységnyezet.

Az (5.2) függvénykapcsolat azt írja le, hogy egy lépés után minden pont a függőleges irányban kétszer távolabb, a vízszintes irányban pedig a -szor közelebb kerül az origóhoz, illetve az $(1, 1)$ ponthoz, attól függően, hogy a $v_n = 1/2$ vonal alatt vagy fölött helyezkedik el (5.1. ábra). Ez az állandóan ismétlődő *megnyújtás* és *összenyomás* a kaotikus rendszerek fontos tulajdonsága.



5.1. ábra. A pékleképezés fázistere. A leképezés alakja a $v_n = 1/2$ vonal alatt és felett különböző, de mindkét térfélen lineáris (l. (5.2)). Berajzoltuk a $H_- = (0, 0)$, $H_+ = (1, 1)$ koordinátájú hiperbolikus fixpontokat is, nyilakkal jelölve a stabil és instabil irányt. A nyilazott görbe vonal a fixpont körüli mozgásra utal, mely ott hiperbola alakú görbéken történő ugrálás.

A pékleképezés egy ún. *szakaszosan lineáris leképezés*. A leképezést meghatározó B_- és B_+ (vagy B_1 , B_2) függvények lineárisak. A rendszerben a nemlinearitást az hozza létre, hogy v_n $1/2$ -nél kisebb, illetve nagyobb értékeinél a leképezési szabály ugrásszerűen változik, e vonal alatt, illetve felett különböző lineáris leképezések irányítják a mozgást.¹ Meglepő és figyelemre méltó, hogy a nemlinearitás ilyen csekély mértéke már *elegendő a kaotikusság megjelenéséhez*.

A mozgások szervezésében alapvető szerepet játszanak a hiperbolikus fixpontok. Az (x^*, v^*) fixpontot a leképezés helyben hagyja: $B(x^*, v^*) = (x^*, v^*)$. Az alsó térfélen B_- érvényes, és (5.2)-ből látszik, hogy $x^* = ax^*$ és $v^* = 2v^*$, ami csak akkor teljesül, ha $x^* = 0$, $v^* = 0$. A felső térfélen B_+ az $(1, 1)$ pontot hagyja változatlanul, mert erre teljesülnek az $x^* = ax^* - a + 1$ és $v^* = 2v^* - 1$ egyenletek. Összesen tehát két fixpont létezik csak: $H_- \equiv (0, 0)$ és $H_+ \equiv (1, 1)$. Az (5.2) pékleképezés felírható úgy is, mint két, az origó és az $(1, 1)$ pont körül linearizált leképezés:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \text{ha } v_n \leq 1/2, \quad (5.4)$$

¹Ha a B_- és B_+ alakok közötti átváltás nem hirtelenül, hanem folytonos átmenettel történne a $v_n = 1/2$ vonal körüli tartományban, akkor ott a leképezés erősen nemlineáris lenne.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} - 1 \\ v_{n+1} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - 1 \\ v_n - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ha } v_n < 1/2. \quad (5.5)$$

A leképezést tehát mindkét fixpont körül (s egyben mindkét térfélen) az

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

mátrix jellemzi. Az L stabilitási mátrix sajátértékei $\Lambda_+ = 2$, $\Lambda_- = a < 1$, s ezért a H_{\pm} fixpontok *hiperbolikusak* (l. 4.5. szakasz). A sajátvektorok: $\mathbf{u}_+ = (0, 1)$ és $\mathbf{u}_- = (1, 0)$, és a leképezés Jacobi-determinánsa (4.55) alapján $J = \Lambda_+ \Lambda_- = 2a \leq 1$, azaz a fázistér fogat összehúzódik. Mivel a pozitív és kisebb $1/2$ -nél, ezért teljesül az a 4.7. szakaszban említett feltétel, hogy a leképezés Jacobi-determinánsa csak pozitív és legfeljebb 1 lehet.

A 4.7. szakaszban említett másik kikötés az invertálhatóság. A pékleképezés *inverz leképezését* könnyen meghatározhatjuk. Ez az (x_n, v_n) egységnégyzet tet-szöleges pontjához hozzárendeli az

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = B^{-1}(x_n, v_n) \quad (5.7)$$

pontot, ahol

$$B^{-1}(x_n, v_n) = \begin{cases} (x_n/a, v_n/2), & \text{ha } x_n \leq 1/2, \\ (1 + (x_n - 1)/a, 1 + (v_n - 1)/2), & \text{ha } x_n > 1/2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Az inverz leképezés hatása attól függ, hogy az $x_n = 1/2$ kritikus vonaltól balra vagy jobbra helyezkedik-e el a vizsgált pont.

Az 5.1. ábrán a mozgás jellegét a hiperbolikus pontok környékén egy-egy görbe, nyilazott vonallal jelöltük. Ez a két „kölcsonható” fixpont szervezi a káoszt, a közbezárt területen belül egyfajta „keverőgépként” működve. Szemléltetésként ezt az egységnégyzetet egy „szorítónak” is képzelhetjük, ahol ha egy pont megközelíti az egyik fixpontot, akkor az egy „ütéssel” a nyilazott görbének megfelelő irányítotttsággal löki tovább a pontot a másik térfélre, ahol a másik fixpont fennhatósága alá kerülve újabb ütések áldozata lesz, melyek ismét a kiindulási térfél felé sodorják, és így tovább.

5.1.2. Káosz a pékleképezésben

A kaotikus mozgás 1.4. szakaszban leírt három jellemző tulajdonsága a szabálytalanság, előrejelezhetetlenség és a fraktálszerkezet. Megmutatjuk, hogy a pékleképezéssel leírt mozgás mindegyikkel rendelkezik.

Tekintsünk először egy taláalomra kiválasztott kezdőfeltételt s az abból indított trajektóriát. Legyen $x_0 = 1/2$, $v_0 = 2/\pi^2$. Az a paraméternek az $1/3$ értéket adjuk. Mivel $v_0 < 1/2$, az első lépésben (5.2) szerint B_- -t kell alkalmazni: $x_1 = a/2 = 1/6 = 0,167$, $v_1 = 2v_0 = 4/\pi^2 = 0,405$. Az új pont még mindig az alsó térfélre esik, ezért ismét B_- -t véve: $x_2 = a/6 = 1/18 = 0,056$, $v_2 = 2v_1 = 8/\pi^2 = 0,811$. Mivel $v_2 > 1/2$, ezért a következő lépésben már B_+ érvényes: $x_3 = 1 + a(x_2 - 1) = 37/54 = 0,685$, $v_3 = 1 + 2(v_2 - 1) = (16/\pi^2 - 1) = 0,621$, és így tovább. Elvileg akárhányszor alkalmazhatjuk a leképezést, de erre érdemes számítógép segítségét is igénybe venni.² Az 5.1. táblázat a numerikusan kapott eredményeket mutatja.

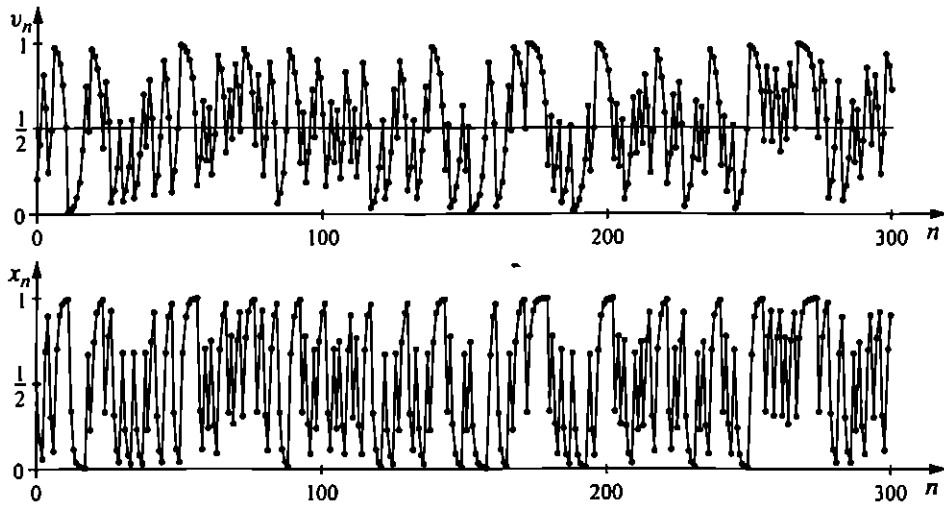
5.1. táblázat. A pékleképezés húsz iterálásának eredménye az $x_0 = 1/2$, $v_0 = 2/\pi^2$ kezdőfeltételekből kiindulva, az $a = 1/3$ paraméter mellett.

Iterálás (n)	x_n	v_n	Iterálás (n)	x_n	v_n
1	0,167	0,405	11	0,996	0,012
2	0,056	0,811	12	0,332	0,023
3	0,685	0,621	13	0,111	0,046
4	0,895	0,242	14	0,037	0,093
5	0,298	0,485	15	0,012	0,185
6	0,099	0,969	16	0,004	0,370
7	0,700	0,938	17	0,001	0,740
8	0,900	0,876	18	0,667	0,481
9	0,967	0,753	19	0,222	0,961
10	0,989	0,506	20	0,741	0,923

Ebből az látszik, hogy sem az x_n , sem a v_n sorozatban nincs ismétlődés, de természetesen ez még túl rövid sorozat a végleges ítéletalkotáshoz. Grafikus ábrázolással ennél jóval hosszabb sorozatról is áttekintést kapunk. Az 5.2. ábrán az első háromszáz iterálás x_n és v_n értékét egy-egy ponttal ábrázoltuk n függvényében. A bemutatott grafikonokon a rendszer időbeli változásában *szabálytalan* viselkedést figyelhetünk meg. Ugyanezt tapasztalnánk bármely kezdőfeltételre és paraméterre is. A dinamika kaotikus.

A kaotikus mozgás másik fontos tulajdonsága az *előrejelezhetetlenség*. Ennek illusztrálására indítsunk két közeli pontot, s nézzük meg, hogy az egymás utáni ite-

²Javasoljuk, hogy az Olvasó írja meg saját programját a pék- (és egyéb) leképezések szimulálására. Ehhez nyújt segítséget a 8.3. függelék.



5.2. ábra. Időfejlődés a pékleképezésben. A grafikonokban nem ismerhető fel semmilyen szabályosság, a rendszer időbeli viselkedése kaotikus. A kezdőfeltétel $x_0 = 1/2$, $v_0 = 2/\pi^2$ ($a = 1/3$). A kapott x_n és v_n értékeket a szemléletesség kedvéért vonallal kötöttük össze.

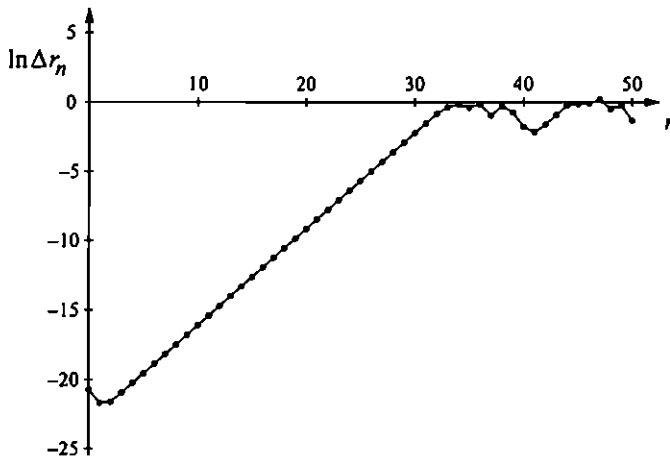
rálások hatására miképpen nő a köztük lévő távolság. Az egyik pont kezdőfeltétele legyen most is $x_0^{(1)} = 1/2$, $v_0^{(1)} = 2/\pi^2$. A másik ponté pedig $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + 10^{-9}$, $v_0^{(2)} = v_0^{(1)} + 10^{-10}$. Az 5.3. grafikonon ábráztuk a növekvő távolság logaritmusát az iterálás (n) függvényében. Ez a mennyiség a 3. iterálástól a 32. iterálásig lineárisan nő, maga a távolság tehát *exponenciálisan*! A növekedés egyenesének meredeksége 0,693. A fázistérbeli trajektóriák gyors eltávolodása miatt a mozgás hosszú távon nem jelezhető előre.

A közeli pontok, a közeli trajektóriák távolodásának gyorsaságát az ún. *Ljapunov-exponens* méri. A pékleképezésen egy iterálás alatt két pont távolságának függőleges komponense kétszeresére növekszik, ezért n lépés után $\Delta v_n = 2^n \Delta v_0 = e^{(\ln 2)n} \Delta v_0$. A növekedés mérőszáma a $\Delta v_n = \Delta v_0 e^{\lambda n}$ összefüggéssel definiált ún. Ljapunov-exponens, ami a pékleképezésen

$$\lambda = \ln 2 = 0,693. \quad (5.9)$$

Az x irányban két közeli pont távolsága a $\Delta x_n = a^n \Delta x_0$ szabály szerint csökken. A $\Delta x_n = \Delta x_0 e^{\lambda' n}$ összefüggéssel definiált ún. *negatív Ljapunov-exponens* a pékleképezésen

$$\lambda' = \ln a < 0, \quad (5.10)$$



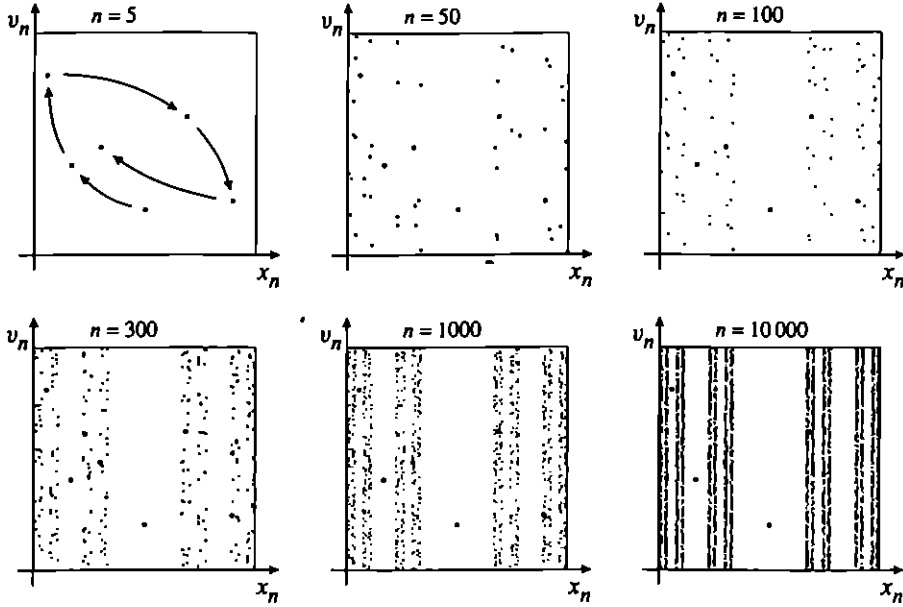
5.3. ábra. Két pont $\Delta r_n = \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta v_n^2}$ fázistérbeli távolságának változása az iterálások során. A két pont kezdeti távolsága: $\Delta r_0 = 1,005 \times 10^{-9}$. A logaritmusos léptékű grafikonon a harminckettedik iterálásig lineárisan nő a távolság. A különbség 30 lépés alatt 10^9 -szeresére nő.

az a paraméter logaritmusára. A fázistérbeli teljes $\Delta r_n = \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta v_n^2}$ távolság kifejezésében a sebességkülönbség növekedése mellett Δx_n csökken. Néhány iterálás után már Δv_n dominál, s a teljes távolság is a pozitív Ljapunov-exponensnek megfelelően nő, azaz $\Delta r_n \sim e^{\lambda n}$. A pozitív Ljapunov-exponens tehát a közelről indított trajektóriapárok közötti fázistérbeli távolság növekedési ütemét adja (részletesebben I. 5.4.2. szakasz).

Érdeemes hangsúlyozni, hogy ez a növekedési szabály a rendszer végelessége miatt csak véges ideig figyelhető meg (annál tovább, minél kisebb a kezdeti Δr_0 távolság). Az 5.3. ábrán a harminckettedik iterálás után a két pont már olyannyira eltávolodott egymástól, hogy az egységnégyzet átellenes helyére kerül. Ezután a távolságuk lényegesen nem nőhet többé, ezért a logaritmusos léptékű grafikonon ábrázolt távolság kisebb ingadozásokkal konstans marad.

Most ábrázoljunk egyetlen trajektóriát a pékleképezés fázistérében! A rendezetlenül ugráló pontok az idő elteltével az egységnégyzetben egyre világosabban kirajzolnak egy *szabályos geometriai struktúrát* (I. 5.4. ábra).

A kaotikus rendszereknek fontos tulajdonsága, hogy a mozgás (az időbeli változás) és egy geometriai struktúra (időben változatlan, a fázistérben kiterjedt alakzat) milyensége között szoros kapcsolat van. Ez jól illusztrálja, hogy a káosz nem teljes „összevisszaság” (vagyis zaj), mert akkor a mintázat kirajzolása helyett a pontok

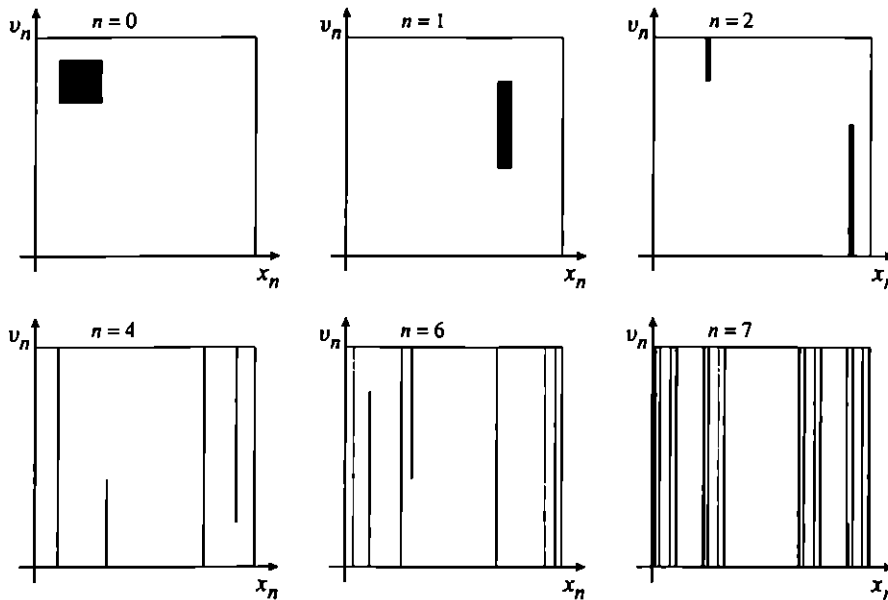


5.4. ábra. Egyetlen trajektória időfejlődése a fázistérben. Az $x_0 = 1/2$, $v_0 = 2/\pi^2$ kezdőfeltételtől kiindulva ($\alpha = 1/3$) rendre az 5, 50, 100, 300, 1000, 10000 iterálásig kapott pontokat ábrázoljuk az (x_n, v_n) síkon. Az egyre több iterálást tartalmazó képeken – a növekvő pontsűrűség miatt – fokozatosan csökkentettük a pontok méretét. Az első öt pont követési sorrendjét nyilakkal érzékeltettük. Ezeket a pontokat az összes többi ábrán is a kezdeti nagy méretben ábrázoltuk.

nagyjából egyenletesen tölténék ki az egységnégyzetet. A kezdőfeltétel nem esett erre a fázistér említett alakzatára, azonban megfigyelhető, hogy a trajektória néhány iterálás alatt mégis nagyon jól megközelíti ezt az alakzatot, s utána már nem is hagyja azt el.

5.1.3. A kaotikus attraktor

A fázistérnek az a részhalma, amelyhez az előző szakaszban vizsgált trajektória konvergált, egy attraktor, méghozzá egy kaotikus attraktor. Ennek belátásához vehetnénk számos különböző kezdőfeltételt, s megmutathatnánk, hogy mindegyikük ugyanahhoz a halmazhoz tart, és azon a mozgás ugyanolyan jellegű, mint az előző szakaszban vizsgált esetben (így a Ljapunov-exponens is ugyanakkora). Egyedi trajektóriák helyett érdekesebb azonban egy kis fázistérfogat-darab mozgását vizsgálni, melyet a numerikus szimulálásban nagyszámú ponttal töltünk ki.

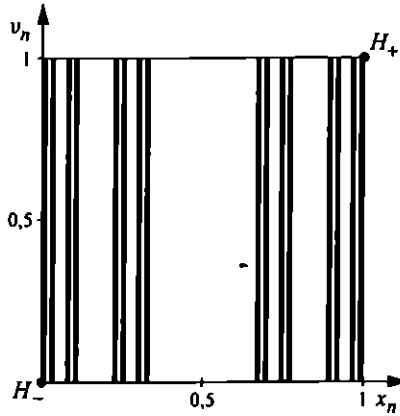


5.5. ábra. Egy fázistérfogat-darab időfejlődése. A numerikus eljárásban a $0,1 \leq x_0 \leq 0,3$; $0,7 \leq v_0 \leq 0,9$ tartományban egy $0,0001$ élhosszúságú négyzet-rácsot képeztünk, melynek minden pontjából elindítunk egy-egy (összesen négy-millió) trajektóriát, s mindegyik trajektória koordinátáit ábrázoljuk hét iterációig ($a = 1/3$).

A fázistérfogat-elem ugyanahhoz a halmazhoz konvergál, amihez egyetlen trajektória (5.5. ábra). Ezt a kísérletet más kezdeti formájú fázistérfogattal és más kiindulási helyzetekkel is megismételhetjük, s mindig ugyanazt az aszimptotikus alakot kapjuk. Itt tehát egy fázistérbeli vonzó halmazzal, egy attraktorra van dolgunk, hiszen az egységnégyzetben bármely kezdőfeltételtől indulunk is, a leképezett pontsorozat *minden esetben* a fázistérnek ugyanahhoz a részhalmazához tart. Az attraktor vonzási tartományá az egész egységnégyzet.

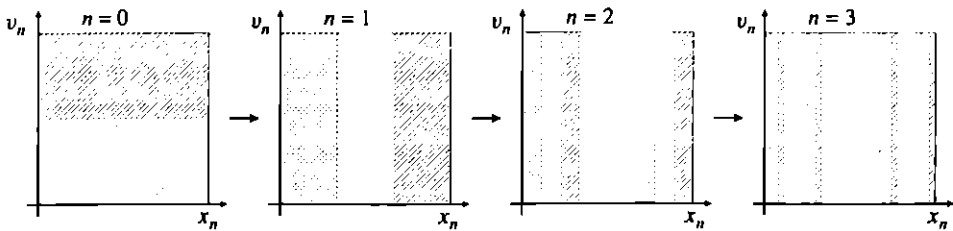
Ezzel tehát meghatároztuk a pékleképezés kaotikus attraktorát, melynek képét az 5.6. ábra mutatja. A kaotikus attraktor nem egy vonzó fixpont, nem is egy egyszerű, zárt görbe, hanem egy bonyolult alakzat, ami kaotikus mozgással társul. Vegyük észre, hogy ennek az egyszerű modell-leképezésnek az attraktora hasonló szerkezetű, mint az 1.2.1. szakaszban látott fizikai rendszerek kaotikus attraktorainak kis részletei.

A disszipáció miatt hosszú idő után a fázistérfogat nullához tart, ez összhangban van azzal, hogy a kaotikus attraktornak nulla a területe, *nullmértékű halmaz*, frak-



5.6. ábra. A pékleképezés kaotikus attraktora ($a = 1/3$). Az ábrát numerikusan úgy készítjük, hogy egy tetszőleges kezdőfeltételből kiinduló trajektóriát sokszor iterálunk, de az első néhányszor tíz pontot elhagyjuk, mivel azok rendszerint még nincsenek eléggé közel a kaotikus attraktorhoz.

tál (1. 2.2. szakasz). Ennek a fraktálstruktúrának a szerkezetét és kialakulását könnyebben megértjük, ha az egész egységnégyzet mozgását vizsgáljuk néhány iteráláson keresztül (5.7. ábra).



5.7. ábra. Az egész egységnégyzetet kitöltő fázistér fogat mozgása három iteráláson keresztül. Az alsó és a felső térfélről induló fázistér fogatot (területet) eltérő sátozottság különbözteti meg. Miközben a fázistér fogat ráhúzódik a kaotikus attraktorra, nyomon követhető, hogyan alakul ki a fraktálszerkezet ($a = 1/3$).

Egy iterálás azt eredményezi, hogy az alsó térfélen lévő felületdarab balra összenyomódik a -szorosára, és függőlegesen fölfelé megnyúlik a duplájára. A felső térfélen lévő felületdarab ugyanezt végzi, csak jobbra tolódik el és lefelé nyúlik meg. Minden iteráláskor ez a folyamat ismétlődik. Az így keletkező oszlopok

szélessége rendre a , a^2 , a^3 , ... lesz, számuk pedig kettő hatványa szerint növekszik. Minden iterálásnál a $v_n = 1/2$ vonal mentén kettészakad az egész fázistérfogat (terület) és a két ellentétes oldalra képződik. A teljes terület a Jacobi-determináns által meghatározott ütemben csökken, n lépés után nagysága $(2a)^n$. A fázistérfogat időbeli fejlődése ugyanannak a folyamatnak felel meg, amivel a 2.2.2. szakaszban a Cantor-szálakat szerkesztettük (l. 2.8. ábra), az r összehúzási arány most a pékleképezés a paramétere. Maga a kaotikus attraktor tehát Cantor-szálakból áll. Fraktáldimenziója a (2.10) összefüggés szerint:

$$D_0 = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/a)}. \quad (5.11)$$

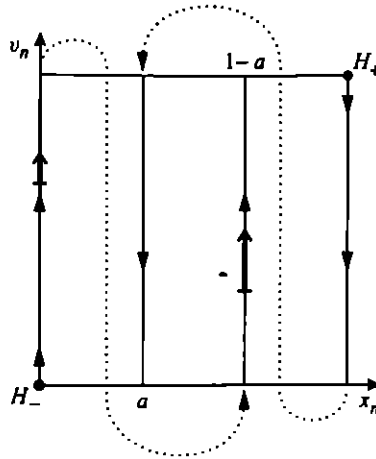
Az 5.7. ábra szerkesztéséből az is látszik, hogy a két fixpont minden lépésben része (az egyik sarka) a két legszélső oszlopnak. Ezért azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a hiperbolikus fixpontok *rajta vannak a kaotikus attraktoron*.

5.1. feladat. Numerikus szimulálással határozzuk meg a pékleképezés kaotikus attraktorát különböző a paraméterértékekre!

5.1.4. A kaotikus attraktor és az instabil sokaságok

A hiperbolikus fixpontokhoz mindig tartoznak instabil és stabil sokaságok (l. 4.3., 4.5. szakasz), melyek a fixpontok közvetlen környezetében a sajátvektorok irányát követik. A pékleképezés H_{\pm} fixpontjainak a Λ_+ sajátértékhez tartozó sajátvektora $\mathbf{u}_+ = (0, 1)$, ezért az instabil sokaságok függőleges szakasszal kezdődnek. Kérdés, hogyan néz ki a teljes instabil sokaság. Először a fixpontból kiinduló leghosszabb összefüggő sokaságdarabot, az ún. *alapágot* határozzuk meg. Ez a H_- fixpont esetében a $(0, 0) - (0, 1)$, a H_+ esetében pedig az $(1, 0) - (1, 1)$ szakasz. Az invertált leképezésben ugyanis minden pontjuk a megfelelő fixpont felé mozdul, miközben rajta marad az alapágon. Az egész sokaság feltérképezésének módszere azon alapszik, hogy az instabil sokaság egy kezdeti szakasza a leképezés hatására az instabil sokaság egy hosszabb szakaszára képződik le. A pékleképezésen egy függőleges szakasz hossza minden egyes iterációval Λ_+ -szorosára, vagyis kétszeresére nő (de az egységnyezetbe csak úgy férhet be, ha közben „összehajtódik”). Ezt kihasználva tetszőleges hosszúságban megszerkeszthetjük az instabil sokaságot.

Az 5.8. ábrán a szerkesztés kezdetét látjuk. Az origó instabil sokasága alapágának a $v_n = 1/2$ vonal alatti szakasza a leképezés hatására egységnyi hosszúságúra nyúlik, s ráképződik az egész alapágra. A $v_n = 1/2$ vonal feletti szakasz azonban nem marad a függőleges tengelyen, hanem az $x_n = 1 - a = 2/3$ koordinátájú függőleges vonalba képződik, hiszen az $x_n = 0$ koordinátájú pontok képei a B_+

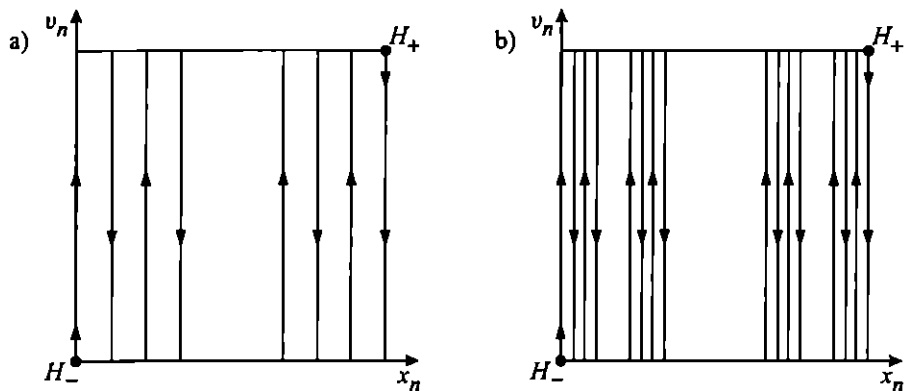


5.8. ábra. A H_+ , ill. H_- fixpontok instabil sokasága (lefelé, ill. felfelé mutató nyilak) szerkesztésének első két lépése: az alapág (a négyzet jobb, ill. bal oldalélei) és annak első iteráltja ($a = 1/3$). Pontozott vonallal jelöljük, hogy melyik szakasz melyiknek a folytatása. A „talpas” nyíl és egy iterálás utáni képe az instabil sokaság menti megnyúlást érzékelteti.

leképezés (5.2) szerint az $x_{n+1} = 1 - a$ koordinátájú pontok. Az $(1, 1)$ fixpont instabil sokasága alapágának a felső térfélre eső része egy leképezésben az egész egységnyi alapágra képződik, az $v_n = 1/2$ vonal alatti része viszont az $x_n = a = 1/3$ koordinátájú függőleges szakaszba (az $x_n = 1$ koordinátájú pontok képei B_- szerint $x_{n+1} = a$ koordinátájú pontok).

Az 5.9. ábrán további iterálásokat végeztünk, s ennek megfelelően még hosszabban rajzoltuk be a két fixpont instabil sokaságait. Minden iterálásnál kettészakadnak az instabil görbék, azonban az 5.8. ábrával ellentétben most már nem kötöttük össze őket pontozott vonallal (a nyilak azonban egyértelműen mutatják, hogy melyik fixpont sokaságáról van szó). Az eljárást folytatva egyre hosszabban rajzolódik ki mindkét instabil sokaság. Mindegyikük egy-egy végtelen hosszú szakadós vonal, az egységnégyzetbe „gyömmöszölve”.

Az instabil sokaságok szerkesztését a teljes fázistér fogat összehúzódsát mutató 5.7. ábrával összehasonlítva azt az érdekes megfigyelést tehetjük, hogy az instabil sokaság darabjai egybeesnek a fázistér fogat-oszlopok oldaléleivel. Mivel az oszlopok az attraktorhoz konvergálnak – méghozzá úgy, hogy oldalélek nem mozdulnak el, hanem felhasadnak az oszlopok, és újabb oldalélek így keletkeznek –, azt a következtetést kell levonnunk, hogy a fixpontok instabil sokaságai rajta vannak az attraktoron, sőt: *jó közelítéssel megegyeznek a kaotikus attraktormal.*



5.9. ábra. A H_+ és a H_- fixpontok instabil sokaságának (lefelé, ill. felfelé mutató nyilak) megnyúlása további iterálások hatására. a) Az alapág két iterálás utáni képe, b) az alapág három iterálás utáni képe. A szakaszok közötti legkisebb távolság az a) esetben a^2 , a b) esetben a^3 .

Mindez összhangban van eddigi megfigyelésünkkel (3.3. szakasz): az instabil sokaság bevezet az attraktorba. Most azzal az új helyzettel találkozunk, hogy a hiperbolikus pont eleve rajta van a kaotikus attraktoron, s mivel a sokaságnak ebbe az attraktorba kell vezetnie (az egységnyezeten belül más attraktor nem létezik), mindez csak úgy lehet, ha a teljes instabil sokaság is része magának a kaotikus attraktornak.

5.1.5. Kettes ciklusok

Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e magasabb rendű ciklusok a pékleképezésen. A kettes ciklusok kiszámítása a fixpontokhoz hasonlóan történik, de ilyenkor csak két iterálás után teljesül a leképezett pont helyben maradásának feltétele: $B^2(x^*, v^*) \equiv B(B(x^*, v^*)) = (x^*, v^*)$. A kettes ciklus pontjai tehát a kétszer iterált leképezés fixpontjai. Előfordulhat, hogy kettes ciklus mindkét pontja az alsó, mindkettő a felső, az egyik a felső, a másik pedig az alsó térfélre esik. Ez egyben annak felel meg, hogy a B_- , illetve B_+ alakot használjuk kétszer, vagy B_- -t és B_+ -t egymás után. Az első két esetben a kapott pont a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ fixpont, hiszen egy fixpont egyben kettes, hármas stb. ciklusnak is tekinthető. A harmadik esetben előbb a B_- , majd a B_+ leképezést egymás után alkalmazva, az $x^* = a^2x^* - a + 1$ és $v^* = 4v^* - 1$ egyenletekhez jutunk. Innen a kettes ciklus egyik pontjának koordinátái: $x^* = 1/(1 + a)$

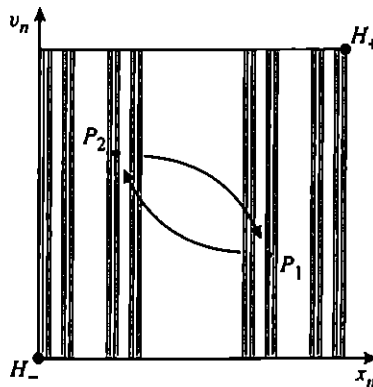
és $v^* = 1/3$. Ez a pont a $P_1 \equiv (1/(1+a), 1/3)$.³ Ugyanezen ciklus másik pontját – miután a P_1 pont az alsó féltéren van – a B_- leképezés P_1 -re való egyszerű alkalmazásával számíthatjuk ki. Az így kapott új pont $P_2 \equiv (a/(1+a), 2/3)$ lesz. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezt ismét iterálva (B_+ -szal) P_1 -hez jutunk vissza:

$$\dots \xrightarrow{B_+} P_1 \xrightarrow{B_-} P_2 \xrightarrow{B_+} P_1 \xrightarrow{B_-} P_2 \xrightarrow{B_+} \dots \quad (5.12)$$

Összesen tehát három kettes ciklust találtunk: Közülük kettő a már ismert két fixpont H_+ és H_- , s egyetlen új nem triviális kettes ciklus létezik: a P_1, P_2 pontpár.

5.2. feladat. Írjuk fel az $(x_{n+2}, v_{n+2}) = B^2(x_n, v_n)$ leképezést az (5.2)-hez hasonló formában! Mutassuk meg ennek alapján, hogy P_1 és P_2 kettes ciklust alkot!

Az 5.10. ábráról látszik, hogy a kettes ciklus rajta van a kaotikus attraktoron. Erről úgy is meggyőződhetünk, hogy a P_1, P_2 pontokat a nagyobb felbontású 5.6. ábrára rajzoljuk be. Akármilyen nagy nagyításban tekintenénk az attraktort, mindig azt látnánk, hogy a kettes ciklus pontjai rajta helyezkednek el.

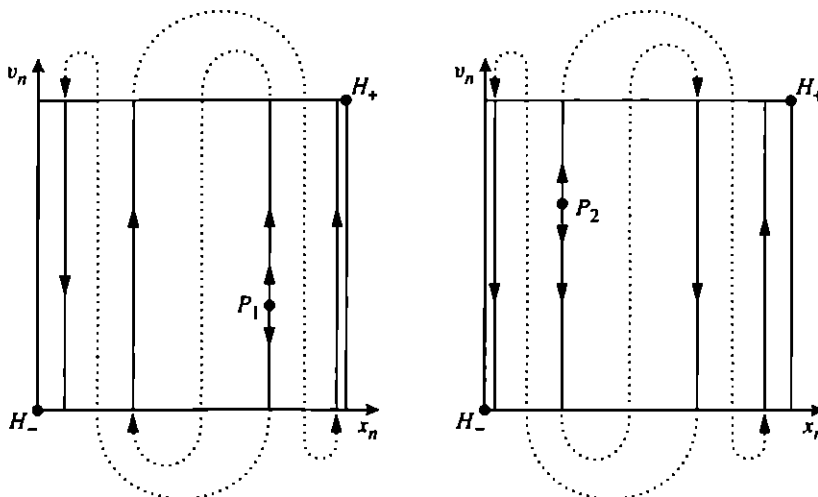


5.10. ábra. A P_1, P_2 kettes ciklus és a kaotikus attraktor. A kettes ciklus is hiperbolikus és része a kaotikus attraktornak.

A kettes ciklus mindkét pontja hiperbolikus fixpontként viselkedik, melyek mindegyike *önálló stabil és instabil sokaságokkal rendelkezik*. Láttuk, hogy a taszítás és a vonzás a pékleképezésen mindenütt egyforma irányú és mértékű, így a kettes

³Ha fordított sorrendben (B_+ , majd B_-) alkalmazzuk a leképezéseket, akkor ugyanennek a kettes ciklusnak a másik (P_2) pontját kapjuk.

ciklus két pontjában is. A kétszer iterált $B^2(x_n, v_n)$ leképezés fixpontjainak sajátértékei az egyszeres leképezés sajátértékeinek a négyzetei: $\Lambda_+^2 = 4$, $\Lambda_-^2 = a^2 < 1$. Ennek négyzetgyöke, vagyis az egy iterációra vetített sajátérték mindkét cikluselem esetén ugyanakkora, mint a fixponté.



5.11. ábra. A kettes ciklus instabil sokaságai szerkesztésének első lépése. A kettes ciklus P_1, P_2 pontján átmenő egységnyi hosszúságú függőleges szakaszra alkalmaztuk egyszer a $B^2(x_n, v_n)$ leképezést. A pontozott vonalak az összekötöttségi viszonyokat mutatják ($a = 1/3$).

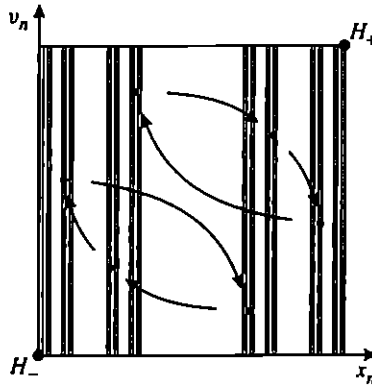
A P_1, P_2 kettes ciklus instabil sokaságai is ugyanúgy szerkeszthetők (5.11. ábra), mint a fixpontokéi. A kettes ciklus egyik, illetve másik pontjára egy-egy egységnyi hosszúságú függőleges szakaszt illesztünk, az alapágakat, majd ezekre alkalmazzuk a $B^2(x_n, v_n)$ kétszer iterált leképezést. Mivel a kettes ciklus rajta van az attraktoron, ezért a cikluselemekből kiinduló instabil sokaság is az attraktor részét képezi. Ha a bemutatott instabil sokaságdarabon további iterálásokat végeznénk, akkor az egyre pontosabban megadná a kettes ciklus teljes instabil sokaságát. Ugyanez a görbe egyre jobban kirajzolná a kaotikus attraktort. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ezek az instabil sokaságok sehol sem esnek egybe a fixpontok instabil sokaságával! Ez természetesen csak úgy lehetséges, ha az eddig tárgyalt sokaságok mindannyian egymáshoz nagyon közel futnak. Ezért bármelyikük önmagában is jól közelíti az attraktort.

5.1.6. Magasabb rendű ciklusok

Az előző szakaszban bemutatott módszerhez hasonlóan meghatározhatók a magasabb rendű ciklusok is. A kettes ciklusokkal ellentétben a magasabb rendűek esetében általában több egymástól független, de azonos rendű (azonos hosszúságú) ciklus létezik. A harmadrendűből például két független ciklust találunk, amelyek együttesen hat pontból állnak.

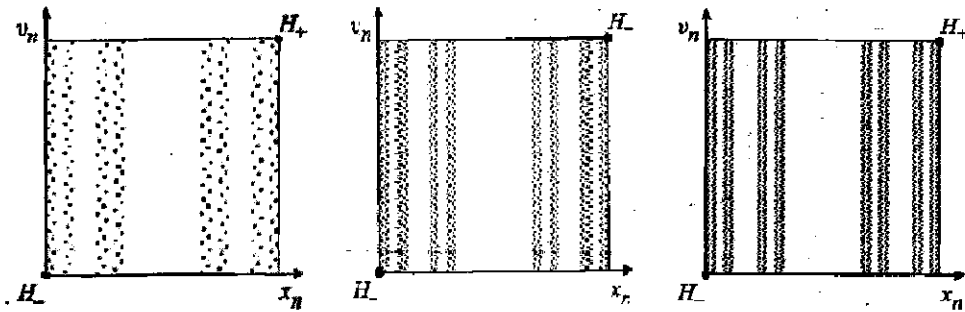
5.3. feladat. Határozzuk meg a pékleképezés hármas cikluspontjainak koordinátáit!

Az 5.12. ábrán a hármas ciklusokat jelöltük be a fázistérben, és nyilak mutatják a cikluspontok mozgását a leképezés hatására. Az ábráról látszik, és jobb felbontású képeken is ellenőrizhető, hogy mindkét ciklus összes pontja rajta van a kaotikus attraktoron. Mindkét hármas ciklus hiperbolikus, és a cikluspontok egy iterálásra vetített sajátértékei Λ_+ és Λ_- , hiszen az L stabilitási mátrix minden pontban ugyanaz.



5.12. ábra. A hármas ciklusok pontjai. Két egymástól független hármas ciklus létezik, mindkettő hiperbolikus és a kaotikus attraktor része ($a = 1/3$).

Tetszőleges, m hosszúságú ciklus minden pontja rendelkezik a tulajdonsággal, hogy az m -szer iterált leképezés a pontot helyben hagyja. Az m -es ciklus elemei tehát az m -szer iterált leképezés fixpontjai, az $(x^*, v^*) = B^m(x^*, v^*)$ egyenlet gyökei. Az 5.13. ábrán megadjuk néhány magasabb rendű ciklus összes pontját. Látható, hogy hosszabb ciklusokhoz, nagyobb m -ekhez egyre több pont tartozik, s ellenőrizhető, hogy mindegyikük rajta van a kaotikus attraktoron! Ezért az egyre magasabb rendű ciklusok pontjai egyre jobban kirajzolják magát a kaotikus attraktort. Más szóval, a cikluspontok *sűrűn* helyezkednek el a kaotikus attraktoron.



5.13. ábra. Az $m = 8, 10$ és 11 hosszúságú ciklusok összes pontja. Az egyre magasabb rendű ciklusok összes pontja egyre jobban közelíti a teljes kaotikus attraktort ($a = 1/3$).

Érdekes összefüggést keresni a ciklusok hossza és a ciklusokat alkotó pontok száma között. Fixpontból kettő van. Kettes ciklusból egy, de ez két cikluspontot jelent. A két fixponttal együtt az összes kettes ciklus elemeinek száma 4. Hármass ciklusból kettőt találtunk, ez hat cikluspont, amelyekhez hozzáveendő a két fixpont, s így a hármass ciklusok összes elemeinek száma 8. Négyes ciklusból három független létezik tizenkét ciklusponttal. Ehhez hozzávéve a kettes ciklust és a fixpontokat, a négyes cikluspontok teljes száma 16-nak adódik. Hat ötös ciklus található, a fixpontokkal együtt ez 32 pont. Már ebből sejthető, hogy az m -es ciklushoz tartozó összes elem N_m száma 2^m . Erre a következtetésre jutunk akkor is, ha felismerjük, hogy a teljes fázistér fogat fejlődését mutató 5.7. ábra m iterálás utáni képében megjelenő minden egyes oszlop tartalmaz egy (és csak egy) m -es cikluspontot. A fixpontok mindig a legszélső oszlopokban vannak, az $n = 2$ kép két középső oszlopa foglalja magában a kettes ciklus P_1, P_2 pontjait, az $n = 3$ kép hat belső oszlopának mindegyikében pedig egy-egy hármass cikluspont található (l. 5.12. ábra). A B^m leképezés fixpontjainak száma közvetlen számolással is megkapható.

5.4. feladat. Határozzuk meg az m -szer iterált pékleképezést a v_n sebességváltozóra! (Ez megtehető anélkül is, hogy az x_n változót követnénk.) Ennek alapján számoljuk ki $B^m(x_n, v_n)$ összes fixpontjának v^* koordinátáit!

Az m hosszúságú ciklusok összes elemeinek száma tehát

$$N_m = 2^m. \quad (5.13)$$

Eszerint *tetszőlegesen* hosszú ciklusok is léteznek, ráadásul a hozzájuk tartozó összes pontok száma *exponenciálisan* növekszik. Az $N_m \sim e^{hm}$ összefüggéssel definiált h

kitevőt *topologikus entrópiának* nevezzük (részletesebben I. 5.4.1. szakasz). A pékleképezés topologikus entrópiája tehát:

$$h = \ln 2 = 0,693. \quad (5.14)$$

Minden egyes cikluspontra ugyanazok a megállapítások érvényesek, mint a részletesen tárgyalt fixpontra és kettes ciklusra, vagyis egy iterálásra vetített sajátértékeik Λ_- és Λ_+ . Ezért minden ciklus hiperbolikus, tehát végtelen pontosan kell eltalálni, mert különben gyorsan eltávolodunk tőle. Ellenőrizhető, hogy mindegyikük a kaotikus attraktor része. *A hiperbolikus ciklusok tehát a kaotikus attraktor vázát alkotják.*

Itt jutunk el először annak a korábbi állításnak az igazolásához, miszerint a káosz az instabil állapot (pl. a hegyére állított ceruza állapota) végtelenszeres megsokszorozódása. A kaotikus mozgás ezért tekinthető úgy, mint *az instabil ciklusok közötti bolyongás*. Az iterált pont ugyanis ideiglenesen közel kerülhet valamelyik ciklushoz (az 5.2. ábrán például az $n \approx 30$ tartományban egy 4-es ciklus, az $n \approx 250$ tartományban egy 3-as ciklus rajzolódik ki). Mivel azonban a ciklus instabil, a trajektória csak véges ideig maradhat a környékén, előbb-utóbb egy másik közelébe kerül. Ez a káoszra jellemző szabálytalan mozgás eredete.

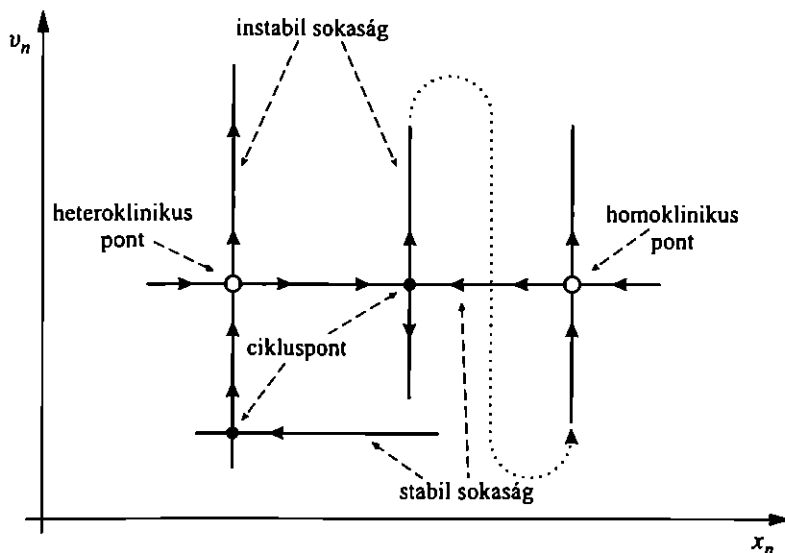
Mindegyik ciklusból egy-egy végtelen hosszú instabil sokaság indul ki, melyek szintén az attraktor részei. Összegezve: a kaotikus attraktoron végtelen sok cikluspontnak végtelen hosszú instabil sokasága halmozódik fel. A kaotikus attraktor tehát úgy is tekinthető, mint *az összes ciklus instabil sokaságainak együttese*.

5.1.7. Stabil sokaságok, homo- és heteroklinikus pontok

Minden egyes cikluspontra – mivel hiperbolikusak – befutnak stabil sokaságok is. Ezek mentén a ciklusok megközelíthetők, és miután sűrűn vannak az attraktoron, így maga a kaotikus attraktor is megközelíthető. A pékleképezésen a cikluspontok stabil sokaságai az x_n tengellyel párhuzamos szakaszok, amelyek az egységnégyzetet végtelen sűrűn behálózzák, nem fraktálszerkezetűek. A stabil sokaságok együttese alkotja a kaotikus attraktor vonzási tartományát.

Minden stabil és instabil sokaságnak a metszéspontja is egy-egy érdekes tulajdonságú pont. Megkülönböztetésül két csoportba szokás osztani őket. *Homoklinikus pontoknak* nevezzük azokat, amelyek egyazon cikluspont stabil és instabil sokaságának a metszéspontjai. *A heteroklinikus pontok* pedig különböző cikluspontok stabil és instabil sokaságainak a metszéspontjai (5.14. ábra).

A homoklinikus pontok különleges állapotnak felelnek meg. Egyszerre vannak ugyanis az adott cikluspont instabil és a stabil sokaságán. Ezért a ciklusponttól távolodniuk kell, de ugyanakkor közeledniük is ahhoz. Ez csak úgy lehetséges,



5.14. ábra. A homoklinikus és heteroklinikus pontok. A vázlaton fekete pontokkal jelöltük a cikluspontokat és üres körrel egy-egy homo-, ill. heteroklinikus pontot. Pontozott vonal jelzi a cikluspont instabil sokaságának folytatását.

ha a homoklinikus pontok a cikluspontot sohasem érik el, legfeljebb megközelítik azt. A stabil és instabil sokaságok invariáns, tehát önmagukra képződő görbék, róluk sohasem kerülhet le egyetlen pont sem. Ezért metszéspontjaik képei is metszéspontok. A homoklinikus pontok tehát *homoklinikus pontokba képződnek*. Egyetlen cikluspont sokaságain rendszerint *végtelen sok* homoklinikus pont képződik. Hasonlóan bonyolult feltételnek tesznek eleget a heteroklinikus pontok, hiszen – mint láttuk – bármely cikluspont instabil sokasága jó közelítéssel megegyezik a másikkal. Egy heteroklinikus pont is az iterálások során csak másik heteroklinikus pontra képződhet. A homo- vagy heteroklinikus pontoknak ezért aperiodikus mozgáshoz kell tartozniuk.

Mivel az instabil sokaságok részei az attraktornak, a sokaság részhalmazát alkotó homo- és heteroklinikus pontok is *mind a kaotikus attraktoron helyezkednek el*, méghozzá egymáshoz nagyon közel. Ha kiválasztunk taláalomra egy attraktorpontot, akkor tetszőlegesen kis környezetében található lesz mindhárom típusú pont. Ezért a kaotikus attraktor úgy is tekinthető, mint az *összes rajta levő instabil cikluspont, valamint a homo- és heteroklinikus pontok együttese*. A kaotikus mozgás mint cikluspontok közötti bolyongás tehát a homo- és heteroklinikus pontok jelenléte révén valósul meg.

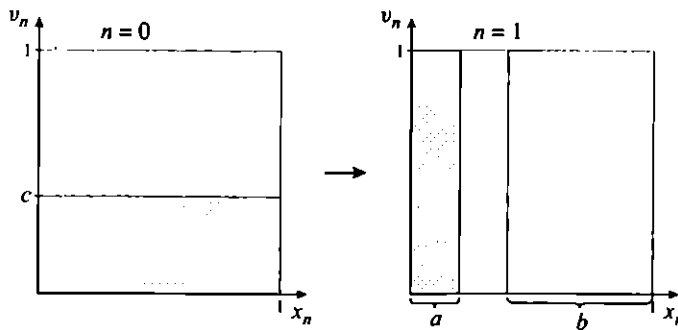
5.1.8. Az aszimmetrikus pékleképezés

A pékleképezés szimmetriájának következménye, hogy a két fixpont és bármely periodikus pálya stabilitási tulajdonságai azonosak. Könnyen megadható azonban a pékleképezés egy aszimmetrikus kiterjesztése, melyben mind a megnyúlási, mind az összehúzódsági paraméterek függnnek attól, hogy melyik térfélen vagyunk. Ennek a leképezésnek az alakja

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = \left(ax_n, \frac{v_n^n}{c} \right), \quad \text{ha } v_n < c, \quad (5.15)$$

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = \left(1 + b(x_n - 1), 1 + \frac{v_n - 1}{1 - c} \right), \quad \text{ha } v_n > c. \quad (5.16)$$

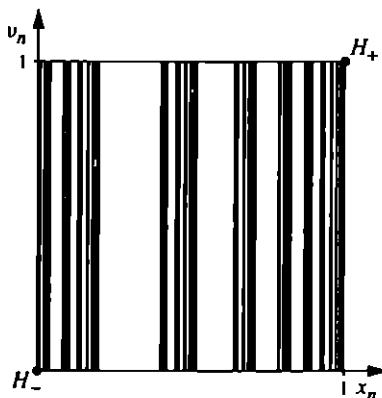
Itt $a, b, c < 1$ pozitív paraméterek, és $a + b < 1$. A leképezés úgy történik, hogy a $v_n < c$ tartományt az x tengely mentén a arányban összenyomjuk, miközben $1/c$ -szeresre nyújtjuk a v_n tengely irányában (5.15. ábra). A $v_n > c$ tartományban az összenyomás és megnyújtás arányai b , illetve $1/(1 - c)$. A $b = a, c = 1/2$ választással visszakapjuk az eddig vizsgált szimmetrikus pékleképezést.



5.15. ábra. Az aszimmetrikus pékleképezés hatása az egységnyezetre ($a = 0,2$, $b = 0,6$, $c = 0,4$).

A pékleképezés kaotikus attraktorának aszimmetriája annál szembetűnőbb, minél jobban eltér az a/b arány 1-től (5.16. ábra). Ezzel a stabil és instabil sokaságok irányai nem változnak, ezért ezekre vonatkozó ábrákat nem mutatunk be.

Hangsúlyozzuk azonban, hogy az aszimmetria még az $a = b$ speciális esetben is fennáll, mindaddig, amíg $c \neq 1/2$. Ha ugyanis a c és $(1 - c)$ érték nem azonos, akkor a kaotikus attraktor bal és jobb oldalára nem ugyanannyi részecske kerül. Ilyenkor tehát az aszimmetria nem az attraktor geometriai szerkezetében, hanem a vele kapcsolatos valószínűség-eloszlásban (l. 5.4.4. szakasz) mutatkozik meg.



5.16. ábra. Az aszimmetrikus pékleképezés kaotikus attraktora ($a = 0,2$, $b = 0,6$, $c = 0,4$).

5.5. feladat. Határozzuk meg numerikus szimulálással az aszimmetrikus pékleképezés kaotikus attraktorát az $a = b = 1/3$, $c = 2/3$ paraméterek mellett!

5.6. feladat. Adjuk meg az $a \neq b$ paraméterű aszimmetrikus pékleképezés kaotikus attraktorának fraktáldimenzióját meghatározó egyenletet!

5.7. feladat. Hogyan kell összefüggnie az aszimmetrikus pékleképezés c paraméterének a másik kettővel ahhoz, hogy a leképezés Jacobi-determinánsa mindenütt ugyanaz a konstans legyen?

5.8. feladat. Mi a feltétele annak, hogy az aszimmetrikus pékleképezés felső téré felére jellemző Jacobi-determináns az alsóra jellemző Jacobi-determináns reciproka legyen? Disszipatív az ilyen leképezés?

5.2. A lökdösött oszcillátor

5.2.1. Általános tulajdonságok

A 4.4. szakaszban levezettük a periodikusan lökdösött harmonikus oszcillátor strobszkopikus leképezését (l. (4.46)) az

$$x_{n+1} = E v_n, \quad v_{n+1} = -E x_n + I(x_{n+1}) \quad (5.17)$$

dimenziótlan alakban. Itt $E \equiv e^{-(\alpha/2)T}$ a disszipáció erősségét mérő paraméter, a fázis tér a teljes (x_n, v_n) sík.

Célszerű ekvivalens alakba átírni az (5.17) leképezést. Erre azért van szükség, mert ha a súrlódás növelésével E csökken, akkor a mozgás képe az (x_n, v_n) fázis-síkon az x_n koordináta mentén összenyomódik, ha pedig E nő, akkor széthúzódik. Az

$$E v_n \rightarrow v_n, \quad EI(x_n) \equiv f(x_n) \quad (5.18)$$

új változó, ill. jelölés bevezetése után már nem szükséges minden E -hez átskálázni a fázis-tér koordinátáit, ha az f függvény értékei egységnyi nagyságrendűnek tekinthetők. Így (5.17)-ből

$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + f(v_n). \quad (5.19)$$

A továbbiakban a lökdösött oszcillátor leképezésének ezt az alakját használjuk, amit röviden a K függvénykapcsolattal adunk meg:

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = K(x_n, v_n) \equiv (v_n, -E^2 x_n + f(v_n)). \quad (5.20)$$

Koordinátákban:

$$x_{n+1} = K_1(v_n) \equiv v_n, \quad v_{n+1} = K_2(x_n, v_n) \equiv -E^2 x_n + f(v_n). \quad (5.21)$$

A leképezés Jacobi-determinánsa (l. 4.6. szakasz) $J = E^2$.

A megfordított, $(x_{n+1}, v_{n+1}) = K^{-1}(x_n, v_n)$ inverz leképezése (5.19) alapján

$$x_{n+1} = -\frac{1}{E^2} v_n + \frac{1}{E^2} f(x_n), \quad v_{n+1} = x_n \quad (5.22)$$

az (x_n, v_n) sík bármely pontjában. Könnyen ellenőrizhető, hogy $(x_n, v_n) = K^{-1} K(x_n, v_n)$.

A következő szakaszokban az alábbi amplitúdófüggvényekkel gerjesztett eseteket vizsgáljuk:

- fűrészfog-amplitúdófüggvény:

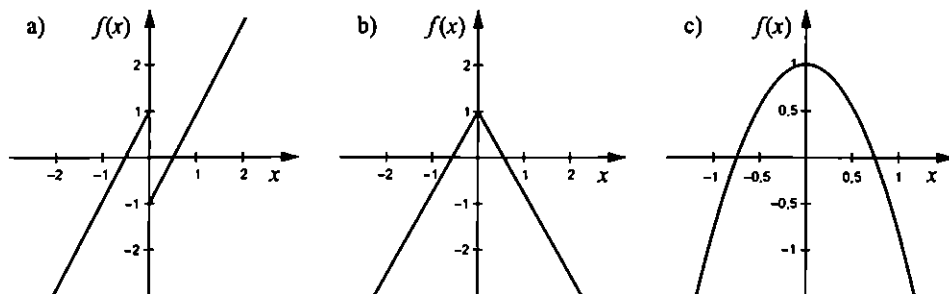
$$f(x) = ax - \operatorname{sgn}(x), \quad (5.23)$$

- háztető-amplitúdófüggvény:

$$f(x) = 1 - a|x|, \quad (5.24)$$

- parabola-amplitúdófüggvény:

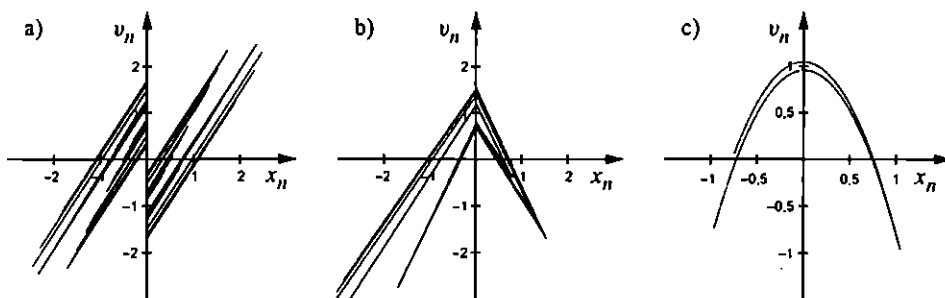
$$f(x) = 1 - ax^2, \quad (5.25)$$



5.17. ábra. A fűrészfog-, háztető- és parabola-amplitúdófüggvény (az a paraméter rendre 1,95, 1,77 és 1,8).

melyeket az 5.17. ábrán mutatunk be. Mivel mindhárom függvény nemlineáris (még ha az első kettő szakaszonként lineáris is), az $a > 0$ mennyiséget *nemlinearitási paraméternek* nevezzük. A lökdösött oszcillátor stroboszkopikus dinamikáját két dimenziótlan szám, az E disszipációs és az a nemlinearitási paraméter jellemzi.

A lökdösött oszcillátor mozgása széles paramétertartományban kaotikus. Érdekes megfigyelés, hogy a kaotikus attraktor alakja – bizonyos értelemben – az adott $f(x)$ függvény végtelenszeres megsokszorozódásaként áll elő, amint azt az 5.18. ábra is illusztrálja. (Ne felejtsük el, hogy az 5.17. és 5.18. ábrán nem ugyanazok a koordináták!)



5.18. ábra. A fűrészfog-, háztető- és parabola-amplitúdófüggvényekkel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktora. Az a paraméterek megegyeznek a 5.17. ábrán beállítottakkal, az E paraméter pedig rendre 0,8, 0,7 és 0,25.

Célunk ebben a fejezetben nem a kaoszparaméterek (topologikus entrópia, Ljapunov-exponens, fraktáldimenzió) meghatározása lesz, hanem a kaotikus attraktor és környezete geometriai szerkezetének felderítése.

5.2.2. Fixpontok és stabilitásuk

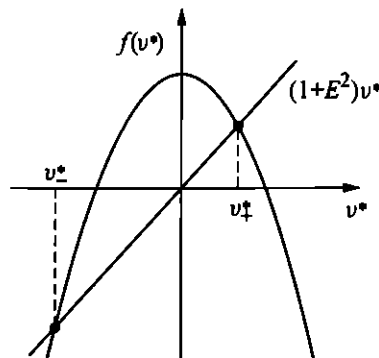
A pékleképezés példáján láttuk, hogy a hiperbolikus fixpontok instabil sokasága szoros kapcsolatban állhat a kaotikus attraktoral. Ezért ebben a szakaszban a lehetséges fixpontokat határozzuk meg, és azt vizsgáljuk, mikor lehetnek instabilak (egyelőre általános $f(x)$ amplitúdófüggvény mellett). A fixpontok (x^*, v^*) koordinátáira fennáll a $K(x^*, v^*) = (x^*, v^*)$ egyenlet, amiből:

$$x^* = v^*, \quad v^* = -E^2 x^* + f^*. \quad (5.26)$$

Itt és a továbbiakban az $f^* \equiv f(v^*)$ és az $f'^* \equiv f'(v^*)$ jelöléseket használjuk (a vessző a deriváltfüggvényre utal). Az (5.26) alapján a fixpontok létezésének feltétele az, hogy az

$$(1 + E^2)v^* = f^* \quad (5.27)$$

egyenletnek legyen megoldása (5.19. ábra). Olyan f függvényeket vizsgálunk, amelyeknek két ága van (l. 5.17. ábra), s ezért általában két fixpontot kapunk. Ezeket a pékleképezéshez hasonlóan H_+ -nak és H_- -nak nevezzük.



5.19. ábra. A fixpontok megtalálásához az $f(v^*)$ függvény és az $(1 + E^2)v^*$ egyenes metszéspontjait kell meghatározni (sematikus rajz).

A fixpontok stabilitását (l. 4.5. szakasz) a rendszernek a fixponthoz közeli viselkedése dönti el. Az (5.19) leképezésnek az (x^*, v^*) fixpont környékén linearizált változatát az

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -E^2 & f'^* \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

stabilitási mátrix jellemzi. A sajátértékek:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{f'^* \pm \sqrt{f'^*{}^2 - 4E^2}}{2}. \quad (5.29)$$

A továbbiakban azt a konvenciót követjük, hogy Λ_+ a nagyobb abszolút értékű sajátértéket jelöli. Az (5.29)-ben tehát akkor tartozik a pozitív előjelű gyök Λ_+ -hoz, ha f'^* pozitív, egyébként a negatív előjelet kell venni.

A fixpontok stabilitásának megállapításakor felhasználjuk azt a tényt (l. (4.56)), hogy a sajátértékek szorzata egyenlő a Jacobi-determinánssal:

$$\Lambda_+ \Lambda_- = E^2 < 1. \quad (5.30)$$

Először tegyük fel, hogy a sajátértékek valósak, más szóval (5.29) diszkriminánsa pozitív: $|f'^*| > 2E$. Ha $|\Lambda_+| > 1$, akkor (5.30) szerint $|\Lambda_-| < 1$, és az említett fixpont *hiperbolikus*. Abban az esetben, ha f'^* pozitív – azaz ha a fixpont abba a tartományba esik, ahol a lökési amplitúdó növekvő függvény –, a hiperbolikusság feltétele (5.29)-ből átrendezés után: $f'^* > 1 + E^2$. Ha viszont f'^* negatív, akkor $\Lambda_+ = (f'^* - \sqrt{f'^*{}^2 - 4E^2})/2 < -1$, és (5.30) szerint Λ_- is negatív,⁴ és a fixpont akkor hiperbolikus, ha $f'^* < -(1 + E^2)$. Összegezve, a hiperbolikus fixpont akkor létezik, ha:

$$|f'^*| > 1 + E^2. \quad (5.31)$$

A lökési amplitúdónak a hely függvényében tehát elegendően gyorsan változónak kell lennie a fixpontban ahhoz, hogy az instabil legyen.

A hiperbolikus fixpont sajátvektorai a $\Lambda_{\pm} \mathbf{u}_{\pm} = L \mathbf{u}_{\pm}$ egyenlet megoldásából

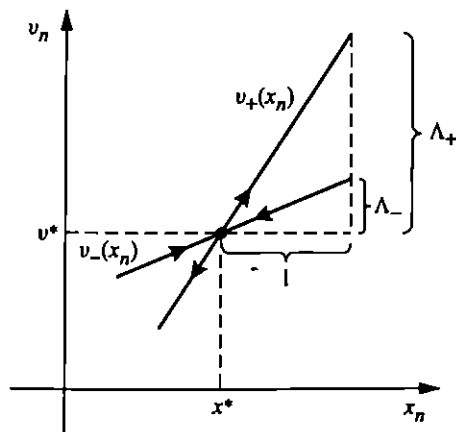
$$\mathbf{u}_{\pm} = (1, \Lambda_{\pm}). \quad (5.32)$$

A sajátvektorok határozzák meg a sokaságok lokális alakját. Ezek szerint a Λ_+ sajátérték az instabil sokaság fixponton átmenő szakaszának iránytangensét adja meg, Λ_- pedig a stabilét. Az instabil és stabil sokaságok fixpontok körüli $v_{\pm}(x)$ alakjának egyenlete tehát a

$$v_n \equiv v_{\pm}(x_n) = \Lambda_{\pm}(x_n - x^*) + x^* \quad (5.33)$$

egyenes. Itt felhasználtuk, hogy $x^* \equiv v^*$. A felső előjel az instabil, az alsó a stabil sokasághoz tartozik (l. 5.20. ábra).

⁴A negatív sajátértékek következménye az, hogy a fixpont körül mozgó pont minden egyes iterálás hatására a fixpont áttellenes oldalára ugrik.



5.20. ábra. A lökdösött oszcillátor hiperbolikus fixpontja körüli stabil és instabil sokaságok lokális alakja.

5.9. feladat. Mi a feltétele annak, hogy a lökdösött oszcillátor fixpontja csomópont, ill. spirális fixpont legyen (tetszőleges f függvény mellett)?

5.10. feladat. Vizsgáljuk meg az $f(x) = 1 - ax$ ($a > 0$) lineáris amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor fixpontjának stabilitását, és írjuk fel a valós sajátértékekhez tartozó stabil és instabil sokaság egyenletét!

5.11. feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a lökdösött oszcillátor hogyan viselkedik $f \equiv 1$ konstans amplitúdófüggvény esetén!

5.12. feladat. Tetszőleges $f(x)$ függvény esetére adjuk meg a lökdösött oszcillátor kettes ciklusainak koordinátáit meghatározó egyenleteket!

5.2.3. A fűrészfogattraktor

Az (5.23) fűrészfog-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezése

$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + a v_n - \text{sgn}(v_n). \quad (5.34)$$

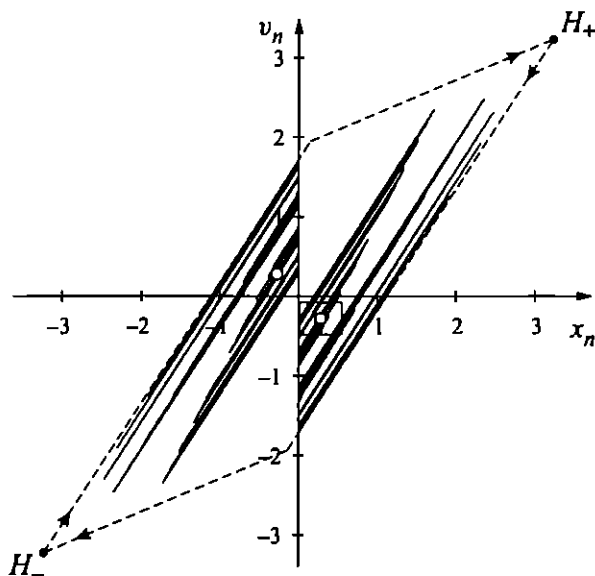
A fixpontok koordinátái

$$x_{\pm}^* = v_{\pm}^* = \frac{\pm 1}{a - (1 + E^2)}. \quad (5.35)$$

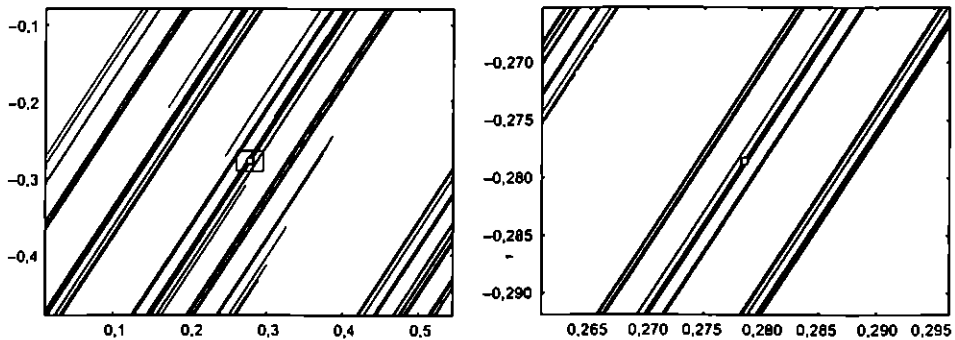
A $H_+ = (x_+^*, v_+^*)$ fixponthoz a felső, a $H_- = (x_-^*, v_-^*)$ fixponthoz pedig az alsó előjel tartozik.

Az 5.19. ábráról látszik, hogy az $(1 + E^2)v^*$ egyenes csak akkor metszheti az $av^* - 1$, $v^* > 0$ és az $av^* + 1$, $v^* < 0$ félegyeneseket, ha meredeksége kisebb a -nál. Következésképpen fixpont a fázistérben csak akkor létezik, ha $a > 1 + E^2$. Ez megegyezik a hiperbolikus fixpont létezésének (5.31) feltételével! A fűrészfog-amplitúdóval lökdösött oszcillátor fixpontjai tehát mindig instabilak. Az (5.28) stabilitási mátrix esetünkben független a helytől, és ebből következik, hogy minden magasabb rendű ciklus (ha létezik) szintén hiperbolikus.

A rendszerben fixpontattraktor és vonzó ciklus tehát nem lehet jelen. A numerikus szimulálással kapott kaotikus attraktort az 5.21. ábra mutatja. Erről leolvasható, hogy a H_{\pm} fixpontok most az attraktoron *kívül* helyezkednek el. Ellenőrizhető azonban, hogy végtelen sok magasabb rendű ciklus létezik, s ezek mind részei a kaotikus attraktornak. Az 5.22. képek a fraktálszerkezetet érzékeltetik az attraktorról készített felvételével.



5.21. ábra. A fűrészfogattraktor ($a = 1,95$, $E = 0,8$). Az attraktort egyetlen trajektória numerikus szimulálásával határoztuk meg (a kezdeti néhány lépést elhagyva). A trajektóriát addig követjük, amíg a kapott kép az adott felbontásban már tovább nem változik. A két fehér ponttal jelölt kettes ciklus (P_1 , P_2) rajta van az attraktoron. A szaggatott vonalak a H_{\pm} fixpontokból kiinduló stabil és instabil sokaság egy-egy ágát jelzik, melyek körbeveszik a kaotikus attraktort.



5.22. ábra. Az 5.21. ábra attraktorának P_1 pontja körüli téglalappal jelölt területről készített tizenötszörös nagyítás. Azon a P_1 köré rajzolt kis téglalapról egy újabb tizenötszörös nagyítást is készítettünk.

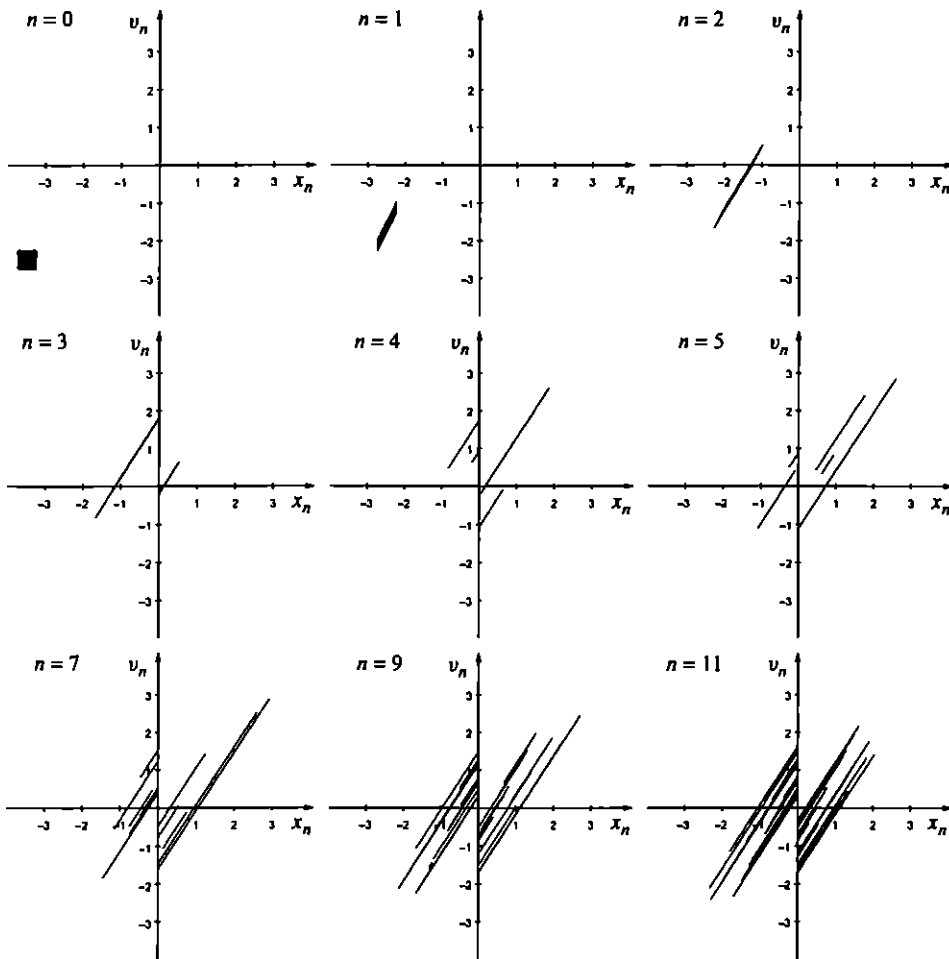
Az attraktor vonzási tulajdonságát itt is szemléltethetjük a pékleképezés 5.5. ábráján bemutatott módon, azaz egy kezdeti fázistérfogat-elemnek az attraktorhoz tartásával (l. 5.23. ábra). Természetesen ez máshonnan indított fázistérfogattal is ugyanígy történne.⁵

Vegyük észre, hogy a fűrészfogattraktor nagyon hasonlít a pékleképezés attraktorához (l. 5.6. ábra), annak egyfajta „kettévágott” és torzított változata. A fixpontokból kiinduló stabil és instabil sokaságok alkotta paralelogramma körbeveszi a kaotikus attraktort. Ez a paralelogramma a pékleképezés egységnyezetének felel meg, de „bővebb” annál, mert sarkai nem tartoznak az attraktorhoz.

5.13. feladat. Határozzuk meg numerikusan az általánosított pékleképezés kaotikus attraktorát, amelyben az (5.2) alakban szereplő 2-es faktor helyett a megnyújtási arány csak 1,8!

Az 5.21. ábra kaotikus attraktora a pékleképezés attraktoránál sokkal rendezetlenebb vonalseregnek tűnik. Ennek ellenére ez az alakzat is *egzaktul* megszerkeszthető. Erre az ad lehetőséget, hogy az (5.34) leképezés egy-egy félsíkon lineáris (alakja az x_n tengelyen áthaladva változik ugrásszerűen). Ebből következik, hogy bármelyik az x_n tengelyen kívül eső cikluspont instabil sokaságának a ponton átfutó része a pont *kiterjedt* környezetében is egyenes vonal. A sokaságnak a ciklusponton áthaladó leghosszabb, de még egyenes szakaszát *alapágnak* nevezzük. Ennek

⁵Javasoljuk, hogy az Olvasó saját numerikus szimulációival is vizsgálja az attraktor tulajdonságait.



5.23. ábra. A fázistér fogat ráhúzódnása a fűrészfogattraktorra. A kezdeti fázistér fogat-elem a $(-3, 5, -2, 5)$ körül centrált $0,5$ kezdeti oldalhosszúságú négyzet. A paraméterek $a = 1,95$ és $E = 0,8$.

végpontjai a leképezési szabályból következnek. Ha az instabil sokaság alapága egzaktul ismert, akkor ennek egymás utáni képei is egzakt részei a sokaságnak, és az instabil irányban a Λ_+ faktorról történő megnyúlás miatt egyre hosszabban rajzolják ki a teljes sokaságot. Mivel a legalacsonyabb rendű attraktoron levő ciklus a kettes ciklus, ennek instabil sokaságát érdemes először megszerkeszteni.

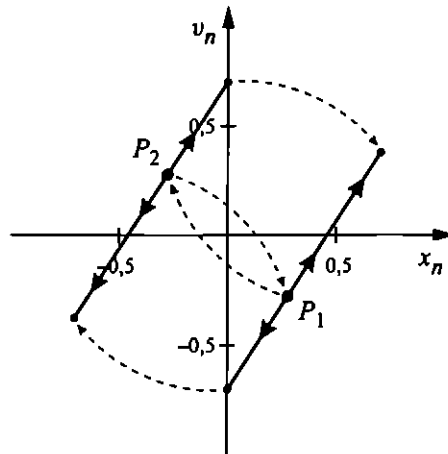
5.14. feladat. Számítsuk ki a fűrészfog-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor $P_i(x_i^*, v_i^*)$ ($i = 1, 2$) kettes ciklusának koordinátáit! Mutassuk meg, hogy $x_i^* = -v_i^*$!

A kettes ciklus $P_i = (x_i^*, v_i^*)$ ($i = 1, 2$) pontjából kiinduló instabil sokaság $v_{i+}(x)$ egyenesének egyenlete kifejezhető az $u_+ = (1, \Lambda_+)$ sajátvektor irányával és a P_i cikluspont koordinátáival. Az instabil sokaság P_i ciklusponton átmenő alapágának egyenlete (figyelembe véve, hogy $x_i^* = -v_i^*$):

$$v_{i+}(x) = \Lambda_+(x - x_i^*) - x_i^*, \quad (5.36)$$

ahol Λ_+ -t az (5.29) kifejezés adja az $f'^* = a$ helyettesítéssel.

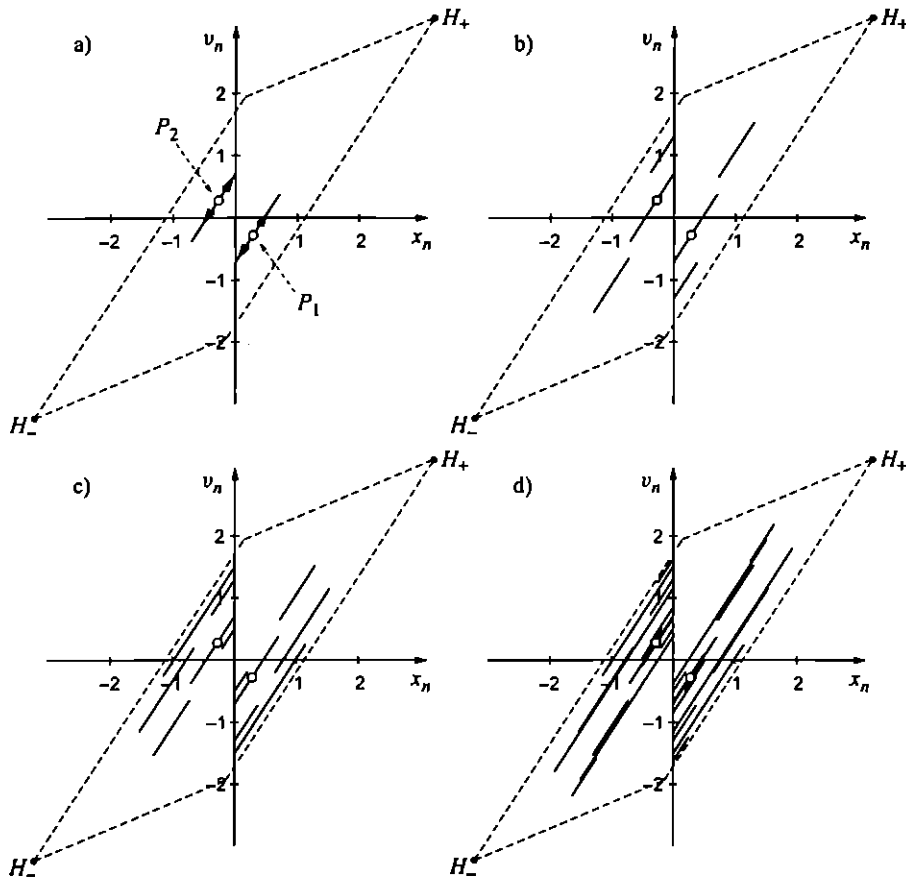
Az 5.24. ábrán berajzoltuk a P_1 és a P_2 cikluspontok instabil sokaságának az alapágait, amelyek az (5.36) egyenletnek tesznek eleget. Mindkét alapág egyik végpontja a v_n tengelyre esik. Az x_n tengelyt alulról közelítő $v_n = -0$ pontok ugyanis az (5.34) szabály szerint az $x_{n+1} = 0$, $v_{n+1} = 1 - E^2 x_n$ helyre, a felülről közelítő $v_n = +0$ pontok pedig az $x_{n+1} = 0$, $v_{n+1} = -1 - E^2 x_n$ helyre képződnek. Nem túl nagy x_n értékek mellett ezek a felső, ill. az alsó v_n tengelyre esnek. A kettes ciklus két pontja minden iteráláskor a másik helyére ugrik, s ezeket követi az alapágak x_n és v_n tengely közé eső szakasza is. Ennek megfelelően, az alapág v_n tengelyre eső végpontja képének kell a másik alapág v_n tengelytől távoli végpontjának lennie.



5.24. ábra. A P_1 és a P_2 cikluspont instabil sokaságának alapágai. A szaggatott vonalak és a nyilak az alapágak v_n tengelyre eső végpontjainak és a cikluspontoknak a mozgását mutatják egy iterálás hatására ($a = 1,95$, $E = 0,8$).

5.15. feladat. Adjuk meg a kettes ciklus instabil sokasága alapágainak végpontjait. Mutassuk meg, hogy a v_n tengelyre eső végpont képe valóban rajta van a másik alapág egyenesén!

Az alapágaknak a cikluspontokat nem tartalmazó síknegyedbe eső szakaszai az alapágakon kívülre képződnek (l. 5.25b. ábra), hiszen az instabil irányban minden szakasz $\Lambda_+ > 1$ -szeresére nyúlik. Ez teszi lehetővé, hogy ismételt iterálással a teljes sokaság egyre hosszabb darabjait kapjuk meg.

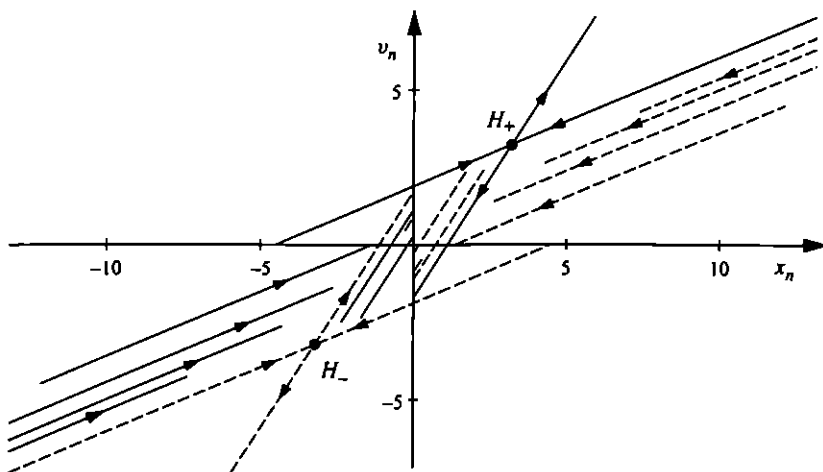


5.25. ábra. Az instabil sokaság alapágai és azok 2., 4., ill. 6. iterálás utáni képei. A kettes ciklus instabil sokaságaiból így egyre hosszabb szakasz rajzolódik meg, s ezzel magának a kaotikus attraktornak is egyre jobb közelítését kapjuk. A paraméterek: $a = 1,95$, $E = 0,8$.

Az alapágak néhány iterálása utáni eredményt mutatja az 5.25. ábra. Meglepő, de már ilyen kevés iterálás után is kielégítően kirajzolódik a kaotikus attraktor alakja. *A kaotikus attraktor jó közelítéssel megegyezik a kettes ciklus instabil sokaságával.* Természetesen a végtelen hosszú instabil sokaságok megszerkesztéséhez végtelen sokszor kellene iterálnunk, de közben egyszer sem hagynánk el az attraktort körülvevő paralelogrammát. Ez a tény önmagában érzékelteti az instabil sokaság és az attraktor bonyolult struktúráját, illetve a kaotikus attraktor fraktálszerkezetét.

Ahogy a pékleképezés esetében, úgy most is tetszőleges hosszúságú ciklusok is léteznek az attraktoron, mindegyikükből végtelen hosszú instabil sokaság indul ki, melyek ugyancsak jó közelítései a kaotikus attraktornak. Ezek az instabil sokaságok mind igen közel haladnak egymáshoz.

Hasonlóan szerkeszthetők meg a H_{\pm} fixpontok instabil sokaságai is (l. 5.26. ábra). A fixpontok nem részei a kaotikus attraktornak, az instabil sokaságoknak az attraktor irányába induló része viszont bevezet az attraktorba. A másik irányban a sokaság kifut a végtelenbe. Az oszcillátor ugyanis akármekkora energiát felvehet a lökdösésekből, a lökési amplitúdó (5.23) alakja pedig lehetővé teszi, hogy mind pozitív, mind negatív irányban tetszőlegesen nagy sebességek alakuljanak ki.



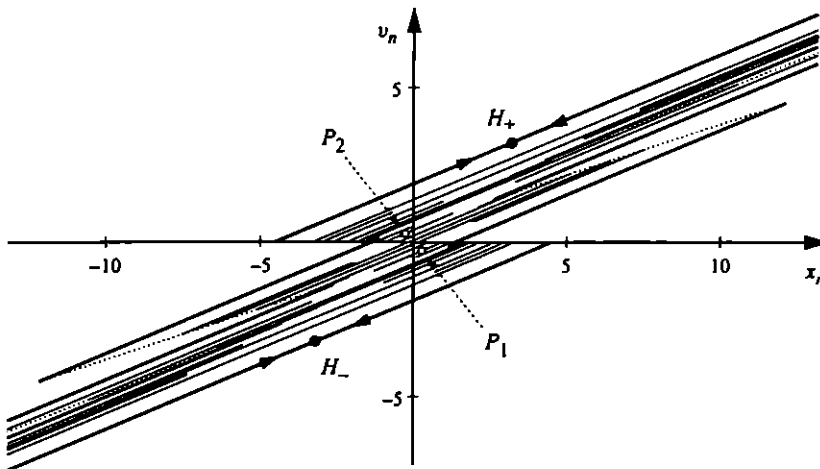
5.26. ábra. A fixpontok stabil és instabil sokaságai. A H_+ -hoz tartozó görbét folytonos, míg a H_- -hoz tartozókat szaggatott vonallal rajzoltuk, nyilakkal jelölve a vonzó és taszító irányokat. Az instabil sokaságok egyik ága a kaotikus attraktorba vezet, a másik a végtelen nagy sebességre szert tett állapotba (ami tekinthető egyszerű attraktornak is) ($a = 1,95$, $E = 0,8$).

5.16. feladat. Határozzuk meg a H_{\pm} fixpontok instabil sokasága alapágának végpontjait.

A továbbiakban a fixpontok (és cikluspontok) *stabil* sokaságainak elhelyezkedését vizsgáljuk a fázistérben. A stabil sokaságok az $u_- = (1, \Lambda_-)$ sajátvektorok által meghatározott, Λ_- meredekségű szakaszokból állnak. A cikluspont koordinátáiból és a Λ_- meredekségből (5.36)-hoz hasonlóan felírhatóak a cikluspontokon áthaladó stabil görbék első szakaszainak, az alapágaknak az egyenletei. A stabil sokaság további szakaszai ezután az (5.22) *inverz* leképezés segítségével számíthatók ki. Az inverz leképezést iterálva, a stabil sokaság instabilként viselkedik, $1/\Lambda_-$ -szoros nyújtás figyelhető meg rajta. Az alapágak képei az inverz leképezés iterálása hatására kirajzolják a stabil sokaságot. Ugyanúgy tudjuk tehát meghatározni az inverz leképezéssel a stabil sokaságot, mint ahogyan az eredetivel az instabilt.

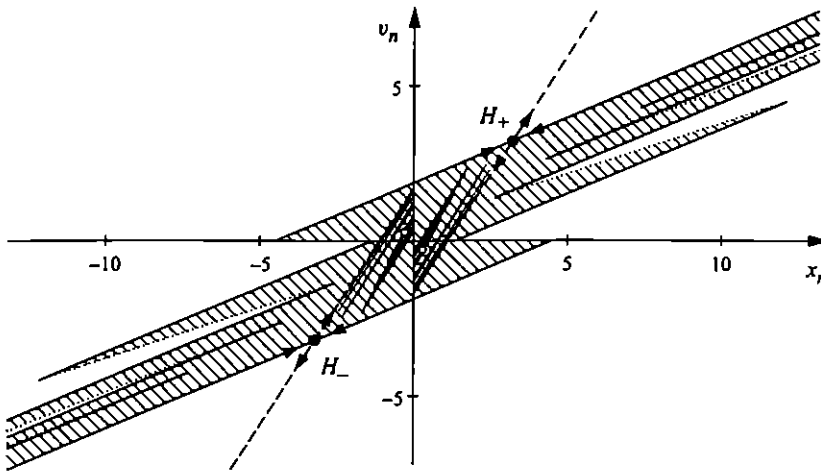
Az 5.26. ábrán így rajzoltuk meg a H_+ , H_- fixpontok stabil sokaságait. A stabil sokaságok alapágai félegyenesek, a többi részük azonban már véges szakaszokból áll.

Az 5.27. ábra a kettes ciklus stabil sokaságaira kapott eredményt mutatja. A fixpontokhoz tartozókkal ellentétben ezek besatíroznak egy összefüggő területet, méghozzá a fixpontokból kiinduló stabil sokaságok, illetve a szakadások végpontjait összekötő vonalak közé eső tartományt.



5.27. ábra. A kettes ciklus stabil sokaságai. Ezeket vékony vonallal rajzoltuk, míg az őket körülhatároló, a fixpontokból kiinduló stabil sokaságokat vastaggal, az ugyancsak határt jelentő, a szakadáspontokat összekötő egyeneseket pedig pontozott vonallal ($a = 1,95$, $E = 0,8$).

Ha bármelyik magasabb ciklus stabil sokaságát hasonlóan meghatároznánk, akkor az is ezen területen belül helyezkedne el és szintén kitöltené azt. A cikluspontok stabil sokaságainak összessége tehát – az instabilakkal ellentétben – *nem* fraktál-szerkezetű. Az általuk kitöltött terület nem más, mint a benne található kaotikus attraktor *vonzási tartománya* (l. 5.28. ábra). Ez megfelel az egyszerű mozgásoknál látott (l. 3.4. szakasz) tulajdonságnak, hiszen a H_+ , H_- pontok stabil sokaságai valóban a kaotikus attraktor vonzási tartományát határolják.



5.28. ábra. A fűrészfog-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor fázistérképe. A kaotikus attraktor vonzási tartománya satírozott. A vonzási tartomány az egyre nagyobb $|x|$ értékekre egyre inkább elvékonyodik ($a = 1,95$, $E = 0,8$).

Ahogy a pékleképezés esetében, úgy a stabil és instabil sokaságok metszéspontjai most is homoklinikus vagy heteroklinikus pontok. Ezeknek a cikluspontokkal vett együttes halmaza alkotja magát a kaotikus attraktort.

5.2.4. A háztetőattraktor

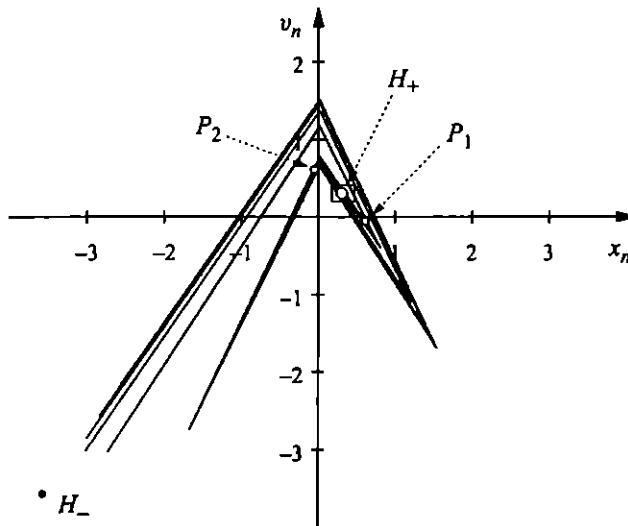
Az (5.24) háztető-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezése:

$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + 1 - a|v_n|. \quad (5.37)$$

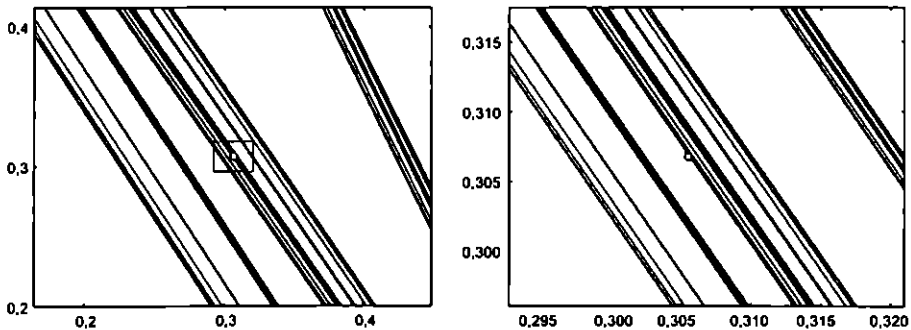
A fixpontok koordinátái

$$x_{\pm}^* = v_{\pm}^* = \frac{1}{1 + E^2 \pm a}. \quad (5.38)$$

Mindkét fixpont instabil, ha $a > 1 + E^2$. Egy széles paramétertartományban, ahol kaotikus attraktor létezik, azt tapasztaljuk (l. 5.29., 5.30. ábra), hogy a H_+ fixpont *rajta van* az attraktornak. A H_- fixpont a kaotikus attraktornak nem része, a fűrészfog-amplitúdóval ellentétben most a két fixpont nem tükörképe egymásnak.



5.29. ábra. A háztetőattraktor ($a = 1,77$, $E = 0,7$). Az attraktort egyetlen trajektória numerikus követésével határoztuk meg. Nagy fehér ponttal jelöltük a H_+ és fekete ponttal a H_- hiperbolikus fixpontot. Két kisebb fehér pont mutatja a kettes ciklus helyét.



5.30. ábra. Az 5.29. ábra attraktora H_+ fixpontja körüli téglalapról készített harmincszoros nagyítás, illetve az ezen pont köré rajzolt kis téglalap tízszeres nagyítása.

Az (5.24) háztető-amplitúdófüggvény deriváltja: $f' = -a = \text{konstans}$ vagy $f' = a = \text{konstans}$ attól függően, hogy x pozitív vagy negatív. A fixpontok sajátértékeit az (5.29) egyenletbe behelyettesített $f'^* = \pm a$ értékekkel kapjuk. Az attraktoron lévő H_+ -ra $\Lambda_{\pm} < 0$, az attraktoron kívül található H_- -ra pedig $\Lambda_{\pm} > 0$. A sajátvektorok természetesen $\mathbf{u}_{\pm} = (1, \Lambda_{\pm})$. A pékleképezéssel, illetve a fűrészfog-amplitúdóval ellentétben most *nem azonosak* a sajátértékek és a sajátvektorok!

A leképezés szakaszonként lineáris, ezért most is egzaktul előállíthatók a hiperbolikus pontok stabil és instabil sokaságai. Ehhez először ismét az alapágakat kell meghatározni, majd ezeket iterálni.

Mivel a H_+ pont rajta van a kaotikus attraktoron, ezért az attraktor a H_+ hiperbolikus pont instabil sokaságával jól közelíthető.⁶ A H_+ instabil alapágának egyik végpontja most is a v_n tengelyre esik. A fűrészfogattraktorhoz hasonlóan, ennek a végpontnak a képe adja az alapág másik végpontját.

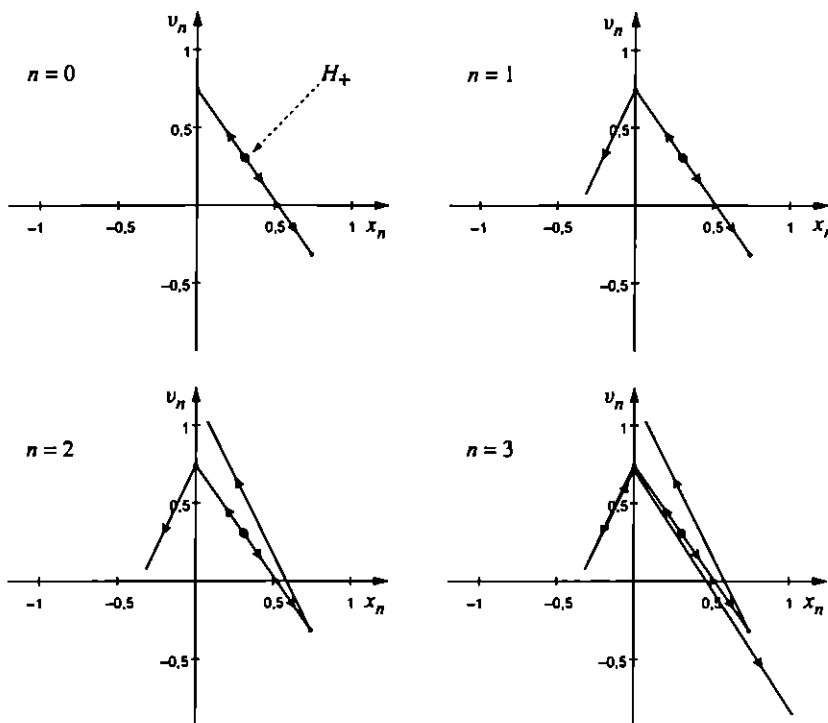
5.17. feladat. Adjuk meg a H_+ pont instabil sokasága alapágának végpontjait. Mutassuk meg, hogy a v_n tengelyre eső végpont képe valóban rajta van az alapág egyenesén!

Az 5.31. ábrán az alapág első három képét, majd az 5.32. ábrán további iteráltjait láthatjuk. Az eddig vizsgált esetekhez képest lényeges különbség az, hogy most az instabil sokaság nem szakad el, tehát teljes hosszában *folytonos* marad: a sokaság öröklí az amplitúdófüggvény folytonosságát. Végtelen sok iterálás után a végtelen hosszú, szakadás nélküli instabil sokaság megrajzolja a kaotikus attraktort, de már az 5.32. ábra kilenc iterálás utáni végállapota is jó közelítést jelent.

5.18. feladat. Az (5.37) leképezés alapján rajzoljuk be az 5.31. ábrába, hogy a végpontok és töréspontok hova képződnek egy lépés alatt. (A végpontok és töréspontok mozgásának követése alapján az 5.32. ábra is könnyebben áttekinthetővé válik.)

Annak ellenére, hogy az f' függvény értékei – és ezért az L stabilitási mátrix (l. (5.28)) sajátértékei is – félsíkonként azonosak, a fixpont és a magasabb rendű cikluspontok stabil és instabil irányai nem egyeznek meg egymással az adott félsíkon belül sem. Ez azzal magyarázható, hogy egy magasabb rendű cikluspont sajátértékei a teljes ciklus bejárásakor mért teljes megnyúlási és összehúzóadási arányt adják. Egy m -es ciklus esetében az m -szer iterált leképezés linearizált változatát jellemző mátrix

⁶Azt találjuk, hogy a végtelen sok magasabb rendű ciklus most is rajta van az attraktoron, így bármelyikük instabil sokasága jól közelíti azt.

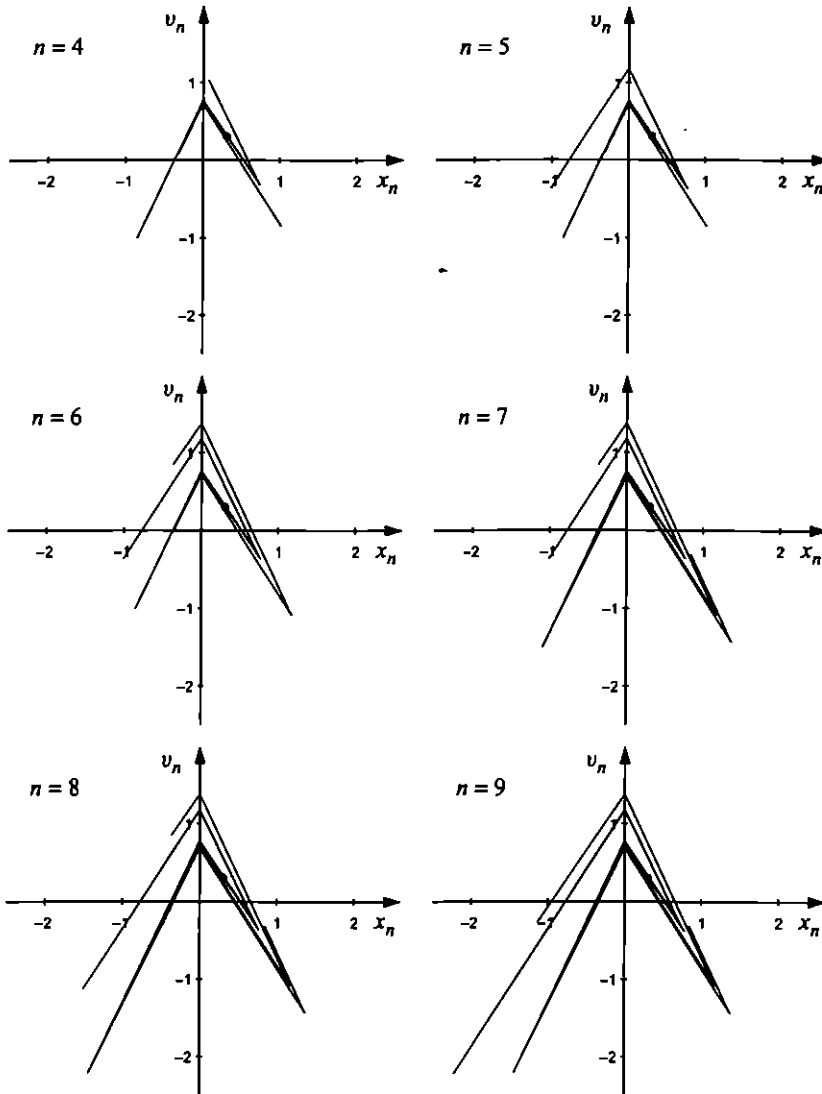


5.31. ábra. A H_+ fixpont instabil sokaságának alapága és annak három egymás utáni képe. Az instabil sokaság most nem szakad el, csak megtörik.

úgy számolható ki, hogy a cikluspontokban vett $L(x_i^*, v_i^*)$ ($i = 1, \dots, m$) mátrixokat összeszorozzuk. Ennek sajátértékei és sajátvektorai természetesen különböznek bármelyik $L(x_i^*, v_i^*)$ sajátértékeitől és sajátvektoraitól, és függenek attól is, hogy a ciklusnak hány pontja van az egyik, illetve a másik félsíkon.

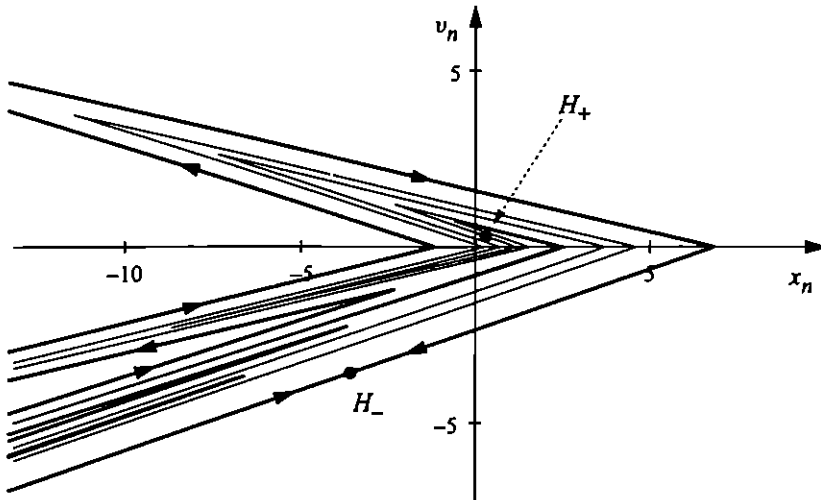
5.19. feladat. Határozzuk meg a háztetőattraktor kettes ciklusának pontjait, stabilitási sajátértékeit, valamint stabil és instabil irányait!

Vizsgáljuk most a stabil sokaságokat! A H_- fixpont nem része az attraktornak, így stabil sokaságának a kaotikus attraktor vonzási tartományának határát kell megadnia. Ezt az (5.22) inverz leképezéssel szerkeszthetjük meg (l. 5.33. ábra). Mivel H_+ viszont része a kaotikus attraktornak, ezért a belőle induló stabil sokaság

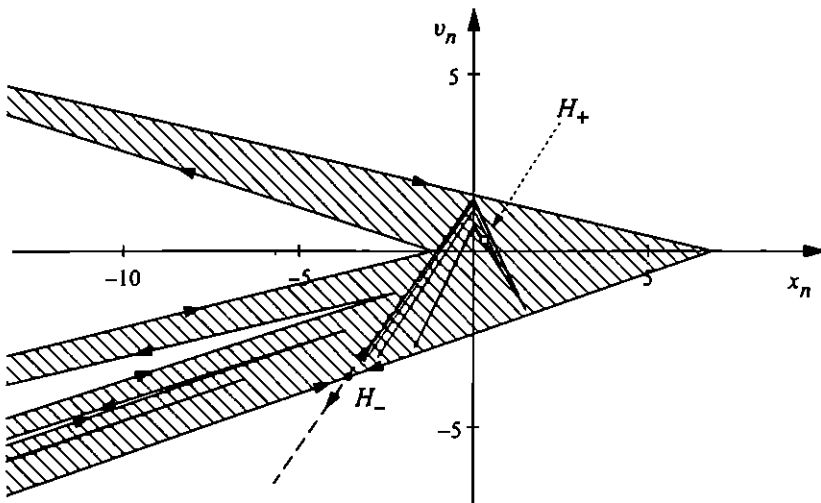


5.32. ábra. A H_+ instabil alapágának további képei, az 5.31. ábrán elkezdett sorozat folytatása. Szemmel láthatóan egyre jobban kirajzolódik az 5.29. ábrán bemutatott kaotikus attraktor. A paraméterek: $a = 1,77$, $E = 0,7$.

a vonzási tartományon belül maradva teljes egészében kitölti azt. Az 5.33. ábra analóg a fűrészfogaset 5.27. ábrájával.



5.33. ábra. A fixpontok stabil sokaságai. A vastag vonal jelöli H_- stabil sokaságát, a vonzási tartomány határát, a vékony vonal pedig H_+ stabil sokaságának egy részét ($a = 1,77$, $E = 0,7$).



5.34. ábra. A háztető-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor fázistérképe. A vonzási tartomány határát a H_- stabil sokasága adja. Berajzoltuk a fixpontokat, az atraktort és a H_- fixpont instabil sokaságát is ($a = 1,77$, $E = 0,7$).

A H_- fixpont instabil sokaságának egyik ága most is a kaotikus attraktorba vezet, míg a másik az egyre negatívabb (x_n, v_n) értékek irányába tart (l. 5.34. ábra), hasonlóan a fűrészfogattraktor 5.26. ábráján látottakhoz. Az oszcillátor nagy pozitív kitérés esetén, az (5.24) amplitúdófüggvény szerint, mindig negatív impulzust kap, ezért a pozitív irányú kitérés nem lehet tetszőlegesen nagy.

5.2.5. A parabolaattraktor

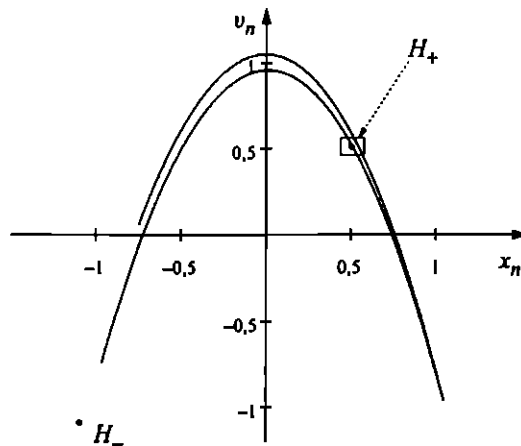
Az (5.25) parabola-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezése:

$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + 1 - av_n^2. \quad (5.39)$$

A fixpontok koordinátái

$$x_{\pm}^* = v_{\pm}^* = \frac{-(1 + E^2) \pm \sqrt{(1 + E^2)^2 + 4a}}{2a}. \quad (5.40)$$

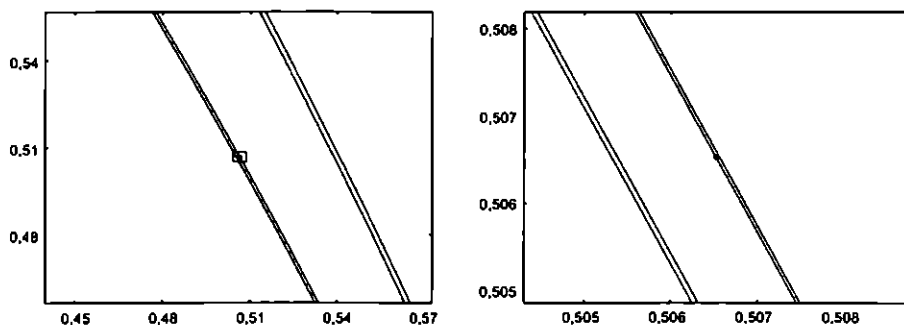
Az első síknegyedben a $H_+ = (x_+^*, v_+^*)$ fixpont, a harmadikban a $H_- = (x_-^*, v_-^*)$ fixpont található.



5.35. ábra. A parabolaattraktor ($a = 1,8$, $E = 0,25$). Az attraktort egyetlen trajektória numerikus követésével határoztuk meg. Fekete pontok jelölik a H_+ és a H_- fixpontokat.

A parabola-amplitúdófüggvény deriváltja: $f' = -2ax$. Ez – ellentétben korábbi példáinkkal – helyfüggő, következésképpen a linearizált leképezés L mátrixa

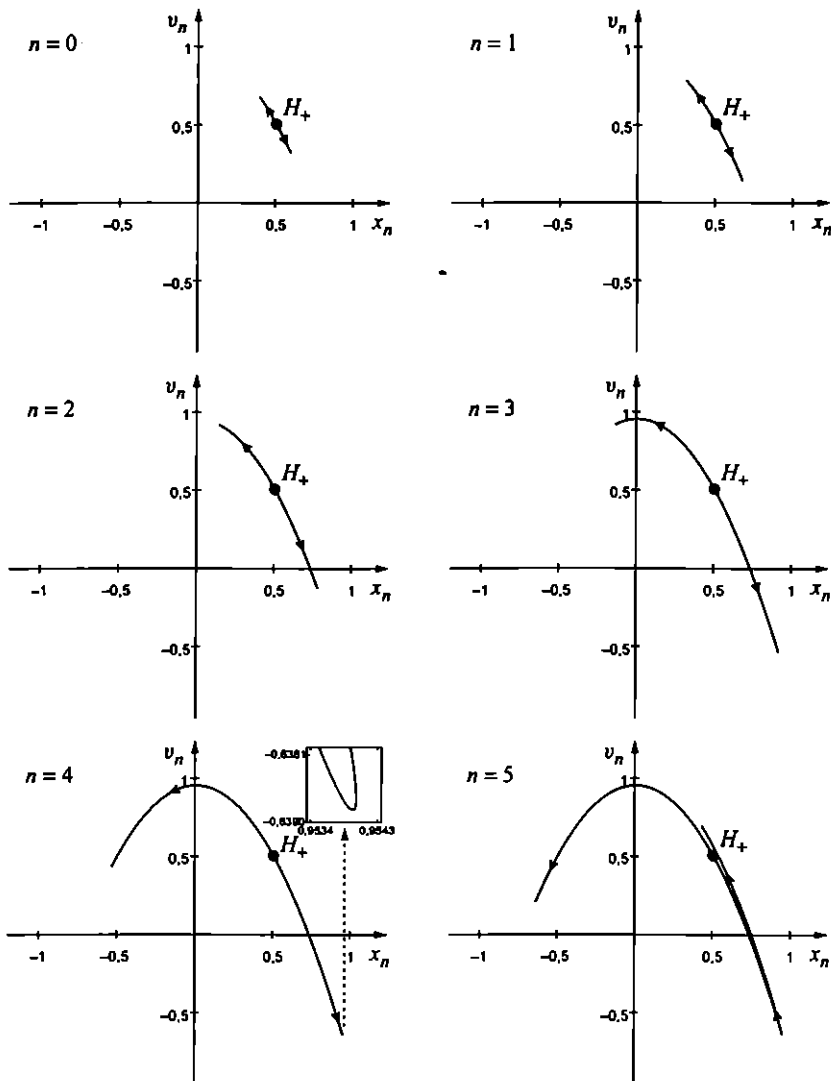
minden pontban *más és más*. A fixpontok sajátértékei (5.29) alapján behelyettesítéssel megkaphatók, és hasonlóan az előző esethez H_+ sajátértékei negatívak, H_- -éi pedig pozitívak. A H_- fixpont mindig hiperbolikus, a H_+ pedig akkor, ha $a > 3(1 + E^2)^2/4$. Egy széles paramétertartományban, ahol kaotikus attraktor létezik (l. 5.35., 5.36. ábra), a H_+ fixpont rajta van az attraktoron, H_- viszont nincs. A sajátvektorok: $\mathbf{u}_\pm = (1, \Lambda_\pm)$.



5.36. ábra. Az 5.35. ábrán látható téglalapról készített harmincszoros, majd ismételt harmincszoros nagyítás. Annak ellenére, hogy az eredeti ábrázolásban az attraktor mindössze két görbe vonalból álló alakzatnak tűnik, a nagyításokban jól megfigyelhető a fraktálokra jellemző önhasonlóság.

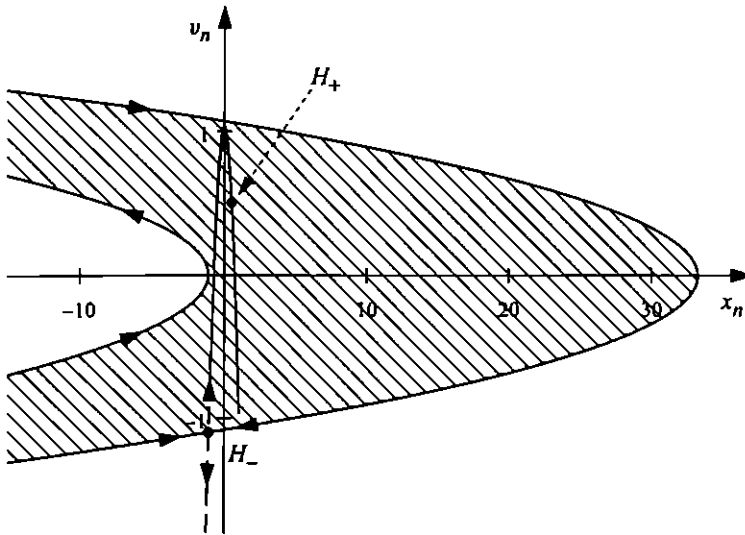
A H_+ fixpont instabil sokasága segítségével most is megkaphatjuk a kaotikus attraktort. Mivel azonban a leképezés minden pontban nemlineáris, a sokaság görbült, az L mátrix sajátvektorai csak *lokálisan* adják meg a stabil és instabil irányokat. Az (5.33) egyenlet most a sokaság érintőjét írja le. A sokaság numerikus előállítása során (l. 5.37. ábra) ezért a H_+ fixpont Λ_+ sajátértékhez tartozó $(1, \Lambda_+)$ sajátvektora irányában egy rövid szakaszt veszünk fel, s ezt iteráljuk. Ha egyre több iterálást végzünk, akkor az instabil sokaság egyre jobban kirajzolja az attraktort. A fraktálszerkezet úgy alakul ki, hogy a görbe végtelenszer visszahajlik, úgy, ahogyan az 5.37. ábra $n = 4$ képén az első ilyen visszahajlást megfigyelhetjük. Erről a visszahajlásról látható egy nagyítás is, mely mutatja, hogy az instabil sokaság nemcsak folytonos, hanem *töréspont sincs rajta*.

A H_- fixpont stabil sokaságának meghatározása hasonló módon történik az inverz leképezés felhasználásával. Az 5.38. ábrán besatíroztuk az attraktor vonzási tartományát, amelynek a határát a H_- fixpont stabil sokasága adja. A H_- instabil sokasága egyik ága az attraktorba vezet, a másik pedig a negatív végtelenbe fut. Ahogyan előző példánkban, az attraktoron lévő H_+ pont stabil sokasága most is



5.37. ábra. A H_+ fixponton átmenő rövid instabil sokaságdarab megnyúlása öt egymás utáni iterálás hatására. Az instabil sokaság folytonos és nincs egyenes szakasza. Az $n = 4$ kép törésnek tűnő pontjáról nagyítást készítettünk, mely megmutatja, hogy sehol sem törik meg az instabil sokaság. A paraméterek: $a = 1,8$, $E = 0,25$.

kitölti az egész vonzási tartományt. A határt alkotó stabil sokaság most is folytonos, de a jobbra induló ág az origótól nagyon nagy távolságban fordul vissza (az első



5.38. ábra. A parabola-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor fázistérképe. A kaotikus attraktor (ami lényegében H_+ instabil sokasága) vonzási tartománya határát a H_- fixpont stabil sokasága rajzolja ki ($a = 1,8$, $E = 0,25$).

„nyúlvány” kb. $-30\,000$ egységnyi távolságban), így azt nem ábrázoltuk. A vonzási tartomány globális alakja hasonló a háztetőattraktoréhoz.

Összefoglalásul elmondhatjuk, hogy a pékleképezéstől fokozatosan távolodtunk a fűrészfog-, háztető- és a parabolaattraktoron keresztül, s közeledtünk a gyakorlatban tipikus kaotikus rendszerek jellemzőihez (l. 5.20., 5.21. feladat). A káosz alapvető tulajdonságai mindegyik rendszerben megtalálhatóak: a szabálytalan, önmagát nem ismétlő mozgás, ami előre jelezhetetlen és egyben fraktálgeometriával kapcsolatos. Ezzel elvesztettük az analitikus megközelítés lehetőségét, melyet minden szempontból a számítógépes szimulációs mérés vált fel.

5.20. feladat. Számítógépes szimulálással adjuk meg az $f(x) = a(e^{-4x^2} - 1) + 1$ harang-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktorát az $a = 2$, $E = 0,7$ paraméterek mellett.

5.21. feladat. Számítógépes szimulálással adjuk meg az $f(x) = a \sin x$ szinuszos amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktorát! Alkalmazzunk periodikus határfeltételt, tehát x_n -t toljuk mindig $-\pi$ és π közé. A paraméterek legyenek $a = 5$, $E = 0,7$.

7. Hénon-típusú leképezések

Michel Hénon francia csillagász 1976-ban vezette be az azóta róla elnevezett leképezést, mely a sík (x_n, y_n) pontját az

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + by_n, \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\quad (5.41)$$

pontba viszi. Kimutatta, hogy ez a másodrendűen nemlineáris leképezések legáltalánosabb alakja, melyben az $a = 1,4$, $b = 0,3$ standard paraméterválasztással szép kaotikus attraktor létezik (5.39a. ábra).

Érdekes összehasonlítani ezt a leképezést a parabolikus amplitúdóval lökdösött oszcillátoréval. A

$$v = 1 - ax^2 + by \quad (5.42)$$

új változó bevezetésével (5.41)-ből az

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= v_n, \\v_{n+1} &= 1 - ax_{n+1}^2 + bx_n\end{aligned}\quad (5.43)$$

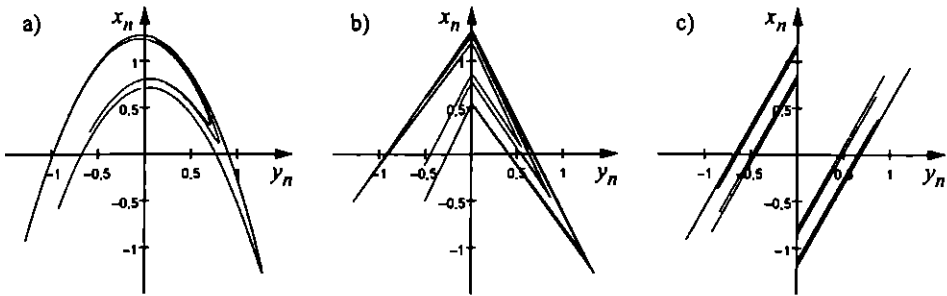
alakra jutunk.

Ez megegyezik az (5.39) leképezéssel, de csak akkor, ha $E^2 = -b$. Az eredeti Hénon-attraktor tehát *nem* felel meg a lökdösött oszcillátor dinamikájának, sőt semmilyen fizikai rendszerének, mert Jacobi-determinánsa negatív. A b paraméter bármely negatív értéke mellett viszont egyenértékű a parabolikus amplitúdóval lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezésével. Az előző szakaszban vizsgált eset a $b = -0,063$ választásnak felel meg.

A Hénon-leképezés szakaszonként lineáris változatát René Lozi francia matematikus adta meg

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - a|x_n| + by_n, \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\quad (5.44)$$

formában, ahol a b paraméter szokásos értékei pozitívak (5.39b. ábra).



5.39. ábra. Hénon-típusú kaotikus attraktorok. a) A Hénon-attraktor ((5.41)-ben $a = 1,4$, $b = 0,3$). b) A Lozi-attraktor ((5.44)-ben $a = 1,7$, $b = 0,5$). c) Hénon-típusú fűrészfogattraktor (az (5.23) alakú $f(x)$ függvényvel képzett (5.45) leképezés attraktora, $a = 1,6$, $b = 0,3$).

Általánosan, az

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + by_n, \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\quad (5.45)$$

Hénon-típusú leképezés a $b = -E^2 < 0$ választással egyenértékű az $f(x)$ ampli-

túdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor stroboszkopikus dinamikájával (5.39c. ábra). A pozitív b értékekhez tartozó matematikai attraktorok jelentősen különböznek az ellentett b értékhez tartozó fizikai attraktoroktól (nem is feltétlenül kaotikus mindkettő).

5.2.6. Az erős csillapítás határesetete, egydimenziós leképezések

A lökdösött oszcillátor erősen csillapított mozgása akkor alakul ki, ha $E = e^{-(\alpha/2)T} \ll 1$, ami nemcsak nagy súrlódási erő, hanem a ritka lökdösés miatt is bekövetkezhet. Az ennél is erősebb megszorítást jelentő $E \rightarrow 0$ határesetben véges I lökési amplitúdók mellett nem alakulhat ki érdekes, kaotikus mozgás, mert a test még a következő lökés előtt gyakorlatilag megáll. Ha azonban az impulzusátadás nagyságát abban az ütemben növeljük, ahogyan E csökken, akkor a mozgás sohasem áll le az ütközések között. Az (5.18) változócsere éppen annak felel meg, hogy – véges f értékek mellett – az impulzusátadás $I = f/E$. Ezért az (5.19) alakban még az $E \rightarrow 0$ határesetben is jelen lehet a káosz. A leképezés ebben a határesetben

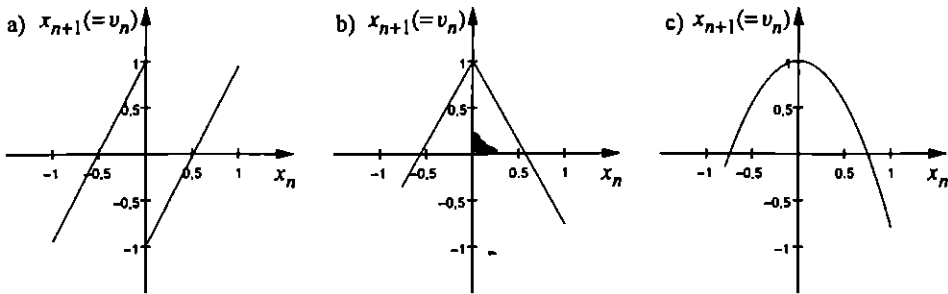
$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = f(x_{n+1}). \quad (5.46)$$

Ebből az $x_{n+1} \rightarrow x_n$ helyettesítéssel következik, hogy

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (5.47)$$

Ezt *egydimenziós leképezésnek* nevezzük, mert az egyik koordináta (pl. a hely) új értékét egyedül ugyanezen koordináta egy lépéssel korábbi értéke szabja meg. Ugyanakkor az (x_n, v_n) síkon (5.46) szerint az attraktor egy görbe szakasz, a $v = f(x)$ függvény egy darabja (l. 5.40. ábra). Az (5.47) egydimenziós leképezés az ezen a szakaszon való diszkrét idejű mozgást írja le.

Vegyük észre, hogy lokális szélsőértékkel rendelkező f függvények esetén (összes eddig vizsgált példánkban) a dinamika *megfordíthatósága megszűnik*. x_n többé nem egyértékű függvénye x_{n+1} -nek, az $x_n = f^{-1}(x_{n+1})$ egyenletnek két megoldása is létezhet. Bármely $E \neq 0$ disszipációs paraméterre a $(-E^2 x_n)$ tag jelenléte (5.19)-ben biztosítja az egyértelmű inverz létezését, amit az (5.22) alak ad meg. Az $E \ll 1$ és az $E \rightarrow 0$ esetek tehát nem azonosak. Az egydimenziós leképezések egy *nemfizikai határesetet* jelentenek, amikor a dinamika nem invertálható. Ezzel együtt a rendszer *fraktáltulajdonsága is elvész*, hiszen a kaotikus attraktor az (x_n, v_n) síkon egyetlen, $v_n = f(x_n)$ alakú görbe vonaldarabbá degradálódik



5.40. ábra. Kaotikus attraktorok végtelenül erős csillapítás ($E = 0$) esetén. a) Az amplitúdófüggvény (5.23) alakú, az (5.46) egydimenziós leképezés az $x_{n+1} = ax - \text{sign}(x_n)$ ún. Bernoulli-leképezés ($a = 1,95$). b) Az amplitúdófüggvény (5.24) alakú, az egydimenziós leképezés az $x_{n+1} = 1 - a|x_n|$ ún. sátor-leképezés ($a = 1,77$). c) Az amplitúdófüggvény (5.25) alakú, az egydimenziós leképezés az $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ logisztikus leképezés ($a = 1,8$).

(l. 5.40. ábra). Az egydimenziós leképezések, s velük a logisztikus leképezés tehát egy nagyon speciális osztályt alkotnak. Ennek ellenére hasznos matematikai segéd-eszközök, melyekkel bizonyos fogalmak (pl. a valószínűség-eloszlás időfejlődése (l. 5.4.4. szakasz), az univerzalitás (l. 5.3. szakasz)) jól megérthetők.

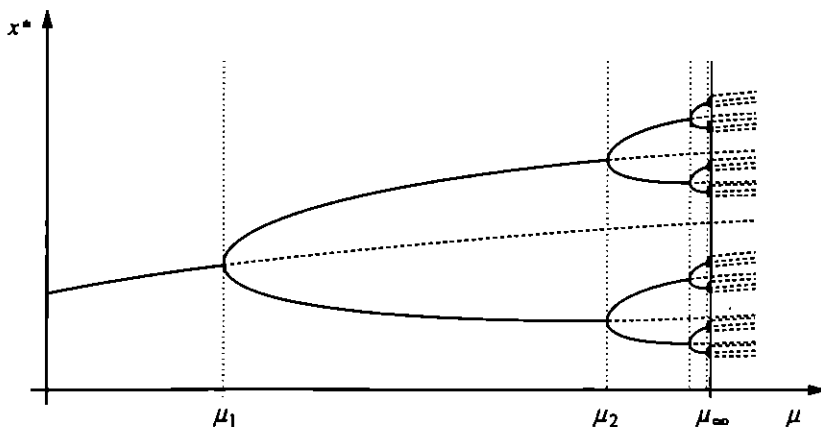
5.3. Paraméterfüggés, a perióduskettőző bifurkációsorozat

Az, hogy egy nemlineáris rendszerben találunk-e kaotikus attraktort, a rendszer paramétereitől függ. A lökdösött oszcillátor példájában az a nemlinearitási paraméter növelésével jutunk el a kaotikus tartományba, még hozzá bifurkációkon (l. 3.3.2. szakasz) keresztül. Mivel ezek a bifurkációk nemcsak a lökdösött oszcillátorra, hanem a tapasztalat szerint nagyon sok más rendszerre is jellemzőek, áttérünk általános jelölésekre.

Jelöljük a változtatható paramétert μ -vel, s tegyük föl, hogy μ kis értékeire a rendszer a leképezésen egyetlen fixpontattraktort rendelkezik (azaz a teljes fázistérben vonzó határciklussal). Az egyik legtipikusabb, káoszhoz vezető út az ún. *perióduskettőző* bifurkációsorozat.⁷ Ekkor a μ paraméter növelésekor azt találjuk,

⁷Ha több fixpontattraktor létezik, mindegyikük átmehet a másiktól független saját bifurkációsorozatán.

hogy egy μ_1 érték elérése után a fixpont instabillá válik, s helyette egy kettes ciklus lesz az attraktor. (Ez hasonló a 3.3.2. szakaszban látott vasvilla-bifurkációhoz, de most nem nyugalmi állapotok, hanem határciklusok stabilitásvesztését írja le a bifurkáció.) Az attraktor periódusa megkettőződött. Ez az attraktor azonban csak egy μ_2 értékig stabil, ott egy vonzó négyes ciklus születik. A μ_n értéknél megjelenik a 2^n periódusú ciklus, de ez csak a μ_{n+1} értékig marad vonzó, és így tovább (5.41. ábra). A perióduskettőző bifurkációk fontos vonása, hogy az egyre magasabb rendű



5.41. ábra. Perióduskettőző bifurkációsorozat sematikus rajza. A függőleges tengely az attraktor pontjainak egyik (itt x^*) koordinátáját mutatja. A szaggatott vonalak az egyszerű attraktorok helyén visszamaradó instabil határciklusokra utalnak. A pontozott függőleges vonalak bifurkációs pontokat jelölnek. A μ_∞ akkumulációs pontig végtelen számú bifurkáció történik, s végtelen sok instabil mozgásállapot keletkezik. Káosz a $\mu > \mu_\infty$ tartományban jelenik meg.

ciklusok megszületésük után egyre *rövidebb* μ -intervallumokban stabilak, s ezért a bifurkációsorozat véges mértékű paraméterváltozás után eljut az ún. *akkumulációs pontba*, ahol a formálisan 2^∞ hosszúságú ciklus jelenik meg. Az akkumulációs pont μ_∞ paramétere tehát véges érték. E paraméternél nagyobb μ értékekre a rendszer képes arra, hogy kaotikus viselkedést mutasson, hiszen addigra *végtelen sok instabil periodikus pálya jött létre*, melyek egy kaotikus attraktor vázát alkotják.

A μ_∞ akkumulációs pont közelében *minden* perióduskettőző bifurkációsorozat *mértani sorozatként* viselkedik: az n -edik bifurkációs pont μ_n paramétere úgy írható, mint

$$\mu_n = \mu_\infty - A \left(\frac{1}{\delta} \right)^n, \quad (5.48)$$

ahol minden sima (differenciálható) leképezéssel leírt rendszerben a δ állandó ugyan-

az a szám:

$$\delta = 4,669. \quad (5.49)$$

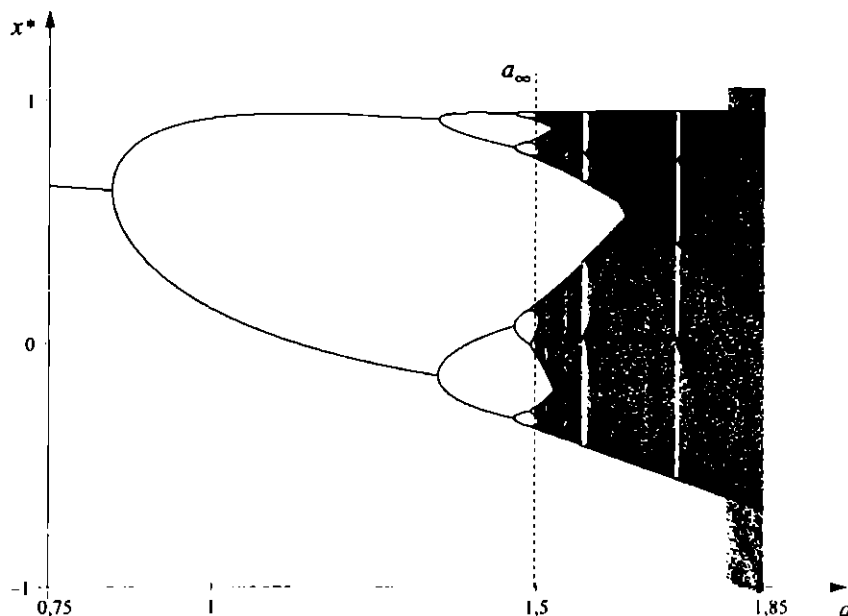
A bifurkációsorozatnak ez a kvóciense nem függ a rendszer részleteitől, *univerzális* tulajdonság (az A együttható azonban nem). Ráadásul hasonló szabály érvényes a bifurkációsorozatban megjelenő „villák” szélességére: ezek a mennyiségek az

$$\alpha = 2,503 \quad (5.50)$$

szám negatív hatványai szerint tartanak nullához. Mivel $\delta > \alpha$, a villák az akkumulációs pont felé közeledve egyre nyitottabbak lesznek. Az α és δ számokat univerzalitásuk bizonyítójáról Feigenbaum-exponenseknek nevezzük. Ezzel a kaotikus viselkedés egyik fontos új tulajdonságát ismertük meg: *a káosz kialakulása univerzális vonásokkal rendelkezhet.*

Az univerzalitási tulajdonság szemléletesen azzal magyarázható, hogy ha a bifurkációsorozat kialakul, akkor a 2^n hosszúságú határciklus-attraktor (n tetszőleges természetes szám) stabilitásához a 2^n -szer iterált leképezést kell vizsgálnunk. Ebben a leképezésben az eredeti, egynél kisebb Jacobi-determináns 2^n -edik hatványa határozza meg a terület-összehúzóási arányt. Az akkumulációs pont közelében $n \gg 1$, s ezért ott *minden* rendszer az attraktor stabilitása szempontjából úgy viselkedik, mintha nulla Jacobi-determinánsú (azaz végtelen erősen csillapított) lenne. Ezt a viselkedést ezért a rendszer eredeti leképezésének $J \rightarrow 0$ határesetéhez tartozó egydimenziós leképezés adja meg. Belátható, hogy az új attraktorok a sokszorosan iterált leképezés helyi maximumai körül jönnek létre. A bifurkációsorozat jellege ezért a leképezést megadó függvény maximuma körüli alakjától függ, ami rendszerint parabolával közelíthető. Ezért a parabola-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátorban (l. 5.42., 5.43. ábra) éppúgy a Feigenbaum-állandók szerint halad a bifurkációs sorozat, mint minden más sima leképezéssel leírható rendszerben. A töréssel vagy szakadással rendelkező esetekre ez nem vonatkozik, ezekben, mint pl. a háztető-amplitúdófüggvény esetén (5.44. ábra) a káosz ugrásszerűen jelenik meg egy fixpontattraktor instabillá válása után.

A perióduskettőzésnek egyfajta tükrözöttje figyelhető meg a $\mu > \mu_\infty$ kaotikus tartományban. Itt, elegendően távol az akkumulációs ponttól a kaotikus attraktor egyetlen összefüggő halmazként jelenik meg. Ilyenkor mindig tartalmaz egy instabil fixpontot (5.29. és 5.35. ábra). A μ paraméter csökkentésével azonban az attraktor két részre esik szét. Ezeken szigorúan felváltva jelennek meg a pontok a trajektória iterálása során. A mozgás mindkét részen továbbra is véletlenszerű: egy kettes ciklus körüli kaotikus bolyongásnak tekinthető. A kétrészes attraktor már nem tartalmazza az instabil fixpontot. A legrövidebb instabil pálya, amely az attraktorhoz

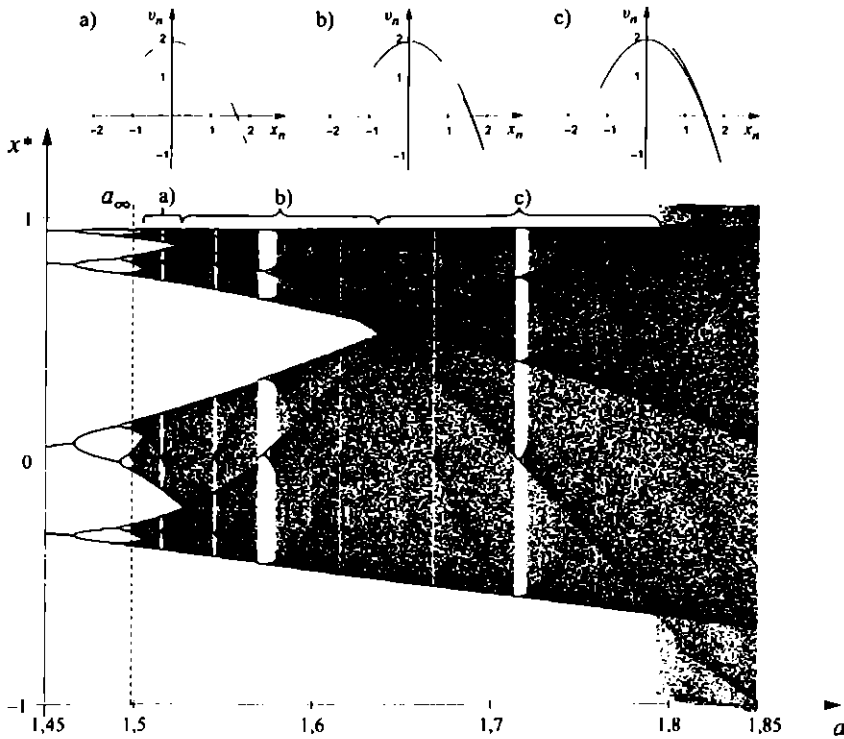


5.42. ábra. A parabola-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor ($E = 0,25$) bifurkációs diagramja a nemlinearitási paraméter függvényében: $\mu \equiv a$. Az akkumulációs pont $a_\infty \approx 1,49$. Az $a > a_\infty$ tartományban a kaotikus attraktorhoz tartozó paraméterek mellett (ahol x^* egy egész intervallumot befült) léteznek periodikus ablakok (pl. $1,570 < a < 1,579$), amelyekben az attraktor egy periodikus ciklus (l. 5.43. ábra). Az $a > 1,85$ értékekre a lökések már olyan erősek, hogy az oszcillátor mindig kifut a végtelenbe.

tartozik, a kettes ciklus. A paramétert tovább csökkentve, egyszer csak négyrészesé válik az attraktor, s ettől kezdve a kettes ciklus sem tartozik már hozzá.

Az akkumulációs pont fölött, a μ paraméter növelésével az attraktor topologikus entrópiája, pozitív Ljapunov-exponense és dimenziója növekvő tendenciát mutat, de átmenetileg csökkenhet is. A sima (differenciálható) leképezésekkel leírt rendszerekre jellemző, hogy a kaotikus attraktor időnként eltűnik (5.43. ábra). A μ paraméter ezen *periodikus ablakaiban* periodikus ciklusok az attraktorok (de sohasem 2^n a hosszúságuk ($n = 1, 2, \dots$), hiszen az ilyen ciklusok stabilitása már a perióduskettőző bifurkációsorozat alatt elveszett).

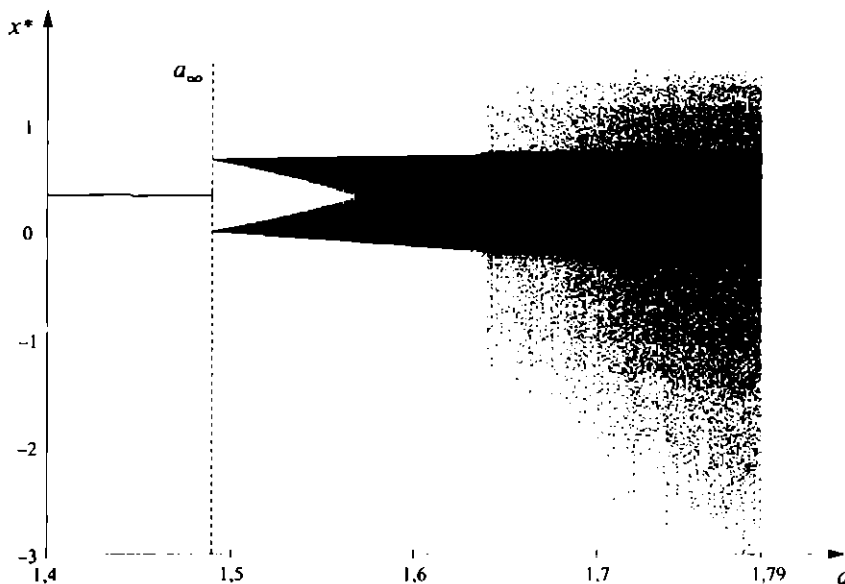
Felmerül a kérdés, milyen gyakoriak a kaotikus attraktorokhoz tartozó μ paraméterek, melyeket a továbbiakban μ^* -gal jelölünk. Ha bármilyen olyan véges μ^* -intervallumot tekintünk, melyben vannak kaotikus μ^* paraméterek, akkor a részletes



5.43. ábra. Az 5.42. ábra kaotikus tartománya. A kaotikus tartomány néhány pontjában megadjuk az attraktor alakját is az (x_n, v_n) síkon. Az $a > 1,79$ tartományban hirtelen kiszélesedik a bifurkációs diagram, amihez az 5.35. ábrán látható attraktor tartozik.

vizsgálat szerint a periodikus ablakok kivágnak ugyan néhány viszonylag széles intervallumot a teljes tartományból, de az egyre magasabb rendű ciklusokhoz tartozó ablakok mérete olyan gyorsan csökken, hogy a μ^* halmaz hossza *véges marad*. Mindez hasonló a 2.11. ábra szerkesztéséhez, s az ott látható kövér Cantor-szálak elrendezése valóban emlékeztet az 5.43. ábra bifurkációs diagramjának az akkumulációs pont fölötti szerkezetére. A kaotikus μ^* paraméterek tehát *kövér* fraktált alkotnak (l. 2.2.3. szakasz).

A megfeleltetés kvantitatívva is tehető: a numerikus kísérletek szerint a kaotikus paraméterek halmaza olyan egydimenziós kövér fraktál, amelynek valamely ε felbontással mért hossza az ε egynél kisebb hatványaként tart a tetszőlegesen finom



5.44. ábra. A háztető-amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor bifurkációs diagramja ($E = 0,7$). Az $a_{\infty} = 1,490$ értéknél hirtelen jelenik meg a káosz (mintha a perióduskettőző sorozat egyetlen pontba sűrűsödne). A kaotikus tartományt nem szakítják meg periodikus ablakok. Az $a > 1,79$ értékekre véges attraktor már nem létezik.

felbontással mért véges hosszhoz. Ez a teljes vizsgált μ -intervallum hosszának jelentős része, akár 80–90 százaléka is lehet. A (2.15) összefüggéssel definiált α kövér fraktál exponens tipikus értéke $\alpha = 0,45$.

A periodikus ablakokban történő mozgás részletes vizsgálata azt mutatja, hogy az egyszerű attraktor elérése előtti *tranzien viselkedés kaotikus*. Tranzien káosz a periodikus ablakok teljes hosszában fellép. A hosszú ideig fennmaradó és a tranzien kaotikus mozgáshoz együttesen tartozó μ paraméterértékek tehát teljes összefüggő intervallumokat alkotnak. Más szóval: az akkumulációs pont felett a káosz a jellemző.

5.4. A kaotikus mozgás általános tulajdonságai

A pékleképezés és a lökdösött oszcillátor példáin egyre tipikusabb kaotikus rendszerekkel ismerkedtünk meg. Ezeket alapul véve, meg tudjuk adni a háromdimenziós fázistérrel rendelkező, vagyis kétdimenziós, megfordítható leképezéssel jellemezhető gerjesztett, disszipatív kaotikus rendszerek általános leírását és az azzal

kapcsolatos mérőszámokat. Az invertálható leképezést az $(x'_1, x'_2) = M(x_1, x_2)$ alakban írjuk fel.

5.4.1. A bonyolultság mérőszáma: a topologikus entrópia

A kaotikus attraktorok *vázát* az instabil periodikus pályák alkotják. A stroboszkopikus leképezés szintjén ezek a pályák hiperbolikus fixpontok vagy több pontból álló ciklusok. Az, hogy melyik az a legegyszerűbb hiperbolikus periodikus pálya, amely rajta van az attraktoron, a paramétereiktől függ, és általában csak numerikus vizsgálattal határozható meg. Erre az ad lehetőséget, hogy az attraktoron kívül eső hiperbolikus pontok vagy ciklusok környékéről indított trajektória sohasem tér oda vissza, szemben az attraktoron levők kis környezetéből indulóval, amely előbb-utóbb ismét a kiindulási helyzet közelébe kerül. Nagyméretű, kiterjedt kaotikus attraktorok esetén várható, hogy egy fixpont vagy egy kettes ciklus is eleme az attraktornak.⁸ Akármelyik ciklussal kezdődik is az attraktorhoz tartozó periodikus pályák sora, az ilyen ciklusok száma a ciklus hosszával nő. A kaotikus attraktor alapvető sajátja, hogy minél hosszabb ciklusokat tekintünk, annál többet találunk belőlük az attraktoron. A tapasztalat szerint számuk a hosszal *exponenciálisan* nő: az m hosszúságú (mT periódusidejű) instabil pályák N_m száma a kaotikus attraktoron elegendően nagy m ciklushosszakra az

$$N_m \sim e^{hm} \quad (5.51)$$

összefüggés szerint nő. A h paramétert a rendszer topologikus entrópiájának nevezük.⁹ Ez egyben a káosz egy lehetséges definíciójához vezet: egy rendszert akkor nevezünk kaotikusnak, ha topologikus entrópiája pozitív: $h > 0$.

A kaotikus attraktor véges méretű, és az instabil periodikus pályák *sűrűn* helyezkednek el rajta: azaz az attraktor minden egyes pontja tetszőlegesen kis környezetében találunk cikluspontokat. A cikluspontok és az aperiodikus mozgáshoz tartozó pontok gyakorisága az attraktoron ugyanúgy viszonyul egymáshoz, mint a racionális és az irracionális számoké az egységintervallumon. Ezért egy, az attraktoron általánosan választott pont nem esik egyik cikluspontra sem: a kaotikus mozgás végül

⁸Ha egy instabil ciklus nincs az attraktoron, de közel esik hozzá, akkor a ciklus stabil sokaságai keresztülvágják az attraktort, ami ilyenkor szükségszerűen több részből áll (l. 5.43. ábra a), b) tartomány).

⁹A definíció a statisztikus fizikából ismert $S = k_B \ln N$ Boltzmann-összefüggésen alapul, ahol N az állapotok száma, S a termodinamikai entrópia, k_B pedig a Boltzmann-állandó. Innét látszik, hogy az entrópia megfelelője hm , tehát h egyfajta entrópiasűrűség.

is bolyongás az instabil periodikus pályák között. Ebből következik, hogy a kaotikus mozgás nem ismétli önmagát: még végtelen sok diszkrét frekvenciájú periodikus mozgás összegeként sem állítható elő.

A topologikus entrópia egy mérésekben egyszerűbben megfogható tulajdonsága, hogy egyben a vonaldarabok hosszának megnyúlási rátája is. A vonzási tartományban kezdetben tetszőlegesen elhelyezkedő, L_0 hosszúságú vonaldarab az iterációk során egyre inkább az instabil sokaság irányában nyúlik meg. Jelölje L_n a vonaldarab teljes hosszát n iteráció után. A tapasztalat szerint ez a hossz elegendően sok iterálás ($n \gg 1$) után már exponenciálisan nő, és a növekedés ütemét éppen a topologikus entrópia adja az

$$\boxed{L_n \sim e^{hn}} \quad (5.52)$$

összefüggés szerint. Szemléletesen ez azt fejezi ki, hogy megnyúlása során a vonaldarab egyre több instabil periodikus pályához kerül közel, és n időegység alatt növekedéséhez minden n hosszúságú pálya nagyjából azonos mértékben járul hozzá.

5.22. feladat. Az (5.52) tulajdonság alapján határozzuk meg az aszimmetrikus pékleképezés és a fűrészfogattraktor topologikus entrópiáját!

5.4.2. Az előrejelezhetetlenség mérőszáma: a Ljapunov-exponens

A dinamikai instabilitás

A sűrűn elhelyezkedő hiperbolikus pályák jelenlétéből következik a szomszédos pályák gyors *eltávolodása*, az ún. *dinamikai instabilitás* vagy *kezdőfeltételekre való érzékenység*. Az attraktoron levő bármely pont környékén található egy periodikus pálya, az azonban instabil. Láttuk, hogy a hiperbolikus pontok közeléből indított trajektóriák időben exponenciális ütemben távolodnak (l. 3.1. szakasz). Ha tehát két közeli pontot veszünk az attraktor $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ pontja körül, akkor azok az \mathbf{r} -hez közel eső periodikus pálya taszító sajátértékének hatványai szerint távolodnak. Ha a kezdeti fázistérbeli $\Delta r_0 \equiv [\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2]^{1/2}$ távolság elegendően kicsi, akkor az $n \gg 1$ lépés utáni $\Delta r_n \equiv [\Delta x_n^2 + \Delta x_n^2]^{1/2}$ távolság egy exponenciális tényezővel való szorzással kapható Δr_0 -ból, azaz

$$\boxed{\Delta r_n(\mathbf{r}) = \Delta r_0 e^{\lambda(\mathbf{r})n}} \quad (5.53)$$

A $\lambda(\mathbf{r})$ mennyiséget *lokális Ljapunov-exponensnek* nevezzük. Ahhoz, hogy az (5.53) összefüggés érvényes legyen, fel kell tételni, hogy az n iterálás utáni $\Delta r_n(\mathbf{r})$ távolság is *még kicsi* az attraktor teljes kiterjedéséhez képest. Így érthető, hogy a $\lambda(\mathbf{r})n$ tényező jó közelítéssel megegyezik az \mathbf{r} ponthoz közel eső valamely n -es cikluspont

körül linearizált M^n leképezés taszító sajátértékével. A lokális Ljapunov-exponens tehát az $n \gg 1$ -szer iterált leképezés egy iterációra vetített taszító sajátértékének, azaz M^n taszító sajátértéke n -edik gyökének a logaritmus. Ha n elegendően nagy, akkor az így kapott $\lambda(\mathbf{r})$ már csak a fázistérbeli helytől függ,

A $\lambda(\mathbf{r})$ lokális Ljapunov-exponens pozitív szám, mert a kaotikus attraktoron minden periodikus pálya hiperbolikus. Mivel az attraktor *bármely* pontjához rendelhető egy ilyen pozitív kitevő, ezért átlagos értelemben is igaz, hogy tipikus pontpárok az attraktoron valamilyen $\bar{\lambda}$ *átlagos Ljapunov-exponenssel* távolodnak:

$$\Delta r_n = \Delta r_0 e^{\bar{\lambda} n}. \quad (5.54)$$

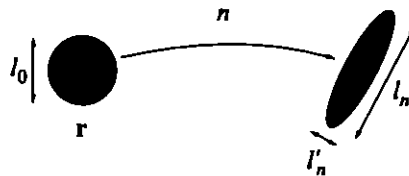
Kaotikus rendszerben az átlagos Ljapunov-exponens pozitív: $\bar{\lambda} > 0$. Ez egyben a káosz egy másik definíciós tulajdonsága. Azt, hogy az átlagolás pontosan mi szerint történik, az 5.4.5. szakaszban tárgyaljuk. Az átlagos Ljapunov-exponens természetesen nem függ a fázistérbeli helykoordinátától, a kaotikus attraktorra jellemző szám.

A lokális hiperbolikus szerkezetből az is következik, hogy ha két pontot olyan speciálisan választunk, hogy azok az éppen a lokális stabil sokaságra esnek, akkor azok közeledni fognak egymáshoz. Az \mathbf{r} pont körül ekkor

$$\Delta r_n(\mathbf{r}) = \Delta r_0 e^{\lambda'(\mathbf{r})n}, \quad (5.55)$$

ahol λ' negatív. Ezen exponensek átlaga a $\bar{\lambda}'$ *átlagos negatív Ljapunov-exponens*. Ezek a megállapítások szemléletesen úgy foglалható össze, hogy az attraktor \mathbf{r} pontja körüli kis l_0 átmérőjű korong n lépés után egy megnyúlt alakzatba megy át, melynek hossza, illetve vastagsága (l. 5.45. ábra):

$$l_n(\mathbf{r}) = l_0 e^{\lambda(\mathbf{r})n}, \quad l'_n(\mathbf{r}) = l_0 e^{\lambda'(\mathbf{r})n}. \quad (5.56)$$



5.45. ábra. Az attraktoron lévő kezdeti kis fázistérfogat (terület) az iterálások hatására az egyik irányba megnyúlik, míg egy másik irány mentén összehúzódik. A teljes terület csökken.

Mivel a terület nagysága n lépés után közelítőleg $l_n l'_n$, és tudjuk, hogy a terület egy lépésben a $J(\mathbf{r}) < 1$ Jacobi-determináns értékével szorzódik, (5.56) szerint

$$\lambda(\mathbf{r}) + \lambda'(\mathbf{r}) = \ln J(\mathbf{r}).$$

Típusos pontokra ezért

$$\bar{\lambda} + \bar{\lambda}' = \overline{\ln J}, \quad (5.57)$$

ahol $\overline{\ln J}$ a Jacobi-determináns logaritmusának átlagos értéke az attraktoron. Disszipatív rendszerben ez az átlag mindenképpen negatív (a terület csökken), ezért azt látjuk, hogy a stabil irányban érvényesülő összehúzódás átlagosan erősebb, mint az instabil irányban megfigyelhető tágulás: $|\bar{\lambda}'| > \bar{\lambda}$.

Érdemes röviden megemlíteni, mi történik a kaotikus attraktoron kívül induló pontokkal és pontpárokkal. A vonzási tartomány belsejében az attraktortól távol induló pontok mindenképpen közelednek az attraktorhoz, hiszen az vonzza az összes trajektóriát. Amikor már olyan közel kerülnek valamelyik pontjához (ciklusához), hogy a linearizált közelítés alkalmazható, akkor az attraktortól mért távolságuk minden lépésben átlagosan az $e^{\bar{\lambda}'} < 1$ tényezővel szorzódik (miközben természetesen az attraktor mentén el is mozdulnak). A kaotikus attraktor (mint minden más attraktor) megközelítése *exponenciális* ütemben történik. A $\bar{\lambda}'$ átlagos negatív Ljapunov-exponens tehát az attraktorhoz tartás gyorsaságára is jellemző. Mivel a megközelítés exponenciális jellegű, a pontok néhány lépés után már gyakorlati szempontból rákerültek az attraktorra. Innét kezdve a szomszédos pontok távolsága rohamosan nő, a pozitív átlagos Ljapunov-exponens által megadott mértékben. Az attraktor elérését megelőző időszakban azonban a szomszédos pontpárok távolsága csökkenhet is, ahogy az az 5.3. ábra első néhány lépése alatt megfigyelhető.

Az előrejelzési idő

Egy mozgást akkor tekintünk előre jelezhetőnek, ha jól meghatározott kezdőfeltételtől indulva a hosszú idő után előálló állapot is jól definiált. A gyakorlatban az állapotmeghatározás sohasem tökéletes, a kiindulási helyzetet kis hibával tudjuk csak megadni. A mozgás akkor jelezhető előre, ha a kezdeti hibából adódó bizonytalanság még hosszú idő után is viszonylag kicsi.

A kaotikus attraktoron való mozgás nem ilyen. A két pont közötti kezdeti Δr_0 távolságot a fázistérbeli állapot meghatározási pontatlanságának is tekinthetjük. Ha a távolságot valamilyen jellegzetes fázistérbeli távolság (pl. a kaotikus attraktor kiterjedése) egységében mérjük, a Δr_0 dimenziótlan szám nem más, mint az állapotmeghatározás relatív hibája. Az attraktoron fellépő dinamikai instabilitás miatt

az n lépés utáni Δr_n relatív hibát az (5.54) kifejezés adja. Ha a hiba ugyanolyan nagyságrendűvé válik, mint maga a meghatározandó mennyiség, vagyis a relatív hiba egységnyire nő (100 százalékos), akkor már nem lehetséges előrejelzés. Az az idő, mely alatt ez még nem következik be, az (5.54) összefüggés alapján az

$$n_e = \frac{1}{\bar{\lambda}} \ln \frac{1}{\Delta r_0} \quad (5.58)$$

előrejelzési idő (a gerjesztési periódus T egységeiben mérve). Ezt az időt elsősorban az átlagos Ljapunov-exponens, pontosabban annak reciproka szabja meg. Mivel kaotikus rendszerben a Ljapunov-exponens általában egységnyi nagyságrendű, az előrejelzési idő mindössze néhány iterálásnyi. Az n_e mennyiség függ ugyan a kezdeti hibától is, de logaritmikusan, ami igen gyenge függés. Az átlagos Ljapunov-exponens tehát az előrejelezhetetlenség mérőszámának is tekinthető: minél nagyobb $\bar{\lambda}$, annál rövidebb ideig jóslható meg a rendszer viselkedése.

Az eredmény jelentősége úgy érthető meg igazán, ha egy szabályos időfejlődésű rendszer előrejelezhetőségét is vizsgáljuk. A nemkaotikus rendszerben a hiba vagy csökken időben, vagy ha mégis nő, akkor a tapasztalat szerint legfeljebb lineáris mértékben. Ezt a legrosszabb esetet tekintve, (5.54) helyett a $\Delta r_n = \Delta r_0(1 + \bar{\lambda}n)$ összefüggés érvényes, ahol $\bar{\lambda}$ a nemkaotikus hibanövekedésre jellemző, egységnyi paraméter. Kis Δr_0 kezdeti hibát feltételezve, az előrejelzési idő most

$$n_e^{(\text{nemkaotikus})} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{\Delta r_0} - 1 \right) \approx \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{1}{\Delta r_0}, \quad (5.59)$$

azaz fordítottan arányos a kezdeti bizonytalansággal.

Konkrét példaként legyen $\Delta r_0 = 10^{-6}$. Ekkor $\bar{\lambda} = \bar{\lambda} = 1$ mellett azt kapjuk, hogy az előrejelzési idők

$$n_e = 6 \ln 10 \approx 14, \quad n_e^{(\text{nemkaotikus})} = 10^6. \quad (5.60)$$

Kaotikus rendszer attraktorán a mozgásállapot hosszú távú előrejelzése lehetetlen.

Érdeemes végiggondolni azt is, mi történik a mérési pontosság javításakor. Tegyük fel, képesek vagyunk arra, hogy a hibát három nagyságrenddel csökkentjük.¹⁰ A nemkaotikus előrejelzési idő ekkor ezerszer hosszabb lesz, a kaotikus esetbeli változás viszont egyáltalán nem arányos a pontosság javulásának mértékével. n_e nő

¹⁰Ekkora hirtelen javulás a tudománytörténetben csak igen ritkán, jelentős felfedezések következményeként vált csak lehetővé.

ugyan, de igen keveset, $\ln 1000/\lambda \approx 7/\lambda \approx 7$ iterálással lesz hosszabb. Így összesen 21 időegység az előrejelzési idő (a 10^9 -nel szemben). Kaotikus rendszerben tehát a *előrejelezhetőség lényeges javítása is reménytelen feladat*.

8. A pillangóeffektus csapdája

Edward Lorenz amerikai meteorológus (l. [12. olvasmány]) 1972-ben előadást tartott a következő címmel: „Előrejelezhetőség: Okozhat-e tornádót Texasban egy braziliai pillangó szárnycsapása?”. A pillangóeffektus elnevezés J. Gleick: „Káosz, egy új tudomány születése” című népszerűsítő könyve szóhasználata alapján terjedt el, ráadásul abban az értelemben, hogy a kérdésre pozitív a válasz. A szakirodalmon kívül ezt gyakran úgy értelmezik, hogy a modern természettudomány szerint minden mindennel összefügg, s ezért semmiben sem lehetünk biztosak. Ezzel szemben a kaotikus rendszerek vizsgálata azt mutatja, hogy az előrejelezhetetlenség korlátozott, csakis a kaotikus attraktoron áll fenn. Az attraktor elérését megelőző mozgásról *biztosan* tudjuk, hogy az egy nagyon kicsi, nulla térfogatú (de kiterjedt) halmaz – az attraktor – felé tart a fázistérben. A közeli pályák az attraktor elérése előtt nem futnak szét, hiszen nem kerülnek hiperbolikus ciklusok közelébe. Ráadásul az attraktoron kialakuló mozgás statisztikai szempontból teljesen pontosan megismerhető. Ha tehát el is fogadjuk, hogy a pillangóeffektus használható a kezdőfeltételre való érzékenység, vagyis az előrejelezhetetlen-

ség szinonimájaként, hangsúlyoznunk kell, hogy ez a jelenség mindig csak a kaotikus attraktoron figyelhető meg. A Lorenz-előadásban feltett kérdésre tehát csak akkor adható meg a válasz, ha el tudjuk dönteni, hogy a Braziliából induló eredeti és a szárnycsapással odébb pöckölt trajektória rajta van-e azon az attraktoron, amelyhez a texasi tornádó tartozik. Erre már csak azért is kevés az esély, mert a déli és az északi félteke légtömegei között gyakorlatilag nincs kölcsönhatás (nem beszélve arról, hogy az időjárás a mi szóhasználatunk szerint nem is rendelkezhet kaotikus attraktorról, hiszen az egy igencsak sok összetevőből álló rendszer). A történeti teljességhez hozzátartozik, hogy előadásában Lorenz azt is megjegyezte (E. N. Lorenz, *The Essence of Chaos*), hogy ha egy pillangószárnycsapás kiválthat tornádót, akkor meg is akadályozhatja azt. A szélsőséges események gyakorisága tehát nem nő a pillangó miatt; a hasonlat a jelenség *véletlenszerű* viselkedését illusztrálja. Mindezzel Lorenz az időjárás-előrejelzési nehézségekre utalt, és a címben feltett kérdésre végül is nem adott választ.

5.4.3. A fázistérbeli rend mérőszáma: a fraktáldimenzió

Ha egy fázisstartomány alakváltozását követjük, az azt alkotó pontok a leképezés egy lépése után új helyre kerülnek. Állandó J Jacobi-determináns mellett az új terület a kiindulási J -szerese, és mivel $0 < J < 1$, mindenképpen kisebb az eredeténél.

A további iterálások során a terület egyre csökken. Az n lépés utáni fázis-tartomány egyre közelebb kerül a kaotikus attraktorhoz, azt akár körbe is ölelheti. Ekkor a tartomány egy lépés alatt mindig az *instabil* irányban, az attraktort alkotó instabil sokasággal párhuzamosan nyúlik meg, arra közel merőlegesen összehúzódik. Ugyanakkor a tartomány egyre jobban *összehajtódik*, hiszen hossza nő, de közben véges tartományra terjedhet csak ki. Mivel a vékony fonalak már nem metszhetik egymást, az instabil irányra közel merőlegesen Cantor-halmazhoz hasonló szerkezet alakul ki. A tartomány egyre inkább fonalas szerkezetűvé válik, s végül felveszi a kaotikus attraktor alakját (l. 5.23. ábra).

A kaotikus attraktor ezért direkt szorzat szerkezetű: az instabil irányban egy folytonos vonaldarab, a stabilban pedig egy Cantor-halmaz jellegű fraktál. Minden kaotikus attraktor enyhén deformált Cantor-szál szerkezetű. Ezért fraktáldimenziója (l. 2.2.2. szakasz) mindig írható a két parciális dimenzió összegeként:

$$D_0 = 1 + D_0^{(2)}, \quad (5.61)$$

ahol az 1-es az instabil irány menti parciális dimenzió, $D_0^{(2)}$ pedig a stabil irányra vonatkozó parciális dimenzió, amire $0 < D_0^{(2)} < 1$. A D_0 fraktáldimenzió értéke azt mutatja, hogy mennyivel bonyolultabb a fázistérbeli szerkezet a szabályos mozgáshoz tartozóknál (egyetlen hiperbolikus fixpont instabil sokasága egydimenziós görbe). Ugyanakkor az, hogy $D_0 < 2$, arra utal, hogy *rendezett* fázistérbeli szerkezet tartozik az időben szabálytalan mozgáshoz.

5.4.4. A természetes eloszlás

A kaotikus mozgás három alapvető tulajdonságának áttekintése után részletesen foglalkozunk most egy olyan mennyiséggel, mely mindhárom tulajdonság szintézisét és egyben általánosítását is adja: a kaotikus attraktoron kialakuló *valószínűség-eloszlással*. Ennek használata ezért elkerülhetetlen, mert – mint láttuk – az attraktoron történő mozgás a mindössze néhány időegységnyi előrejelzési idő után már 100 százaléknyi hibával írható csak le. A megfigyelő a mozgást ezután már véletlenszerűnek találja. A hosszú idejű viselkedést tehát csak úgy jellemezhetjük, ha megadjuk, hogy az attraktoron mozgó test állapota milyen *valószínűséggel* kerül az attraktor egyik vagy másik pontja közelébe.

Ahhoz, hogy ezt pontosan tudjuk értelmezni, érdemes egy fázisstartomány mozgását vizsgálni, s azt már az attraktor elérése előtt is valószínűségi értelemben követni. A fázisstartományt alkotó pontokat a továbbiakban, a valószínűségi értelmezés megkönnyítése érdekében részecskéknak nevezzük.

A fázisstartománynak az előző szakaszban említett változása az iterálások hatására egy valószínűség-eloszlás időbeli fejlődésének is tekinthető. Ha a részecskéket kezdetben egyenletesen osztjuk el, akkor annak $P_0(\mathbf{r})$ valószínűsége,¹¹ hogy egy kezdeti A_0 területű fázisstartományon belül valahol részecskét találunk: $P_0 = 1/A_0$, egyébként pedig $P_0 \equiv 0$. A leképezés egy lépése után a terület csökkenése miatt a valószínűség értéke *nagyobb* lesz, mint kezdetben, hiszen a részecskeszám megmarad, az eloszlás 1-re normált: a részecskesűrűség valamilyen $P_1(\mathbf{r})$ eloszlást definiál a fázisstartomány új alakja mint tartó fölött. Ráadásul az eloszlás általában már *nem homogén*, mert a megnyújtás és összenyomás nem mindenütt azonos (a lokális Ljapunov-exponensek helyfüggők). A további iterálások során a terület egyre csökken, a valószínűség-sűrűség egyre nagyobb. A $P_n(\mathbf{r})$ valószínűség-eloszlás a megnyújtás miatt az instabil irányban folytonos marad, de a fázisstartomány összehajtogatása miatt azt találjuk, hogy az instabil iránnyal szöveget bezáró bármilyen egyenes mentén elmetszve, egyre kisebb intervallumokon vesz csak fel nullától eltérő értéket.

Az iterálásokat ismételve, az $n \rightarrow \infty$ esetben a P_n eloszlások egy P^* határeloszláshoz tartanak:

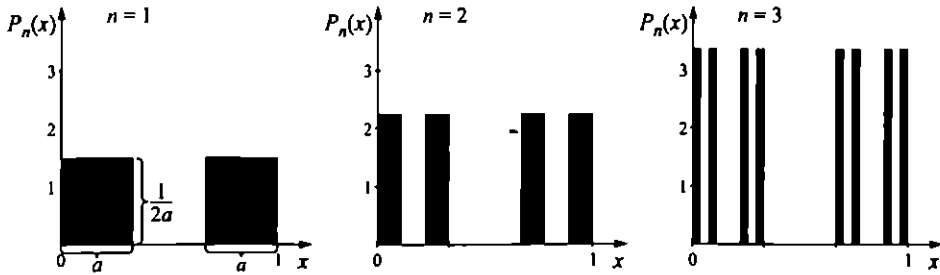
$$P_n(x_1, x_2) \rightarrow P^*(x_1, x_2), \quad (5.62)$$

és a P^* eloszlás a kaotikus attraktoron, egy nulla területű halmazon különbözik csak nullától. Ez a kaotikus attraktor *természetes eloszlása*, matematikai szóhasználattal természetes mértéke. A természetes eloszlás azt mutatja meg, hogy az attraktoron hosszú ideig mozgó pont milyen valószínűséggel látogatja az attraktor egyes részeit. *A természetes eloszlás a kaotikus rendszerek hosszú idejű jellemzésének egyetlen helyes eszköze.*

Konkrét példaként tekintsük először az (5.2) szimmetrikus pékleképezésben a valószínűségek időfejlődését. Érdemes a $P_0 \equiv 1$ kezdeti eloszlásból indulni, ami annak felel meg, hogy a teljes egységnegyzetet egyenletesen töltjük ki részecskékkel. Az első lépésben a fázistér fogat két a szélességű, 1 hosszúságú téglalapba képződik (l. 5.7. ábra). A részecskék száma nem változik, ezért megtalálási valószínűségük mindkét téglalapon $1/2$, az eloszlásfüggvény értéke tehát a téglalapokon $P_1 = (2a)^{-1} < 1$. A következő lépésben $P_2 = (2a)^{-2} > P_1$, és ezt az értéket a függ-

¹¹Pontosabban valószínűség-sűrűsége.

vény 4 téglalapon veszi fel, melyek a^2 szélességűek. Az eloszlás az instabil sokaság irányában (a v_n tengely mentén) egyenletes (5.46. ábra).



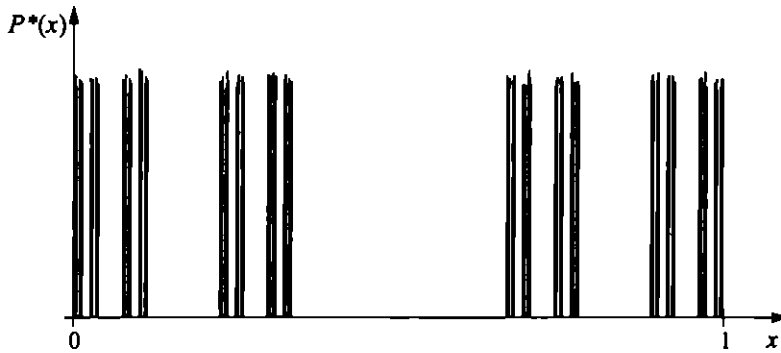
5.46. ábra. A valószínűségek időfejlődésének első három lépése a szimmetrikus pékleképezésben, az egész fázistéren $P_0 \equiv 1$ egyenletes eloszlásból indulva ($a = 1/3$). (A kezdeti egyenletes eloszlást nem mutatjuk.) Mivel az eloszlás független a sebességértékektől, csak az x koordinátától való függést ábrázoljuk. Az eloszlások sorozata a P^* természetes eloszláshoz tart. Az oszlopok összes területe mindvégig egy marad.

Az $n \rightarrow \infty$ esetben az eloszlások sorozata a kaotikus attraktor P^* természetes eloszlásához tart, melynek tartóját a Cantor-szálak alkotják. A szimmetrikus pékleképezés kaotikus attraktorán mozgó pont tehát bármelyik Cantor-szálon ugyanakkora valószínűséggel fordulhat elő. A természetes eloszlás megkapható egyetlen trajektória hosszú ideig tartó numerikus szimulálásával is (l. 5.47. ábra).

5.23. feladat. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus pékleképezésben a $P_0 = 1 + \gamma(x - 1/2)$ (sebességtől független) lineáris kezdeti eloszlás ugyanahhoz a P^* természetes eloszláshoz tart, mint a homogén kezdeti eloszlás.

5.24. feladat. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus pékleképezésben a $P_0 = 1 + \gamma(v - 1/2)$ (helytől független) lineáris kezdeti eloszlás ugyanahhoz a P^* természetes eloszláshoz tart, mint a homogén kezdeti eloszlás.

Fontos hangsúlyozni, hogy a természetes eloszlás *független a kezdeti eloszlástól*. Ha a kezdeti tartományon nem egyenletesen osztjuk el a részecskéket, vagy a tartományt másként választjuk, a kezdeti különbségek az attraktorhoz közeledve eltűnnek. A határeloszlást az instabil sokaság menti megnyújtások és a stabil menti összehúzóódások határozzák meg. A természetes eloszlás tehát csakis az attraktorra jellemző eloszlás.



5.47. ábra. A pékleképezés természetes eloszlása numerikus számolás eredményeként. Összesen 300000 iterációt végeztünk, s az x tengelyen $\varepsilon = (1/3)^6$ felbontást használtunk.

A részecskeszám megmaradása alapján általánosan meghatározható a P_n és P_{n+1} valószínűség-eloszlások közötti kapcsolat, és ezzel a természetes eloszlást leíró egyenlet is. A P_n valószínűség-eloszlás kis területre vett integrálja arányos az azon a területen elhelyezkedő részecskék számával. Az n -edik lépésben az (x_1, x_2) pont körüli kis $dx_1 dx_2$ területen levő részecskék $P_n dx_1 dx_2$ számának meg kell egyeznie az $(x'_1, x'_2) = M(x_1, x_2)$ képpont körüli $dx'_1 dx'_2$ területen levő $P_{n+1} dx'_1 dx'_2$ részecskeszámmal, tehát $P_n dx_1 dx_2 = P_{n+1} dx'_1 dx'_2$. Mivel a $dx'_1 dx'_2$ terület az eredetinél a $J(x_1, x_2)$ Jacobi-determináns ($J > 0$) arányában kisebb, az $(n + 1)$ -edik lépés utáni valószínűség-eloszlás a

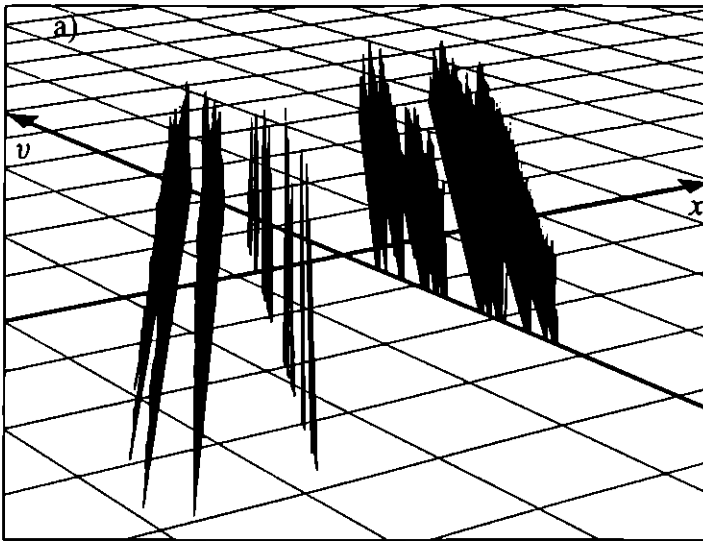
$$P_{n+1}(x'_1, x'_2) = \frac{P_n(x_1, x_2)}{J(x_1, x_2)} \quad (5.63)$$

összefüggés szerint következik az n -edik pillanatbeli eloszlásból. Ez az ún. Frobenius–Perron-egyenlet az eloszlások időfejlődését adja meg, de mivel diszkrét időről van szó, az *eloszlásokra vonatkozó leképezésnek* is tekinthető. A P_n eloszlások sorozata tetszőleges P_0 mellett a kaotikus attraktor P^* természetes eloszlásához tart, mely az (5.63) egyenlet megoldása a $P_{n+1} \equiv P_n \equiv P^*$ helyettesítéssel. A P^* természetes eloszlás tehát *fixpontja* az (5.63) egyenletnek. Mivel a természetes eloszlás egyértelmű, és egy egzaktul ismert egyenlet megoldása, ezért *valószínűségi értelemben a káosz teljes pontossággal leírható*.

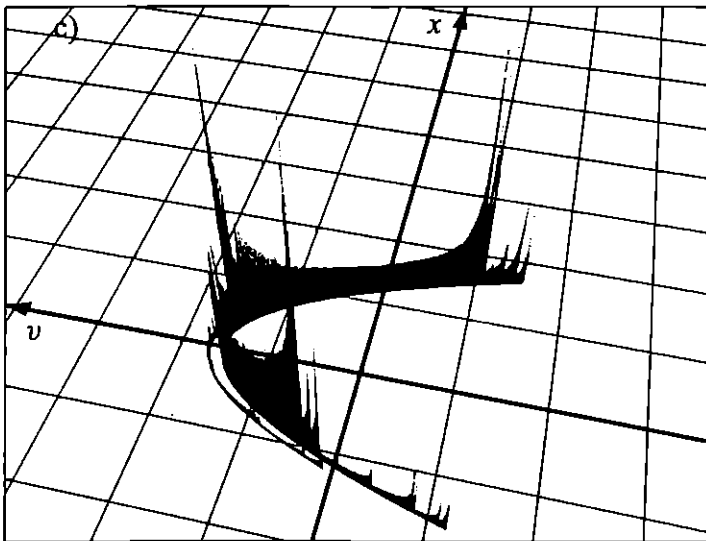
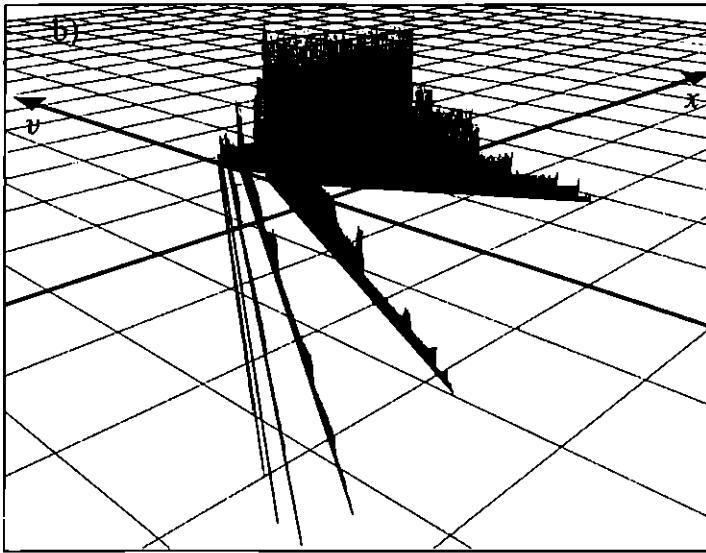
5.25. feladat. A szimmetrikus pékleképezés egész fázissterén értelmezett $P_0 \equiv g(x, v) > 0$ általános, normált kezdeti valószínűség-eloszlás mellett az (5.63) egyenlet alapján határozzuk meg az egy iterálás után kialakuló $P_1(x, v)$ eloszlást.

5.26. feladat. Az (5.63) egyenlet levezetésekor használt gondolatmenet alapján határozzuk meg a P_n és P_{n+1} valószínűség-eloszlások közötti kapcsolatot az olyan $x_{n+1} = f(x_n)$ egydimenziós leképezésben, melyben az $f(x)$ függvénynek két ága van. Milyen természetes eloszlás tartozik a lökdösött oszcillátor erős csillapítású határesetéhez a fűrészfog- (a), a háztető- (b) és a parabola-amplitúdóra (c) az $a = 2$ paraméterérték mellett?

Az (5.63) egyenlet egyszerű alakja ellenére a természetes eloszlás általában igen bonyolult, mert a fázisstartományok időben egyre összetettebb alakzatokat rajzolnak ki (l. pl. 5.23. ábra). A természetes eloszlás tartója egy nullmértékű fraktál, s ezért tetszőleges pontosságú meghatározása a gyakorlatban nem lehetséges. Numerikusan úgy járunk el, hogy az attraktort ε élű négyzetekkel fedjük le, és minden négyzetre felmérjük, hogy egy hosszú (pl. 10^6 iterálással kapott) trajektória hány pontja került a dobozba, majd ezt az értéket elosztjuk az összes iterálás számával (l. 5.47. ábra). Ezzel minden dobozban a természetes eloszlásnak arra a dobozra vett integrálját határozzuk meg jó közelítéssel. Ha az így kapott eloszlással különböző mennyiségek átlagait számoljuk, akkor azoknak az egzakt eloszlás átlagaitól való eltérése kicsi (ε rendű) lesz.



5.48a. ábra. Természetes eloszlások a lökdösött oszcillátorban: a fűrészfog-attraktor (l. 5.21. ábra). A térbeli képeken a rács a perspektíva érzetét segíti, és nem egyezik meg az egységosztással.



5.48b–c. ábra. Természetes eloszlások a lökdösött oszcillátorban. b) Háztető-attraktor (l. 5.29. ábra). c) Parabolaattraktor (l. 5.35. ábra). A látszólagos hirtelen ugrások a b) és c) eloszlásokban abból adódnak, hogy az attraktort alkotó instabil sokaság száalai helyenként élesen visszakanyarodnak. A száalakat követve azonban az eloszlás simán változik.

A numerikus szimulálással kapott természetes eloszlások a kaotikus attraktorok új arculatát mutatják. A két dimenzióba ágyazott fraktáltartón megjelenik egy általában erősen inhomogén eloszlás (egy harmadik dimenzióban), melynek lokális maximumai az attraktor leggyakrabban látogatott alalmazaihoz tartoznak. A természetes eloszlás numerikus meghatározása önmagában bizonyítja egy rendszer kaotikusságát. Az 5.48. ábra a különböző amplitúdófüggvényekkel lökdösött oszcillátor attraktorain kialakuló természetes eloszlásokat mutatja, melyekről más nézetből készült színes képek a XII. táblán és a könyv címlapján láthatók.

5.27. feladat. Határozzuk meg numerikus szimulálással a harang alakú és a szinuszos amplitúdóval lökdösött oszcillátorok kaotikus attraktorainak (l. 5.20., 5.21. feladat) természetes eloszlását.

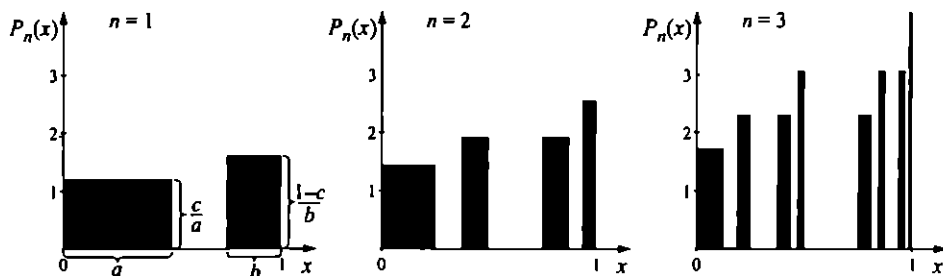
A P_n eloszlások követéséből vagy a P^* közvetlen vizsgálatából látszik, hogy a természetes eloszlás egy *fraktáeloszlás* (l. 2.3. szakasz). Ez azt jelenti, hogy az eloszlást egyre finomabb felbontásban (egyre kisebb ε méretű dobozokon) ábrázolva, újabb és újabb részletek válnak láthatóvá, azaz egyre több információt nyerünk. Ennek megfelelően a természetes eloszláshoz rendelhető egy véges D_1 információs dimenzió. Ez, mint láttuk, az eloszlás szerinti *tipikus* tartományok fraktáldimenzióját jelenti. Mivel az eloszlás az instabil irányban sima, nem fraktál jellegű, a teljes információs dimenzió írható mint

$$D_1 = 1 + D_1^{(2)}, \quad (5.64)$$

ahol $D_1^{(2)}$ a stabil irány parciális információs dimenziója. A kaotikus attraktor, azaz az eloszlás tartója tartalmaz a természetes eloszlás szerint nem tipikus viselkedésű tartományokat is, ezért a D_1 információs dimenzió kisebb az attraktor D_0 fraktáldimenziójánál, következésképpen: $D_1^{(2)} \leq D_0^{(2)}$.

Jól látszik ez az aszimmetrikus pékleképezés példáján. Az egységnégyzeten homogén eloszlással indulva, s ismét csak az x irányú metszetet vizsgálva, egy lépés után a bal oldali a szélességű intervallum teljes valószínűsége c , a jobb oldali b hosszúságúé $(1 - c)$, és így tovább (5.49. ábra).

Az információs dimenzió egyszerű meghatározása érdekében érdemes feltenni, hogy $b = a$, azaz az x irányú összehúzóási arányok azonosak. n lépés után az a^n hosszú intervallumok valószínűségei a $p_m = c^m(1 - c)^{n-m}$ értékek közül kerülnek ki. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint a 2.13. ábra fraktáeloszlásának szerkesztése ($1/3$ helyett az a összehúzóási paraméterrel). Az információs dimenzió a



5.49. ábra. Az aszimmetrikus pékleképezés kezdeti egyenletes eloszlásának konvergálása a természetes eloszlás felé (csak az x koordinátától való függést ábrázoljuk). Az első három lépés látható $a = 0,5$, $b = 0,25$, $c = 0,6$ paraméterek mellett.

(2.18) definíciója alapján

$$D_1^{(2)} = \frac{c \ln c + (1-c) \ln(1-c)}{\ln a} < D_0 = \frac{-\ln 2}{\ln a}. \quad (5.65)$$

Ha pl. $a = c = 1/3$, akkor $D_1^{(2)} = 0,579$.

5.28. feladat. Határozzuk meg az aszimmetrikus pékleképezés természetes eloszlásának információs dimenzióját, ha $a \neq b$.

9. Determinizmus és káosz

Érdeemes hangsúlyozni, hogy a kaotikus rendszerek *determinisztikusak*. Matematikai értelemben adott kezdőponthoz *egyetlen*, jól meghatározott végpont tartozik, mert a mozgásegyenlet (a Newton-egyenlet) közönséges (azaz nem zajos, vagy más néven nem sztochasztikus) differenciálegyenlet. Az előrejelezhetőség tehát *végtelen* pontosan ismert kezdőfeltétel esetén jelen van.

Gyakorlati szempontból azonban a véges pontossággal ismert kezdőfeltételű

viselkedés az érdekes. A káoszjelenség rámutat arra, hogy a valóságos folyamatok – amelyekben a kezdőfeltétel óhatatlanul csak valamekkora véges hibával ismert – determinisztikusnak tűnő viselkedéséhez nem elegendő az, hogy a rendszer ideális értelemben (végtelenül pontos kezdőfeltételek ismeretében) determinisztikus. A gyakorlati szempontból is determinisztikus viselkedés csak kaotikus rendszerekben fordul elő. Világosan kell lát-

nunk, hogy a kezdeti hibákat általában nem hanyagolhatjuk el, azok időbeli változása a *jelenség lényegéhez tartozik*. A kaotikus mozgás *hibaerősítő*. Ebből viszont az következik, hogy a mozgást a rövid előrejelzési időn túl követve, bizonytalansága akkora, mint az egész attraktor kiterjedése: a mozgás a kaotikus attraktoron gyakorlati szempontból *véletlenszerű*, tehát olyan, mintha sztochasztikus mozgásegyenletről következne. A véletlenszerű tulajdonságok megértésére elkerülhetetlen a valószínűségi leírás használata. Fontos hangsúlyozni, hogy a véletlenszerű

viselkedés nem a sok részecskéből álló környezettel való kölcsönhatás (mint pl. a Brown-mozgásban), hanem a kevés változót tartalmazó determinisztikus *belső dinamika* tulajdonsága. Erre az új eredetű véletlenszerű viselkedésre utalva szokás a káoszt *determinisztikus káosznak* is nevezni. A kaotikus folyamatok tehát új megvilágításba helyezik a véletlennek a természet leírásában játszott szerepét: véletlenszerű viselkedés nemcsak a rendszer bonyolultságából, hanem meglepő módon egyszerű rendszerek belső, nemlineáris dinamikájából is származhat.

5.4.5. A Ljapunov-exponens mint átlag

A kaotikus attraktoron mozgó pontpár más és más lokális Ljapunov-exponensek hatásának van kitéve, ezért az átlagos Ljapunov-exponens a lokális exponensek időbeli átlaga. Mivel azonban ugyanez a mozgás hozza létre a természetes eloszlást is, az átlag a természetes eloszlás szerinti átlagnak is tekinthető. Ezért a $\bar{\lambda}$ átlagos Ljapunov-exponenst úgy kapjuk, mint a $\lambda(r)$ lokális Ljapunov-exponensnek (l. (5.56)) az időfüggetlen *természetes eloszlás szerinti várható értéke*, azaz

$$\bar{\lambda} = \int dx_1 dx_2 \lambda(x_1, x_2) P^*(x_1, x_2). \quad (5.66)$$

Ezek alapján kapcsolat található a topologikus entrópia és az átlagos Ljapunov-exponens között. A topologikus entrópia (5.52) szerint a vonaldarabok átlagos hosszúsága logaritmusának növekedési rátája. Ugyanakkor a lokális Ljapunov-exponens egy vonaldarab hosszának logaritmusával arányos (l. (5.56)). Mivel egy mennyiség logaritmusának átlaga nem azonos az átlaga logaritmusával, a topologikus entrópia és az átlagos Ljapunov-exponens általában különböznek egymástól. Az utóbbi a lokális pozitív Ljapunov-exponensek helyről helyre változó értékei miatt sohasem lehet nagyobb a topologikus entrópiánál:

$$\boxed{h \geq \bar{\lambda}}. \quad (5.67)$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a lokális Ljapunov-exponensek értéke, vagyis a megnyúlási és összehúzóási arányok mindenütt azonosak, s ekkor a természetes eloszlás a homogén eloszlás az attraktoron.

A negatív átlagos Ljapunov-exponens a $\lambda'(r)$ lokális exponensek (l. (5.56)) várható értéke:

$$\bar{\lambda}' = \int dx_1 dx_2 \lambda'(x_1, x_2) P^*(x_1, x_2). \quad (5.68)$$

Hasonlóan bármilyen más mennyiség átlaga is számolható a természetes eloszlással. Így például a lokális $J(x_1, x_2)$ Jacobi-determináns logaritmusának átlaga (aminek ellentettje az átlagos fázistér-fogat-összehúzóási ráta megfelelője, l. 5.5. szakasz) a következő integrál:

$$\overline{\ln J} = \int dx_1 dx_2 \ln J(x_1, x_2) P^*(x_1, x_2). \quad (5.69)$$

Mivel az 5.4.2. szakasz szerint lokálisan $\lambda + \lambda' = \ln J$, ezért a fenti összefüggések az (5.57) egyenlet bizonyítását is adják.

A természetes eloszlás tartója fraktál, az integrálokat ezért mindig a véges felbontással, vagyis az ε méretű dobozokon értelmezett eloszláson kell elvégezni. Az aszimmetrikus pékleképezés esetén például már a természetes eloszlás szerkesztésének első lépését (5.49. ábra, $n = 1$) is tekinthetjük egy véges felbontással meghatározott eloszlásnak. A bal oldali a szélességű tartományba kerülő kis szakaszok a v irányban $1/c$ -szeresen nyúlnak meg, a jobb oldaliba kerülők pedig $1/(1-c)$ -szeresen. A lokális Ljapunov-exponens tehát $\lambda = -\ln c$ az egész bal oldali intervallumon, és $\lambda = -\ln(1-c)$ a jobb oldalin. A szakaszonként állandó (c , ill. $1-c$ valószínűségű) eloszlás szerint vett átlag ezért

$$\bar{\lambda} = -c \ln c - (1-c) \ln(1-c). \quad (5.70)$$

Ezt az eljárást meg kellene ismételni a természetes eloszlás egyre jobb közelítéseivel, de a pékleképezés annyira egyszerű, hogy az eredmény nem módosul. Ha $c \neq 1/2$, akkor $\bar{\lambda} < h = \ln 2$. A $c = 1/2$ esetben visszkapjuk a szimmetrikus pékleképezés $\lambda = \ln 2 (= h)$ Ljapunov-exponensét.

5.29. feladat. Mutassuk meg, hogy az aszimmetrikus pékleképezés átlagos exponensére természetes eloszlásának n -edik közelítéséből is (5.70) adódik.

Ugyanakkor a lokális negatív Ljapunov-exponensek egy lépésben $\ln a$ és $\ln b$, s innen az átlagos negatív Ljapunov-exponens

$$\bar{\lambda}' = c \ln a + (1-c) \ln b. \quad (5.71)$$

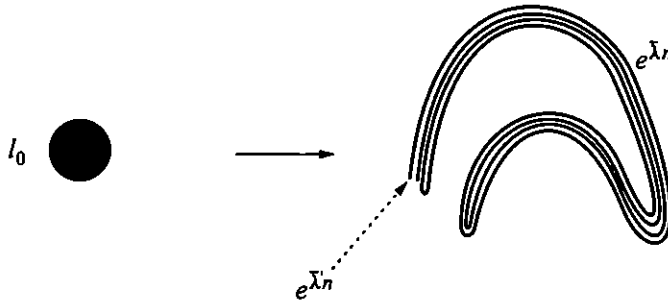
Az $a = b$ esetben $\bar{\lambda}' = \ln a$. A Ljapunov-exponensek az összes lokális exponens súlyozott átlagai, azt azonban, hogy milyen súllyal kell vennünk őket, csakis a természetes eloszlás adja meg.

5.30. feladat. Határozzuk meg az aszimmetrikus pékleképezés attraktorán az $\overline{\ln J}$ mennyiséget!

5.31. feladat. Határozzuk meg a fűrészfogattraktoron kialakuló átlagos Ljapunov-exponenseket!

5.4.6. A dinamika és a geometria kapcsolata: a Kaplan–Yorke-összefüggés

Mind az információs dimenziót, mind az átlagos Ljapunov-exponenseket a természetes eloszlás határozza meg. Ezért várható, hogy köztük explicit kapcsolat is létezik. Ezt, a tetszőleges kétdimenziós invertálható leképezés kaotikus attraktorára érvényes, ún. Kaplan–Yorke-összefüggést egyszerű gondolatmenettel megkaphatjuk. Az attraktor egy tipikus pontja közelében elhelyezett l_0 sugarú fázistérfogat-elem n lépés után átlagosan $l_0 e^{\bar{\lambda}n}$ hosszúságú és $l_0 e^{\bar{\lambda}'n}$ vastagságú, tehát $A_n \approx l_0^2 e^{(\bar{\lambda} + \bar{\lambda}')n}$ területű szalaggá deformálódik, ami már fraktálszerűen begyűrődött (5.50. ábra).



5.50. ábra. Az attraktoron lévő kicsi, tipikusan választott fázistérfogat-elem az instabil irányban n iterálás alatt $e^{\bar{\lambda}n}$ -szeresére nyúlik, míg a stabil irányban $e^{\bar{\lambda}'n}$ -szeresére összehúzódik, közben többszörösen begyűrődik.

A fázistérfogat időfejlődése tehát meghatároz egy tipikus lineáris méretet, ami az n -edik lépésben $l_0 e^{\bar{\lambda}n}$. Ezt tekinthetjük az $n \gg 1$ lépés után már jó közelítéssel kialakult fraktál lefedéséhez szükséges dobozméretnek, a 2.1.2. szakaszban használt ε felbontásnak. Az $\varepsilon = l_0 e^{\bar{\lambda}'n}$ méretű dobozokkal történő lefedéséhez szükséges dobozok száma tehát

$$N(\varepsilon) = \frac{A_n}{\varepsilon^2} = e^{(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}')n}. \quad (5.72)$$

Ez a szám az $\varepsilon \sim e^{\bar{\lambda}'n}$ felbontásnak a $(\bar{\lambda}/\bar{\lambda}' - 1)$ -edik hatványa. E kitevő ellentettje a (2.3) összefüggéssel definiált fraktáldimenzióként értelmezhető. Mivel itt az eloszlás szerinti *tipikus* viselkedést tekintettünk, ez a dimenzió a természetes eloszlás D_1 információs dimenziója. Azt kapjuk tehát, hogy

$$D_1 = 1 + \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}'|}. \quad (5.73)$$

Annak ellenére, hogy általában sem az információs dimenzió, sem a Ljapunov-exponensek nem határozhatók meg egzaktul, köztük mégis mindig fönnáll ez az explicit egyenlet. Az (5.73) egyenlet a kaotikus attraktorokra vonatkozó egyik legfontosabb összefüggés, amely kapcsolatot teremt az *időbeli dinamika és a fázistérbeli geometria* között. Ez jól mutatja, hogy a káoszban az előrejelezhetetlenség és a fraktálszerkezet egymástól elválaszthatatlanok.

A stabil irány $D_1^{(2)} \equiv D_1 - 1$ (l. (5.64)) parciális dimenzióját az átlagos Ljapunov-exponensek aránya határozza meg. Az (5.57) összefüggés alapján

$$D_1^{(2)} = -\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \ln J}, \quad (5.74)$$

amiből látszik, hogy a parciális dimenzió kis pozitív Ljapunov-exponens esetén kicsi, nagyokra pedig közel egységnyi. Rögzített $\overline{\ln J}$ (átlagos fázistér-fogat-összehúzóráta) mellett a *dimenzió annál nagyobb, minél kaotikusabb a rendszer.*

A tapasztalat szerint a D_0 fraktáldimenzió és az információs dimenzió közötti eltérés rendszerint néhány százaléknyi, ezért a

$$D_0 \gtrsim 1 + \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}'|} \quad (5.75)$$

összefüggés sokszor használható az attraktor fraktáldimenziója becslésére is. A két dimenzióérték csak akkor egyezik meg egzaktul, ha a lokális Ljapunov-exponensek helytől függetlenek, és a természetes eloszlás az attraktoron homogén.

5.32. feladat. Határozzuk meg a fűrészfogattraktor fraktál- és információs dimenzióját!

10. Mire jó a numerikus szimulálás?

A hibák exponenciális növekedésének törvénye felveti a kérdést: kaotikus rendszerekre alkalmazva megbízhatóak-e egyáltalán a numerikus módszerek? A választ két lépésben adjuk meg.

Amíg a mozgó pont nem éri el a kaotikus attraktor kis környezetét, nincs szó exponenciális hibanövekedésről (a sok instabil pálya mind az attraktoron helyezkedik el), s ezért a számítógépes szimulálás helyesen írja le az attraktorhoz tartás folyamatát a fázistér bármelyik pontjából. Ebből az is következik, hogy az *attraktor alakját is pontosan kirajzolja* a numerikus eljárás, hiszen az a stabil irányból történő vonzás következménye.

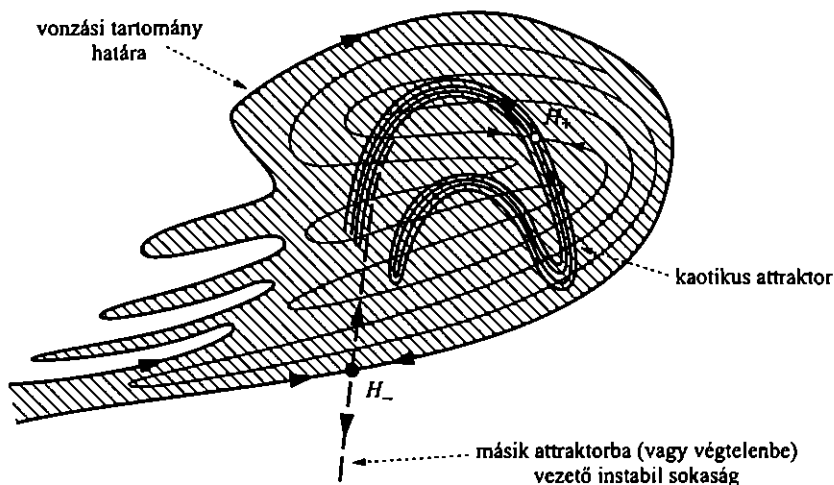
Az attraktoron történő mozgás során valóban nincs értelme a trajektória fogalmának az előrejelzési időn túl. A hosz-

szabb idejű futtatás által megadott idősor tekinthető viszont *tipikus* trajektóriának. A mozgás statisztikai jellemzői egy hosszú szimulálásból jól leolvashatóak, és az átlagérték, szórás meghatározható. Egyetlen pontnak a kaotikus attraktoron történő hosszú idejű követéséből *tetszőleges pontossággal meghatározható a természetes eloszlás*. Ugyanez adódik akkor is, ha sok pontot (egy részecskesokaságot) szimulálunk nem túl hosszú ideig. Két közeli pontpár követésével, elegendően sok párra átlagolva az átlagos Ljapunov-exponens adódik. A numerikus eljárások tehát alkalmasak a fázistérbeli struktúrák és a kaotikus mozgással kapcsolatos statisztikus tulajdonságok pontos meghatározására.

5.4.7. A kaotikus tulajdonságok összefoglalása

Kaotikus viselkedés a háromdimenziós fázistérrel rendelkező rendszerekben lehetséges, és a kellő mértékben nemlineáris esetekben mindig elő is fordul. Az ilyen rendszerek tulajdonságait alapvetően a bennük fellépő instabil, periodikus mozgások határozzák meg. Azok a hiperbolikus ciklusok, amelyek nincsenek egy kaotikus attraktoron, a vízvázaló szerepét játsszák. Stabil sokaságuk alkotja az attraktorok vonzási tartományának határát (l. a sematikus 5.51. ábra). Instabil sokaságuk egyik ága az egyik, másik ága pedig egy másik attraktorba vezet.

A kaotikus attraktor olyan vonzó halmaz, *amelyen önmagát sohasem ismétlő állandósult mozgás alakul ki*. A kaotikus attraktoron végtelen sok instabil periodikus pálya halmozódik fel, melyek mindegyike rendelkezik instabil sokasággal. A gyakorlatban már egyetlen (alacsony periódusú) ciklus instabil sokasága is kirajzolja a kaotikus attraktort. Mindezek mutatják, hogy a káosz valójában az állandósult instabilitás. Ugyanakkor a hiperbolikus ciklusok jelenléte önmagában nem elegendő a kaotikus viselkedés magyarázatához. Ez a viselkedés annak a következménye, hogy a ciklusok stabil és instabil sokaságai között homoklinikus és heteroklinikus metszéspontok alakulnak ki. Ha egy létrejön, akkor már végtelen soknak is jelen



5.51. ábra. Általános kétdimenziós invertálható leképezés sematikus fázis-térképe.

kell lennie (l. [16.](#) olvasmány), mert ezek csak ugyanolyan pontokra képződhetnek, mint önmaguk. Mozgásuk során közeledniük és távolodniuk is kell a cikluspontoktól, ami csak egy sohasem ismétlődő időfejlődés formájában lehetséges. A homoklinikus és heteroklinikus pontok tehát a cikluspontokat kaotikus attraktorra össze-fogó alkotóelemek.

A kaotikus attraktor tulajdonságai több szinten is megfogalmazhatóak. Jó közelítéssel igaz (az eltérés numerikusan alig vehető észre), hogy a kaotikus attraktor

- a rajta levő végtelen sok instabil periodikus pálya összessége, vagy
- egyetlen rajta levő hiperbolikus periodikus pálya instabil sokasága.

A pontosabb megfogalmazás szerint a kaotikus attraktor

- a rajta levő periodikus pályák és az azok között képződő homoklinikus és heteroklinikus pontok összessége, vagy
- a rajta levő végtelen sok instabil periodikus pálya instabil sokaságainak összessége.

A kaotikus attraktoron történő mozgás szabálytalansága az ott található végtelen sok instabil periodikus pálya következménye. Az instabil sokaságok irányában a

fázistérben állandó eltávolodás történik, aminek következtében ez a mozgás érzékeny a kezdőfeltételre, és ezért nem jelezhető előre. Mivel bármilyen kezdeti fázisartomány, miközben területe csökken, az instabil irányban állandóan nyúlik, és az egész folyamat véges tartományra terjed ki, a nyúlás mellett összehajtódásnak is történnie kell. A kaotikus attraktor ezért szükségképpen fraktálalakzat.

A kaotikus mozgás fő tulajdonsága a szabálytalanság, az előrejelezhetetlenség és a rendezett, de komplex fázistérbeli szerkezet ugyanazon jelenség különböző megnyilvánulásai. Az egyes tulajdonságokhoz mérőszámok is rendelhetők:

- szabálytalanság: pozitív topologikus entrópia: $h > 0$,
- előrejelezhetetlenség: pozitív átlagos Ljapunov-exponens: $\bar{\lambda} > 0$,
- fázistérbeli rend: a fázistér d dimenziójánál kisebb fraktál- és információs dimenzió: $d > D_0 \geq D_1 > 1$.

Ezek a tulajdonságok a káosz különböző arculatait mutatják, melyek rendre az egy-, a két- és a sokrészecske-viselkedésben mutatkoznak meg (részecskén továbbra is fázistérbeli pontot értve). A disszipatív káoszt mindhárom fenti egyenlőtlenség együttes teljesülése jellemzi.¹²

Mindezek mögött a hosszú idejű mozgás statisztikus tulajdonságait megadó természetes eloszlás létezése húzódik meg. Ennek következtében az egyes tulajdonságok mérőszámai egymástól nem teljesen függetlenek (l. pl. (5.67), (5.73)). A mérőszámok egyben a kaotikusság erősségére is utalnak: minél nagyobb az értékük, annál kaotikusabb a rendszer.

A kezdőfeltételekre mutatott érzékenységgel analóg jelenség a paramétertérben is megfigyelhető: már kicsiny paraméterváltozások is a káosz jellegének megváltozásához vagy akár a kaotikus attraktor eltűnéséhez vezethetnek. Ez éppúgy a káosz meghatározó tulajdonsága, mint a kialakulásához vezető bifurkációsorozat univerzális jellege. Egy rendszer kaotikusságának eldöntésében bármelyik tulajdonság segítségünkre lehet.

5.33. feladat. A kaotikus attraktor létezéséhez elegendő, ha információs dimenziója kisebb 2-nél. Igen kivételes esetben ugyanis előfordulhat, hogy az attraktor térkitöltő: fraktáldimenziója 2. Ez a helyzet az $a = 1 - c$, $b = c$ paraméterű aszimmetrikus pékleképezés esetén. Határozzuk meg numerikus szimulálással az attraktort! Mutassuk meg, hogy a $-\overline{\ln J}$ mennyiség, az átlagos fázistér-

¹²Az itt megadott formában az egyenlőtlenségek tetszőleges dimenziójú fázistérben is érvényesek.

összehúzóási ráta, ilyenkor is mindig pozitív. Határozzuk meg a $-\overline{\ln J}$ mennyiséget és a $D_1^{(2)}$ információs dimenziót a $\delta = 1/2 - c$ aszimmetria-paraméterben másodrendig, kis δ értékekre.

11. Rezgő lemezen pattogó golyó

Az egyik legegyszerűbb, a gyakorlatban is demonstrálható disszipatív kaotikus mozgás a harmonikusan mozgó lapon, pl. rezgő hangszórólemezen pattogó kis-méretű golyóé. A lemez rezgése periodikus, a gerjesztés azonban – ami a golyó szempontjából a lemezzel való ütközés – nem feltétlenül az. A kaotikus viselkedés éppen az okozza, hogy a golyó repülési ideje általában nem azonos a lemez rezgésidejével, így az ütközések mindig különböző fázisokban következnek be. Érdekes a golyó állapotát az ütközések pillanatában, pl. közvetlenül a visszapat-tanás után meghatározni, és a mozgást az ilyen állapotokat összekapcsoló leképezés formájában követni (ami most nem stro-boszkopikus leképezés). A leképezés alakja meghatározható, mert az ütközések közötti mozgás a jól ismert függőleges hajítás. Legyen a lemez sebesség–idő függvénye $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$. A közeg-ellenállást elhanyagolva, a t_n pillanatban történt visszapat-tanás után v_n sebességgel felfelé induló golyó sebessége a $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ pillanatban bekövetkezett újabb ütközéskor $\bar{v}_n = v_n - g \Delta t_n$. A legfontosabb disszipációs folyamat az ütközési sebességveszteség. Ezt egy $k < 1$ ütközési paraméterrel vesszük figyelembe: a lemezhez viszonyított sebesség nagysága a visszapat-tanás után a becsapódási érték k -szorososa. A relatív sebesség az $(n + 1)$ -edik

ütközés előtti pillanatban $\bar{v}_n - V(t_{n+1})$, ezért a visszapat-tanás utáni relatív sebesség $k(-\bar{v}_n + V(t_{n+1}))$. Az $(n + 1)$ -edik ütközés utáni v_{n+1} sebesség tehát $-k\bar{v}_n + (1 + k) \times V(t_{n+1})$. A Δt_n repülési időt az határozza meg, hogy a lemez t_n és t_{n+1} pillanatbeli helyzetei közötti távolság azonos a golyó $v_n \Delta t_n - g(\Delta t_n)^2/2$ elmozdulásával. A teljes leképezés

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \quad (5.76)$$

$$v_{n+1} = -k(v_n - g \Delta t_n) + (1 + k)V_0 \cos(\Omega t_{n+1}),$$

$$\frac{V_0}{\Omega} (\sin(\Omega t_{n+1}) - \sin(\Omega t_n)) = v_n \Delta t_n - \frac{g}{2} (\Delta t_n)^2.$$

A sebességet V_0 egységében mérve, az idő helyett pedig a rezgés $\phi = \Omega t$ fázisát használva a dimenziótlan leképezés

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta \phi_n, \quad (5.77)$$

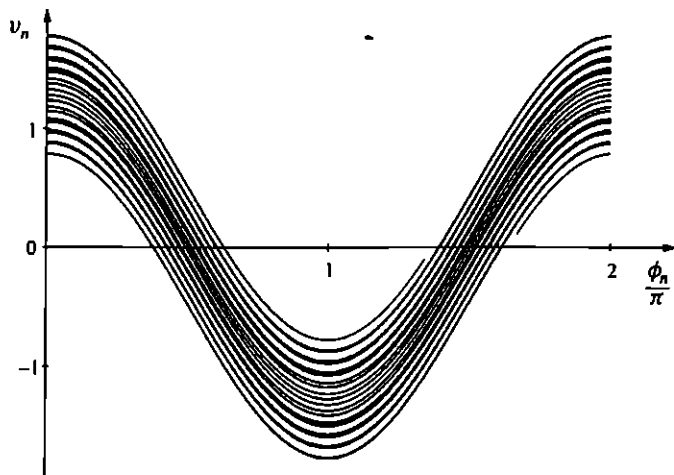
$$v_{n+1} = -k \left(v_n - \frac{2 \Delta \phi_n}{q} \right) + (1 + k) \cos(\phi_{n+1}),$$

ahol a $\Delta \phi_n$ fáziskülönbség a

$$(\sin(\phi_n + \Delta \phi_n) - \sin(\phi_n)) = v_n \Delta \phi_n - \frac{(\Delta \phi_n)^2}{q}$$

egyenlet numerikus megoldásából kapható. Itt $q \equiv 2V_0\Omega/g$ a dimenziótlan gerjesztési frekvencia. Javasoljuk, hogy az Olvasó maga fedezze fel a rendszer dinamikájának részleteit.

Kaotikusságát mi itt a lemez gyors rezgésének megfelelő $q \gg 1$ határesetben előálló explicit leképezés kaotikus attraktorának bemutatásával demonstráljuk (5.52. ábra).



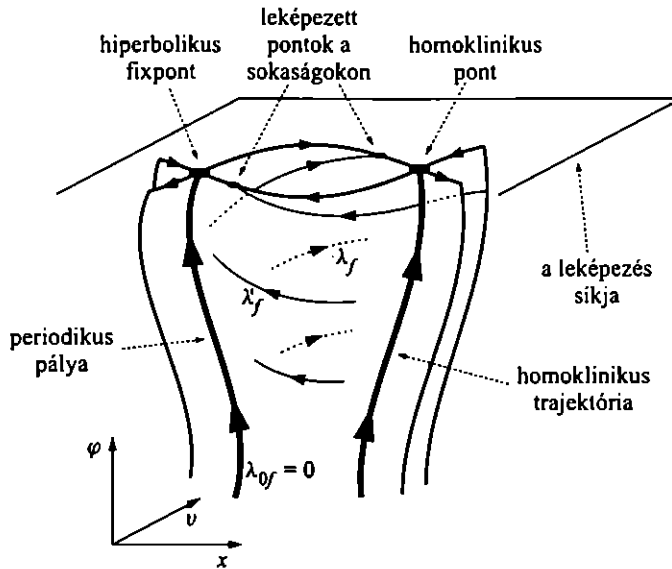
5.52. ábra. A pattogó golyó leképezésének a $q \gg 1$ -re kapott $\phi_{n+1} = \phi_n + qv_n$ ($\Delta\phi_n = qv_n$), $v_{n+1} = kv_n + (1+k)\cos(\phi_{n+1})$ határesetbe kaotikus attraktora ($k = 0,3$, $q = 20$).

5.5. Sima időfejlődésű rendszerek

Eddigi kaotikus példáink leképezéssel definiált vagy lökdösött rendszerek voltak. A káosz létrejöttének oka általában nem a hirtelen külső beavatkozás, hanem a nemlinearitás. Az eddigi példák vizsgálatát az indokolta, hogy bennük a leképezés alakja egzaktul ismert. Mostantól sima időfejlődésű gerjesztett disszipatív rendszereket vizsgálunk. Ezekben a stroboszkopikus leképezés már csak numerikusan határozható meg, a rajta történő diszkrét idejű viselkedés viszont ugyanolyan jellegű, mint korábbi példáinkban.

Az ilyen rendszerek kapcsán érdemes röviden áttekinteni a háromdimenziós fázistérbeli struktúrák és a leképezésen megjelenő objektumok kapcsolatát. Minden instabil periodikus pálya a teljes fázistérben is hiperbolikus szerkezetű. Ez azt je-

lenti, hogy az instabil határciklus hélix alakú trajektóriájához tartozik egy (nem zárt) felület, melynek minden pontjából a határciklusba futnak be a trajektóriák (5.53. ábra). Ez a határciklus stabil sokasága a háromdimenziós folyamban. A határciklus



5.53. ábra. A háromdimenziós folyam hiperbolikus határciklusának stabil és instabil sokaságai. A stabil és instabil sokaságfelületek metszsvonala egy homoklinikus trajektória. Berajzoltunk néhány trajektóriát a sokaságok felületeibe is.

közelében, a stabil sokaság felületében minden trajektória az $e^{\lambda'_f t}$ ütemben közelíti meg a határciklust, ahol $\lambda'_f < 0$ a határciklusnak a folytonos idejű negatív sajátértéke (az egyes ciklus esetén ez megegyezik a 3.3.2. szakaszban használt λ_- sajátértékkel).

Hasonlóan létezik egy másik (nem zárt) felület, az instabil sokaság, melyben tisztán exponenciális eltávolodás történik az $e^{\lambda_f t}$ összefüggés szerint, ahol $\lambda_f > 0$ a határciklus pozitív sajátértéke (a 3.3.2. szakaszbeli λ_+ instabilitási exponens analógja). Mivel az exponenciális közeledési, ill. távolodási szabály pontpárokra is érvényes, a λ_f , λ'_f sajátértékek lokális Ljapunov-exponenseknek tekinthetők. Ha a határciklus trajektóriája mentén tekintünk két közeli pontot, a közöttük levő fázistérbeli távolság időben nyilván nem változik. Ezt kifejezhetjük úgy is, hogy a folyamban a trajektória menti mozgásra jellemző λ_{0f} lokális Ljapunov-exponens zérus: $\lambda_{0f} \equiv 0$.

A gerjesztés T periódusidejében készített stroboszkopikus metszetek síkjának a folyam sokaságaival képzett metszete alkotja a sokaságoknak a stroboszkopikus leképezésen megjelenő görbéjét. (A sokaság felületében haladó folytonos trajektóriák a leképezés sokaságának görbéjén ugrálva mozgó pontokat hoznak létre.) A térbeli sokaságok felületének metszészonalai nem periodikus homoklinikus trajektóriákat alkotnak. Ezeknek a trajektóriáknak a metszeten homoklinikus pontok felelnek meg. Az a korábbi megfigyelés, miszerint homoklinikus pontok a leképezés hatására homoklinikus pontba képződnek, annak felel meg, hogy a vizsgált pont a homoklinikus trajektória mentén a T időnek megfelelő fázissal elmozdul.

Mivel a leképezés síkjára T időnként kerül minden trajektória, a cikluspontok sajátértékei egyszerű kapcsolatban állnak a folyamra jellemző sajátértékekkel. Fixpont esetén például $\Lambda_+ = e^{\lambda_f T}$, $\Lambda_- = e^{\lambda'_f T}$. Ezért, ha az instabil ciklusok kaotikus attraktort alkotnak, akkor a leképezés kaotikus attraktorának $\bar{\lambda}$ és $\bar{\lambda}'$ átlagos Ljapunov-exponensei és a folyamra jellemző $\bar{\lambda}_f > 0$, ill. $\bar{\lambda}'_f < 0$ átlagos Ljapunov-exponensek között fennáll, hogy

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_f T, \quad \bar{\lambda}' = \bar{\lambda}'_f T. \quad (5.78)$$

A folyam átlagos Ljapunov-exponenseinek összege a $\bar{\sigma}$ átlagos fázistérfogat-összehúzóási ráta ellentettjét adja az attraktoron (l. (3.70)), ezért (5.56) értelmében igaz, hogy

$$\bar{\sigma} T = -\overline{\ln J}. \quad (5.79)$$

A Jacobi-determináns logaritmusának átlaga arányos a folyam átlagos fázistérfogat-összehúzóási rátájával.

A trajektóriák időfejlődéséből adódó mozgás a stroboszkopikus metszeten kialakuló struktúrát odébb tolja és enyhén deformálja. Az ilyen sima transzformáció *nem* képes arra, hogy egy alakzat fraktáltulajdonságait megváltoztassa. Ezért a stroboszkopikus metszeten kialakuló kaotikus attraktor fraktáltulajdonságai, a D_0 és D_1 dimenziók értéke *nem függ attól, hogy a metszet milyen fázisban készül*. A háromdimenziós folyamban a trajektóriák sima görbék, ezért az ott kialakuló kaotikus attraktor D_{0f} fraktáldimenziója egyszerűen 1-gyel nagyobb a stroboszkopikus leképezésen megfigyelnél:

$$D_{0f} = D_0 + 1. \quad (5.80)$$

Ennek megfelelően az információs dimenzióra az (5.73) Kaplan–Yorke-összefüggés alapján

$$D_{1f} = 2 + \frac{\bar{\lambda}_f}{|\bar{\lambda}'_f|}. \quad (5.81)$$

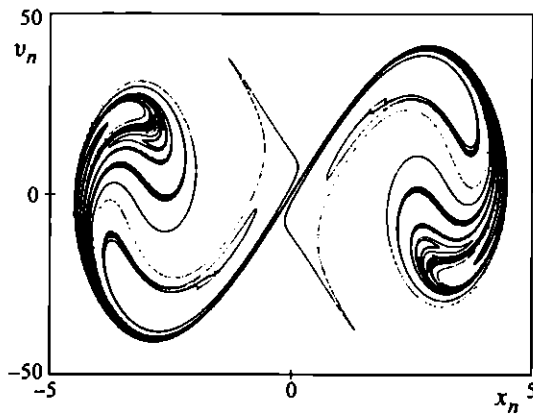
Ha a folyamatra jellemző h_f topologikus entrópiát úgy definiáljuk, mint az instabil periodikus pályák számának növekedési rátáját a folytonos időben, akkor az egyszerűen a leképezés topologikus entrópiájának T -ed része: $h = h_f T$, így az (5.67) összefüggés a $h_f \geq \bar{\lambda}_f$ alakban is érvényes.

Ezután bemutatunk néhány sima időfejlődésű kaotikus rendszert. Attraktoraikat továbbra is a stroboszkopikus leképezésen vizsgáljuk, mert egyedül ez ad áttekinthető ábrázolásra lehetőséget.

5.5.1. Helyfüggő amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor

Egy T periódusú szinuszos gerjesztésnek kitett harmonikus oszcillátort vizsgálunk, melyben azonban az A gerjesztési amplitúdó nem állandó, hanem a pillanatnyi x helykoordináta valamely adott $A(x)$ függvénye. Mivel A gyorsulás-mértékegységű, írhatjuk az $A(x) = I(x)L/T^2$ formában, ahol L valamely távolság jellegű paraméter. Ebben a rendszerben tehát a lökdösött oszcillátorban vizsgált hatást időben folytonossá tesszük. A mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - \omega_0^2 x + \frac{L}{T^2} I(x) \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \quad (5.82)$$



5.54. ábra. Az $I(x) = a \sin x$ amplitúdóval szinuszosan gerjesztett harmonikus oszcillátor ((5.83) egyenlet) kaotikus attraktora a T időnként numerikusan képzett stroboszkopikus leképezésen. A paraméterek: $\alpha T = 2,5$, $\omega_0 T = 6$, $a = 600$.

Az időt a gerjesztési periódus T egységeiben, a távolságot az L paraméter egységeiben mérve,¹³ a dimenziótlan mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} = -\alpha T \dot{x} - \omega_0^2 T^2 x + I(x) \cos(2\pi t). \quad (5.83)$$

Az $I(x) = a \sin x$ amplitúdófüggvénynek megfelelő választáshoz tartozó kaotikus attraktort az 5.54. ábra mutatja.

5.5.2. Állandó amplitúdoval gerjesztett anharmonikus oszcillátor

Ebben a modellben a lineáris erőtörvénytől való eltérés hatását vizsgáljuk. A gerjesztési amplitúdót állandó $A = IL/T^2$ értéken tartjuk, ahol I a gerjesztési amplitúdó dimenziótlan nagysága. A rugóerőről feltesszük, hogy a megnyúlással nő, az egységnyi tömegegre jutó rugóerőt a $-(\omega_0^2 x + \varepsilon_0 x^3)$ alakban írjuk. A mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - \omega_0^2 x - \varepsilon_0 x^3 + \frac{L}{T^2} I \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \quad (5.84)$$

Az időt a gerjesztési periódus T egységeiben, a távolságot az $L = \omega_0/\sqrt{\varepsilon_0}$ paraméter egységeiben mérve, a dimenziótlan egyenlet (l. 8.1. függelék)

$$\ddot{x} = -\alpha T \dot{x} - \omega_0^2 T^2 (x + x^3) + I \cos(2\pi t). \quad (5.85)$$

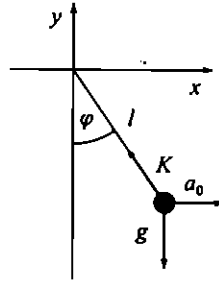
Ennek a rendszernek a stroboszkopikus leképezésen numerikusan meghatározott attraktorát láthattuk az 1.2.1. szakasz 1.4. ábráján, ahol a paraméterek $\alpha T = 0,6$, $\omega_0 T = 6$ és $I = 1800$. Az attraktoron kialakuló természetes eloszlást a XIII. színes tábla és a könyv hátsó borítója mutatja.

Ezek a példák jól illusztrálják, hogy a sima helyfüggésű amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktora jellegében nem különbözik a harmonikusan gerjesztett rendszerekétől. Nem lényeges, hogy a nemlinearitás az amplitúdófüggvényből vagy a rugóerőből származik-e, a deformált Cantor-szálas szerkezet mindig megjelenik.

5.5.3. Harmonikusan rezegtetett felfüggesztésű inga

Utolsó példánkban a gerjesztés a felfüggesztési pont mozgásából származik. Egy merev szárú, l hosszúságú matematikai ingának (5.55. ábra) a felfüggesztési pontját vízszintesen síkban, A amplitúdójú, T periódusidejű harmonikus rezgéssel mozgatjuk, melynek kitérés-idő függvénye $x_0(t) = A \cos(2\pi t/T)$. A mozgásegyen-

¹³Azok számára, akik nem jártasak az egyenletek dimenziótlanításában, ajánljuk a 8.1. függelék elolvasását.



5.55. ábra. Matematikai inga, a vízszintesen harmonikusan rezgő felfüggesztési pontjához rögzített koordináta-rendszerben. A testre ezért hat az a_0 tehetetlenségi gyorsulás. K az egységnyi tömegre vonatkoztatott kötélrő.

letet a felfüggesztési ponthoz rögzített koordináta-rendszerben írjuk fel, s a rezgetés hatását a gyorsuló koordináta-rendszerben ébredő, időben változó $a_0(t)$ tehetetlenségi gyorsulással vesszük figyelembe:

$$a_0(t) = -\frac{d^2 x_0}{dt^2} = A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right). \quad (5.86)$$

A gyorsulások vízszintes és függőleges komponenseinek előjeles összegével a légtüres térben érvényes egyenletek:

$$\ddot{x} = -K \sin \varphi + a_0(t), \quad \ddot{y} = K \cos \varphi - g, \quad (5.87)$$

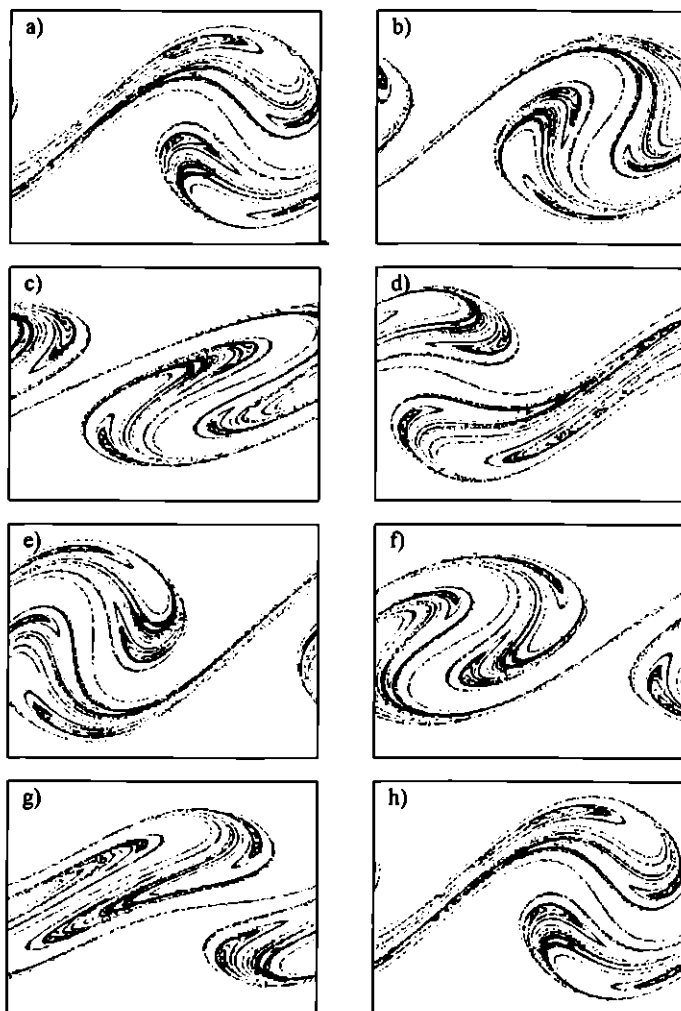
ahol K az egységnyi tömegre vonatkoztatott kötélrő, g pedig a gravitációs gyorsulás (l. 5.55. ábra). Az $x = l \sin \varphi$, $y = -l \cos \varphi$ képletekkel áttérünk a $\varphi(t)$ szög-változóra. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $l\ddot{\varphi} = \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi$. Az (5.87) egyenleteket ide beírva a kötélrő kiesik. A szögsebességgel arányos α együttthatójú közegellenállást (súrlódást) is feltételezve a

$$\ddot{\varphi} = -\alpha \dot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{A}{l} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cos \varphi \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (5.88)$$

mozgásegyenletet kapjuk. Az időt a gerjesztési periódus T egységében mérve a dimenziótlan mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} = -\alpha T \dot{\varphi} - \frac{g}{l} T^2 \sin \varphi + \frac{A}{l} (2\pi)^2 \cos \varphi \cos(2\pi t). \quad (5.89)$$

Ennek a rendszernek a stroboszkopikus leképezésen numerikusan meghatározott attraktorát láttuk az 1.5. ábrán, az $\alpha T = 0, 2\pi$, $T\sqrt{g/l} = 2\pi/3$ és $A/l = 2$ paraméterek mellett. Az ehhez tartozó természetes eloszlást a XIV. színes tábla mutatja.



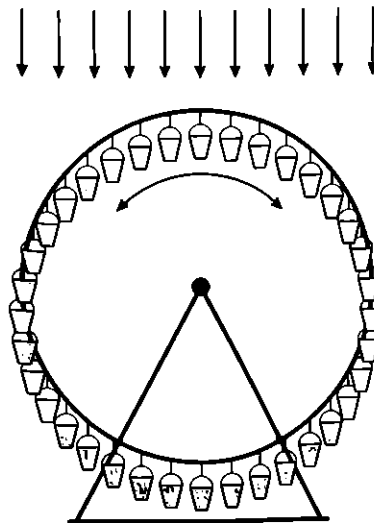
5.56. ábra. A rezgetett inga kaotikus attraktora különböző fázisokban készült stroboskopikus leképezéseken. Az első képen (mely azonos az 1.8. ábrával) a kezdőfázis $\varphi_0 = 0$, a többin rendre $\varphi_0 = 2\pi/7, 4\pi/7, \dots, 14\pi/7$. (Az első és utolsó ábra között éppen 2π a fáziskülönbség, így azok megegyeznek.)

Az attraktor szerkezetéről szerzett ismereteinket kiegészítjük a kaotikus attraktor fázisfüggésének bemutatásával. A trajektóriákat rendre az nT ($n = 1, \dots$), a $T/7 + nT$, ill. általában a $kT/7 + nT$ ($k = 0, \dots, 7$) pillanatokban metsszük. Ez annak felel meg, hogy a kezdőfázis értéke rendre $\varphi_0 = k2\pi/7$ ($k = 0, \dots, 7$). Ezzel mintha különböző „emeleteken” néznénk rá a kaotikus attraktorra egyetlen periód-

duson belül. A kezdőfázis folytonos változtatásával az is elérhető, hogy felfelé „liftezzünk” a fázistengely mentén, és ezzel a a kaotikus attraktor folytonos időbeli mozgását (ami természetesen T után periodikusan ismétli önmagát) kapnánk. Az 5.56. ábra képsorozata ennek a filmnek néhány kockáját mutatja. A kaotikus attraktor alakja természetesen függ a fázis φ_0 értékétől, D_0 fraktáldimenziója (és D_1 információs dimenziója) azonban – mint a fejezet elején láttuk – minden fázis mellett ugyanaz.

5.6. A vízikerék

A disszipatív rendszerekben kialakuló kaotikus mozgás nemcsak időben periodikus külső hatás következménye lehet, hanem bármilyen energiabetáplálási folyamaté. Ebben az általános esetben is a fázistér legalább háromdimenziós, de egyik változónak sem kell feltétlenül a végtelenbe futnia (mint a gerjesztés φ fázisának). A kaotikus attraktor ekkor megjelenhet a fázistér valamely korlátos háromdimenziós tartományán belül is. Erre ad példát a vízikerék-probléma, amely a híres Lorenz-modellel rokon egyenleteken alapul.

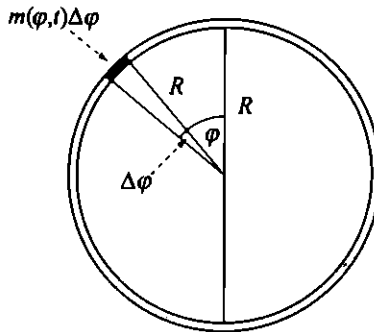


5.57. ábra. A vízikerék. Egy kör alakú, tengellyel rögzített abroncsra szimmetrikusan vödöröket rögzítünk, melyekre folyamatosan hull az eső. A kerék mindkét irányban szabadon elfordulhat.

Tekintsünk egy súlyos, kör alakú abroncsot, melyre az 5.57. ábrán látható módon – teljesen szimmetrikusan – vödörket rögzítünk. Az abroncs a közepében elhelyezett tengely mentén jobbra vagy balra szabadon elfordulhat. Erre a szerkezetre hulljon állandó, térben homogén eloszlású eső, és tételezzük fel azt is, hogy valamennyi víz folyamatosan távozik a vödörökből. Kérdés az, hogy a szimmetrikus elrendezés ellenére forgásba jöhet-e a vízikerek, és ha igen, akkor milyen lesz mozgása hosszú távon.

5.6.1. A mozgásegyenlet

A vízikerek egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy a vödörök nagyon kicsik, számuk nagyon nagy, könnyűek, és csak a bennük lévő víznek a tömege számottevő. Így a vízmennyiség eloszlása az abroncs mentén folytonosnak tekinthető. Egy adott t pillanatban az abroncs kis $\Delta\varphi$ ívhosszú részére jutó víz tömegét jelöljük $m(\varphi, t)\Delta\varphi$ -vel. Az m mennyiség a térben rögzített egységnyi ívhosszra eső víztömeg, ami függ a helytől (a φ szögtől (l. 5.58. ábra)), valamint a ki- és a befolyó víz miatt az időtől is.



5.58. ábra. Az R sugarú vízikerek modellje, ahol a folytonosnak tekintett apró vödörök sokaságának a helyzetét a φ szög határozza meg, a $\Delta\varphi$ ívelemre jutó víz tömege $m(\varphi, t)\Delta\varphi$.

A kerék mozgásegyenletének meghatározásához fel kell írunk az abroncs minden kis ívelemén elhelyezkedő víztömeg súlyának tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékát. Ez a φ szög körüli ívelemen

$$m(\varphi, t)\Delta\varphi g R \sin \varphi, \quad (5.90)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás, R pedig az abroncs sugara. Az abroncs súlyából a köralak szimmetriája miatt eredő forgatónyomaték nem adódik. A teljes abroncsra

ható forgatónyomaték a kis $\Delta\varphi$ ívelemekre jutó forgatónyomatékok összege, azaz integrálja:

$$N = \int_0^{2\pi} d\varphi m(\varphi, t) g R \sin \varphi. \quad (5.91)$$

(Vegyük észre, hogy az eredő forgatónyomaték csak akkor nem nulla, ha az m víz-tömeg φ szerinti eloszlása aszimmetrikus!)

Tételezzük fel, hogy a pillanatnyi ω szögsebességgel arányos sűrűdésből adódó forgatónyomaték is fellép. A mozgásegyenlet azt fejezi ki, hogy a szöggyorsulás arányos az eredő forgatónyomatékkal:

$$\Theta \dot{\omega} = N - \alpha \omega. \quad (5.92)$$

Itt Θ a rendszer tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, $\alpha > 0$ pedig a sűrűdési együttható. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az abroncs sokkal nehezebb, mint a vízzel teli vödörök teljes súlya, s ezért a Θ tehetetlenségi nyomatékot az abroncs határozza meg, ami így az időben állandó.

Az N forgatónyomaték kiszámításához ismernünk kell a víz $m(\varphi, t)$ tömegeloszlását. Tételezzük fel, hogy az eloszlás az

$$m(\varphi, t) = A(t) \sin \varphi + B(t) \cos \varphi \quad (5.93)$$

alakban írható. Ezzel csak a szögfüggést választottuk egyszerű alakúnak, ugyanis az A és B időfüggő amplitúdók egyelőre ismeretlenek. Ha a teljes mozgásegyenlet megoldásából az adódik, hogy $A(t) \neq 0$, akkor az $A(t) \sin \varphi$ tag miatt a tömegeloszlás aszimmetrikus. Ennek hiányában az eredő forgatónyomaték mindig zérus, és így legfeljebb csak egyszerű csillapodó mozgás alakulhat ki (ha a kezdő szögsebesség nem nulla).

Az (5.91) integrál elvégzésével a teljes forgatónyomaték (a $\sin^2(\varphi)$ függvény teljes periódusra vett integrálja π):

$$N = g R \pi A. \quad (5.94)$$

A mozgásegyenlet tehát:

$$\dot{\omega} = \frac{g R \pi}{\Theta} A - \frac{\alpha}{\Theta} \omega. \quad (5.95)$$

Az egyenletet nem tudjuk megoldani, mert nem zárt, az $A(t)$ függvényt még nem ismerjük. Ehhez egy újabb összefüggésre van szükségünk, amelyet a víz tömegmegmaradása biztosít.

A $\Delta\varphi$ ívelemre egy időegység alatt hulló és kifolyó csapadék, továbbá a kerék elfordulásából az ívelemre „beforduló” és onnét „kiforduló” vízmennyiség előjeles összegének meg kell egyeznie az időegység alatt megváltozó víztömeggel, azaz $\Delta\varphi \cdot \partial m(\varphi, t) / \partial t$ -vel. (Ne felejtjük el, hogy a $\Delta\varphi$ ívelem a térben, és nem a kerékhez rögzített!)

Feltesszük, hogy a csapadék térben egyenletesen oszlik el. Az R hosszúságú vízszintes szakaszra időegység alatt hulló vízmennyiséget jelölje $q > 0$. Ez az eső intenzitásának mérőszáma. Miután az abroncs $\hat{R}\Delta\varphi$ darabkájának vízszintes vetülete $R \cos(\varphi)\Delta\varphi$, az ívelemre időegység alatt lehulló vízmennyiség $q \cos(\varphi)\Delta\varphi$. Az időegységenként kifolyó vízmennyiség legyen arányos a vödörökben lévő víz tömegével és a $\kappa > 0$ arányossági tényezővel. Modellünkben a kifolyó víz nem folyik bele más vödörbe, ezért a vízvesztés időegységenként: $-\kappa m(\varphi, t)\Delta\varphi$.¹⁴ Egy adott ívelemen az egységnyi idő alatt be- és kiforduló vízmennyiség $\omega m(\varphi, t)$, ill. $-\omega m(\varphi + \Delta\varphi, t)$. Ha $\Delta\varphi$ tart nullához, akkor előjeles összegük a $-\omega \Delta\varphi \partial m(\varphi, t) / \partial \varphi$ alakban felírható.

Mindezeket egy egyenletben összegezve és $\Delta\varphi$ -vel egyszerűsítve, megkapjuk a vízikerek tömegmegmaradási vagy más néven kontinuitási egyenletét:¹⁵

$$\frac{\partial m(\varphi, t)}{\partial t} = q \cos(\varphi) - \kappa m(\varphi, t) - \omega \frac{\partial m(\varphi, t)}{\partial \varphi}. \quad (5.96)$$

Az (5.93) tömegeloszlást a kontinuitási egyenletbe helyettesítve az

$$\dot{A} \sin \varphi + \dot{B} \cos \varphi = q \cos \varphi - \kappa A \sin \varphi - \kappa B \cos \varphi - \omega A \cos \varphi + \omega B \sin \varphi$$

egyenlethez jutunk, melynek természetesen minden φ szögre teljesülnie kell. Míg az (5.95) mozgásegyenletben csak az aszimmetrikus rész A amplitúdója lépett fel, addig a kontinuitási egyenletben mindkét amplitúdó fontos. Az egyenlőség csak úgy állhat fenn minden φ szögre, ha a $\sin \varphi$ -vel és a $\cos \varphi$ -vel arányos tagok együtthatói külön-külön eltűnnek. Ezzel az

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\kappa A + \omega B, \\ \dot{B} &= q - \kappa B - \omega A \end{aligned} \quad (5.97)$$

¹⁴Egy kísérleti célra megépített vízikereken ez úgy érhető el, hogy az abroncs síkját a függőlegestől kissé megdöntjük.

¹⁵A kontinuitási egyenletet általános alakja $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = Q$, ahol ρ a megmaradó mennyiség térbeli sűrűsége, \mathbf{v} az áramlási sebesség, Q pedig a forráserősség. A mi rendszerünkben $\rho \rightarrow m$, $\mathbf{v} \rightarrow \omega$, $Q \rightarrow q \cos \varphi - \kappa m$, és a divergenciát a φ szerinti parciális deriválás helyettesíti.

egyenleteket kapjuk. Az (5.97) és (5.95) egyenletek egy zárt, *autonóm, elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert* alkotnak, amelynek A , B és ω a független változói. Az egyenletrendszer *nemlineáris*, de benne a legegyszerűbb típusú kvadratikus nemlinearitás szerepel, az ωB és ωA tagok jelenlétével. Ez az egyenletrendszer a vízikerék dinamikáját egyértelműen meghatározza. A rendszer forgása azon múlik, hogy létezik-e olyan megoldás, amiben ω nem tart nullához.

Megjegyezzük, hogy az eredmény nem változik akkor sem, ha a feltételezett (5.93) tömegeloszlás helyett az általános $m(\varphi, t) = A(t) \sin \varphi + B(t) \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n(t) \sin(n\varphi) + B_n(t) \cos(n\varphi))$ alakot használjuk. Az eredő forgatónyomatékokat meghatározó (5.91) integrálhoz ugyanis most is csak $A(t) \sin \varphi$ ad járulékot, így az általános eloszláshoz is az (5.94) forgatónyomaték tartozik. Az (5.96) kontinuitási egyenletből a különböző harmonikusok együtthatóira (5.97) mellett az $\dot{A}_n = -\kappa A_n + n\omega B_n$, $\dot{B}_n = -\kappa B_n - n\omega A_n$, $n \geq 2$ összefüggéseket kapjuk. Az (5.95), (5.97) egyenletekről tehát *lecsatolódnak* az A_n , B_n , $n \geq 2$ együtthatók. Ez utóbbiak *nem* befolyásolják sem A és B , sem a szögsebesség értékét, vagyis azt sem, hogy forog-e a kerék, és ha igen, akkor milyen gyorsan.¹⁶

A vízikerék fázisterét az A , B és ω változók feszítik ki. A rendszer disszipatív, amit a fázistérfoghatóság σ összehúzódnási rátájának (l. (3.60)) pozitív előjele mutat: $\sigma \equiv -(\partial \dot{A} / \partial A + \partial \dot{B} / \partial B + \partial \dot{\omega} / \partial \omega) = 2\kappa + \alpha / \Theta$.¹⁷ A vízikeréknek tehát léteznek *attraktorai*. Ezek jellemzik a hosszú idő után kialakuló mozgást.

5.6.2. Fixpontok és stabilitásuk

A háromdimenziós fázistérben fixpont ott található, ahol teljesül az $\dot{A} = \dot{B} = \dot{\omega} = 0$ feltétel. Az (ω^*, A^*, B^*) fixpontokat meghatározó egyenletek (5.95), (5.97) alapján:

$$\begin{aligned} gR\pi A^* - \alpha\omega^* &= 0, \\ -\kappa A^* + \omega^* B^* &= 0, \\ q - \kappa B^* - \omega^* A^* &= 0. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Az (5.98) egyenletrendszernek egyik lehetséges megoldása az $\omega^* = 0$, $A^* = 0$, $B^* = q/\kappa$ triviális fixpont. Miután a szögsebesség nulla, ezért ez a kerék álló állapota. Várakozásunknak megfelelően a nyugalom feltétele az, hogy a tömegeloszlásban a $\sin \varphi$ -vel arányos tag ne legyen jelen.

¹⁶Ez a lecsatolás érvényes még akkor is, ha a szimmetrikus esőeloszlás $q \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cos(n\varphi)$ alakú.

¹⁷Vegyük észre, hogy a rendszer a súrlódásmentes esetben is disszipatív a vízvesztés (a 2κ tag) miatt!

Létezhethet azonban egy másik megoldás is. Ha $\omega^* \neq 0$, akkor A^* -t és B^* -t kifejezve az

$$\omega^* = \pm \sqrt{\frac{qgR\pi}{\alpha} - \kappa^2} \quad (5.99)$$

összefüggést kapjuk. Ennek a feltétele, hogy ω^* valós legyen, az, hogy a gyök alatti kifejezés pozitív, azaz

$$q > q_c = \frac{\kappa^2 \alpha}{gR\pi} \quad (5.100)$$

legyen. Az eső erősségének tehát a q_c kritikus értéknél *nagyobbnak* kell lennie ahhoz, hogy a kerék foroghasson. Ilyenkor a \pm előjel két különböző irányú forgásnak felel meg, vagyis két nemtriviális fixpont is létezik (l. 5.59. ábra). A másik két változó az

$$A^* = \omega^* \frac{\alpha}{gR\pi}, \quad B^* = \frac{\alpha\kappa}{gR\pi} \quad (5.101)$$

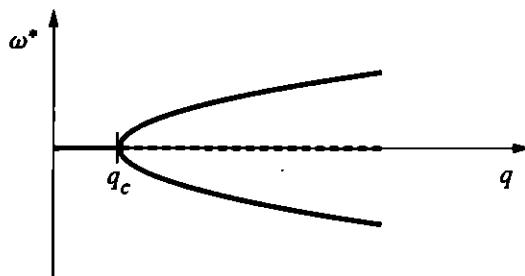
értéket veszi fel. A tömegeloszlás $A^* \neq 0$ miatt aszimmetrikus és A^* arányos a szögsebességgel.

5.34. feladat. Becsüljük meg, hogy mekkora a kritikus esőintenzitás, ha a vízi-kerék paraméterei: $R = 0,3$ m, $\kappa = 0,1$ s⁻¹ és $\alpha = 1$ kgm²/s (ez utóbbi kb. 1 kg tömegű kerék esetén reális). Mekkora a forgási szögsebesség és A^* , B^* a kritikus érték feletti $q = 2q_c$ esőerősség esetén?

Ha az eső gyenge, ha $q < q_c$, akkor az $\omega^* = 0$, $A^* = 0$, $B^* = q/\kappa$ fixpont stabil (l. 5.35. feladat), attraktor, vagyis ha megforgatjuk a kereket, akkor az előbbutóbb megáll. Ha $q > q_c$, akkor a triviális fixpont instabil (hiperbolikus fixponttá válik), azonban megjelenik a két nemtriviális fixpontattraktor (l. 5.36. feladat). A rendszer tehát az eső intenzitásának növelésekor vasvilla-bifurkáción (l. 3.3.2. szakasz) megy keresztül. A jelenség analóg a 3.14. ábrán bemutatott bistabil állapotok kialakulásával. A $q > q_c$ tartományban a tömegeloszlás szimmetriáját sértő kis eltérések maguktól felerősödnek, és véges A^* érték megjelenésére vezetnek. A vízi-kerék ekkor állandó szögsebességű forgást végez jobb vagy bal körüljárással.

Érdeemes dimenziótlanítani a mozgásegyenleteket. Vezessük be az új x , y , z dimenziótlan változókat az $\omega = \kappa x$, $A = B^* y$, $B = -B^* z + q/\kappa$ összefüggések alapján, és mérjük az időt $1/\kappa$ egységekben. Ezzel az (5.95), (5.97) egyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -z + xy, \end{aligned} \quad (5.102)$$



5.59. ábra. A vízikerek bifurkációja. Ameddig az eső intenzitása kisebb, mint a kritikus q_c érték, addig egyetlen pontattraktor létezik, az álló állapotnak megfelelő. Ez a fixpont $q > q_c$ esetén instabillá válik, de egyúttal létrejön két új pontattraktor, melyekhez különböző irányú egyenletes forgás tartozik.

ahol csak két dimenziótlan paraméter jelent meg:

$$\sigma \equiv \frac{\alpha}{\Theta\kappa} \quad \text{és} \quad r \equiv \frac{qgR\pi}{\nu\kappa^2}. \quad (5.103)$$

Az első a vízvesztéssel és a súrlódással kapcsolatos lecsengési idők hányadosa,¹⁸ a második a dimenziótlanított esőintenzitás. Az új x , y és z változók által kifeszített fázistérben a triviális fixpont az origóba esik, a nemtriviális fixpontok pedig

$$\begin{aligned} x^* &= y^* = \pm\sqrt{r-1}, \\ z^* &= r-1, \end{aligned} \quad (5.104)$$

amelyek csak akkor léteznek, ha $r > 1$.

5.35. feladat. Mutassuk meg, hogy az $r < 1$ ($q < q_c$) tartományban a triviális fixpont stabil!

5.36. feladat. Határozzuk meg a nemtriviális fixpontok stabilitási mátrixát! Milyen r paramétertartományban stabilak ezek a fixpontok? (A stabilitásvesztés úgy történik, hogy két komplex sajátérték negatív valós része eltűnik, majd pozitív lesz.)

¹⁸A σ jelölést történeti okok indokolják; hangsúlyozzuk, hogy σ nem egyezik meg a fázistér-fogat-összehúzódnási rátával, ami a dimenziótlan rendszerben $\sigma + 2$.

12. A Lorenz-modell

Edward Lorenz amerikai meteorológus 1963-ban fedezte fel, hogy az azóta róla elnevezett

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (5.105)$$

modellben az $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ paraméterek mellett, apró kezdeti feltételekbeli különbségek esetén is jelentősen eltérőek a numerikusan szimulált időfejlődések eredményei. Ez volt az első példa az előrejelezhetetlenség (és az emögött álló kaotikus attraktor) megjelenésére kis szabadságfokú autonóm rendszerben. A Lorenz-modell azóta a folytonos idejű kaotikus rendszerek alappéldája lett.

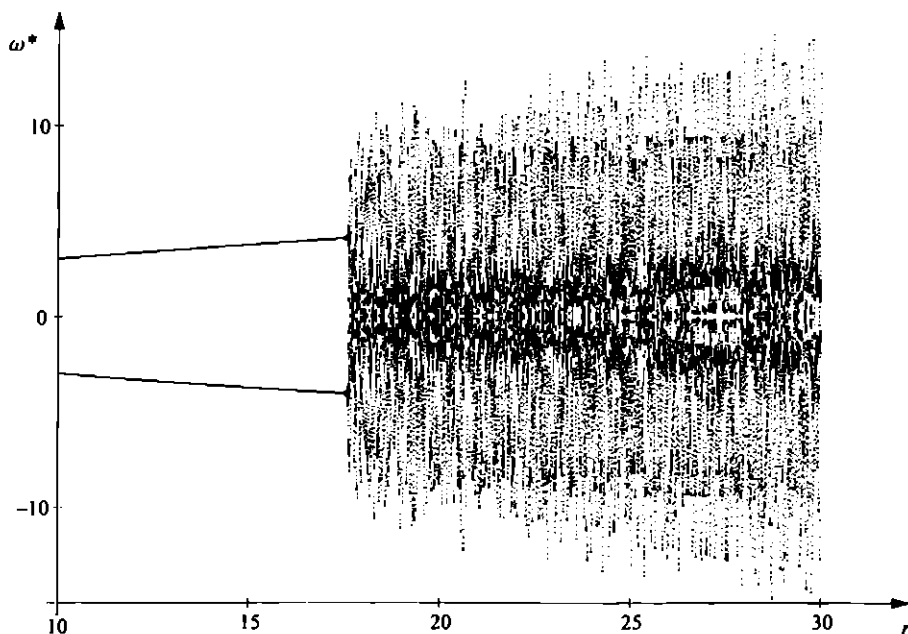
A modell (5.105) egyenletei levezethetők a termikus konvekciót, az alulról fűtött folyadék réteg áramlását leíró hidrodinamikai egyenletekből. E jelenség a légköri mozgások szempontjából valóban alapvető, mert a napsugarak által felmelegített talaj is alulról fűti a levegőt. Amíg az alsó és a felső lap ΔT hőmérsékletkülönbsége kicsi, addig az áramlás nem indul meg, csak hővezetés zajlik, mert a felhajtóerő még nem elég nagy ahhoz, hogy a viszkozitást legyőzze. Egy kritikus ΔT_c hőmérséklet-különbség meghaladása esetén beindul az áramlás. Amíg csak *kevés* vagyunk a kritikus érték felett, az áramlás a vízszintes síkban egymással szemben forgó hengerek mentén zajlik, melyek átmérője jó közelítéssel megegyezik a folyadék réteg vastagságával. A hidrodinamikai egyenletekből ekkor (5.105) levezethető. Az x mennyiség a

hengerekbeli körkörös áramlás erősségével arányos, y és z pedig a lineáris magasságfüggésű hőmérsékletprofilról való eltéréssel. Az y változó a rétegvastagságnak megfelelő hullámhosszú hőmérséklet-eltérések nagyságát, a z pedig a feleakkora hullámhosszú eltérések nagyságát méri. A σ paraméter a folyadék hődiffúziós állandójának és kinematikai viszkozitásának aránya, a Prandtl-szám (ami vízben 0,72, levegőben 7,1), a $b = 8/3$ érték a hengeres geometriából következik, és $r = \Delta T / \Delta T_c$, amire fennáll az $r \approx 1$ megkötés. Amíg r kisebb 1-nél, minden kezdeti mozgás kihal. Konvekciós áramlást a Lorenz-egyenlet csak a $0 < r - 1 \ll 1$ tartományban ír le. Ott, ahol a Lorenz-modellben káosz megjelenik ($r > 24,06$), az egyenletnek már régen nincs köze a konvekció problémájához. (Ez természetesen nincs ellentmondásban azzal, hogy az r érték növelésének megfelelő erősödő fűtés mellett a valóságban is egyre bonyolultabb áramlások figyelhetők meg, pl. vízmelegítés közben. Ezeket azonban csak a teljes hidrodinamikai egyenletek írják le, melyek ebben a tartományban már nem vezethetők vissza egyszerű közönséges differenciálegyenletek rendszerére.)

Szerencsére több olyan fizikai probléma is létezik, melyekben a Lorenz-egyenletek a jelenség hű modelljét adják a fizikailag érdekes paramétertartományokban is. Ilyen a vízikerek esete, melyben az egyetlen eltérés az, hogy a b paraméter értéke nem változtatható, a vízikerek dinamikáját a Lorenz-egyenletek a $b \equiv 1$ választással írják le, az eredeti konvekciós problémától alapvetően különböző összefüggésben.

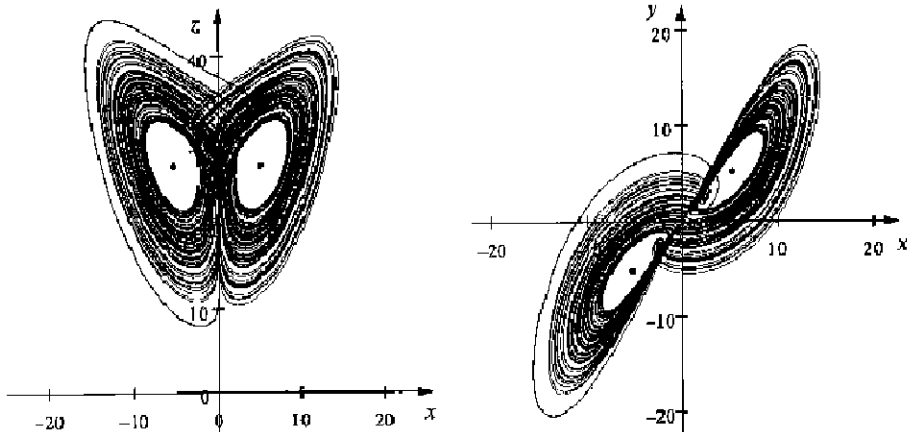
5.6.3. A vízikerék káosza

Az esőerősség (az r dimenziótlan paraméter) növelésekor a vízikerék hosszú idő után beálló forgása nem marad mindig egyenletes szögsebességű. Egy bizonyos r paraméter fölött, a kerék egy ideig jobb-, majd balirányú körüljárással forog, és forgásirányát rendszertelenül változtatja. Mozgása kaotikus. A σ paramétert rögzítve azt tapasztaljuk (l. 5.60. ábra), hogy a káosz r növelésével *hirtelen* jelenik meg (nem az 5.3. szakaszban tárgyalt perióduskettőző bifurkációsorozattal).



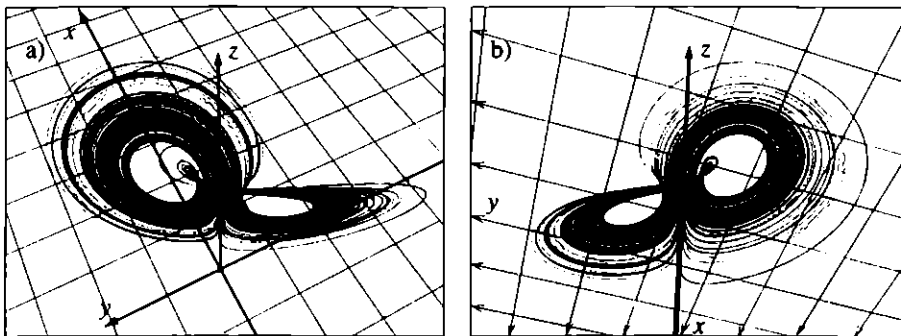
5.60. ábra. Vízikerék bifurkációs diagramja a $\sigma = 10$ paraméter mellett. Káosz az $r \approx 17,5$ értéknél jelenik meg.

Elegendően nagy r értékekre a két nemtriviális fixpont is instabil és ilyenkor egyetlen kaotikus attraktor létezik a rendszerben. A háromdimenziós térben az attraktoron futó trajektória néhányszor megkerüli az egyik instabil fixpontot a $z = r - 1$ síkon, majd átvált a másik oldalra, az ottani instabil fixpontot járja körül jó néhány-szor, és ez ismétlődik előre nem jósolható számú körüljárásig mindkét oldalon. Egyik fixpont sem része a kaotikus attraktornak, ezért azon két nagy lyuk figyelhető meg a fixpontok környékén. Az attraktor alakja egy pillangóhoz, pontosabban annak két szárnyához hasonló (l. 5.61. ábra).



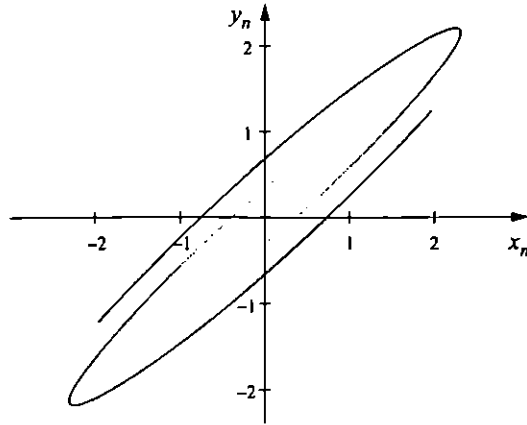
5.61. ábra. A vízierék kaotikus attraktorának vetülete az x, z és az x, y síkra ($\sigma = 10, r = 28$). A hiperbolikus fixpontokat egy-egy fekete pont jelzi.

A háromdimenziós térbeli ábrázolással áttekinthetőbb képet kapunk (5.62. ábra), és itt már az is érzékelhető, hogy az attraktor nem egyetlen megtekert sima felület, hanem mindegyik pillangószárny több, nagyon közeli felület összessége, melyek fraktálhalmazt alkotnak.

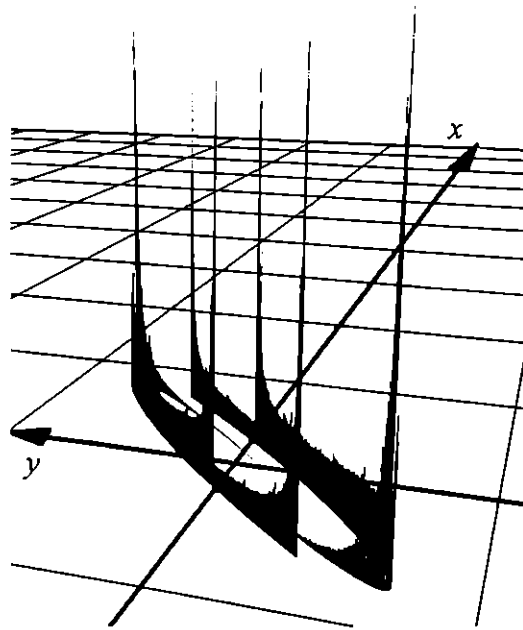


5.62. ábra. A vízierék kaotikus attraktorának két térbeli nézete: a) felülről, b) alulról ($\sigma = 10, r = 28$). A vékony nyilak a b) ábrán az x , ill. y változó növekedésének irányát jelzik, az x , ill. az y tengely nem látszik.

Annak érdekében, hogy kétdimenziós ábrázolást kapjunk, érdemes az attraktort egy síkkal el metszeni, és az adott irányból, pl. felülről jövő trajektóriák met-



5.63. ábra. A vízikerék kaotikus atraktora a $z = r - 1$ Poincaré-metszeten ($\sigma = 10$, $r = 28$).



5.64. ábra. A vízikerék természetes eloszlása a $z = r - 1$ Poincaré-metszeten ($\sigma = 10$, $r = 28$).

széspontjait a síkon rögzíteni. Ezzel egy ún. Poincaré-leképezést definiálunk, melyről bővebben a 8.1. függelékben lesz szó. A Poincaré-síkon az attraktor mindössze két görbe vonalnak tűnik (l. 5.63. ábra), mert a disszipáció erős (időegységenként $e^{\sigma+2} = e^{12} \approx 1,6 \times 10^5$ -szeresére húzódik össze a térfogat).

A metszet használatának nagy előnye, hogy rajta áttekinthetően ábrázolható a természetes eloszlás. Egyetlen hosszú trajektória futtatásából jól meghatározható, hogy az attraktor egyes pontjaiban milyen gyakran fordul elő. Az eloszlás még jobban utal a fraktálszerkezetre, mint az attraktor alakja. Megfigyelhető, hogy bizonyos helyeken (5.64. ábra) az eloszlás igen nagy értékeket vesz fel, másutt viszont közel állandó, és ezek a tartományok minden skálán váltakoznak. Annak ellenére, hogy a leképezés mögött rejlő fizikai folyamat alapvetően különbözik a lökdösött oszcillátortól, az eloszlás jellege mégis hasonló a parabolikus amplitúdófüggvényhez tartozó esethez (l. 5.48c. ábra). Mindez arra is utal, hogy a kaotikus attraktorok szerkezete nem függ alapvetően attól, hogy időben periodikusan vagy más módon juttatunk energiát a rendszerbe.

5.37. feladat. Numerikus szimulálással határozzuk meg az

$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = x+ay, \quad \dot{z} = b+xz-cz$$

egyenletrendszer, az ún. Rössler-modell kaotikus attraktorát az $a = b = 0,2$, $c = 5,7$ paramétereknél. A teljes attraktor a változók pozitív értékeihez tartozik.

Káosz konzervatív rendszerekben

A mozgások egy speciális, de fontos osztályát alkotják azok, amelyek során a súrlódás elhanyagolható, vagy általánosabban fogalmazva, amelyekben disszipatív hatások nem játszanak szerepet. Ilyenkor az idő iránya nem kitüntetett, a differenciálegyenlettel leírt folyamat reverzibilis: az időben előre haladva hasonló viselkedést tapasztalunk, mint időben hátrafelé haladva. Gondoljunk például egy bolygóra, melynek filmre vett mozgásáról nem lehet eldönteni, hogy az a valódi időben történik vagy pedig a megfordított időben. A súrlódásmentes rendszerekben a fázistér-fogat nem változik, attraktorok nem létezhetnek. Itt a káosz megnyilvánulása is más jellegű, mint a disszipatív esetekben. Ennek tanulmányozását a pékleképezés területtartó esetének és egy másik súrlódásmentes rendszer, a lökdösött rotátor stroboszkopikus leképezésének a példáján kezdjük meg. Ezután folytonos idejű, nem gerjesztett (zárt) súrlódásmentes rendszerek mozgásának bemutatása következik. A példák alapján megfogalmazzuk a súrlódásmentes káosz általános tulajdonságait. Kimondjuk az ezzel kapcsolatos legfontosabb összefüggést, az ún. KAM-tételt. Tárgyaljuk a súrlódásmentes rendszerekre jellemző kaotikus sávok szerkezetét és összehasonlítjuk azt a kaotikus attraktorokéval. Végül bemutatjuk, hogy az egyre erősödő káosz milyen formákban jelenhet meg, és vizsgáljuk ennek következményeit.

6.1. Súrlódásmentes rendszerek fázistere

Mivel a hétköznapi jelenségekben, sőt mindenfajta makroszkopikus dinamikában elkerülhetetlen a disszipáció, ezért a súrlódásmentes esetet csak a súrlódásos eset megismerése után tárgyaljuk. Egyszerű példaként légiűres térben lejátszódó moz-

gásokat tekintünk. Ugyanakkor hangsúlyozzuk, hogy olyan jelenségek, mint az űrhajók, égitestek Naprendszeren belüli helyváltoztatása vagy a töltött részecskék mozgása gyorsítók, ill. fúziós berendezések elektromos és mágneses terében, mind nagyon jó közelítéssel súrlódásmentes folyamatok. Belátható, hogy a folyadékok összenyomhatatlansága miatt első közelítésben ilyen típusú az áramlások által sodrott szennyezések dinamikája is. A súrlódásmentes rendszerekbeli káosz számára tehát elsősorban az űrkitatás–csillagászat, a plazmafizika és a hidrodinamika–környezetfizika jelent alkalmazási területet.

A súrlódás mindig fázistérfogat-összehúzóddással jár. A súrlódásmentes rendszerek alapvető tulajdonsága, hogy mozgásuk során a *fázistérfogat nem változik*. Ezért szokás ezeket *konzervatív* rendszereknek is nevezni.¹ Hatékony leírásukra a klasszikus mechanika kanonikus formalizmusa szolgál, melynek a témához tartozó legfontosabb állításait a 8.5. függelékben összefoglaljuk, de a formalizmus ismeretét a továbbiakban nem tételezzük fel. A konzervatív rendszerek (3.60) fázistérfogat-összehúzóddási rátája tehát definíció szerint zérus:

$$\sigma \equiv 0. \quad (6.1)$$

Ennek fontos következménye, hogy a fázistérnek *nem* lehet olyan részalhmaza, melyre a térfogat ráhúzóddhatna. *A konzervatív rendszerekben nem létezhetnek attraktorok* (repellorok sem), a mozgás nem felejt el kezdőfeltételét, s ezért a mozgás jellege még hosszú idő után is *függ a kezdőfeltételtől*. Ennek tulajdonítható, hogy súrlódásmentes rendszerekben a káosz is úgy jelentkezik, hogy bizonyos kezdőfeltételekhez kaotikus, másokhoz ugyanakkor egyszerű mozgás tartozik (ahogy ezt az 1.2.3. szakasz ábrái mutatják).

Ilyen típusú káosz előfordul például egyenes menti (egydimenziós) gerjesztett mozgásokban, eltűnő súrlódási együttható ($\alpha = 0$) mellett. A konzervatív káosz azonban egy *másik* rendszertípusban is kialakulhat: a nem gerjesztett (zárt) súrlódásmentes rendszerekben. Ezen rendszerek vizsgálatánál döntő fontosságú, hogy az *összenergia* megmaradó mennyiség. Egy test *síkbeli* helyzetét két helykoordináta (x, y) jellemzi, amelyekhez két sebességkomponens (v_x, v_y) tartozik. A Newton-egyenlet a két gyorsuláskomponenst adja meg a hely függvényében. Ez a két másodrendű, autonóm egyenletből álló rendszer felírható négy elsőrendű (legfeljebb első időderiváltat tartalmazó) egyenlet rendszereként is. Az energiamegmaradás miatt a négy változó közül egy azonban (pl. v_y) kifejezhető a többi segítségével, s így

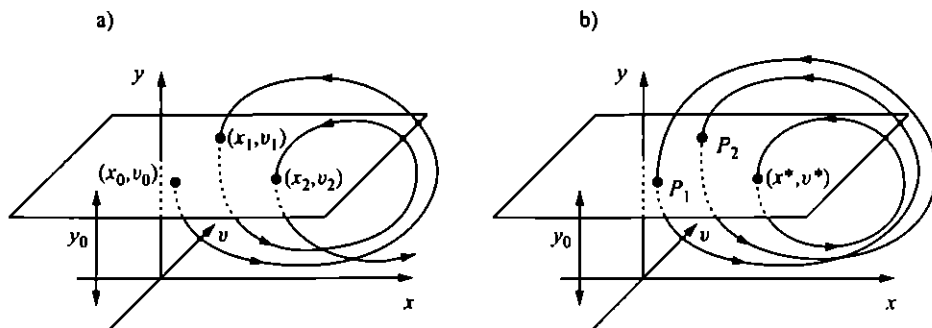
¹A konzervatív rendszerek előállnak a disszipatív rendszerek súrlódásmentes határeseteként. Ez a határátmenet azonban igen bonyolult is lehet (egyre nagyobb számú spirális attraktor jelenik meg egyre kisebb vonzási tartománnyal), ezért a konzervatív esetet érdemes külön tanulmányozni.

három független elsőrendű differenciálegyenletünk marad. A 4.8. szakaszban láttuk, hogy éppen ez a legalább háromdimenziós fázistér a kaosz megjelenésének szükséges feltétele. Ugyanez a helyzet két test egyenes menti mozgásában is. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy konzervatív kaosz előfordulhat *egyetlen test síkbeli vagy két test egyenes menti súrlódásmentes mozgásában* gerjesztés nélkül is. A továbbiakban ennél bonyolultabb eseteket nem is vizsgálunk.

Ebben a tágabb osztályban is érdemes a háromdimenziós fázistérbeli mozgást egy síkon, leképezés formájában, azaz diszkrét (lépésenként véges nagyságnyt változó) időben követni. Ez úgy tehető meg, hogy egy Poincaré-leképezést definiálunk: a rendszer trajektóriájának egyik hely- és sebességkoordinátáját akkor rögzítjük, amikor az valamilyen jellegzetes helyzetbe kerül. Ez a feltétel lehet pl. az, hogy az y koordináta adott y_0 értéket vesz fel. Ha ez teljesül, akkor leolvassuk a pillanatnyi x és v_x értékeket. A Poincaré-leképezés felvétele annak felel meg, hogy a háromdimenziós fázistérbeli folytonos trajektóriát egy felülettel elmetsszük (6.1. ábra). Emiatt a Poincaré-leképezés síkját szokás Poincaré-metszetnek is nevezni (a teljes fázistérképet pedig Poincaré-térképnek). Annak érdekében, hogy a v_x sebességérték egyértelmű legyen, mindig egy adott irányból, pl. a felülről érkező trajektóriák metszéspontjait rögzítjük. Ezek egymásutánja definiál egy

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = M(x_n, v_n) \quad (6.2)$$

leképezést. (Az egyszerűség kedvéért a sebességkomponens x indexét elhagyjuk.)



6.1. ábra. Poincaré-leképezés előállítása egy test síkbeli súrlódásmentes mozgása során. A metszetet az $y = y_0$ síkon képezzük. a) A trajektória felülről történő dőféspontjai definiálják az (x_n, v_n) koordinátákat. b) Az egy hurokból álló periodikus pályák a leképezés (x^*, v^*) fixpontjai, a kéthurkú pályák a leképezés (P_1, P_2) kettes ciklusai.

A leképezés definíciójából látszik, hogy fixpontjai a folytonos idejű rendszer *periodikus* mozgásainak felelnek meg.

A stroboszkopikus leképezéssel összehasonlítva azt látjuk, hogy most a metszetet nem adott fázisú pillanatokban, hanem adott *konfigurációban* képezzük. A Poincaré-metszet helyzetét úgy kell megválasztani, hogy a tipikus trajektóriák sokszor metszhessék a kiválasztott felületet. A leképezés konkrét alakja függ a felület helyzetétől is. A mozgás egészére vonatkozó következtetések (kaotikus-e, mekkora a kaotikus és szabályos mozgásokhoz tartozó kezdőfeltételek által betöltött területek aránya) azonban már függetlenek a felület helyzetétől.

A Poincaré-leképezés természetesen megfordítható, hiszen differenciálegyenletről következik (l. 4.7. szakasz). Ráadásul a súrlódás hiánya miatt az időben előre és hátra történő mozgás ugyanolyan jellegű, a fázistér fogat egyik időirányban sem változik. Ennek következtében az M^{-1} inverz leképezés is hasonló típusú, mint az eredeti. Mivel az inverz leképezések terület-összehúzóási aránya – azaz Jacobi-determinánsa – az eredeti reciproka, a két leképezés csak úgy lehet hasonló típusú, ha Jacobi-determinánsuk egységnyi:

$$\boxed{J \equiv 1.} \quad (6.3)$$

Ez egyben azt is biztosítja, hogy leképezésen sem létezhetnek attraktorok.

Az 5.5. szakasz gondolatmenetéből következik, hogy gerjesztett rendszerekben $\sigma T = -\ln J$, s ezért a gerjesztett konzervatív esetben a Jacobi-determináns szintén egységnyi. A konzervatív rendszerekkel kapcsolatos leképezések közös tulajdonsága tehát, hogy (alkalmasan választott koordinátákban) *területtartóak*. Ezért a konzervatív rendszerek káoszának számos fontos vonása megérthető területtartó síkbeli leképezések vizsgálatával.

6.1. feladat. Hogyan függ egy konzervatív rendszer periodikus mozgásának stabilitása a kétdimenziós Poincaré-leképezés megfelelő fixpontja L stabilitási mátrixának adataitól?

6.2. A területtartó pékleképezés

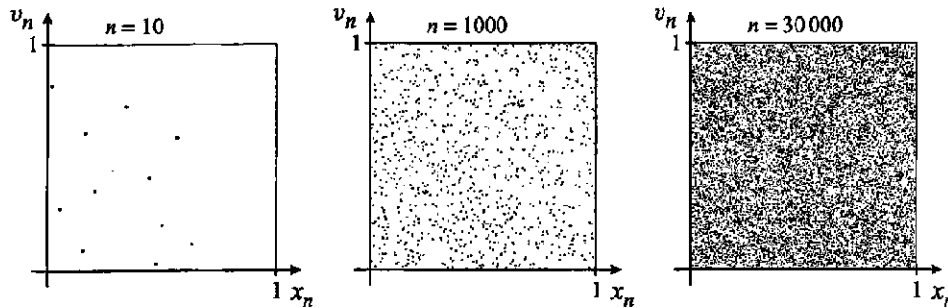
Elsőnek vizsgáljuk meg legegyszerűbb kaotikus modellrendszerünk, a pékleképezés területtartó esetét! Érdemes rögtön az 5.1.8. szakaszban definiált általános aszimmetrikus változatot tekinteni, ami akkor területtartó, ha a vízszintes elvágási vonal ugyanolyan magasan van, mint amilyen vastagságúra az alsó téglalap összenyomódik, azaz ha $c = a < 1$, és $b = 1 - a$. A leképezés alakja ekkor

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = \left(ax_n, \frac{v_n}{a} \right), \quad \text{ha } v_n \leq a, \quad (6.4)$$

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = \left(1 + (1-a)(x_n - 1), 1 + \frac{v_n - 1}{1-a} \right), \quad \text{ha } v_n > a. \quad (6.5)$$

A szimmetrikus eset az $a = 1/2$ választásnak felel meg.

A pékleképezés fázistere továbbra is az egységnégyzet. Ha ennek belsejében bármelyik, véletlenszerűen választott pontból indítunk egy trajektóriát, akkor az *bejárja az egész négyzetet* (6.2. ábra). A lépések számának növelésekor jól látszik,



6.2. ábra. A területtartó pékleképezés $x_0 = 1/2$, $v_0 = 2/\pi^2$ kezdőfeltétellel indított trajektóriájának pontjai $n = 10$, 1000 és 30000 lépés után ($a = 1/3$).

hogy semmilyen fázistartomány sem marad üresen. Ez világosan mutatja, hogy a pont nem közelít a fázistér egyetlen részalmazához sem. A kaotikus tartomány az egész egységnégyzet, tehát kétdimenziós objektum. A káosz *jóval kiterjedtebb*, mint a disszipatív esetben. Az ábra azt is jól mutatja, hogy a pontok eloszlása elegetően sok iterálás után *egyenletes*. A kaotikus viselkedést tehát hosszú idő után konzervatív rendszerben is egy időfüggetlen valószínűség-eloszlás jellemzi. Ennek tartója nem fraktál és sűrűsége állandó. A mozgás kaotikusságát mutatja az is, hogy a rendszer topologikus entrópiája – mely ugyanúgy definiálható, mint a disszipatív esetben (l. (5.51)) – pozitív.

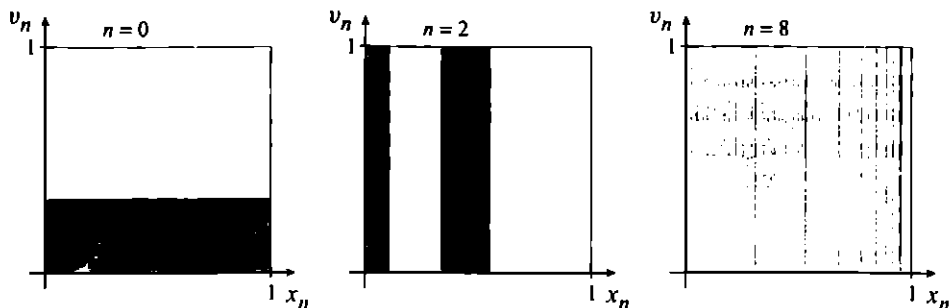
6.2. feladat. Határozzuk meg a területtartó pékleképezés topologikus entrópiájának értékét!

A kaotikus mozgáshoz $\bar{\lambda} > 0$ átlagos Ljapunov-exponens (l. (5.54)) tartozik, melynek éppen ellentettje az összehúzódásra jellemző negatív átlagos Ljapunov-exponens: $\bar{\lambda}' = -\bar{\lambda}$. Ez az előre és hátrafelé iterálás egyenértékűségéből, a Jacobi-determináns egységnyi értékéből következik.

6.3. feladat. Határozzuk meg a területtartó aszimmetrikus pékleképezés átlagos Ljapunov-exponenseit! Írjuk fel az inverz leképezést és mutassuk meg, hogy az ekvivalens az eredetivel (és ezért Ljapunov-exponensei is azonosak)!

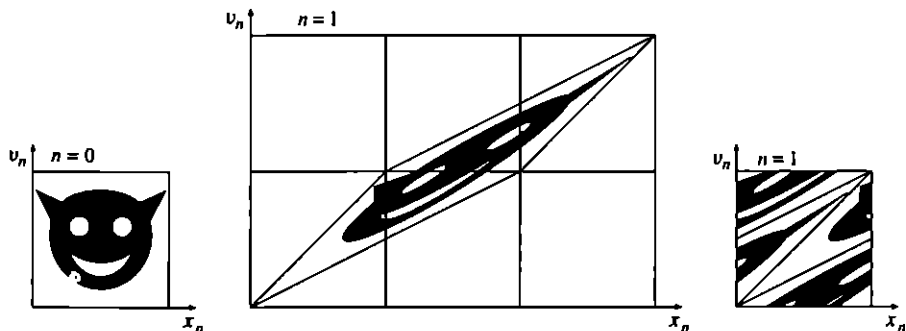
A kaotikus viselkedést és a hiperbolikus pontok instabil sokaságát feltáró gondolatmenet ugyanúgy megismételhető, mint disszipatív esetben. Azt kapjuk, hogy a kaotikus tartomány, ami most a teljes fázistér, a benne levő hiperbolikus ciklusok instabil sokaságainak összessége. Az előre- és hátraiterálás egyenértékűsége miatt azonban a stabil sokaságoknak hasonló tulajdonságúaknak kell lennie, mint az instabiloknak. A stabilok már a disszipatív esetben is síkkitöltők voltak (bejárták az attraktor vonzási tartományát).

Érdeemes végigkövetnünk az egész egységnégyzet időfejlődését is. Mivel az egész négyzet *önmagára* képződik, érdekesség csak abból adódhat, ha megkülönböztetjük az eredetileg az elválasztó vonal felett és alatt elhelyezkedő pontokat. Az iterálások számának növekedésével (6.3. ábra) a pontok kezdeti helyzetére utaló két szín egyre keskenyebb (noha nem azonos vastagságú), és egyre több függőleges sávban helyezkedik el. Végtelen sok lépés után igaz, hogy bármely pont *tetszőlegesen* kis sugarú környezetében előfordul *mindkét* szín. A két színnek tehát végül a keveréke áll elő. Pontosán ez az a mechanizmus, ami a festékek keveredésében szerepet játszik (l. [13.] és [18.] olvasmányok). A keveredés annál gyorsabb, minél erősebb a megnyúlás, ill. az összenyomás, azaz minél kisebb az a paraméter. A keveredés annál hatékonyabb, minél erősebb a káosz, azaz minél nagyobb a pozitív Ljapunov-exponens.



6.3. ábra. A területtartó pékleképezés teljes fázistérfogatójának összegyűrődése 8 iteráció alatt ($a = 1/3$). A $v_n = a$ vonal alatti kezdőpontok sötétszürke, a felette levők világosszürke színűek. $n = 8$ lépés után a két szín elkeveredett.

6.4. feladat. A területtartó pékleképezéssel rokon az ún. macskaleképezés, amit az egységnégyzeten az $(x_{n+1}, v_{n+1}) = (2x_n + v_n, x_n + v_n)$ szabály definiál, de itt mind x_n , mind v_n periodikusan ismétlődik. A leképezés nevét onnét kapta, hogy hatását az egységnégyzetbe rajzolt macskafej képével szokás érzékeltetni.

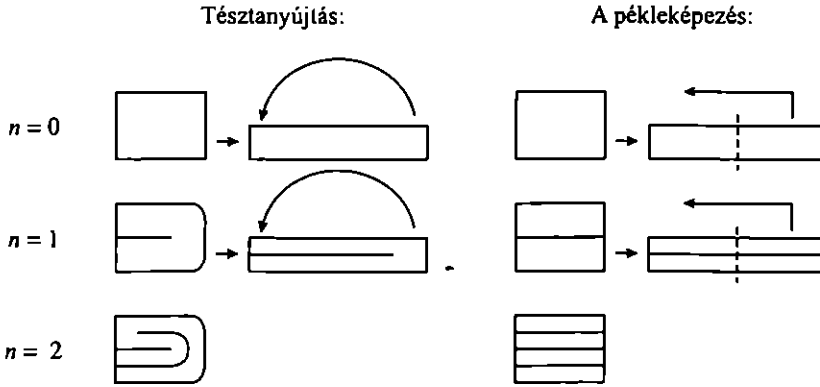


A macskafej képét a középső ábra a teljes síkon, a jobb oldali pedig az egységnégyzetre megszorítva mutatja. Kövessünk egy trajektóriát a leképezésben! Határozzuk meg a leképezés átlagos Ljapunov-exponensét, topologikus entrópiáját, valamint az instabil és stabil sokaságok irányát!

13. A pékleképezés eredete

A (szimmetrikus) pékleképezés először Eberhard Hopf német matematikus ergod elméleti munkáiban jelenik meg az 1930-as években. A szerző a leképezés definiálása után megjegyzi, hogy „ismételt alkalmazása a levelestészta előállítására emlékeztet”, és matematikai szigorúsággal kimutatja az általunk is említett keverési tulajdonságot. A leképezésnek az egész egységnégyzetre való hatása valóban nagyon hasonló ahhoz a folyamathoz, amin a tészta anyaga megy át

a nyújtás során. Az összenyomott és egyszer megnyújtott tésztát (melynek térfogata eközben gyakorlatilag nem változik) visszahajtjuk. Az így kialakult két-rétegű darabot ismét megnyújtjuk, majd visszahajtjuk, és mindezt ismétljük (6.4. ábra). A pékleképezés olyan nyújtási folyamatnak felel meg, melyben a megnyújtott tésztadarabot nem visszahajtjuk, hanem két egyforma darabra vágjuk, melyeket azután egymásra tolunk (6.4. ábra).

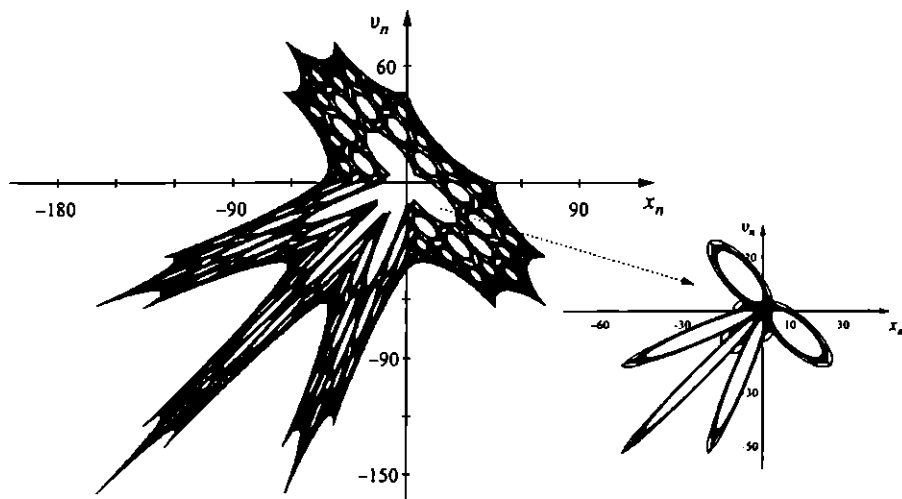


6.4. ábra. A hagyományos nyújtási folyamat sematikus rajza (a tészta darabot oldalnézetből ábrázoljuk) és a pékkeképezésnek megfelelő nyújtási folyamat.

A leképezés Hopf munkái után elfogadottá vált elnevezése azt fejezi ki, hogy a leképezés hatása a pék tevékenységéhez hasonlít. Ez egyben emlékeztet arra is, hogy a kaotikus folyamatok állandó fázistérbeli megnyújtással és átrendezéssel, összehajtással járnak. Ahogy a tésztagyúrás és a nyújtás következménye a kezdeti inhomogén anyageloszlás (só, cukor, liszt stb.) kiegyenlítődése, úgy a kaotikus folyamatok is jó fázistérbeli keveredést eredményeznek.

A pékkeképezés disszipatív esetre való kiterjesztése az 1980-as évekből származik. A tészta készítési hasonlatnál maradván, a leképezés hatása ekkor egy „torokos” pék tevékenységét modellezi, aki minden egyes nyújtási lépés után a tészta darabok anyagának adott hányadát (egyenletesen elosztva) elfogyasztja. Nem csoda, hogy végül végtelen vékony „ropi-rudak” maradnak csak vissza, a kaotikus attraktor fraktálszájai.

A területtartó pékkeképezés – noha sok szempontból jó modell – nem tükrözi a konzervatív rendszerek káoszában azt az általános tulajdonságát (1.2.3. szakasz), hogy a fázistérben együtt létezhet más kezdőfeltételekhez tartozó szabályos mozgással is. Ez a vonás szembeszökő a lökdösött oszcillátor súrlódásmentes esetének ($E = 1$) megfelelő leképezésekben is (6.5. ábra). A háztető-amplitúdófüggvény esetén a H_+ fixpont az $a < 2$ tartományban stabil és ekkor szükségszerűen elliptikus. Az elliptikus fixpont és a magasabb rendű elliptikus ciklusok közelében a mozgás szabályos. Az ilyen elliptikus szigetek között kialakulnak kaotikus sávok, melyeket az iterált pont véletlenszerűen jár be. Egy ilyen sávból nincs átjárás más sávokba vagy az elliptikus tartományokba, és fordítva. Egy kaotikus sáv bármely olyan tra-



6.5. ábra. A háztető-amplitúdófüggvénnyel lökdösött súrlódásmentes oszcillátor (l. (5.37)) két független (fekete) kaotikus sávja ($a = 1,4$). A kaotikus sávok nagy kiterjedésűek (l. az egységeket!), bennük a fehér foltok elliptikus szigetekhez tartoznak. (A $H_+ = (0,294, 0,294)$ pont olyan közel van az origóhoz, hogy külön nem jelöltük.)

jektóriával kirajzolható, melynek a kezdőfeltétele a sáv területére esik, ugyanis az összes ilyen trajektória egyformán járja be a sávot.

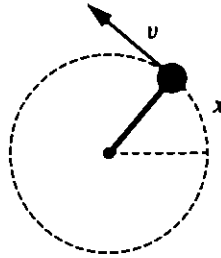
Távoli pontok az egyre negatívabb impulzusátadás miatt kifuthatnak a végtelenbe. Annak érdekében, hogy ezt elkerüljük, előbb bemutatunk egy olyan lökdösött rendszert, melyben végtelenbe tartás nem lehetséges. Ezen, a széles körben használt modellrendszeren tanulmányozzuk majd a konzervatív rendszerek általános kaotikus viselkedését.

6.3. A lökdösött rotátor – a standard leképezés

6.3.1. A leképezés származtatása

Tekintsünk egy függőleges tengely körül szabadon elforduló testet: a rotátort. Ezt a rendszert legegyszerűbben egy olyan vízszintes síkbeli egységnyi hosszúságú súlytalan rúd valósítja meg, melynek egyik vége egy golyóhoz, másik vége pedig egy forgó, függőleges tengelyhez van rögzítve (6.6. ábra). A lökdösés T periódusonként érkezik, s amplitúdója függ a golyó pillanatnyi helyzetétől. Ez utóbbit a körkerülete mentén mért x ívhosszal jellemezzük, mely egyben a körbefordulás szöge,

s ezért 2π periódussal ismétlődik. A lökés azzal a következménnyel jár, hogy a pont kerületi sebessége hirtelen $uf(x)$ sebességgel megváltozik, ahol u a sebességátadás nagyságára jellemző paraméter, f pedig a pillanatnyi helyzettől függő dimenziótlan függvény.



6.6. ábra. A lökdösött rotátor modellje az egység hosszúságú vékony rúd végén körpályán mozgó golyó, mely T időnként hirtelen impulzusátadásoknak van kitéve.

A lökés utáni állapotokat összekapcsoló stroboszkopikus leképezés hasonló gondolatmenettel kapható meg, mint a lökdösött oszcillátoré (4.4. szakasz). Mivel a sűrűlódás, közegellenállás feltevés szerint elhanyagolható, a kerületi sebesség két lökés között állandó. Ezért az $(n + 1)$ -edik lökés helykoordinátáját az n -edikéből az

$$x_{n+1} = x_n + v_n T \quad (6.6)$$

összefüggés szerint kapjuk meg, s azt is tudjuk, hogy a következő lökés előtti \tilde{v}_{n+1} sebesség megegyezik az előző lökés utánival: $\tilde{v}_{n+1} = v_n$. A lökés hatására ez hirtelen az $uf(x_{n+1})$ értékkel megnő, azaz

$$v_{n+1} = v_n + uf(x_{n+1}) \quad (6.7)$$

lesz. A sebességet u , a távolságot uT egységekben mérve, a leképezés alakja:

$$x_{n+1} = x_n + v_n, \quad v_{n+1} = v_n + f(x_{n+1}). \quad (6.8)$$

Mivel az x_n és az x_{n+1} változók szögek, ugyanazt az helyzetet képviselik 2π -vel eltolva is.

6.5. feladat. Határozzuk meg a lökdösött rotátor leképezését arra az esetre, amikor a stroboszkopikus leképezés nem a lökés utáni, hanem a lökés előtti koordinátákat kapcsolja össze!

6.6. feladat. Határozzuk meg a sebességgel lineárisan arányos közegellenállás esetén a lökdösött rotátor leképezését, a lökés előtti és a lökés utáni koordinátákra is!

A rotátor leképezésének fontos speciális esete az, amikor a lökdösési amplitúdó periodikus függvénye a helynek, ami például az

$$f(x) = a \sin x \quad (6.9)$$

választással valósítható meg, ahol a pozitív dimenziótlan állandó, a leképezés nem-linearitási paramétere. A (6.8) leképezés ezzel az amplitúdóval

$$x_{n+1} = x_n + v_n, \quad v_{n+1} = v_n + a \sin x_{n+1} \quad (6.10)$$

alakú. Ez az ún. *standard leképezés*, mely fontos szerepet játszik a súrlódásmentes rendszerekbeli káosz megértésében. A továbbiakban a lökdösött rotátor leképezésnek ezt az alakját használjuk.

14. Leképezések és differenciálegyenletek kapcsolata

A lökdösött rotátor példáján jól megfigyelhető a differenciálegyenletek és a leképezések közötti kapcsolat. A szinuszos amplitúdófüggvény esetén a dimenziótlanítás előtti (6.6), (6.7) stroboszkopikus leképezés:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n T, \\ v_{n+1} &= v_n + ua \sin x_{n+1}. \end{aligned}$$

Átrendezés után

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{T} &= v_n, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{T} &= \frac{ua}{T} \sin x_{n+1}. \end{aligned}$$

A $T \rightarrow 0$ határesetben a bal oldalon az x és v mennyiségek időderiváltja áll. Amennyiben az a amplitúdó arányos T -vel, azaz a/T konstans a határátmenet során, ez

egyenértékű az

$$\ddot{x} = \frac{ua}{T} \sin x$$

alakkal, ami a síkinga folytonos idejű mozgásegyenlete az $ua/T \rightarrow g/l$ megfeleltetéssel. Ez érthető, hiszen az egyre gyakoribb, de egyre gyengébb impulzusátadások folytonos erőhatásnak felelnek meg. Az $x = 0$ pont a síkinga instabil egyensúlyi helyzetét (a hegyére állított ceruza helyzetét) adja meg.

Az a tény, hogy a véges T értékekhez tartozó leképezés kaotikus, arra figyelmeztet, hogy a differenciálegyenletek – tehát folytonos idejű dinamikák – numerikus megoldásában a szimulálás h időlépését túlságosan nagyra választva hibás megoldások állhatnak elő! Ezek a szabályos mozgást is kaotikusnak tüntethetik fel. Fordítva: a véges T periódus-

sonként képzett stroboszkopikus leképezés mindig alapvetően különbözik a formálisan a $T \rightarrow 0$ határesetben kapott differenciálegyenlettől. A kétdimenziós fázistérben

a differenciálegyenletek csak szabályos mozgásokat írhatnak le, míg a kétdimenziós leképezések általában kaotikusak.

6.3.2. A standard leképezés fixpontjai és stabilitásuk

Az (x^*, v^*) fixpont létezésének feltétele a (6.10) standard leképezésben az, hogy

$$x^* = x^* + v^*, \quad v^* = v^* + a \sin x^*. \quad (6.11)$$

Ebből $v^* = 0$ és $\sin x^* = 0$. Fixpont tehát csak nyugalmi állapot lehet, s ezért csak olyan helyzetben fordulhat elő, ahol a test nincs lökésnek kitéve. Ez utóbbi feltétellel két helyzetet enged meg az $x_+^* = 0$ és az $x_-^* = \pi$ koordinátákkal. Természetesen mindkettő 2π -vel eltolt értékei is formális megoldások, de ezek a kör mentén ugyanannak a helyzetnek felelnek meg.

A H_+ = (0, 0) fixpont (4.51) stabilitási mátrixa

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1+a \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Ennek sajátértékei

$$\Lambda_{\pm} = \frac{2+a \pm \sqrt{(2+a)^2 - 4}}{2}, \quad (6.13)$$

amelyek minden pozitív a -ra pozitívak. Mivel Λ_+ mindig nagyobb, mint 1, a H_+ fixpont mindig instabil: hiperbolikus.

6.7. feladat. Határozzuk meg a H_+ pont körül a stabil és az instabil sokaságok irányát!

A $H_- = (\pi, 0)$ fixpont stabilitási mátrixa a fenti L -hez hasonló, csak benne a helyett mindenütt $-a$ szerepel. Az $a < 4$ tartományban ezért a sajátértékek komplexek, abszolút értékük egységnyi. A H_- fixpont tehát kis a értékekre stabil, elliptikus, de $a > 4$ -re elveszti stabilitását (l. 4.2. táblázat). Elegendően erős lökések esetén tehát még az olyan állapotok sem maradnak stabilak, melyekben a lökés erőssége eltűnik (amikor $x = 0$ és π), mert kis környezetükben az impluzusátadás rohamosan erősödik, a $\sin x$ függvény egyre meredekebb.

A $P_1 = (0, \pi)$ és $P_2 = (\pi, \pi)$ pontpár a standard leképezés kettes ciklusa, mely gyenge lökések esetén stabil. Mivel a sebességérték most nem zérus, ez a ciklus a rúd adott irányú forgásának felel meg. Az ellenkező irányú forgást a $P'_1 = (0, -\pi)$, $P'_2 = (\pi, -\pi)$ kettes ciklus írja le.

6.8. feladat. Mutassuk meg, hogy $P_1 = (0, \pi)$, $P_2 = (\pi, \pi)$ valóban kettes ciklust alkot! Milyen a értékekre stabil a ciklus?

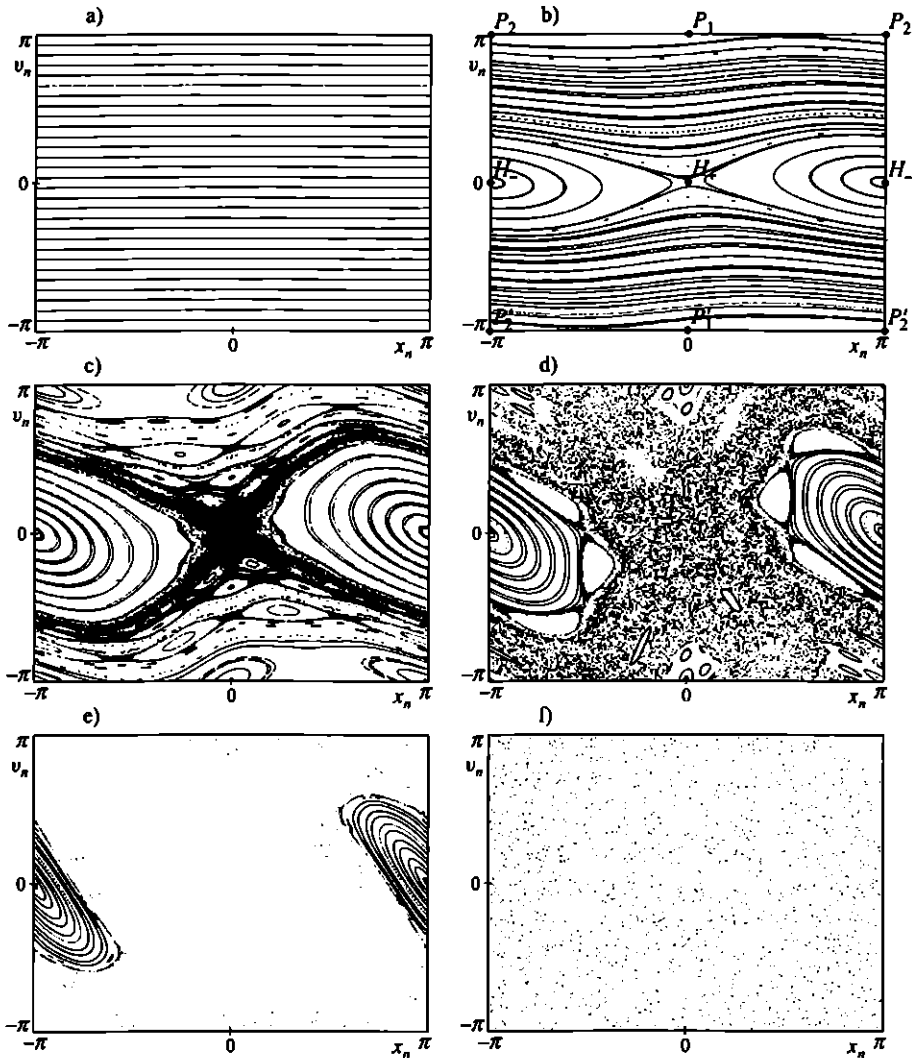
6.3.3. Káosz a lökdösött rotátor mozgásában

Ha a rotátorra nem hat a lökdösőerő, akkor mozgása egyszerű, állandó sebességű körmozgás: $v_n = \text{konstans}$. A helykoordináta időben egyenletesen nő, de ez a sebesség pontos értékétől függően kétféleképpen mutatkozhat meg a (6.10) leképezésben. Ha például a sebesség éppen π , akkor kettes ciklust kapunk. Ennek helye tetszőleges, bármely kezdőpontból induló pálya kettes ciklus a $v_n = \pi$ egyenes mentén. (A ciklus nem stabil, de nem is instabil, a linearizált mozgás sajátértékei $\Lambda_{\pm} = 1$.) Hasonlóan, a $2\pi/q$ sebességértékhez (ahol q természetes szám) q periódusú ciklusok tartoznak. A $v_n = 2\pi r$ ($r < 1$) abszolút értékű sebességértékekhez is periodikus mozgások tartoznak, ha r racionális szám (azaz, ha $r = p/q$, ahol p és q természetes számok). Ha viszont r irracionális, akkor a kezdőpont semmilyen véges számú lépés után nem tér vissza pontosan a kezdeti helyzetbe. A pálya, bármilyen legyen is a kezdeti x koordináta, az egész $v_n = 2\pi r$ egyenes szakaszt rajzolja ki (6.7a. ábra).

Tetszőlegesen kicsi a lökdösési erősség mellett a leképezés már nem lineáris, és a fázistérben jelen van a fent leírt H_{\pm} fixpont, továbbá a P_1, P_2 kettes ciklus is. Az elliptikus viselkedésnek megfelelően a H_- fixpont és a kettes ciklus körül zárt görbék jelennek meg. Ez azt jelenti, hogy a rotátor a stabil cikluspontok véges környezetében kis rezgéseket végez (hasonlóan ahhoz, ahogy az iránytű rezeg az észak-déli irány körül). Ezekről távolabb a trajektóriák a teljes x tartományon értelmezett görbék, melyek a rotátor (nem állandó sebességű) körbeforgásának felelnek meg. A H_+ instabil fixpont sokaságai kis a értékre (6.7b. ábra) sima szeparátrixoknak látszanak, melyek elválasztják a körbeforgó viselkedést a rezgésektől.

Erősebb lökések esetén, azaz a növelésével egyre jobban láthatóvá válik, hogy a hiperbolikus fixpont „szeparátrixai” nem éles görbék. Ezek környékén egyetlen trajektória pontjai egy egész kétdimenziós tartományt járnak be, mely a szeparátrixnak tűnő vonalat mintegy felvastagítja. Ez a tartomány egy kaotikus sáv, melyben a pontok véletlenszerűen ugrálva mozognak. A mozgást sokáig követve azt látjuk, hogy a pontok eloszlása egyenletes. Ilyen sávok jelen vannak a fázistér más részein is, általában magasabb rendű hiperbolikus ciklusok szeparátrixai körül (6.7c. ábra).

A nemlinearitási paraméter további növelésével világossá válik, hogy a kaotikus sávok vastagsága nő. Az elliptikus fixpont és a kettes ciklus körüli rezgések továbbra is jelen vannak, sőt más tartományokban is megszűnnek a körbeforgásnak megfelelő



6.7. ábra. A lökdösött rotátor trajektóriái különböző lökéserősségek esetén. Az a paraméter értékei rendre $a = 0$ (a), $a = 0,25$ (b), $a = 0,9$ (c), $a = 1,5$ (d), $a = 3$ (e), $a = 10$ (f). A kezdőfeltételek mindegyik esetben a $(-\pi, \pi)$ tartományt 30 egyenlő részre osztó v_0 értékek az $x_0 = 0$ és $x_0 = -3,1$ helykoordinátákkal. Az iterálások száma 5000. A zárt görbék a stabil fixpont vagy ciklusok körüli rezgőmozgásnak, a teljes $(-\pi \leq x_n < \pi)$ intervallumon átvonuló görbék pedig a rotátor körbefordulásának felelnek meg.

sima görbék. Helyükön elliptikus tartományok jelennek meg, közöttük azonban vannak keskeny kaotikus sávok is. A kétféle tartomány között nincs átjárás.

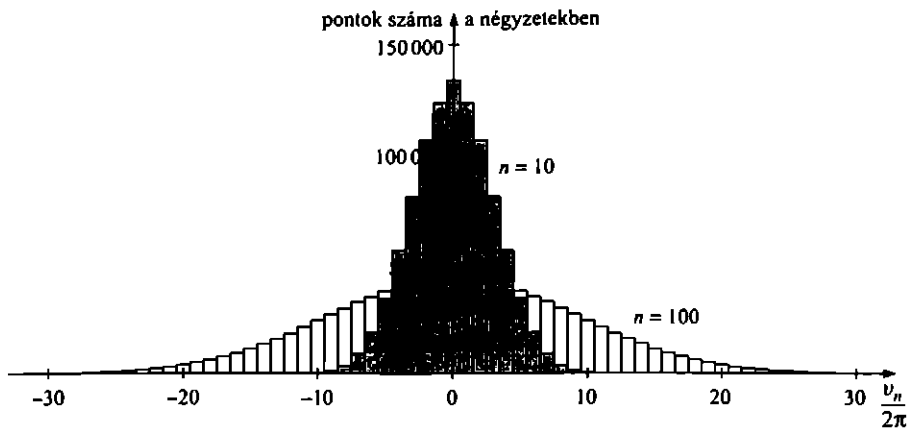
Egy bizonyos a_c kritikus értéknél az egyszerű forgásnak megfelelő utolsó sima görbe is eltűnik. Erre a kritikus értékre numerikusan $a_c = 0,972$ adódik. Ennél erősebb lökdösések esetén az az érdekes helyzet áll elő, hogy a sebesség tetszőleges értéket is felvehet, hiszen az akadályt jelentő utolsó, x_n tengellyel közel párhuzamosan futó fázistérbeli görbe is eltűnt. A rotátor tehát *tetszőlegesen nagy energiát* vehet át a lökésektől, s ezért tetszőlegesen gyorsan is foroghat. Eleinte még számos elliptikus sziget létezik, ezek területe azonban a növelésével csökken (6.7d,e. ábra). Elegendően nagy a értékekre az összes sziget eltűnik, s az egész fázistér egyetlen kaotikus sáv válik (6.7f. ábra). Ekkor a rotátor bármely véletlenszerűen választott kezdőfeltételből indulva kaotikus mozgást végez. Egyetlen trajektória is bejárja az egész fázistérrel, s a pontok eloszlása elegendően hosszú idő után az egész négyzeten egyenletes. Ez az a határeset, amelynek dinamikája a területtartó pékleképezésével rokon.

15. Kaotikus diffúzió

Az a_c -nél nagyobb paraméterértékekre a rotátor sebességének nagyságát semmi sem korlátozza. Minden lépésben $a \sin x_{n+1}$ nagyságú lökéseket kap az x_{n+1} helykoordináta értékétől függően. Mivel nagy a értékekre a helykoordináta eloszlása egyenletes, a lökések is tetszőleges értéket vehetnek fel a $(-a, a)$ intervallumban. A sebességváltozás ezért *véletlen bolyongásnak* felel meg a $(-\infty < v_n < \infty)$ egyenesen. A sebességtengely 2π hosszúságú adott intervallumán nagy számú pontot indítva, ennek megfelelően azt tapasztaljuk, hogy azok a v_n tengely mentén egyre jobban szétterjednek (6.8. ábra), éppúgy, mint egy tintacsepp az álló folyadékban. A kaotikus dinamika tehát egy *diffúziós folyamatot* hoz létre.

A szétterjedési folyamat diffúziós állandója is könnyen megbecsülhető. Ha

egy bolyongás során egy részecske koordinátája az i -edik lépésben éppen r_i -vel változik (r_i előjeles szám), akkor a teljes elmozdulás n lépés alatt $R_n = \sum_{i=1}^n r_i$. Ha az r_i -k független változóknak tekinthetők, és átlaguk zérus, akkor a teljes átlagos elmozdulás $\overline{R_n} = 0$, a négyzetes átlagos elmozdulás viszont $\overline{R_n^2} = (\sum_{i=1}^n r_i)^2$. Az átlagolás az összes kezdőfeltételre történik. A teljes négyzetben szereplő vegyes tagok átlaga zérus, hiszen a változók függetlenek: $\overline{r_i r_j} = 0$, ha $i \neq j$. A négyzetes tagok átlaga viszont külön-külön azonos, s ezért a négyzetes elmozdulás átlaga a lépésszámmal arányos: $\overline{R_n^2} = \overline{r_i^2} n$. A bolyongás D diffúziós állandójának szokásos definíciója $\overline{R_n^2} = 2Dn$, amiből $D = \overline{r_i^2}/2$.



6.8. ábra. Diffúzió a lökdösött rotátor dinamikájában: a $(-\pi \leq v_0 \leq \pi)$ területű négyzetben egyenletes eloszlással indított 10^6 részecske eloszlása a v tengely mentén $n = 10$ és 100 lépés után ($a = 10$). Az eloszlás a diffúzióra jellemző haranggörbe-alakot adja. Egy oszlop szélessége 2π . Az $n = 0$ értékhez tartozó kezdeti eloszlást (a 10^6 magas középső oszlopot) nem ábrázoltuk.

A lökdösött oszcillátorra alkalmazva, ahol a bolyongás a sebességtengely mentén történik, és a sebességlépés $r_i = a \sin x_{i+1}$, ez azt jelenti, hogy a diffúziós állandó

$$D = \frac{1}{2} \overline{a^2 \sin^2 x_{i+1}} = \frac{1}{4} a^2,$$

mivel az x értékek eloszlása egyenletes, és a $\sin^2 x$ függvény átlaga $1/2$. Ez az eredmény csak az erős lökdösés ($a \gg 1$) határesetében érvényes, mert csak akkor teljesül, hogy az egymás utáni növekmények függetlenek.

Az n lépés utáni $R_n \equiv v_n$ sebesség a sebességnövekmények összege, a sebességnövekmények átlagára ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \overline{v_n^2} = Dn,$$

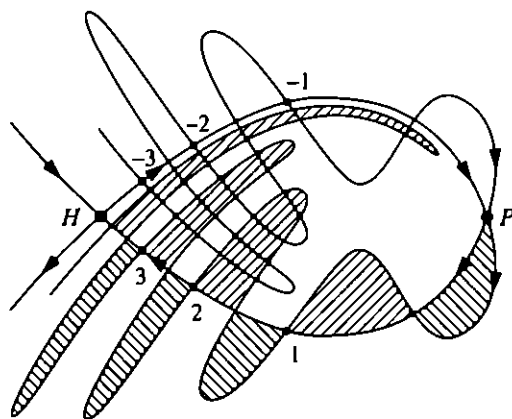
a mozgási energia átlaga időben lineárisan növekszik.

Mindez mutatja, hogy a determinisztikus eredetű mozgás elegendően hosszú megfigyelési idő alatt éppolyan folyamatot képes létrehozni, mint valamilyen külső zaj. Ez annak a megnyilvánulása, hogy a káosz véletlenszerű mozgást jelent, és ez jól definiált valószínűség-eloszlással jellemezhető. A diffúzió mintapéldáját jelentő Brown-mozgás esetében a részecskére ható erő zajszerű, a mozgásegyenlet sztochasztikus, szemben a példánkkal, ahol a lökdösést egy egyszerű, teljesen determinisztikus szabály határozza meg, s statisztikusan mégis ugyanarra az eredményre vezetnek. A diffúzió arra nem érzékeny, hogy a bolyongást kiváltó véletlen hatás milyen eredetű.

6.3.4. A kaotikus sáv szerkezete

Vizsgáljuk most meg közelebbről a H_+ fixpont körüli kaotikus sávot abban a tartományban, ahol a v_n sebesség még nem vehet fel tetszőlegesen nagy értékeket ($a < a_c$).

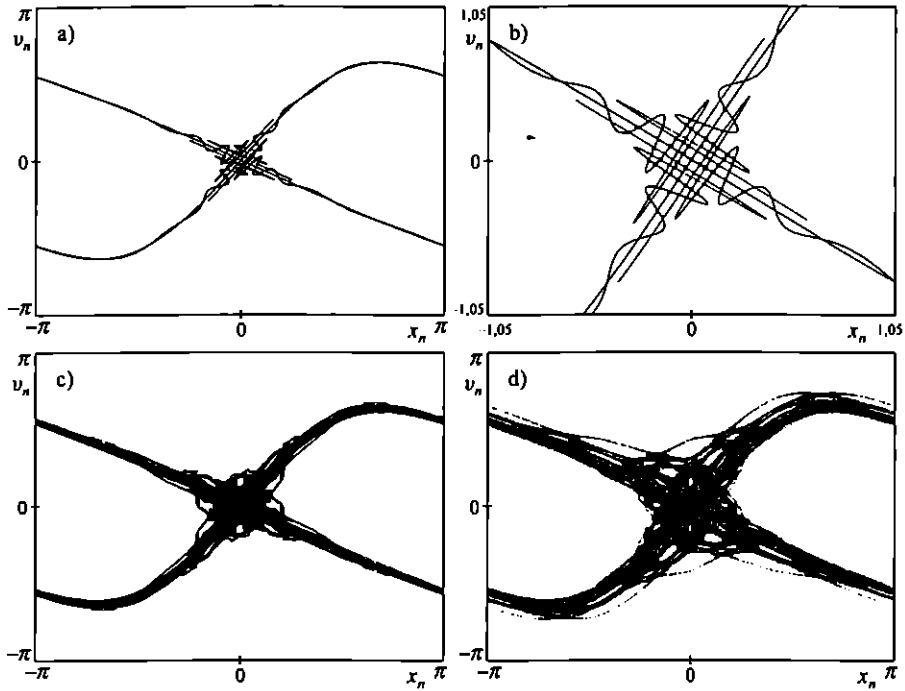
A 6.9. ábra sematikus mutatja egy tipikus fixpont sokaságainak elhelyezkedését a leképezés síkjában. A sokaságok a fixpont környékén sima görbék, de a fixponttól távolodva egyre erősebb hullámzást, oszcillációt mutatnak. Ezért valahol elkerülhetetlenül *metszik egymást*. Metszéspontjuk egy *homoklinikus* pont. A sokaságok fixpontból induló ágait követve először fellépő metszéspont az *első* homoklinikus pont. Bármelyik sokaságot követjük is tovább, egyre több homoklinikus metszéspontot találunk. Ahol a sokaság visszatér a fixpont közelébe, ott az oszcillációi már nagyon nagyok. A homoklinikus pontok ugyanis a fixpont közelében sűrűsödnek (távolságuk minden lépésben Λ_- szorosára változik, $\Lambda_- < 1$, tehát összességében exponenciálisan csökken). Mivel a leképezés területtartó, ezért két egymást követő homoklinikus pont között a sokaságok által közrefogott terület ugyanakkora, mint azok egy lépéssel későbbi képén. A leképezés hatására a homoklinikus pontok egyre közelebb kerülnek egymáshoz, ezért a „nyelvek” egyre nagyobbak, a sokaságok *egyre jobban kanyarognak* (ezzel újabb és újabb homoklinikus pontok is keletkeznek).



6.9. ábra. Egyetlen fixpont stabil és instabil sokaságának sematikus képe. Ezek alkotják a kaotikus sáv gerincét. A P első homoklinikus pont egymás utáni képei rendre az 1, 2, 3 jelű pontok, előképei pedig a $-1, -2, -3$ jelűek. Az azonos satírozású tartományok egymás képei, ezért egyenlő területűek.

Ez a szerkezet megfigyelhető a numerikus szimulálással kapott 6.10. ábrán, ami a lökdösött rotátor H_+ fixpontja stabil és instabil sokaságának egy-egy darab-

ját mutatja növekvő számú iteráció után (a stabil sokaság szakaszt természetesen visszafelé kell iterálni, ha egyre hosszabb darabját szeretnénk megkapni). A sokasá-



6.10. ábra. A lökdösött rotátor H_+ fixpontjának stabil és instabil sokaságai ($a = 0,9$). a) A fixpontra helyezett egy-egy 250000 pontot tartalmazó 0,00005 oldalhosszúságú négyzetet időben előre és hátra 18-szor iteráltunk, amelynek következtében már annyira megnyúltak a sokaságok mentén, hogy ismét vissza kerültek a fixpont közelébe. b) Az origó körüli tartomány nagyított képe. Jól megfigyelhető a sokaságok oszcillálása. c) A sokaságok képe 50 iterálás után. d) A teljes kaotikus sáv egyetlen trajektória numerikus követése alapján.

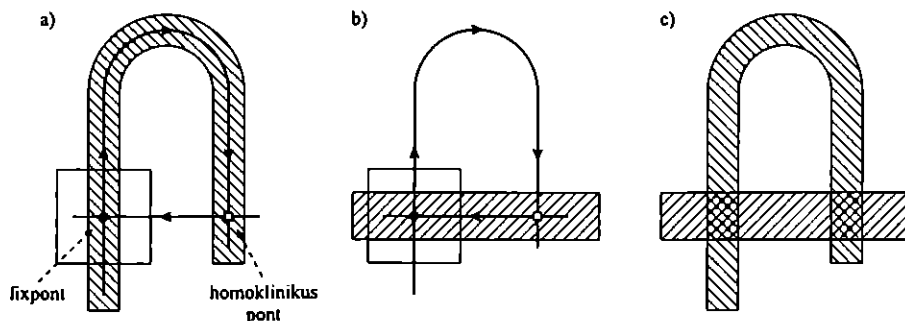
gokat hosszan követve arra a felismerésre jutunk, hogy *bejárják a kaotikus sávot*. Ez igaz mind a stabil, mind az instabil sokaságra. A sáv vastagságát az határozza meg, hogy milyen erősen oszcillálnak benne a sokaságok. A kaotikus sáv vázát tehát a *benne levő hiperbolikus fixpont sokaságai alkotják*, ezért a numerikusan meghatározott sokaságok jó közelítéssel kirajzolják a sávot. A sávban természetesen még sok magasabb rendű ciklus is létezhet. Ezeknek hasonló jellegű sokaságai vannak, s önmagukban szintén a sáv vázát alkotják. (A különböző ciklusok sokaságai között

végtelen sok heteroklinikus metszéspont is kialakul, l. [16.] olvasmány). A kaotikus sáv tehát mindig *a benne levő összes hiperbolikus ciklus stabil és instabil sokaságainak összessége*.

16. A lópatkó-leképezés

Steve Smale amerikai matematikus nevéhez fűződik az a felismerés, hogy egyetlen homoklinikus pont jelenlétéből következik a mozgás kaotikussága. Azt mutatta ki, hogy a dinamika ekkor a hiperbolikus fixpont (cikluspont) környékén – mai szóhasználattal – a pékleképezéssel közelíthető. Ennek belátása érdekében tekintsünk egy fixpontot és sokaságai első homoklinikus metszéspontját (6.11. ábra). A fixpont körüli négyzet valahány lépés után elegendően megnyúlik ahhoz, hogy képe

– ami lópatkóra hasonlít – már túlnyúljon a homoklinikus ponton is (6.11a. ábra). Jelöljük ezt a lépésszámot l -lel. Ugyanezt a téglalapot visszafelé iterálva, valamely m lépés után a stabil sokaság mentén megnyúlt téglalapot kapunk, mely szintén tartalmazza a homoklinikus pontot (6.11b. ábra). Ha a leképezést a most kapott megnyúlt téglalpra $k = l + m$ -szer alkalmazzuk, akkor az a patkóalakzatba megy át (6.11c. ábra).



6.11. ábra. A lópatkó-leképezés sematikus szerkesztése. a) A fixpont körüli négyzet képe l lépés után lópatkó alakban folyja körül az instabil sokaságot. b) Az inverz leképezés m -szeres iteráltja. c) Az $l + m$ -szer előre iterált leképezés a megnyújtott téglalapot a patkóalakzatba viszi.

A k -szor iterált eredeti leképezésnek a hosszú téglalpra való alkalmazását ezért lópatkó-leképezésnek nevezzük. Ve-

gyük észre, hogy a lópatkó-leképezés a hosszú téglalapon belül ugyanúgy hat, mint a pékleképezés: a téglalapot két

oszlopba képezi. Még egyszer iterálva 4, majd 8, n lépés után pedig 2^n oszlopot tartalmaz. Eközben végtelen sok homoklinikus pont jön létre. Ugyanakkor, a pékleképezéshez való hasonlóságból következik az is, hogy a topologikus entrópia $h = \ln 2 > 0$ (ezért az instabil ciklusok száma is végtelen, l. (5.51)). Hasonló állítás igaz a heteroklinikus met-

széspontok környékén. Megjegyezzük, hogy itt nem használtuk ki a leképezés területtartását, ezért a gondolatmenet minden megfordítható leképezésre, tehát diszzipatívokra is érvényes: már egyetlen homoklinikus vagy heteroklinikus metszéspont létezéséből is következik a rendszer kaotikus viselkedése.

6.4. Zárt, konzervatív rendszerek

6.4.1. Lejtőkön pattogó labda

A nem gerjesztett súrlódásmentes rendszerekben tapasztalható kaotikus viselkedés talán legegyszerűbb példája a két szemben álló, azonos α szögű lejtő között légüres térben rugalmasan pattogó labda esete. A mozgás leírása elemi módszerekkel történik, csak a ferde hajítás ismeretére épül. Célszerű a lejtőről történő elpattanás pillanatában felvett sebességvektort követni, s ebből egyfajta Poincaré-leképezést felépíteni. A helykoordináta ugyanis az ütközés pillanatában a sebesség ismeretében már következik az energiamegmaradásból, az ütközések közötti pályák pedig a jól ismert paraboláévek.

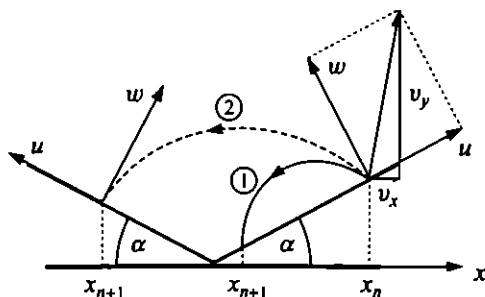
Az n -edik elpattanási sebesség komponenseit v_{xn} , v_{yn} -nel jelölve, az elmozdulás- és sebességkomponensek alakja a következő ütközés bekövetkeztéig

$$x(t) = x_n + v_{xn}t, \quad y(t) = y_n + v_{yn}t - \frac{g}{2}t^2, \quad (6.14)$$

$$v_x(t) = v_{xn}, \quad v_y(t) = v_{yn} - gt, \quad (6.15)$$

ahol t az elpattanás óta eltelt idő. Mivel induláskor a labda az α hajlásszögű lejtőn van, helykoordinátái között fennáll az $y_n/x_n = \operatorname{tg} \alpha$ összefüggés (l. 6.12. ábra). A mozgás alapvetően különböző attól függően, hogy a következő pattanás ugyanarra vagy a másik lejtőre esik. Mindkét esetben célszerű a becsapódási sebességeket a lejtőre merőleges és azzal párhuzamos komponensekben megadni, mert a rugalmas visszapattanás szabálya ezekben a legegyszerűbb: a w merőleges komponens előjelet vált, a lejtővel párhuzamos u komponens pedig nem változik.

1. eset. Ha a labda nem ugrik át a másik lejtőre, akkor a következő pattanásig eltelt t_n idő abból a feltételből kapható, hogy a becsapódási pont $x_{n+1} \equiv x(t_n)$, $y_{n+1} \equiv$



6.12. ábra. A kettős lejtőn pattogó labda mozgása. A sebességet az ütközéskor a w merőleges és az u párhuzamos komponensekben adjuk meg. Az ezeket összekötő szabály függ attól, hogy a labda az adott lejtőn marad-e (1. eset) vagy sem (2. eset).

$y(t_n)$ koordinátái ismét az eredeti lejtőn helyezkednek el: $y_{n+1} = x_{n+1} \operatorname{tg} \alpha$. A (6.14) egyenletekből

$$gt_n = 2(v_{yn} - v_{xn} \operatorname{tg} \alpha). \quad (6.16)$$

Ezt és a (6.15) sebességtörvényt felhasználva, a következő ütközés utáni sebességnek a lejtőre merőleges és az azzal párhuzamos komponensei:

$$u_{n+1} = u_n - 2w_n \operatorname{tg} \alpha, \quad w_{n+1} = w_n. \quad (6.17)$$

Ez az egyetlen lejtőn történő pattogás Poincaré-leképezése. Azt írja le, hogy a lejtő irányú sebesség egyenletesen nő, miközben a lejtőre merőleges komponens nem változik.

6.9. feladat. Vezessük le a sebességekre vonatkozó (6.17) leképezést!

2. eset. Koordináta-rendszerünk origóját a két lejtő közötti törésvonalra helyezve, az átugrás annak felel meg, hogy az új x_{n+1} koordináta negatív. Mivel a labda a bal oldali lejtőre érkezik, most $y_{n+1} = -x_{n+1} \operatorname{tg} \alpha$ adja az új koordináták közötti kapcsolatot. Ebből a t_n repülési időre (6.14) alapján a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\frac{g}{2} t_n^2 - (v_{xn} \operatorname{tg} \alpha + v_{yn}) t_n - 2y_n = 0. \quad (6.18)$$

A megoldás

$$gt_n = v_{xn} \operatorname{tg} \alpha + v_{yn} + \sqrt{D_n}, \quad (6.19)$$

ahol a D_n diszkrimináns:

$$D_n = (v_{xn} \operatorname{tg} \alpha + v_{yn})^2 + 4gy_n. \quad (6.20)$$

Az y_n koordinátát a

$$gy_n + \frac{1}{2}(v_{xn}^2 + v_{yn}^2) = \mathcal{E} \quad (6.21)$$

energiamegmaradásból fejezzük ki, ahol \mathcal{E} az egységnyi tömegre eső összenergia. A becsapódáskor érvényes sebességet az új lejtőre merőleges és azzal párhuzamos komponensekben adjuk meg, ami (6.15) alapján

$$u_{n+1} = -u_n + w_n \operatorname{tg} \alpha - w_{n+1} \operatorname{tg} \alpha, \quad w_{n+1} = \sqrt{D_n} \cos \alpha. \quad (6.22)$$

6.10. feladat. Vezessük le a (6.22) leképezést!

A leképezést úgy tesszük zárttá, hogy az utolsó egyenletet négyzetre emeljük, s felhasználjuk a D_n diszkrimináns (6.20) alakját. Ezzel

$$w_{n+1}^2 = w_n^2(\cos^2 2\alpha - 2\cos^2 \alpha) + u_n^2(\sin^2 2\alpha - 2\cos^2 \alpha) + u_n w_n \sin 4\alpha + 4\mathcal{E} \cos^2 \alpha. \quad (6.23)$$

Érdeemes bevezetni a $z \equiv w^2$ új változót, amely a lejtőre merőleges sebességkomponens által hordozott mozgási energiával arányos. Ezzel megkaptuk az átugráshoz tartozó Poincaré-leképezést.

A teljes leképezést célszerű dimenziótlan alakban írni, ami egyszerűen megtehető, ha a sebességeket $\sqrt{2\mathcal{E}}$ egységekben mérjük. Ezzel és trigonometrikus azonosságok felhasználásával a dimenziótlan dinamika az első esetben

$$u_{n+1} = u_n - 2\sqrt{z_n} \operatorname{tg} \alpha, \quad z_{n+1} = z_n, \quad (6.24)$$

míg a másodikban

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -u_n + \sqrt{z_n} \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{z_{n+1}} \operatorname{tg} \alpha, \\ z_{n+1} &= -z_n \left(1 + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \operatorname{tg} \alpha\right) - u_n^2 \frac{1}{2} \sin 4\alpha \operatorname{ctg} \alpha + u_n \sqrt{z_n} \sin 4\alpha + 2\cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.11. feladat. Mutassuk meg, hogy a dimenziótlan változók csak az $|u_n| \leq 1$, $0 \leq z_n \leq 1$ tartományban változhatnak, és hogy minden lépésben fenn kell állnia a $z_n \leq 1 - u_n^2$ megszorításnak.

A két alak közötti váltást az határozza meg, hogy a (6.24) leképezés érvényét veszti, ha a belőle következő új y_{n+1} koordináta negatív. Ekkor az \mathcal{E} egységekben mért $u_{n+1}^2 + w_{n+1} = 1 - gy_{n+1}/\mathcal{E}$ kinetikus energia 1-nél nagyobb. Ez lenne a következménye annak, ha nem vennénk figyelembe, hogy a labda a másik lejtőn folytatja mozgását. A (6.24) leképezés tehát akkor érvényes, ha a belőle következő

u_{n+1} , z_{n+1} -ből képzett dimenziótlan kinetikus energia kisebb lesz 1-nél, azaz, ha $(u_n - 2\sqrt{z_n} \operatorname{tg} \alpha)^2 + z_n \leq 1$. Ebből következik, hogy ha a fázistérben az n -edik pont az

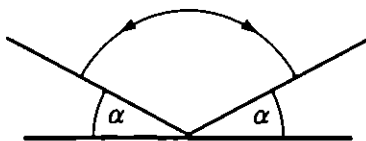
$$u_n \geq 2\sqrt{z_n} \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{1 - z_n} \quad (6.26)$$

tartományban van, akkor (6.24) veendő, egyébként (6.25). A (6.26) egyenlőtlenség határgörbéjének szerepe hasonló a (6.5) aszimmetrikus pékleképezés $v_n = a$ vonalához, csak most a felette és alatta érvényes mindkét félleképezés nemlineáris.

A leképezésnek fixpontja csak akkor lehet, ha az (6.25)-ben lép fel ((6.24) csak lefelé haladást képes leírni). Ennek feltétele az, hogy $u^* = 0$, azaz, hogy a beesés pontosan merőleges a lejtőre. A becsapódási sebességre azt kapjuk, hogy

$$z^* = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + (1/4) \sin(4\alpha) \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha \cos(2\alpha)} = \frac{1}{2 - \cos(2\alpha)}. \quad (6.27)$$

A valódi térben a leképezés fixpontja a két lejtő között egyetlen, szimmetrikus íven pattogó mozgásnak felel meg (6.13. ábra). Érdekes módon a fixpont csak akkor stabil, ha a lejtők szöge nagyobb 45 foknál. Lapos lejtőkre a fixpont hiperbolikus.



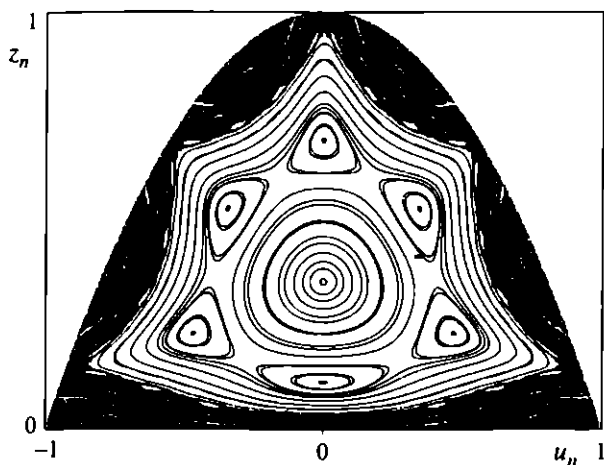
6.13. ábra. A leképezés $(0, z^*)$ fixpontjának megfelelő mozgás a térben.

6.12. feladat. Írjuk fel a kettős lejtőn pattogó labda fixpontja körül linearizált leképezést!

A teljes leképezésben természetesen számos ciklus is jelen lehet. Ezek stabilitása érzékenyen függ a lejtők szögétől. Az 1.2.3. szakaszban bemutatott eseten kívül (l. 1.20. ábra, ahol $\alpha = 50^\circ$), csak az $\alpha = 73$ fokos szöghöz tartozó fázistérképet adjuk meg (6.14. ábra).²

6.13. feladat. Mutassuk meg, hogy 45 fokos lejtők esetén semmilyen kezdőfeltételhez sem tartozhat kaotikus mozgás.

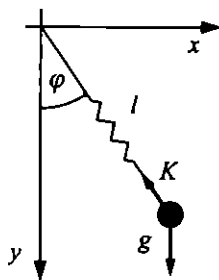
²Javasoljuk, hogy az Olvasó a leképezést iteráló programmal maga derítse fel a lehetséges fázistérbeli szerkezetek gazdag változatosságát.



6.14. ábra. A kettős lejtőn paltogó labda fázistérképe az (u_n, z_n) síkon az $\alpha = 73$ fok ($= 1,274$ radián) esetben. Harminc különböző kezdőfeltételből indítottunk trajektóriákat.

6.4.2. A rugós inga

Tekintsünk egy olyan ingát, melynek fonala l_0 nyugalmi hosszúságú és ω_0 sajátfrekvenciájú rugó. Ez egyben a gumiszál végére kötött test, az ún. similabda modellje. A similabdával ellentétben az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a fonál sohasem lazul meg. Ingánk a függőleges helyzeten is átlendülhet.



6.15. ábra. A rugós ingára ható erők.

Helyezzük a koordináta-rendszer origóját a felfüggesztési pontba (6.15. ábra)! Abban a pillanatban, amikor a fonál végpontján elhelyezkedő egységnyi tömegű test

az (x, y) koordinátájú pontban van, a fonál hossza $l \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. A fonálban ható erő az $l - l_0$ hosszal megnyújtott rugóban ébredő $K = \omega_0^2(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)$ erő. Ennek vízszintes komponense a K érték $(-x/l)$ -szerese. Az y irányt lefelé növekvőnek választva a rugalmas erő y komponense K -nak $(-y/l)$ szerese, de ebben az irányban hat a gravitációs erő is. Ezért a mozgásegyenletek

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \ddot{y} = -\omega_0^2 y \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + g. \quad (6.28)$$

A fonál pillanatnyi l hosszúsága és φ szöge az x, y koordinátákkal az $x = l \sin \varphi$, $y = l \cos \varphi$ kapcsolatban van. Az l, φ változóiban a mozgásegyenletek:

$$\ddot{l} = l\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2(l - l_0) + g \cos \varphi, \quad l\ddot{\varphi} = -2\dot{l}\dot{\varphi} - g \sin \varphi \quad (6.29)$$

alakúak.

A távolságot az l_0 nyugalmi hossz, az időt az $1/\omega_0$ egységeiben mérve (l. 8.1. függelék) az

$$\ddot{x} = -x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \ddot{y} = -y \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + q \quad (6.30)$$

dimenziótlantított egyenletekre jutunk. A polárkoordinátás alak

$$\ddot{l} = l\dot{\varphi}^2 - (l - 1) + q \cos \varphi, \quad l\ddot{\varphi} = -2\dot{l}\dot{\varphi} - q \sin \varphi. \quad (6.31)$$

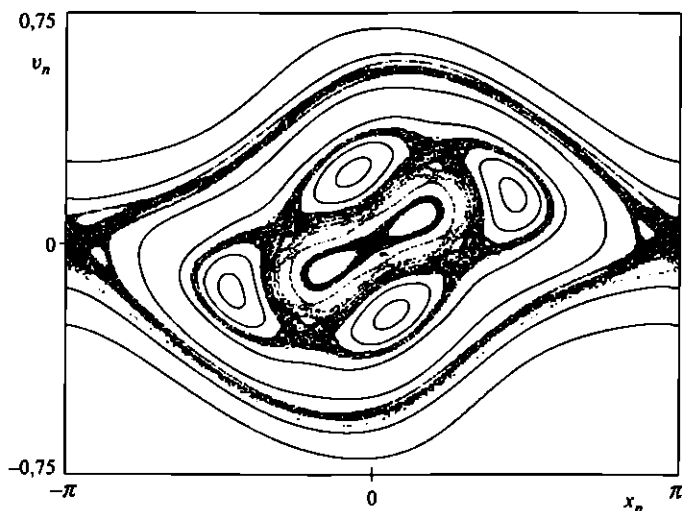
Itt

$$q = \frac{g}{\omega_0^2 l_0} \quad (6.32)$$

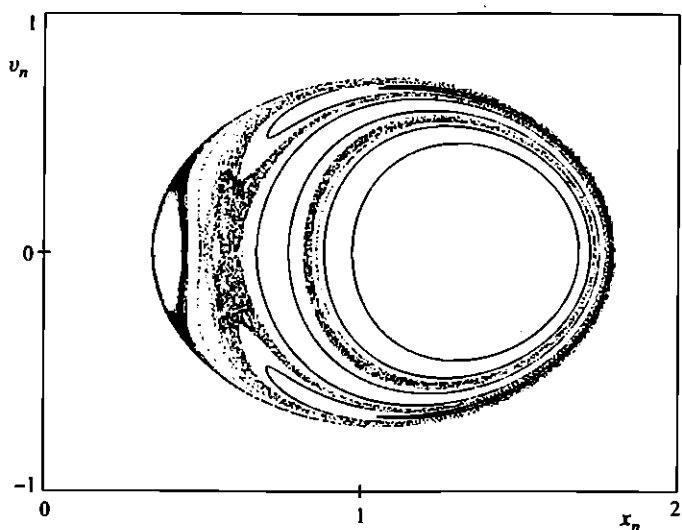
a rendszer egyetlen dimenziótlan paramétere, amelynek szemléletes jelentése: a függőlegesen rezgő rugó és az állandó hosszúságú inga lengésideje arányának a négyzete.

A q paraméter egységnyi nagyságrendű értékei azt jelzik, hogy a rendszerben az ingára és a rezgő rugóra jellemző tulajdonságok körülbelül azonos mértékben vannak jelen. Ezek csatolódása a kétdimenziós mozgásban erősen nemlineáris, és ezért a káosz az ilyen paraméterértékekre a legerősebb.

A Poincaré-metszetet két módon is elkészítettük. Az egyiket az $l = l_0$ helyzetben vesszük fel, azaz akkor, amikor az inga pillanatnyi hossza a nyugalmi hossz (pozitív megnyúlási sebességgel). A leképezés változói ezért itt a fonál pillanatnyi szögkitérése, $x_n \equiv \varphi_n$ és szögsebessége, $v_n \equiv \dot{\varphi}_n$ (6.16. ábra). A másik esetben a leképezést a $\varphi = 0$ ($\dot{\varphi} > 0$) feltétel határozza meg, s az ábrázolás az $x_n \equiv l_n, v_n \equiv \dot{l}_n$ síkon történik (6.17. ábra). A fázistérképek az elliptikus és kaotikus tartományok egymásba ágyazottságát mutatják.



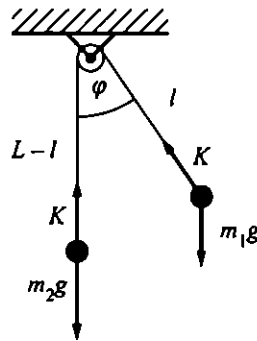
6.16. ábra. A rugós inga $x_n \equiv \varphi_n$, $v_n \equiv \dot{\varphi}_n$ Poincaré-térképe 11 különböző kezdőfeltétellel, állandó $\mathcal{E} = l^2/2 + l^2\dot{\varphi}^2/2 - ql \cos \varphi + (l-1)^2/2 = 0,195$ összenergia mellett, $q = 0,07$. A viszonylag kicsi q paraméter azt jelenti, hogy a rugó erős, de ennek ellenére a fázistérben már megjelent a káosz.



6.17. ábra. A rugós inga $x_n \equiv l_n$, $v_n \equiv \dot{l}_n$ Poincaré-térképe a 6.16. ábrával megegyező paraméterekkel és kezdőfeltételekkel. (A 6.16. ábra közepétől a kép széléig egymást követő, különböző kezdőfeltételű tartományok itt fordított sorrendben, kívülről befelé követik egymást.)

6.4.3. Csigán lengő test

Egy elhanyagolható sugarú és tömegű, rögzített tengelyű csigán átvett nyújthatatlan, L hosszúságú kötéel végén egy-egy pontszerű test lóg. A bal oldali, m_2 tömegű test csak függőlegesen mozoghat, míg a másik, m_1 tömegű test a függőleges síkban lengéseket is végezhet. A lengő test pillanatnyi helyzetét a kitérés φ szögével és a csigától mért l távolságával jellemezzük. A kötéelhossz állandósága miatt ezzel a másik test helyzetét is egyértelműen megadtuk.



6.18. ábra. A kötéel két végén levő tömegpontokra ható erők.

A lengő test mozgásegyenletének felírásakor érdemes a vele együttforgó koordináta-rendszert használni. A pillanatnyi szögsebesség $\dot{\varphi}$, ezért a testre hatnak tehetetlenségi erők is. A centrifugális erő nagysága $m_1 l \dot{\varphi}^2$, s a kötéel irányában kifelé mutat (l. 6.18. ábra). Ugyanilyen irányú a súly $m_1 g \cos \varphi$ komponense. A kötéelirányú gyorsulás \ddot{l} , ezzel a mozgásegyenlet radiális komponense

$$m_1 \ddot{l} = m_1 g \cos \varphi + m_1 l \dot{\varphi}^2 - K, \quad (6.33)$$

ahol K a kötélerő nagysága. A kötéltre merőleges irányban a súlyerő $-m_1 g \sin \varphi$ komponensén kívül hat a másik tehetetlenségi erő, a Coriolis-erő is. A $\dot{\varphi}$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben az m_1 tömegű test sugárirányban mozog \dot{l} sebességgel. A Coriolis-erő nagysága $2m_1 \dot{l} \dot{\varphi}$, és pozitív $\dot{\varphi}$ szögsebesség esetén az együttforgó rendszerben mért pillanatnyi sebesség irányától *jobbra* téríti el a testet. A mozgásegyenlet a fonálra merőleges komponensre ezért (l. 6.18. ábra)

$$m_1 \dot{l} \dot{\varphi} = -m_1 g \sin \varphi - 2m_1 \dot{l} \dot{\varphi}. \quad (6.34)$$

A függőleges egyenes mentén mozgó másik test egyenlete

$$m_2 \ddot{l} = K - m_2 g. \quad (6.35)$$

Itt felhasználtuk, hogy a kötélnyújthatatlan és súlytalan, ezért a kötélrő mindkét végén azonos nagyságú, és a fonál menti gyorsulás mindenütt \ddot{l} .

A (6.33) és (6.35) egyenleteket összeadva a kötélrő kiesik. Az összegként kapott egyenletet és (6.34)-et az $m_1 + m_2$ össztömeggel osztva az

$$\ddot{l} = \mu g \cos \varphi + \mu l \dot{\varphi}^2 - (1 - \mu)g, \quad l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi - 2\dot{l}\dot{\varphi} \quad (6.36)$$

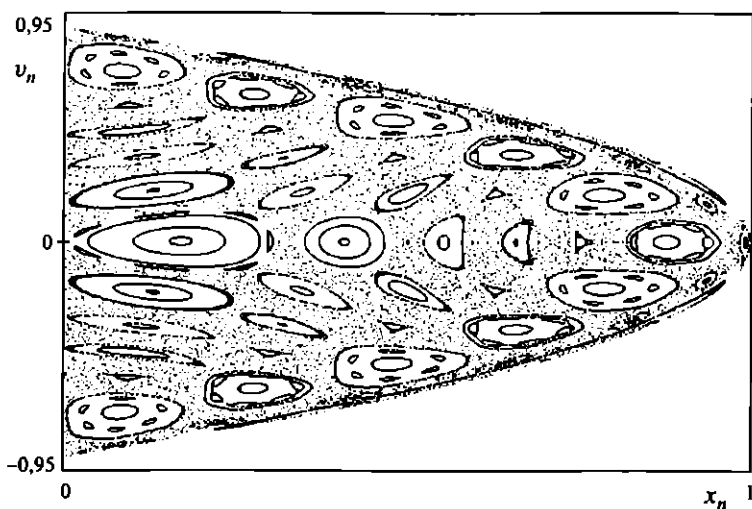
egyenleteket kapjuk, ahol

$$\mu \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (6.37)$$

Ha a hosszúságot a teljes L fonálhossz, az időt az ilyen hosszú fonálinga lengés-idejével arányos $\sqrt{L/g}$ egységekben mérjük, az

$$\ddot{l} = \mu \cos \varphi + \mu l \dot{\varphi}^2 - (1 - \mu), \quad l\ddot{\varphi} = -\sin \varphi - 2\dot{l}\dot{\varphi} \quad (6.38)$$

dimenziótlan egyenleteket kapjuk. A 6.19. ábra egy olyan fázistérképet mutat, amely (az 1.17. ábrától eltérően, ahol $\mu = 0,2$) a $\mu = 0,3$ tömegarányhoz tartozik. Itt is jól látszik, hogy elliptikus és kaotikus tartományok egymásba ágyazottan helyezkednek el.

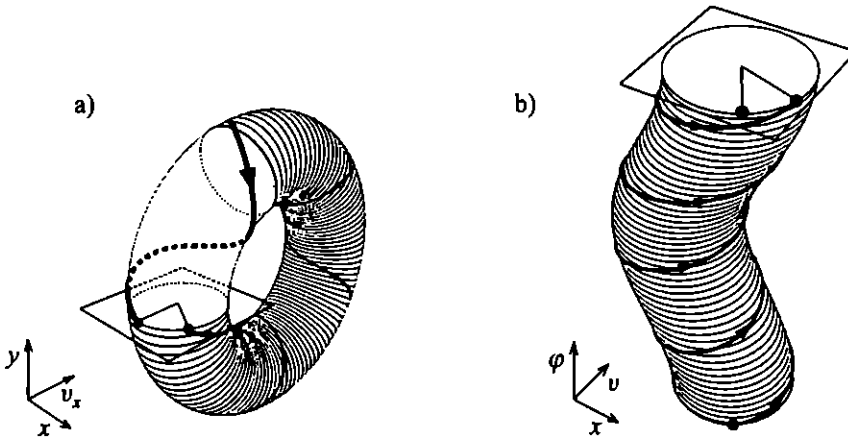


6.19. ábra. A csigán lengő test $x_n \equiv l_n$, $v_n \equiv \dot{l}_n$ Poincaré-térképe a $\mu = 0,3$ tömegarány esetén. A dimenziótlan összenergia $\mathcal{E} = \dot{l}^2/2 + \mu l^2 \dot{\varphi}^2/2 - \mu l \cos \varphi - (1 - \mu)(1 - l) = -0,3$.

6.5. A konzervatív káosz általános tulajdonságai

6.5.1. A tóruszok szerepe

A 6.14., 6.16., 6.17. és 6.19. ábrán látható zárt fázisgörbék a háromdimenziós térben „csőszerű” sima felületeknek, *tóruszoknak* felelnek meg (l. 6.20a. ábra). E példák is mutatják, hogy a konzervatív rendszerek fázistérének – még a kaotikus esetek nagy részében is – jellegzetes képződményei a tóruszok. Gyakori előfordulásuk egyik oka, hogy a stabil ciklusok a fázistérben elliptikusak: kis környezetükben rezgőmozgás alakul ki, de a súrlódás hiánya miatt a pont véges távolságra marad a periodikus pályától. A trajektóriák egy felületen futnak, amely cső formájában veszi körül a stabil periodikus mozgást (l. 6.20. és 6.21. ábra). Tórusz azonban jelen



6.20. ábra. Konzervatív rendszerek tóruszai. Tórusz nem gerjesztett kétdimenziós rendszer (a) és gerjesztett egydimenziós rendszer (b) fázistérében. A berajzolt körív a tóruszon futó kváziperiodikus trajektória $\Delta\theta_1$ szögelfordulása egy leképezési lépés alatt. (Az első esetben Poincaré-, a másodikban stroboszkopikus leképezést használunk.)

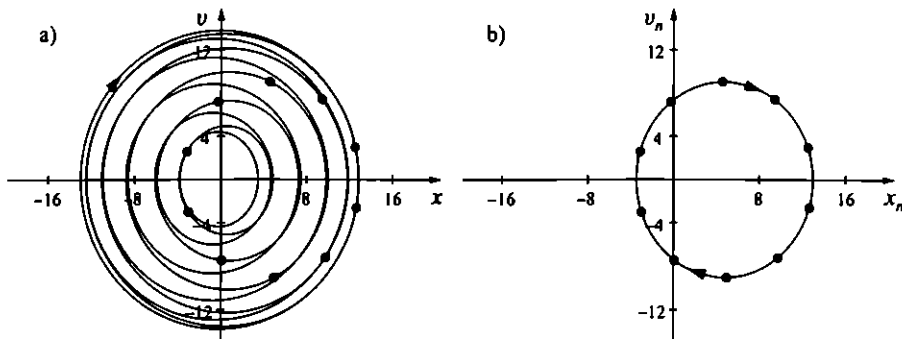
lehet a stabil pályáktól távol is, ahol a rajta történő mozgás a teljes fázistéren való átlendülésnek (a lökdösött rotátor példájában – l. 6.7. ábra – teljes körülfordulásnak) felel meg. Ilyenkor a leképezésen megjelenő görbe nem záródik. A tórusz maga mindig *invariáns felület*, azaz olyan felület, melynek minden pontja a mozgás során végig a felületben marad.

A tóruszokhoz tartozó mozgás két különböző periódusú periodikus mozgás kombinációja, ún. *kváziperiodikus mozgás*. A tóruszfelületen történő körülfordulás periódusa ugyanis általában nem azonos a tórusz középvonala menti körülfordulásával (a 6.20a. ábrán pl. a függőleges síkbeli és az arra merőleges mozgásokról van szó). Ezért általában *két* frekvencia: ω_1 és ω_2 jellemzi a kváziperiodikus mozgást. Ezek aránya, a $\nu \equiv \omega_1/\omega_2$ *csavarási szám* az egész tóruszfelületen ugyanaz az érték. A tóruszon zajló mozgás sohasem kaotikus.

A tórusz képe a leképezésen (akár stroboszkopikus, akár Poincaré-leképezésről van szó) egy *folytonos görbe*, a tórusz felületének és a leképezés síkjának metszete. A továbbiakban a leképezésen megjelenő folytonos görbéket is tóruszoknak nevezük. Ezek a tóruszok *invariáns görbék*, azaz a leképezés hatására önmagukba mennek át. A ν csavarási szám a leképezésen azt adja meg, hogy egy leképezési lépés alatt a metszet síkjában a teljes szög (2π) hányad részével fordul el átlagosan a trajektóriát jellemző pont (l. 6.20. ábra). Ha ugyanis a kváziperiodikus trajektória a leképezés síkját $T = 2\pi/\omega_2$ időnként metszi, akkor ezalatt a tóruszgörbén történő elfordulás

$$\Delta\theta_1 = \omega_1 T = 2\pi\nu. \quad (6.39)$$

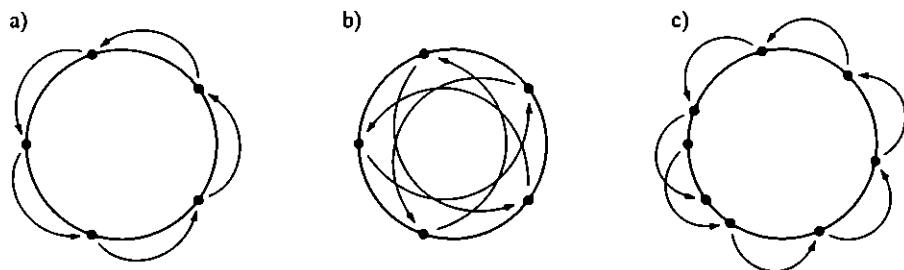
Jól látszik ez az ω_0 sajátfrekvenciájú stabil állapot körül szinuszosan gerjesztett súrlódásmentes mozgás példáján, ahol T a gerjesztési periódus és $\omega_1 \equiv \omega_0$ (l. 6.21. ábra).



6.21. ábra. Az $\ddot{x} = -\omega_0^2 x + f_0 \cos(2\pi t/T)$ egyenlettel leírt súrlódásmentes mozgás képe az (x, v) síkon (a 6.20b. ábra tóruszán futó trajektória vetülete) (a) és a stroboszkopikus leképezésen (b). A leképezésen mozgó pont lépésenként ugyanakkora szögelfordulást végez. A paraméterek és a kezdfeltétel ugyanazok, mint a csillapított esetben (l. 4.5. ábra) csak most $E = 1$.

6.14. feladat. Határozzuk meg a csavarási számot a területtartó leképezés elliptikus fixpontja körül linearizált mozgások Λ_{\pm} sajátértéke alapján! Mekkora a csavarási szám az ω_0 sajátfrekvenciájú stabil állapot körül szinuszosan gerjesztett mozgás esetén?

A tóruszon történő mozgás alapvetően különböző racionális és irracionális csavarási számok esetén. Racionális esetben, amikor a csavarási szám a $\nu = p/q$ alakban írható (ahol p és q természetes számok), a mozgás a tóruszon elhelyezkedő bármely kezdőfeltételre nézve *periodikus*. A csavarási szám definíciójából következik, hogy a leképezésen minden trajektória q pontból áll, melyek bejárási sorrendje függ a p számtól. Ha pl. $p = 1$, akkor a pontok adott körüljárásban, egymás után következnek, ha $p = 3$, akkor viszont hármásával (l. 6.22. ábra). A tóruszon máshonét indított trajektóriák ugyanilyen periodikus mozgást végeznek, a leképezésen ezek összességé rajzolja ki a zárt görbét.



6.22. ábra. Tóruszokon történő mozgás a leképezésen (sematikus ábra). a) Racionális tórusz ($\nu = 1/5$), b) racionális tórusz ($\nu = 3/5$), c) irracionális tórusz ($\nu = \sqrt{2}/9$).

Irracionális csavarási szám esetén, amikor $\nu = \omega_1/\omega_2$ nem írható a p/q alakban, a mozgás *nem* egzaktul periodikus, mert pontos visszatérés a kiindulási helyzetbe sohasem történik. (Ezért a leképezésen ilyenkor egyetlen trajektória is kirajzolja a tórusz folytonos vonalát.) Léteznek azonban-közelítő visszatérések. A csavarási szám értéke számos közeli visszatérés megfigyelése után olvasható le. A tórusz bármely pontja átlagosan $1/\nu$ számú iterálás után kerül vissza a kiindulási pont kis környezetébe.

A továbbiakban a csavarási számok racionális és irracionális voltának megfelelően beszélünk racionális és irracionális tóruszokról. Mindig a nagyobb frekvenciát tekintjük ω_2 -nek, a csavarási szám tehát legfeljebb 1. A $(0, 1)$ intervallumban minden csavarási szám megvalósulhat.

Az irracionális tóruszok szerepe a mozgás szervezésében azon múlik, hogy csavarási számuk *mennyire irracionális*. Érdekes módon egy szám irracionálisának mértéke meghatározható. Erre az ad lehetőséget, hogy minden egynél kisebb pozitív irracionális szám felírható végtelen lánc tört formájában, azaz mint

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \equiv [a_1, a_2, a_3, \dots], \quad (6.40)$$

ahol az a_i -k természetes számok. A lánc tört előállítását egyértelmű, és úgy kapható, hogy a szám reciprokából levonjuk egész részét (a_1 -et), majd ennek reciprokát veszünk, amelyből ismét kivonjuk az egész részt (a_2 -t), majd ismét reciprokot képezünk, és így tovább. A lánc törtben n lépés után megállva ($a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$), az irracionális szám egy racionális közelítését kapjuk. A konvergencia az adott irracionális számhoz nyilván annál lassúbb, minél *kisebbek* az a_i számok. Azokat tekintjük a „legirracionálisabb” számoknak, melyek a legnehezebben közelíthetők meg racionális számokkal, azaz melyek lánc tört-előállításában a lehető legtöbb 1-es szerepel.

6.15. feladat. Határozzuk meg a $\pi - 3$, az $e - 2$, a $\sqrt{2} - 1$, a $\sqrt{3} - 1$ és a $(\sqrt{5} - 1)/2$ számok lánc tört-előállításainak első öt elemét! Mekkora ennek a racionális közelítésnek az eltérése az egyes számoktól?

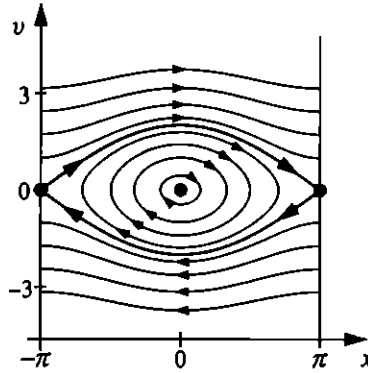
Ennek szellemében a legirracionálisabb szám a $g = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618$ arany-metszési arány. Mivel ez a $g^{-1} = 1 + g$ másodfokú egyenlet megoldása, g lánc tört-alakjában csupa 1-es áll. Ennél a számnál csak kissé irracionálisabbak az ún. nemes számok. A k -adik nemes szám lánc törtalakja $g_k = [k, 1, 1, 1, \dots]$ ($k > 1$).

6.16. feladat. Határozzuk meg az első néhány nemes számot!

6.5.2. A KAM-tétel

Azt a kérdést vizsgáljuk, mi történik egy nemkaotikus konzervatív rendszerrel, ha azt külső hatás kissé megzavarja, perturbálja. A nemkaotikus konzervatív rendszereket *integrálható* rendszereknek nevezzük (l. 8.5. függelék). Ezek fázis terét elliptikus pályák és a körülöttük elhelyezkedő tóruszok jellemzik. Erre egyszerű példa az inga esete (l. 6.23. ábra). Ha előfordul egy-egy hiperbolikus pálya is, akkor annak stabil és instabil sokaságai maguk is speciális tóruszt alkotnak, amely az egyik hiperbolikus pontból a másikba visz. Ez a speciális tórusz szeparátrix, elválasztja a különböző jellegű periodikus és kváziperiodikus mozgásokat. A perturbálatlan inga fázis-tere ugyan kétdimenziós, de ehhez hozzágondolhatunk egy harmadik irányt, ami

mentén egyelőre semmi sem történik. A fázistérbeli felületek ekkor olyan hengerpálástok, melyek alapjai az $(x \equiv \varphi, v \equiv \dot{\varphi})$ síkbeli mozgásoknak megfelelő görbék. A gyenge perturbáció, pl. az, hogy az inga szála enyhén megnyújthatóvá válik, módosítja az (x, v) síkbeli viselkedést és megszünteti a harmadik koordinátától való függetlenséget (l. 6.16. ábra).



6.23. ábra. A matematikai inga (integrálható rendszer) fázistérképe a szögkitérésnek megfelelő periodikus helykoordinátával.

A külső hatásra történő válasz szempontjából az irracionális és a racionális tóruszok szerepe különböző. A racionális esetben a mozgás a tóruszon periodikus: a kezdőpont a leképezésen egzaktul visszatér kiindulási helyzetébe, és ezért a perturbáció következményei *felhalmozódhatnak*. Az irracionális tóruszok mentén viszont a külső hatások mintegy kiátlagolódnak. Ezért azt várjuk, hogy minden racionális tóruszon egyfajta rezonancia alakulhat ki, a perturbálatlan mozgástól való eltérés időben egyre erősödik, ami a tóruszok *felbomlásához* vezet. A racionális tóruszokat ezért *rezonáns tóruszoknak* hívjuk. Látni fogjuk, hogy a rezonáns tóruszokból végül is csak néhány periodikus trajektória marad vissza, és az ezeken kívüli mozgások nem is kötődnek egy invariáns görbéhez (a teljes fázistérben felülethez). A felbomlott tóruszok környékén a mozgás már nem lehet mindenütt kváziperiodikus; ezek azok a tartományok, ahol káosz megjelenik. A tóruszok stabilitása a külső hatásra tehát azon múlik, hogy elegendően erős-e rajtuk az eltérés a szigorúan periodikus mozgástól, vagyis azon, hogy a tórusz elegendően irracionális-e.

A tóruszok felbomlásának feltételét a Kolmogorov–Arnold–Moser-tétel, röviden a *KAM-tétel* fogalmazza meg pontosan. Ha a perturbáció elegendően sima függvényvel adható meg, és gyenge (erősségét az $\varepsilon \ll 1$ dimenziótlan szám méri),

akkor a KAM-tétel szerint az olyan ν csavarási számú tóruszok maradnak biztosan épen, amelyekre teljesül, hogy

$$\left| \nu - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{s^{5/2}} \quad (6.41)$$

az eredeti ν csavarási szám bármilyen r/s racionális közelítésére. A K állandó csak a külső hatás ε erősségétől függ, s az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben nullához tart. A $\nu = p/q$ racionális csavarási számú tóruszok és az olyan irracionális tóruszok, melyek csavarási száma jól közelíthető racionális számokkal, nem feltétlenül maradnak meg. A megmaradó tóruszok a nagyon irracionális tóruszok, melyek csavarási száma csak nagyon nagy nevezőjű racionális számokkal helyettesíthető elegendően pontosan. A megmaradó tóruszokat szokás *KAM-tórusznak* is nevezni.

E feltétel szerint minden r/s racionális szám körül létezik egy $2K(\varepsilon)s^{-5/2}$ vastagságú sáv, s az ebbe eső csavarási számokhoz tartozó tóruszokat eltüntetheti, és a tapasztalat szerint általában ténylegesen el is tünteti a külső hatás. (Arról, hogy pontosan mi történik a rezonáns tóruszok helyén, a következő fejezetben lesz szó.)

Végtelen sok tórusz és környéke bomlik fel, s az ilyen tóruszok csavarásiszámértékei *véges*, nem nulla hosszúságú szakaszt képeznek a csavarási számok teljes $(0, 1)$ intervallumában (l. 6.24. ábra). Mivel minden s nevezőjű törtről s különböző létezik ($r = 1, 2, \dots, s$), a KAM-tétel feltételét nem teljesítő ν -intervallumok hossza az s nevezőjű racionális csavarási számok körül legfeljebb $2sK(\varepsilon)/s^{5/2} = 2K(\varepsilon)/s^{3/2}$.



6.24. ábra. A felbomló tóruszokhoz tartozó csavarási számok intervallumai (fehér szakaszok) az összes lehetséges csavarási szám $0 \leq \nu \leq 1$ tartományában ($K = 0, 2$). A 7-nél nagyobb nevezőjű törtekhez tartozó kivágott intervallumok olyan rövidek, hogy már nem láthatóak ebben a nagyításban. A jobb áttekinthetőség kedvéért a $\nu = 1$ -hez tartozó kivágott intervallumot nem ábrázoltuk.

Az ilyen intervallumok teljes hossza

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2 \frac{K(\varepsilon)}{s^{3/2}} = 2K(\varepsilon) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-3/2}. \quad (6.42)$$

A sor konvergál, a teljes hossz kis ε -ra mindig kisebb, mint 1, amiből következik, hogy az összes tórusz semmiképpen sem tud felbomlani kis ε esetén. Ráadásul folytonos módon kapjuk vissza a nemkaotikus esetet, hiszen a külső hatás kikapcsolásával, az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben a K paraméter nullához tart.

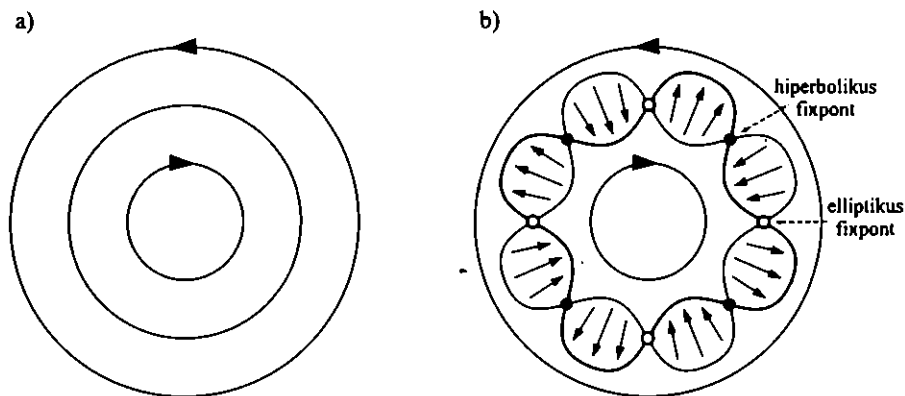
A KAM-tétel azt is kimondja, hogy a megmaradó tóruszok a fázistérnek éppúgy *véges* hányadát töltik ki, mint a 6.24. ábrán látható teljes $(0, 1)$ csavarásiszám-intervallumnak. Annak ellenére, hogy kis ε esetén a felbomló tóruszok fázistérfogata kicsi, mégsem zérus, ami azt jelenti, hogy káosz már *tetszőlegesen gyenge* külső hatás esetén megjelenhet egy olyan rendszerben, ami eredetileg nem kaotikus.³ Ez a matematikai háttere annak a kijelentésnek, hogy *a káosz nem a kivételes, hanem a tipikus időbeli viselkedés.*

6.5.3. A rezonáns tóruszok maradványai

Tekintsünk egy racionális tóruszt, melynek csavarási száma a perturbálatlan nemkaotikus rendszerben $\nu = r/s$ alakú. A leképezésen a tórusz minden pontja fixpontja az s -szer iterált leképezésnek. A csavarási szám általában folytonosan változik, ezért a racionális tórusz egyik oldalán a ν -nél nagyobb, a másikon pedig ennél kisebb csavarási számú tóruszok léteznek. Ezek közül választunk egy-egy közeli, erősen irracionális tóruszt (l. 6.25. ábra). Tegyük fel, hogy a nagyobb csavarási számú irracionális tórusz a racionálison kívül, a kisebb csavarási számú pedig azon belül helyezkedik el, és az s -szer iterált leképezésen a külső irracionális tóruszon levő pontok a pozitív, a belsőn a negatív irányba mozognak (6.25. ábra).

A gyenge perturbáció hatására az irracionális tóruszok a KAM-tétel értelmében invariáns görbék maradnak, enyhén deformálódnak, de rajtuk a körüljárás jellege nem változik. A racionális tórusz azonban felbomolhat, megszűnhet mint invariáns görbe. Kérdés, hogy ilyenkor találhatók-e legalább invariáns pontok maradványként. Az eredeti racionális tórusz úgy is tekinthető, mint egy görbe, melynek pontjai az s -szer iterált leképezés következtében nem fordulnak el. A folytonosság miatt a görbe eredeti helye környékén léteznie kell a perturbáció jelenlétében is egy olyan görbének, melynek pontjai nem fordulnak el. Az ilyen görbe kizárólag sugárirányban mozdulhat el a módosított leképezés s -szeres iteráltja hatására. Ezt a görbét jelöltük vékony folytonos vonallal a 6.25. ábrán. E görbe képe a terület-tartás miatt olyan görbének kell lennie, mely metszi az eredetit. A metszéspon-

³Így például megjelenhet minden nem egészen gömbszimmetrikus, nagy tömegű égitest körüli bolygó mozgásában, mert az erő akkor nem pontosan centrális (és a bolygó impulzusnyomatéka nem megmaradó mennyiség).

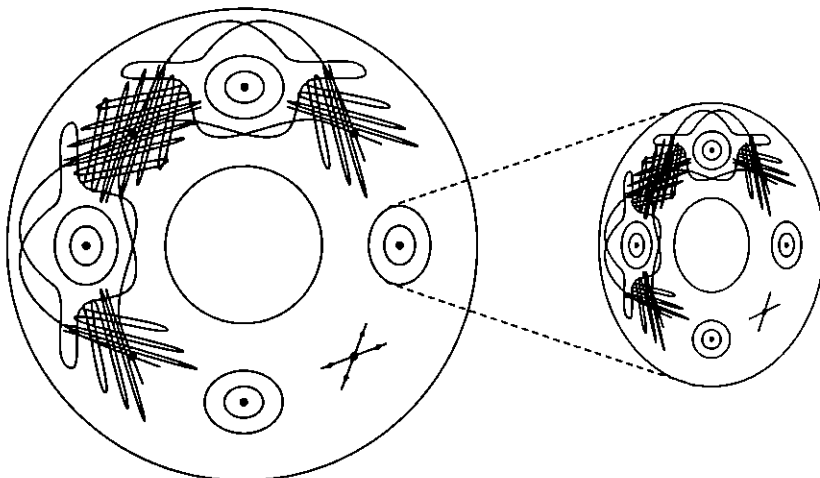


6.25. ábra. A racionális (rezonáns) tórusz környéke. a) Nemkaotikus rendszer. A középső görbe a $\nu = r/s$ csavarási számú racionális tórusz, a legbelső és a külső görbe irracionális tóruszokat jelöl. A nyilak az elmozdulási irányt mutatják az s -szer iterált leképezésen. b) A perturbáció bekapcsolása utáni helyzet. A belső vékony vonal olyan görbét jelent, amely az s -szer iterált leképezés hatására a nyilakkal jelölt módon, csak sugárirányban mozdul el. A vastag vonal a vékony vonal képe, a két görbe metszéspontjai pedig fixpontok. A legbelső és a legkülső görbe továbbra is irracionális tórusz.

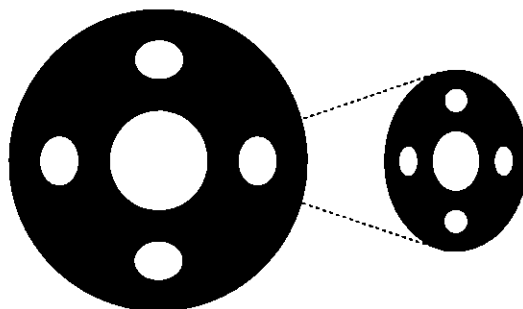
tok, melyek száma páros, az s -szer iterált leképezés *fixpontjai*. Ezek a felbomlott racionális tórusz maradványai. Az ilyen fixpontok száma legalább $2s$, de lehet ennek egész számú többszöröse is. A metszéspontok körüli nyilakról és a megmaradó tóruszokon érvényes mozgásirányból leolvasható, hogy *elliptikus és hiperbolikus fixpontok felváltva* követik egymást. Ez az ún. *Poincaré–Birkhoff-tétel* állítása.

A hiperbolikus fixpontok a káosz forrásai. Mint láttuk, általános esetben semmi sem zárja ki, hogy egyetlen fixpont stabil és instabil sokaságai metsszék egymást. (Az eredeti nemkaotikus esetben a sokaságok egybeesését egyfajta belső szimmetria teszi lehetővé, amely azonban a perturbáció hatására megszűnik.) Ezért az oszcilláló sokaságok között homoklinikus, a különböző fixpontok sokaságai között pedig heteroklinikus pontok *keletkeznek* (6.26. ábra). Ezek jelenlétéből a mozgás kaotikus-sága következik (l. [16.] olvasmány). A rezonáns tórusz és környéke tehát elbomlik, s ennek törmelékeként jelenik meg az elliptikus és hiperbolikus pontok láncolata. Az irracionális tóruszok választóvonalként működnek, ugyanis invariáns görbék, melyeket a trajektóriák a leképezés síkjában nem léphetnek át.

Az elliptikus fixpontok körül kis KAM-tóruszok alakulnak ki, mely tartományokban a mozgás alapvetően kváziperiodikus. Ez azonban nem mindenütt igaz, ugyanis eredeti gondolatmenetünk alkalmazható a kis KAM-tóruszokban is, követ-



6.26. ábra. A felbomlott rezonáns tórusz maradványa: elliptikus és hiperbolikus pontok láncolata (sematikus ábra). Az előbbieket körül a kváziperiodikus, az utóbbiak körül a kaotikus mozgás dominál. Az egész önhasonlóan ismétlődik egyre kisebb skálákon. Csak néhány oszcilláló sokaságot rajzoltunk meg.



6.27. ábra. A 6.26. ábra sötétített változata. A szerkesztés emlékeztet a 2.12. ábrára és mutatja a fázistérbeli kaotikus tartományok kövér fraktál jellegét.

kezésképpen a racionális csavarási számú tóruszoknak itt is fel kell bomlaniuk. Ezek körül ismét elliptikus és hiperbolikus pontok láncolata jön létre, de most kisebb skálán, így nagyítás után az eredetihez hasonló ábrát kapunk. Ennek valamely kis KAM-tóruszát ismét kinagyítva a struktúra tovább ismétli önmagát: a rendszer fázistérbeli szerkezete fraktáltulajdonságot mutat. Mivel a kaotikus és az elliptikus tartományok nullánál nagyobb véges területet töltenek be, a fázistérbeli struktúrák

kövér fraktált alkotnak (l. 1.2.3. szakasz). A kaotikus tartományt minden skálán elliptikus tartományok lyukasztják ki.

6.5.4. Makroszkopikus káosz

A KAM-tétel a nagyon gyenge külső hatások határesetében érvényes. Numerikus szimulálásban a rendszer ilyenkor még gyakran szabályos mozgásúnak tűnik, és az átlagos Ljapunov-exponens értéke sem tér el jelentősen zérustól. Az ε paraméter növelésekor általában azt találjuk, hogy egyre több KAM-tórusz tűnik el, s ennek következtében az eredetileg szomszédos, de szétválasztott kaotikus tartományok összeolvadnak. A bennük elhelyezkedő elliptikus szigetek területének aránya fokozatosan csökken, a káosz erősödik.

Egy rendszert akkor nevezünk makroszkopikusan kaotikusnak, ha a kaotikus tartományok, a kaotikus sávok a teljes fázistér jelentős részét kitöltik. Nem szabad elfeledkezni azonban arról, hogy mire ez megtörténik, a KAM-tétel feltétele (gyenge külső hatás) rendszerint már nem érvényes. Véges, de nem túl erős perturbáló hatás esetén a tapasztalat szerint a fázistér szerkezete még általában hasonló ahhoz, amit a KAM-tétel bemutatott: a kaotikus tartományban jelen vannak az elliptikus szigetek. Tipikus esetekben (l. pl. 6.26. ábra) ezek mintegy kilyukasztják a kétdimenziós kaotikus tartományt, s ezáltal kövér fraktállá teszik. Így van ez még akkor is, ha a tartomány már az egész kétdimenziós fázistér nagy részét kitölti. A numerikus vizsgálatok szerint a (2.15) egyenlettel definiált kövérfraktál-exponens ilyenkor az $\alpha = 0,3 - 0,7$ tartományba esik.

A makroszkopikus káosz tulajdonságait a következőképpen foglalhatjuk össze. A kaotikus sáv

- a rajta levő végtelen sok instabil periodikus pálya stabil és instabil sokaságainak összessége, vagy
- a rajta levő periodikus pályák és a közöttük létrejövő homoklinikus és heteroklinikus pontok összessége.

A kaotikus sáv és a kaotikus attraktor szerkezete között tehát nagy a hasonlóság. A különbség abból adódik, hogy a kaotikus attraktor disszipatív rendszerben van jelen, amikor az időben előre és hátra történő mozgás nem ekvivalens: időben előre haladva a fázistérfogat összehúzódik, míg visszafelé haladva tágul. Az aszimmetria is ebből adódik: a kaotikus attraktor csak az instabil sokaságokat tartalmazza, s ennek megfelelően fraktáلالakzat, melynek területe nulla.

A kaotikus mozgás fő tulajdonságai konzervatív rendszerben is a szabálytalanság, az előrejelezhetetlenség és a rendezett, de komplex fázistérbeli szerkezet. Az

egyes tulajdonságokhoz – a disszipatív rendszerbeli káoszhoz hasonlóan – mérőszámok is rendelhetők:

- szabálytalanság: a kaotikus sáv topologikus entrópiája pozitív: $h > 0$,
- előrejelezhetetlenség: a sávon belül az átlagos Ljapunov-exponens pozitív: $\bar{\lambda} > 0$, és a természetes eloszlás a kaotikus sávokban egyenletes,⁴
- fázistérbeli szerkezet: a kaotikus sávok fraktáldimenziója kettő⁵ $D_0 = D_1 = 2$, de kövér fraktál, nemtriviális α kövérfraktál-exponenssel.

Egy általános kaotikus rendszerben a mozgás összetettségéhez nagyban hozzájárul a kaotikus és a kváziperiodikus tartományok egymásba ágyazottsága, aminek a disszipatív esetekben nincsen megfelelője (éppen erre utal a kövérfraktál-tulajdonság).

17. Káosz a Naprendszerben

A káosz jelenségének felfedezése az égi mechanikával kapcsolatos, ugyanis Poincaré klasszikus eredményeit egy, a Naprendszer stabilitásának bizonyítására kiírt pályázatra benyújtott dolgozatban érte el 1889-ben. Kimutatta, hogy a bizonyítás nem lehetséges. Már az olyan egyszerű rendszerben, mint a két nagy tömegű égitest (pl. Nap és Jupiter) körül az égitestekkel egy síkban keringő könnyű bolygó esetén (az ún. háromtest-problémában) is felléphet a kezdőfeltételre mutatott érzékenység.

Az igen nagy teljesítményű számítógépek megjelenésével mára egyértelművé vált, hogy a Naprendszer mozgása kaotikus, s hosszú távon az egész rendszer nem jelezhető előre. A legkülső bolygó,

a Plútó mozgására pozitív átlagos Ljapunov-exponens jellemző, melynek értéke $1/(20$ millió év). Az előrejelzési idő tehát kb. 20 millió év, ami bármilyen nagynek tűnik is az emberi skálán, a Naprendszer teljes 10 milliárd év körüli élettartamához viszonyítva meglepően rövid. A Plútó kis tömege miatt visszahatása elhanyagolható a többi bolygóra. A Nap és kilenc bolygójának teljes rendszere több különböző vizsgálatban is kaotikusnak adódott, s az eredmények összehangzóan mutatják, hogy a 100 millió éves vagy hosszabb időskálán ez elsősorban a belső bolygók, a Merkúr, a Vénusz, a Föld és a Mars mozgásában mutatkozik meg (a nagybolygók szabályosan viselkednek). A belső bolygók átlagos Ljapunov-exponense $1/(5$ millió év).

⁴Ez következik az (5.63) egyenletből, amelynek $J \equiv 1$ mellett a P^* \equiv konstans eloszlás mindig megoldása.

⁵Mivel a negatív Ljapunov-exponens a pozitív -1 -szerese, az (5.73) Kaplan–Yorke-összefüggés alapján $D_1 = 1 + \bar{\lambda}/|\bar{\lambda}'| = 2$.

Ez azt jelenti, hogy egy kezdeti 1 km-es távolságbizonytalanság valamelyik bolygó helyzetében 20 millió év múlva csak 55 km-re nő, de 100 millió év múlva már 500 millió km lesz, ami nagyobb a Nap–Föld távolságnál. A legnagyobb ingadozások a Merkúr és a Mars pályájában várhatók, a Vénuszéban és a Földében jóval kisebbek. A pálya lapultságának, az excentricitásnak az ingadozása pl. a Merkúr esetén az átlagos értékkel összemérhető is lehet. A bolygók ütközése vagy kilökődése a Naprendszerből azonban még ezen a hosszú időskálán sem valószínű. Mindez azonban mutatja, hogy a Naprendszer mozgásának előrejelzése csak a néhány-szor 10 millió éves skálán megbízható.

A Mars és a Jupiter között számos kisbolygó kering a Nap körül. Előszólásuk azonban nem egyenletes. Az ún. Kirkwood-zónákban számuk sokkal kisebb, mint azokon kívül. A zónákban a pályák periódusideje úgy viszonyul a Jupiter keringési idejéhez, mint kis egész számok. A legjelentősebb Kirkwood-zónák az $1/3$, $1/2$, $2/5$ és $3/7$

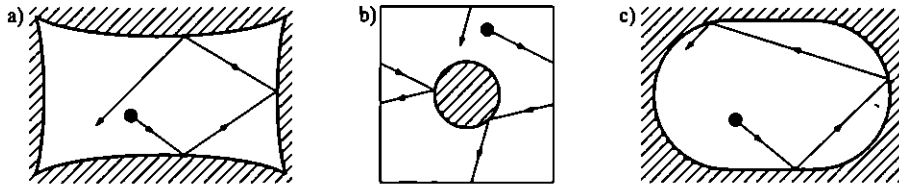
periódusidő-arányokhoz tartoznak. Az a tény, hogy ezen rezonanciák körül alig található kisbolygó, arra utal, hogy az ezeknek megfelelő tóruszok felbomlottak, és a megfelelő kisbolygók eltávolodtak a Jupiter környezetéből. A jelenség azonban nem tekinthető a KAM-tétel következményének, mert más rezonanciák (pl. a $2/3$, $3/4$ és $1/1$ arányok) környékén sok kisbolygó található. Általános megfontolások alapján is kézenfekvő, hogy a KAM-tétel nem érvényes a Naprendszerre, mert a perturbációk (bármelyik bolygó mozgását tekintjük is a kiindulási problémának) túl nagyok. A közel rezonáns állapotból (pl. az $1/3$ zónából) induló kisbolygók numerikus vizsgálata nemcsak azt bizonyította be, hogy mozgásuk kaotikus, hanem azt is, hogy egyesek eljuthatnak a Föld közelébe. A civilizációkra nézve nem a Naprendszer egészének dinamikai instabilitása, hanem a kaotikus viselkedés egy másik megnyilvánulása, egy nagyméretű kisbolygóval történő esetleges ütközés jelent fenyegetést.

6.5.5. Erősen kaotikus rendszerek

A perturbáció erősségének növelésekor megtörténhet, hogy az utolsó invariáns fázis-görbe, az utolsó tórusz is eltűnik. Mivel a KAM-tétel már nem érvényes, ez nem feltétlenül az aranymetszésnek megfelelő (de általában „nemes számmal” jellemezhető) csavarási számú tórusz. A fázistérben ezzel megnyílik a lehetőség arra, hogy egyetlen trajektória is bejárja az egész fázisteret.

Ez a viselkedés különösen gyakori a vízszintes síkban függőleges falakkal határolt tartományban mozgó és a falakon rugalmasan visszapattanó golyó, a biliárd-probléma esetében (6.28. ábra).

A pozitív átlagos Ljapunov-exponens jelenléte ezekben a biliárdokban optikai analógiával jól megérthető. A konkáv biliárd (6.28a. ábra) faldarabjai a részecskepályák szempontjából úgy működnek, mint egy-egy szórótükör: a párhuzamosan



6.28. ábra. Síkbeli biliárdok, melyekben a kaotikus viselkedés az egész fázistérre kiterjed. a) Konkáv biliárd, b) a Szinaj-biliárd, c) a stadion-biliárd.

beeső pályák az ütközés után széttartóvá válnak. A Szinaj-biliárd (más néven a Lorentz-gáz, 6.28b. ábra) egy nagy négyzetrácson elhelyezett, azonos korongok között bolyongó részecskét modellez. A mozgást eltolásinvariánsnak feltételezve, elegendő az ábrán látható cellát vizsgálni mindkét irányban periodikus határfeltételekkel. A pozitív Ljapunov-exponens itt is a korong szóróhatásának a következménye. A stadion-biliárd (6.28c. ábra) két félkörből és az azokat összekötő párhuzamos egyenes szakaszokból áll. A mozgás kaotikussága itt nem annyira nyilvánvaló, de szemléletesen fogalmazva fontos szerepet játszik benne az, hogy a gyűjtőtükrök a fókusztávolságukon kívül a sugarakat szétszórják.

Ezek a biliárdproblémák a pék- és a macskaleképezés, valamint az erősen lökdösött rotátor ($a \gg 1$) esetével együtt a kaotikus mozgások egy speciálisan erős fajtáját mutatják, melyben a kaotikusan ugráló pont a *teljes rendelkezésre álló fázistérre* kitért,⁶ viselkedése hasonló egy gáz molekuláinak mozgásához. Ebben a speciális határesetben a kevés összetevőből álló rendszerek konzervatív káoszának statisztikus tulajdonságai hasonlítanak a 10^{23} részecskéből álló rendszerek statisztikus tulajdonságaihoz (l. [18.] és [19.] olvasmányok).

18. Ergodicitás és keverés

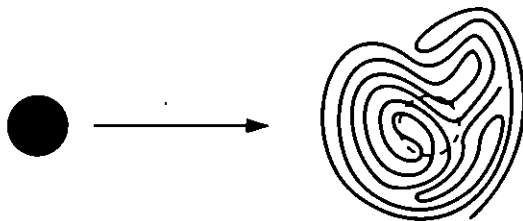
Egy konzervatív rendszert akkor nevezünk *ergodikusnak*, ha minden tipikus trajektória az egész rendelkezésre álló fázistérre (aminek méretét csak néhány külső kényszer, elsősorban az energiameg-

maradás szabja meg) bejárja, azaz minden fázistérbeli pont tetszőlegesen kis környezetébe előbb-utóbb eljut. Ez a problémakör a sokrészecske-rendszerek statisztikus fizikájából ered, ahol központi fon-

⁶Ezekben a speciális esetekben a kaotikus tartomány nem kövér fraktál, hiszen nem szakítják meg elliptikus szigetek.

tosságú kérdés, hogy a fizikai mennyiségek időátlaga megegyezik-e a stacionárius eloszlásból számított ún. sokaságátlaggal. Ha igaz, hogy a pálya bejárja a fázisteret, akkor a két átlag megegyezik. Beszélhetünk ergodicitásról a teljes fázistér bizonyos részalmazain is. Ebben az értelemben a mozgás a kevés összetevőből álló kaotikus rendszerek *minden egyes* kaotikus sávjában ergodikus.

A sokrészesecske-rendszerek egy másik fontos vonása a *keverési tulajdonság*. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy egy kezdetben adott tartományra korlátozott részecskesokaság az idő múlásával úgy oszlik szét, hogy kompakt alakja megszűnik, nyúlványokat ereszt, s végül igen vékony szájakban „egyenletesen” hálózza be a fázisteret (6.29. ábra).



6.29. ábra. A keveredési tulajdonság sematikus ábrázolása. A fázistartomány a fázistérben szálas formában terjed szét. Hosszú idő után a fekete és fehér tartomány területének aránya ugyanakkora bármely részalmazon.

A keverési tulajdonság egy M két-dimenziós leképezés D invariáns halmazán a következőképpen fogalmazható meg. Elegendően nagy számú lépés után valamely S tartomány n -edik képe ($M^n S$) bármely S' tartomány területének ugyanakkora hányadát tölti ki, akárhogy választjuk is S' -t. Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{T}(S' \cap M^n S) / \mathcal{T}(S')$ hányados (\mathcal{T} a területet jelöli) független S' -től. Speciálisan S' -nek a teljes D tartományt választva: $\mathcal{T}(D \cap M^n S) = \mathcal{T}(M^n S) = \mathcal{T}(S)$, és így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathcal{T}(S' \cap M^n S)}{\mathcal{T}(S')} = \frac{\mathcal{T}(S)}{\mathcal{T}(D)}, \quad \text{ha } n \gg 1.$$

A kezdetben az S tartományon elhelyezett anyagmennyiség tehát elegendően

hosszú idő után egyenletesen oszlik el minden részalmazon, ugyanolyan arányban, mintha az S -ben levő anyagmennyiséget egyenletesen osztottuk volna el D -n.

A keveredési tulajdonságból következik az ergodicitás: a keverő rendszerben a trajektóriák mindenhol eljutnak. A kaotikus mozgás mindig hatékony keverést okoz. Valóban, minden egyes *kaotikus sávban a dinamika ergodikus és keverő*.

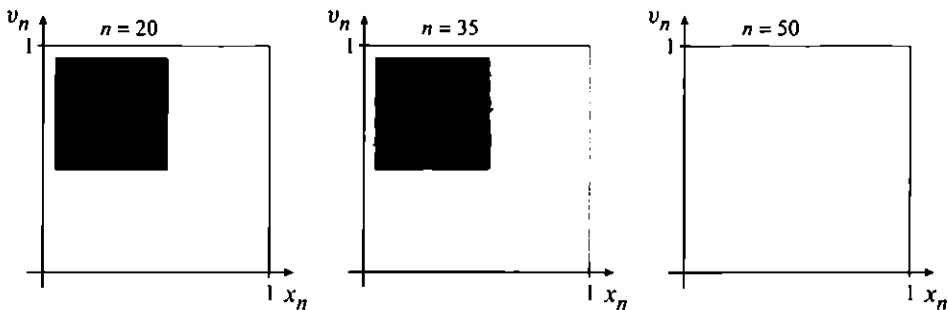
Mind az ergodicitási, mind a keverési tulajdonság fennáll *disszipatív* rendszerek kaotikus attraktorain is (ekkor az említett egyenletben a megfelelő fázistérbeli halmazoknak nem a területe, hanem a természetes eloszlás szerinti átlaga szerepel). Az ergodicitás és keverés szempontjából tehát a disszipatív és a konzervatív káosz között nincs különbség.

19. Konzervatív káosz és irreverzibilitás

Az erősen kaotikus rendszerek (l. 6.5.5. szakasz) olyan kevés összetevőből álló rendszerek, melyek a maguk teljes fázis-terében ergodikusak és keverőek, éppúgy, mint a sok szabadsági fokú problémák. Az erősen kaotikus tulajdonság tehát a véletlenszerű viselkedés ugyanazon formáját hozza létre, mint amiről korábban azt hitték, hogy csak sok összetevő miatt lehetséges.

A sokrészeske-rendszerek fontos tulajdonsága a makroszkopikus szinten megfigyelhető irreverzibilitás, az idő kitüntetett iránya. Különösen meglepő ez annak fényében, hogy a mikroszkopikus mozgásegyenletek az időtükrözésre nézve invariánsak, azaz reverzibilisek.

Ugyanez a viselkedés jellemző néhány szabadsági fokú erősen kaotikus rendszerekre is. A fázistér minden egyes pontjában az időben előre és hátra induló mozgás egyenértékű, a rendszer reverzibilis. Ebből következik, hogy ha egy fázistér-fogatelemet követünk a fázistérben n lépésig, amíg az jól szétkeverődik és pontjai az egész fázis-teret egyenletesen beszórják, és az iterálást ezután visszafelé folytatjuk ugyanannyi n lépésig, akkor visszazakapjuk a kiindulási alakot. Ha azonban figyelembe vesszük azt, hogy a numerikus szimulálás kerekítési, *számábrázolási hibája* miatt végül is csak véges pontossággal ismerjük a pontok végállapotát n lépés után, akkor érthető, hogy egy



6.30. ábra. A területtartó pékleképezés ($a = 1/3$) egy négyzet alakú fázistér-fogatelemének képe n lépésnyi előre- és ugyanannyi visszaiterálás után. Az $n = 20$ esetben a kezdeti alakzat pontosan helyreáll, az $n = 35$ -nél a kezdeti alakzat határai kicsit elmosódottan állnak vissza (azonban néhány pont már messzire is eltávolodott), és $n = 50$ -nél a kezdeti alakzat már nem ismerhető fel. A numerikus szimulálásban „real” számábrázolási pontosságot használtunk, amely $\Delta = 10^{-11}$ hibának felel meg. Mivel $\bar{\lambda} = 0,636$ (l. 6.3. feladat), az n^* értékre 40 adódik. Nagyobb pontosságot használva az alakzat elmosódása nagyobb n^* értékekre következik be.

bizonyos n^* lépésnél nagyobb n számú előre- és hátraiterálás után a pontok már sohasem rajzolják ki a kezdeti alakzatot, hanem szétterülve maradnak (l. 6.30. ábra). Ennek oka a kezdőfeltételre való érzékenység. Az n^* kritikus lépésszám nem más, mint a Δ számábrázolási hibának megfelelő kezdeti pontatlansághoz tartozó előrejelzési idő (l. 5.4.2. szakasz) az inverz dinamikában, tehát $n^* \approx \ln(1/\Delta)/\bar{\lambda}$. A rendszer kezdőállapota tehát a kerekítési hiba, vagy általánosabban, a véges pontosságú megfigyelés miatt még reverzibilis dinamika mellett sem állítható vissza.

Hétköznapi hasonlattal olyan ez, mint

a kakaó keverése a tejbegrízben (ahol a molekuláris diffúzió elhanyagolható). Ha a keverést megfordítjuk, azaz az eredeti keverő mozdulatokat időben visszafelé végezzük, a kakaó akkor sem veszi fel kezdeti alakját, hanem egyre jobban szétkeveredik.

Tehát az irreverzibilitás a káosz és a véges pontosságú megfigyelés együttes következménye. A determinizmus gyakorlati hiányának és a hibák felerősödésének egyfajta megnyilvánulása. A kaotikus mozgás lehetősége új megvilágításba helyezi a sokrészecske-rendszerek irreverzibilis viselkedésének megértését is.

Utószó, kitekintés

Röviden összefoglaljuk azokat a káosszal kapcsolatos jelenségeket, fogalmakat, melyek részletes ismertetésére ebben a bevezető jellegű könyvben nem kerülhetett sor.

Mindenekelőtt leszögezzük, hogy az összes tárgyalt példában kimutatott kaotikus viselkedés *kísérletekben* is megfigyelhető. A Newton-egyenletek ugyanis a makroszkopikus rendszerek mozgásának fizikai törvényei, érvényességükhöz nem fér kétség, s ezért a numerikus megoldásban talált viselkedés jelen van a valódi rendszerben is. A példák nagy részében (mágneses inga, szemben álló lejtőkön vagy rezgő lemezen pattogó golyó, festékek keveredése) a jelenség egyszerű kísérletekkel demonstrálható. A periodikusan gerjesztett inga, a rugós inga, a gerjesztett bistabil rendszer esetében gondosan kivitelezett laboratóriumi mérésekkel is meghatározták a kaotikus mozgás mérőszámait, és vizsgálták kialakulásának módját. A fizikán kívüli természettudományokban is számos olyan folyamat ismert, melyek kaotikus-sága nemcsak numerikusan, hanem kísérletileg is bizonyított.

20. Amiről nem esett szó

A könyvben kizárólag a legegyszerűbb, a háromdimenziós fázistérrel kapcsolatos kaotikus jelenségeket vizsgáltuk. Az ennél *magasabb dimenziójú* fázistérű rendszerekben a káosz további újdonságokat is tartogat. Ekkor a hiperbolikus pályák instabil sokasága már a háromdimenziós stroboszkopikus vagy a Poincaré-leképezésen is lehet felület, melyhez 2 vagy több pozitív Ljapunov-exponens is tartozik. Az ilyen magasabb dimenziós rendszerekben kváziperiodikus mozgások is lehetnek vonzóak, ezek a *tóruszattraktorok*. Káosz ilyenkor a tóruszattraktorok felbomlásával is megjelenhet. A háromnál több dimenziós fázistérű konzervatív esetekben a tóruszok nem alkotnak elválasztó felületeket, ezért a teljes fázistérre kiterjedő mozgás, az ún. *Arnold-diffúzió* már

tetszőlegesen gyenge káosz mellett is mindig megjelenik.

A kaotikus viselkedés a hiperbolikusan instabil periodikus pályák jelenlétének tulajdonítható. Általában azonban *nemhiperbolikus* hatások is jelen vannak olyan pályák létezésének következményeként, melyek lokális Ljapunov-exponense nulla. A nemhiperbolikus viselkedés egyik megjelenési formája az ún. *intermittencia*, amikor hosszú, periodikusnak tűnő mozgások között nagy amplitúdójú, kaotikus „kitörések” vannak jelen.

A tranziens káosz részletes vizsgálata, a kaotikus mozgás információelméleti értelmezése és az ebből adódó *dinamikai entrópiák* ismerete, a felsorolt jelenségekkel együtt már a káosz magasabb szintű megismerésének része (l. Irodalom).

A káosz a kevés összetevőből álló, egyszerű rendszerek mozgása. A sok összetevőjű, *nagy szabadsági fokú* rendszerek időbeli viselkedése ezért szükségszerűen *bonyolultabb a káosznál*. A véletlenszerű viselkedés eredete ekkor a szabadsági fokok nagy száma, melyek mindegyikét eleve reménytelen követnünk. Az ilyen eredetű véletlen viselkedést nevezzük a makroszkopikus megfigyelő által észlelt *zajnak*, s a mögötte meghúzódó dinamikát – a gázok kinetikus elméletének szóhasználata szerint – *molekuláris káosznak*. A könyvben vizsgált determinisztikus káosz fogalmai hasznos elemek lehetnek a nagy szabadságfokú rendszerek leírásában is. Így kiderült például, hogy a pozitív Ljapunov-exponensek száma nőhet az alkotóelemek számával. A determinisztikus káoszra olyannyira jellemző alacsonydimenziós *fraktálstruktúrák viszont nincsenek jelen*, mert ha találunk is a fázistérben valamilyen fraktálalakzatot, akkor annak dimenziója az összetevők számával nő.

21. Turbulencia, térbeli és időbeli káosz

A turbulencia a folyadékmozgás legbonyolultabb formája, mely nemcsak időben, hanem *térben is* szabálytalan. A „káoszelmélet” kialakulása idején, az 1970-es, 80-as években széleskörűen elfogadott volt, hogy a káosz megértése a turbulencia megértését is jelenti majd. Mára világossá vált, hogy ez túlzott várakozásnak bizonyult, s noha a káosz legfontosabb vonásai már ismertek, a turbulencia felderítése még mindig várat magára. A folyadékmozgás időbeli és térbeli viselkedését parciális differenciálegyenletek írják le, melyek a térváltozók diszkrét közelítése mellett csak igen nagy számú közönséges differenciálegyenletre képezhetők le. A hidrodinamika tehát egy nagy szabadságfokú probléma, s ráadásul a turbulencia esetében nyilván minden szabadsági fok aktívan részt is vesz az egész mozgásban.

A folyadékmozgásban, vagy általánosabban minden parciális differenciálegyenlettel leírt térbeli és időbeli folyamatban (pl. kémiai reakciók, ingerületvezetés) nem túl nagy energiabefektetés esetén az is előfordulhat, hogy a mozgásban a szabadsági fokok bizonyos csoportjai vesznek csak részt, s ezért a mozgás effektíven alacsony dimenziós. A megfigyelő számára ez azt jelenti, hogy többé-kevésbé szabályos

térbeli mintázatok (pl. hullámok) vonulnak át a rendszeren, de ezek ismétlődése időben sohasem pontosan periodikus. Az ilyen *térbeli és időbeli káosz* tehát első közelítésben bizonyos térbeli struktúrák előfordulási gyakoriságában mutatkozik meg. Az ilyen folyamathoz alacsonydimenziós kaotikus attraktor is tartozhat. Ugyanakkor a jellemző térbeli struktúra megjelenése számos új jelenséggel (nemlineáris hullámok, csúcok, frontok, peremektől függés, határréteg, koherens, szinkronizált viselkedés) kapcsolatos. A determinisztikus káoszhoz hasonlóan a térbeli és időbeli káosz jelenléte sem dönthető el az egyenletek és paraméterek ismeretében, hanem csak mérésrel vagy szimulálással. Mára sok, első közelítésben tisztán időbeli káosznak tűnő jelenségről (mint pl. a populációk viselkedése, járványok) derült ki, hogy pontosabban megfigyelve térbeli káoszt is mutatnak.

Számos olyan példát is ismerünk (rendellenes szív működés, az agy elektromos tevékenysége, a tőzsdei és piaci árfolyam-ingadozások), melyekről régebben felmerült, hogy kaotikusak, de a pontos vizsgálatok bebizonyították, hogy azokat sokkal inkább zajnak, vagy általánosabban, turbulenciához hasonló jelenségeknek kell tekinteni.

A káosz vizsgálatok a szabálytalan időbeli viselkedés legegyszerűbb formáját tanulmányozzuk, mely kizárólag a dinamika nemlinearitásából következik. A bonyolult rendszerekben ehhez még hozzájárulnak a változók nagy számából adódó komplikációk. A sok összetevőből álló rendszerek bonyolult viselkedésének tehát óhatatlanul vannak olyan vonásai, melyek *nem érthetők meg* a determinisztikus káosz alapján. Az ilyen rendszerek viselkedése szempontjából a determinisztikus káosz megismerése csak az első lépés.

Már ez az első lépés is alapvető szemléletváltást követel egész tudományos világképünkben. El kell fogadnunk azt, hogy az egyszerű alakú nemlineáris egyenletek által leírt mozgás általában bonyolult, és azt is, hogy a megoldás csak számítógép segítségével kapható meg. A mechanika nemrég még teljesen lezártnak tűnő tudománya kibővíthető a könyvben tárgyalt fogalmakkal. Ugyanez igaz minden olyan tudományágra is, melynek alapjelenségei közöséges differenciálegyenletekkel írhatóak le. Ezek mindegyikében óhatatlanul megjelenik az eddig csak a meteorológiához kötött előrejelezhetetlenségi probléma, és ezzel elkerülhetlenné válik a valószínűségi leírás. A káosz újfajta gondolkodásmódot igényel, olyat, melyet a jelenség maga kényszerít ránk. Ezért a káosz megértése során – anélkül, hogy ennek tudatában lennénk – Arisztotelész¹ szellemében járunk el:

„A tanult embert az jellemzi ugyanis, hogy minden kérdésben csak olyan fokú szabatoságot kíván, amekkorát az illető tárgy természete megenged.”

¹ Arisztotelész, *Nikomakhoszi etika*, 2. kiadás, ford.: Szabó Miklós (Európa Kiadó, Budapest, 1987) 7. o.

Függelék

8.1. Egyenletek dimenziótlánítása

A fizikai jelenségeket leíró egyenletek általában mértékegységekkel rendelkező mennyiségeket kapcsolnak össze. Az ilyen egyenletek *dimenziótlánítása*, vagyis átírása olyan alakra, ahol sem a változók, sem a paraméterek nem rendelkeznek már mértékegységgel (dimenziótlanak), két okból is fontos:

- A dimenziótlánított alakból leolvasható, hogy mik a rendszer *független* paraméterei. Ezek száma általában *kisebb*, mint az eredeti egyenletben fellépők. A megoldáshoz mindig hozzátartozik a paramétertér feltérképezése, amely a dimenziótlánított alakban ezért mindig egyszerűbb, mint az eredetiben.
- A számítógépek dimenziótlan számokkal dolgoznak. Egyenletek *numerikus megoldása* ezért *csak a dimenziótlan alakban* lehetséges. Természetesen megtehetjük, hogy az eredeti egyenlet paramétereit valahogy megválasztjuk, s minden dimenziós mennyiség mértékegységét elhagyjuk. Ez egyrészt fogalmilag nem tiszta eljárás, másrészt a paramétertér feltérképezése ilyenkor gyakorlatilag reménytelen, mert ehhez elvileg minden dimenziós paramétert változtatni kellene.

A dimenziótlánítási eljárást az egyszerűség kedvéért egy egyváltozós, másodrendű differenciálegyenleten mutatjuk be. Tekintsük az

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = a(x, \dot{x}, t; \mu) \quad (8.1)$$

problémát! A jobb oldal azt fejezi ki, hogy az a gyorsulás mindig megadható a hely, a sebesség és az idő egyértelmű függvényeként. A μ szimbólum a paraméterek összességét jelöli. Az $x(t)$ elmozdulás az $a(x, \dot{x}, t; \mu)$ függvény ismeretében az $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ kezdőfeltétellel egyértelműen meghatározható. A dimenziótlantól azt jelenti, hogy az x helykoordináta és a t idő helyett az x' , t' dimenziótlan változókat vezetjük be az

$$x = Lx', \quad t = Tt' \quad (8.2)$$

egyenletek alapján, ahol L és T a rendszerre jellemző (egyelőre határozatlan) hosszúság- és időegység. A távolság és az idő egységét ezzel tehát L -nek, ill. T -nek választjuk, és x' , ill. t' a dimenziótlan mérőszámok. A sebesség ezért így írható:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{L}{T} \frac{dx'}{dt'} = \frac{L}{T} \dot{x}', \quad (8.3)$$

ahol \dot{x}' a dimenziótlan sebesség. Az eredeti differenciálegyenlet a

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} \equiv \ddot{x}' = \frac{T^2}{L} a(Lx', \frac{L}{T}\dot{x}', Tt'; \mu) \quad (8.4)$$

alakot ölti. Válasszuk meg most az L és T paramétert úgy, hogy a paraméterfüggés a *legegyszerűbb* legyen, azaz ahol csak lehet, 1 álljon együttthatóként. Mivel két választásunk van, a paraméterek száma 2-vel csökkenthető. Így a paraméterek egy új halmazához, μ' -höz jutunk, s egyben megkapjuk a rendszer egy karakterisztikus távolság-, ill. időskáláját (L -et és T -t).

Az L és T megválasztása után (8.4) jobb oldala az $a'(x', \dot{x}', t'; \mu')$ alakot ölti, azaz

$$\ddot{x}' = a'(x', \dot{x}', t'; \mu'). \quad (8.5)$$

Ez a keresett *dimenziótlan* egyenlet, mely kevesebb paramétert tartalmaz, mint az eredeti. Mindazok a rendszerek, melyek μ paraméterei különbözőek, de dimenziótlan μ' paraméterei megegyeznek, *ekvivalensnek* tekinthetők, hiszen mozgásuk csak az idő- és távolságegységek különböző választása miatt tűnik különbözőnek.

Vegyük észre, hogy elegendő a dimenziótlan problémát megoldani, abból ugyanis megkapható az eredeti probléma megoldása is. Legyen a (8.5) egyenlet x'_0, v'_0 dimenziótlan kezdőfeltételekhez tartozó megoldása $x'(t') = f(x'_0, v'_0, t'; \mu')$. Ebből következik, hogy $v'(t') = dx'(t')/dt' \equiv g(x'_0, v'_0, t'; \mu')$. A (8.2) változócsere megfordítása után az

$$x(t) = Lf\left(\frac{x_0}{L}, \frac{v_0 T}{L}, \frac{t}{T}; \mu'\right), \quad v(t) = \frac{L}{T} g\left(\frac{x_0}{L}, \frac{v_0 T}{L}, \frac{t}{T}; \mu'\right) \quad (8.6)$$

összefüggéseket kapjuk az eredeti problémára, ahol $x_0 = Lx'_0$, $v_0 = v'_0 L/T$. A dimenziós megoldások tehát csak a μ' dimenziótlan paraméterektől függnnek, és kifejezhetők a dimenziótlanított probléma megoldásában előforduló f és g függvényekkel.

Megjegyzések:

- Több összetevőből álló rendszerekben *minden* helykoordináta ugyanazzal a faktoriall skálázandó át: $x_i = Lx'_i$. Ha több tömeg is szerepel, azok is dimenziótlanítandók az $m_j = Mm'_j$ egyenlet segítségével, ahol M a rendszer valamely jellemző tömege. Ilyenkor a paraméterek száma *hárommal* csökkenthető. (Többel nem, mert a mechanikában három alapmennyiség (hely, idő, tömeg) szerepel.)
- A dimenziótlanítás olyan rendszerekben *nem* egyértelmű, melyekben több jellemző idő-, távolság- vagy tömegparaméter lép fel. Ha például két karakterisztikus idő, T_1 és T_2 jellemző a rendszerre, akkor mind a $T = T_1$, mind pedig a $T = T_2$ választás megengedett, és T_1/T_2 megjelenik a dimenziótlan paraméterek között. Ilyenkor mindegy, hogy melyik lehetőséget választjuk.
- Az itt bemutatott dimenziótlanítási eljárás fogalmilag rokon az áramlások hasonlósága kapcsán használttal. A különbség az, hogy ott időfüggetlen, viszont térben kiterjedt problémáról van szó, s ezért a parciális differenciálegyenlethez tartozó peremfeltételek is figyelembe veendők.

Az általános eljárást konkrét példákkal illusztráljuk.

1. példa: fonálinga

A φ szögkitérésre felírt mozgásegyenlet $\ddot{\varphi} = -(g/l)\sin\varphi$ két paramétert (g , l) tartalmaz. A szögváltozó dimenziótlan, ezért nincs értelme átskálázni. Az új dimenziótlan idő bevezetése után

$$\ddot{\varphi} = -\frac{T^2 g}{l} \sin\varphi, \quad (8.7)$$

ami a $T = \sqrt{l/g}$ választással a

$$\ddot{\varphi} = -\sin\varphi \quad (8.8)$$

alakot ölti. Ez a probléma tehát olyan, hogy *nincs egyetlen dimenziótlan paramétere sem*. Az eredeti dimenziós problémát nem érdemes különböző hosszakkal meg-

oldani, mert az csak az idő átskálázásában játszik szerepet. Minden inga mozgása hasonló a másikéhoz. A T mennyiség arányos az inga lengésidejével.

2. példa: rugós inga

Tekintsünk egy olyan ingát, melynek fonala l_0 nyugalmi hosszúságú és ω_0 saját-frekvenciájú rugó. Helyezzük a felfüggesztési pontot az origóba! Az l pillanatnyi fonálhosszra és a φ szögkitérésre a 6.4.2. szakaszban levezetett dimenziós mozgásegyenletek

$$\ddot{l} = l\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2(l - l_0) + g \cos \varphi, \quad l\ddot{\varphi} = -2\dot{l}\dot{\varphi} - g \sin \varphi, \quad (8.9)$$

melyekben három paraméter g , ω_0 és l_0 szerepel. Az $l = Ll'$, $t = Tt'$ dimenziótlán változókkal

$$\ddot{l}' = l'\dot{\varphi}'^2 - \omega_0^2 T^2(l' - \frac{l_0}{L}) + \frac{gT^2}{L} \cos \varphi, \quad l'\ddot{\varphi}' = -2l'\dot{\varphi}' - \frac{gT^2}{L} \sin \varphi. \quad (8.10)$$

Célszerű a távolságot az l_0 nyugalmi hossz, az időt az l_0 hosszú inga lengésidejével arányos $\sqrt{l_0/g}$ egységekben mérni, azaz az

$$L = l_0, \quad T = \sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad (8.11)$$

választást használni. Ezzel

$$\ddot{l}' = l'\dot{\varphi}'^2 - Q(l' - 1) + \cos \varphi, \quad l'\ddot{\varphi}' = -2l'\dot{\varphi}' - \sin \varphi, \quad (8.12)$$

ahol

$$Q = \frac{\omega_0^2 l_0}{g}. \quad (8.13)$$

A problémának tehát *egyetlen* dimenziótlán paramétere van, Q . Ez egyben két karakterisztikus idő, a $T_1 = \sqrt{l_0/g}$ és a $T_2 = 1/\omega_0$ négyzetének hányadosa, s hűen tükrözi azt a tényt, hogy rendszerünk mind a harmonikus oszcillátor, mind a matematikai inga tulajdonságait tartalmazza (ugyanakkor mindegyiknél gazdagabb, mert kaotikus mozgást mutat). Mindazok a rendszerek, melyekben Q ugyanakkora, fizikai értelemben ekvivalensek. Mivel két karakterisztikus idő létezik, a $T = T_2 = 1/\omega_0$ időegységet is választhatjuk. Ekkor az

$$\ddot{l}' = l'\dot{\varphi}'^2 - (l' - 1) + \frac{1}{Q} \cos \varphi, \quad l'\ddot{\varphi}' = -2l'\dot{\varphi}' - \frac{1}{Q} \sin \varphi \quad (8.14)$$

dimenziótlan alakokat kapjuk. Ezek formálisan különböznek a fentiektől, de azokkal ekvivalensek, s a bennük fellépő dimenziótlan paraméter továbbra is Q .

3. példa: anharmonikus oszcillátor

Tekintsük az $F(x) = -\omega_0^2 x - \varepsilon_0 x^3$ ($\varepsilon_0 > 0$) erőtvénnyel jellemzett nemlineáris rugót! A rugó végéhez rögzített test mozgásegyenlete A amplitúdójú, Ω körfrekvenciájú harmonikus gerjesztés hatására, a sebességgel arányos fékezőerő esetén

$$\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - \omega_0^2 x - \varepsilon_0 x^3 + A \cos(\Omega t). \quad (8.15)$$

Ebben, az anharmonikus rezgést leíró egyenletben öt paraméter szerepel. A távolságot L , az időt T egységekben mérve az

$$\ddot{x}' = -\alpha T \dot{x}' - \omega_0^2 T^2 x' - \varepsilon_0 x'^3 L^2 T^2 + \frac{AT^2}{L} \cos(\Omega T t') \quad (8.16)$$

dimenziótlan egyenletre jutunk.

Az erőtvény maga definiál egy jellegzetes távolságot azzal, hogy mekkora kitéréstől kezdve lényeges a nemlineáris korrekció. Jelölje \bar{x} azt a kitérést, melyre a lineáris járulék ugyanakkora, mint a köbös tagból adódó, azaz $\omega_0^2 \bar{x} = \varepsilon_0 \bar{x}^3$. Ebből a nemlinearitással kapcsolatos jellegzetes távolság $\bar{x} = \omega_0 / \sqrt{\varepsilon_0}$.

Érdemes a távolságegységet $L = \bar{x}$ -nek választani, az időegységet pedig a gerjesztés $T_0 = 2\pi / \Omega$ periódusidejének. Ezzel

$$\ddot{x}' = -\alpha T_0 \dot{x}' - \omega_0^2 T_0^2 (x' + x'^3) + \frac{AT_0^2 \sqrt{\varepsilon_0}}{\omega_0} \cos(2\pi t'). \quad (8.17)$$

A rendszert három független paraméter jellemzi, az αT_0 dimenziótlan súrlódási együttható, az $\omega_0 T_0$ dimenziótlan sajátfrekvencia és az $AT_0^2 \sqrt{\varepsilon_0} / \omega_0$ dimenziótlan gerjesztési amplitúdó. A távolságegység megválasztása miatt a dimenziótlan erőtvényben a lineáris és a köbös tag azonos súllyal szerepel.

Több más alakú, de a fentivel egyenértékű dimenziótlan alakot is kaphatunk. Ha például az időegységet $1/\Omega$ -nak választjuk (amivel a dimenziótlan idő a gerjesztés fázisa lesz) és a távolságegységet úgy határozzuk meg, hogy a gerjesztési tag együttthatója 1 legyen, vagyis $L = A/\Omega^2$, akkor

$$\ddot{x}' = -\frac{\alpha T_0}{2\pi} \dot{x}' - \left(\frac{\omega_0 T_0}{2\pi}\right)^2 x' - \frac{\varepsilon_0 A^2 T_0^6}{(2\pi)^6} x'^3 + \cos t'. \quad (8.18)$$

A független dimenziótlan paraméterek nem változtak, mert az x'^3 -ös tag együttthatója arányos a dimenziótlan gerjesztési amplitúdó és a dimenziótlan sajátfrekvencia négyzeteinek szorzatával.

8.2. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

A közönséges differenciálegyenletek széles osztályai adott kezdőfeltételek mellett egyértelmű megoldással rendelkeznek. A numerikus módszerek ezt a tulajdonságot használják fel, amennyiben a kezdőfeltétellel indulva, véges de kicsi *időlépéseket* használva mintegy „felgöngyölkítik” a megoldást. A keresett függvényértékek a számítógép által egyszerűen kezelhető formulák segítségével állnak elő. A véges időlépés miatt természetesen minden egyes lépésben *numerikus hibát* követünk el. E hibák megbízható nagyságrendi megbecslése fontos része a numerikus eljárásnak. A módszer kiválasztásakor egyfajta optimumra törekszünk, amellyel a program futási idejét és a hibát is a lehető legkisebbre igyekszünk választani. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a numerikus megoldás elvét és megadjuk a legfontosabb módszereket és hibáikat.

Elsőrendű egyenletek

Meghatározandó az időfejlődést leíró

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (8.19)$$

dimenziótlan egyenlet $t = t_0$ pillanatbeli $x(t_0) = x_0$ kezdőfeltételéhez tartozó $x(t)$ megoldása, ahol f adott kétváltozós függvény. A numerikus megoldás az $x(t)$ függvényt diszkrét t_n pillanatokban adja meg. A legegyszerűbb esetben ezek az időpontok egyenközűen következnek h dimenziótlan időlépéssel: $t_n = t_0 + nh$. Feladatunk az $x_{n+1} \equiv x(t_n + h)$ függvényérték kifejezése az előző pillanatbeli $x_n \equiv x(t_n)$ érték és az f függvény ismeretében. A Taylor-sorfejtés alapján írhatjuk, hogy

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j x(t_n)}{dt^j} h^j. \quad (8.20)$$

A differenciálegyenlet alapján kifejezhetők az $x(t)$ megoldás időderiváltjai az f függvény segítségével. Az első kettő például:

$$\dot{x}(t_n) = f(x_n, t_n), \quad \ddot{x}(t_n) = f_t(x_n, t_n) + f_x(x_n, t_n)\dot{x}(t_n), \quad (8.21)$$

ahol az alsó indexek az x , ill. t szerinti parciális deriváltakat jelentik.

A numerikus eljárás során valahol meg kell állnunk a Taylor-sorfejtésben. Ha az első N tagot tartjuk meg, h^{N+1} nagyságrendű hibával írhatjuk, hogy

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^N \frac{1}{j!} \frac{d^j x(t_n)}{dt^j} h^j. \quad (8.22)$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy N -edrendű eljárást alkalmaztunk. Mivel f különböző parciális deriváltjait esetenként bonyolult lehet megadni, célszerű a jobb oldalt kizárólag az f függvénnyel kifejezni. Az (x_n, t_n) közelében levő pontokban kiszámítjuk az f függvény értékét és ezek megfelelően súlyozott átlagával adjuk meg a (8.22)-ben szereplő összeget. A pontok számától és elhelyezkedésétől függően, különböző módszerekről beszélünk.

Euler-módszer (elsőrendű módszer, $N = 1$):

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n). \quad (8.23)$$

Az egy lépésben elkövetett hiba h^2 rendű.

Másodrendű Runge–Kutta-módszer:

Az eljárást a következő alakúnak választjuk:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad (8.24)$$

$$k_1 \equiv hf(x_n, t_n), \quad k_2 \equiv hf(x_n + k_1, t_n + h).$$

A (8.21), (8.22) egyenletek alapján ellenőrizhető, hogy x_{n+1} -et h -ban másodrendig sorbafejtve, $N = 2$ esetén pontosan (8.24)-et kapjuk. Az egy lépésben elkövetett hiba h^3 rendű.

Harmadrendű Runge–Kutta-módszer:

Az eljárást meghatározó összefüggések:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad (8.25)$$

$$k_1 \equiv hf(x_n, t_n), \quad k_2 \equiv hf\left(x_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad k_3 \equiv hf(x_n + 2k_2 - k_1, t_n + h).$$

Ellenőrizhető, hogy a h -ban sorbafejtett alak ekvivalens (8.22)-vel, ha ott $N = 3$. Az egy lépésben elkövetett hiba h^4 nagyságrendű.

Negyedrendű Runge–Kutta-módszer:

Az eljárás

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (8.26)$$

$$k_1 \equiv hf(x_n, t_n), \quad k_2 \equiv hf\left(\frac{x_n + k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right),$$

$$k_3 \equiv hf\left(x_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 \equiv hf(x_n + k_3, t_n + h).$$

Az ellenőrzés most is közvetlenül megtehető, bár hosszadalmas. Az egy lépésben elkövetett hiba h^5 rendű.

A gyakorlatban a negyedrendű Runge–Kutta-módszer jó kompromisszum: az algoritmus még nem túl hosszú, de a pontosság már elég jó ahhoz, hogy (dimenziótlan egységben) $h = 10^{-2}$ vagy akár annál nagyobb lépésköz is választható. A módszer jól alkalmazható a legtöbb kaotikus probléma szimulálására.

Elsőrendű egyenletek rendszere

Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ vektoriális írásmódot használva, megadandók az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (8.27)$$

egyenletrendszerrel és az $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdőfeltétellel definiált $\mathbf{x}(t)$ megoldásfüggvények. A numerikus megoldás alap gondolata ugyanaz, mint egyetlen egyenlet esetén. Az alábbiakban csak a negyedrendű Runge–Kutta-módszer képleteit adjuk meg:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (8.28)$$

$$\mathbf{k}_1 \equiv hf(\mathbf{x}_n, t_n), \quad \mathbf{k}_2 \equiv hf\left(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right),$$

$$\mathbf{k}_3 \equiv hf\left(\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad \mathbf{k}_4 \equiv hf(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_3, t_n + h).$$

Az egy lépésben elkövetett hiba most is h^5 rendű.

A hibák halmozódása

Az eddigiekben az egy lépésben elkövetett relatív hibát adtuk meg. Ez egy N -edrendű eljárásban közelítőleg h^{N+1} . A hibák időben halmozódnak, de ez a halmozódás nem feltétlenül lineáris. A h^{N+1} becslés a hiba abszolút értékére vonatkozik, a hibák viszont különböző előjelekkel fordulnak elő. Összegük ezért inkább úgy nő, mint a véletlen bolyongás átlagos elmozdulása. Ha az egymás utáni előjelek teljesen függetlenek, akkor a teljes hiba az n lépésszám négyzetgyökével nő. Ha az előjelváltozások valamelyest korreláltak, akkor a növekedés gyorsabb is lehet. Egyszerű becslésünkben ezért tegyük fel, hogy a hiba az n lépésszám σ -adik hatványával nő ($\sigma \leq 1$). A futást addig követjük, amíg a felhalmozott relatív hiba egy Δ küszöbértéket (pl. 1%-ot) el nem ér. Az ennek megfelelő n_0 lépésszám abból becsülhető, hogy az n_0 lépés alatt felhalmozott $n_0^\sigma h^{N+1}$ hiba egyenlő Δ -val. Innét $n_0 = (h^{-(N+1)} \Delta)^{1/\sigma}$. Mivel egy lépés h dimenziótlan időegység hosszúságú, a futtatás közelítőleg

$$t_0 = \Delta^{1/\sigma} h^{-(N+1)/\sigma+1} \quad (8.29)$$

fizikai időegységig tarthat. Egyszázalékos megengedett teljes hibával és egyszázadnyi lépésközzel ($\Delta = h = 10^{-2}$) egy negyedrendű módszerrel ($N = 4$) ez lineáris hibanövekedéskor 10^6 egységet, négyzetgyökös ($\sigma = 1/2$) növekedéskor pedig 10^{14} fizikai időegységet enged meg. Mivel egy kaotikus attraktor vagy a kaotikus sáv már 10^4 – 10^5 időegység után jól kirajzolódik, a numerikus módszerek lehetővé teszik, hogy a kaotikus tartomány alakját nagy pontossággal meghatározzuk.

A Taylor-sorfejtés véges számú taggal való közelítéséből adódó hiba mellett egy másik hibaforrás a kerekítési, számábrázolási hiba. Ennek teljes járuléka nő a lépések számával, ezért a h időlépést túlságosan kicsinek sem érdemes választani. Ugyanakkor h nem lehet túlságosan nagy sem, mert ekkor a numerikus eredmény drasztikusan eltér az egzakttól, az eljárás instabil (l. [14.] olvasmány). A köztes időlépési tartományban azonban még hosszú idejű megoldásokat vizsgálva is hatékonyak a numerikus eljárások. Zárt konzervatív rendszerben az energiamegmaradás ténye használható például az eljárás alkalmasságának felmérésére: ha a numerikusan számolt összenergia csak kevéssé tér el a kezdetitől, akkor az eljárás megbízható. Kaotikus rendszerekben természetesen az eljárás megbízhatósága sem akadályozhatja meg az eddig vizsgált hibáknak a belső dinamikából fakadó exponenciális felerősödését az *instabil irányban*. Ezért a kaotikus attraktoron, ill. a kaotikus sávon a numerikus módszerektől nem várható, hogy egyedi trajektóriákat pontosan kövessenek, a valószínűség-eloszlás meghatározására azonban kiválóan alkalmazhatók (l. [10.] olvasmány).

8.3. A lekep Pascal program

```

program lekep;

{Az  $x'1=M1(x1,x2)$ ,  $x'2=M2(x1,x2)$  dimenziotlan lekepezes}
{szimulalasa, melynek parameterei a es b.}
{A lekepezes pontjait a program a 640x480 pontbol allo}
{kepernyon abrazolja, a koordinata-rendszer origoja a}
{kepernyo kozeppontja.}

{Turbo Pascal program DOS operacios rendszerben}
{vagy a Windows DOS ablakaban torteno futasra.}

uses Graph,crt;           {A grafika hasznalatahoz.}

{A programban hasznalt valtozok es jelentesuk.}

const

    x10=0.1;           {A kezdo pont megvalasztasa}
    x20=0.1;

    Niter=20000;      {Az iteraciok szamanak beallitasa}

    xmax=5; {A kepernyore kirajzolando terület meghatározása.}
    ymax=4;

var
    a,b                : real;      {A lekepezes parameterei.}
    m                  : longint;   {Az iteraciok szamlaloja.}
    x1,x2,xx1,xx2     : real;      {A pontok koordinatai}
                                {a fazissikon.}
    px,py              : integer;   {Pixelpont koordinatai}
                                {a kepernyon.}
    ox,oy              : integer;   {Az origo pixelkoordinatai}
                                {a kepernyon.}
    sx,sy              : real;      {A rajzolashoz szukseges}
                                {skalaszorzok.}
    grDriver,grMode   : integer;   {A grafika beallitasahoz}
                                {szukseges valtozok.}

    label vege;

procedure varakozas; {Varakozas valamely billentyu}
                    {megnyomasara.}

```

```
var ch:char;
begin
  repeat until keypressed;
  while keypressed do ch:=readkey;
end;
```

{A program torzse:}

```
begin
  clrscr;
  {A parameterek bekerdezese:}
  write('a? ');
  readln(a);
  write('b? ');
  readln(b);

  {A grafikus ablak megnyitasa:}
  grDriver := Detect;
  InitGraph(grDriver,grMode,'c:\tp\bgi'); {A 'c:\tp\bgi'}
  {helyen azt kell megadni, hogy a Turbo Pascal}
  {program (itt c:\tp) bgi nevu konyvtara hol}
  {talalhato.}

  {A skalaszorzok kiszamitasa, melyekkel a kivant területet}
  {a kepernyore tudjuk rajzolni:}
  ox:=320;
  oy:=240;
  sx:=ox/xmax;
  sy:=oy/ymax;

  {A kezdeti ertekek megadasa:}
  x1:=x10;
  x2:=x20;

  {A kezdopont kirajzolasa a kepernyon:}
  px:=ox+round(x1*sx);
  py:=oy-round(x2*sy);
  PutPixel(px,py,11); {Az utolso argumentum 11-es erteke}
  {a vilagoskek szinnek felel meg.}

  {A lekepezes iteralasa Niter lepesig:}
  for m:=1 to Niter
  do
  begin
    xx1:=x1;
```

```

xx2:=x2;
x1:=M1(xx1,xx2); {Itt M1 es M2 helyett adjuk meg}
                  {a lekepezesi fuggvenyek}
x2:=M2(xx1,xx2); {konkret alakjat!}
if (abs(x1)>xmax) or (abs(x2)>ymax) then goto vege;
{A pont kirajzolasa, amennyiben nem kerult le}
{a kepernyorol:}
px:=ox+Round(x1*sx);
py:=oy-Round(x2*sy);
PutPixel(px,py,14); {Az utolso argumentum 14-es}
                   {erteke sarga szinnek felel meg.}
end;

vege:
{Var, amig meg nem nyomunk egy billentyut (addig az abra}
{a kepernyon marad):}
if not(m<Niter) then varakozas;
CloseGraph; {A grafikus ablak bezarasa.}
if m<Niter then begin
    writeln('A lekepezes ',m,' lepes utan kiszokott \
           a kepernyorol!');
    varakozas; end;
end.

```

8.4. A diffegy Pascal program

```

program diffegy;

{A dx1/dt=F1(x1,...,x4), dx2/dt=F2(x1,...,x4),
{dx3/dt=F3(x1,...,x4), dx4/dt=F4(x1,...,x4) dimenziotlan}
{egyenletrendszer megoldasa negyedrendu Runge--Kutta-}
{modszerral. Az egyenletrendszer parameterai a es b.}
{A trajektoria pontjait az x1, x3 sikon, a 640x480 pontbol}
{allo kepernyon abrazolja a program. A koordinata-rendszer}
{origoja a kepernyo kozeppontja.}

{Turbo Pascal program DOS operacios rendszerben}
{vagy a Windows DOS ablakaban torteno futasra.}

uses Graph,crt;           {A grafika hasznalatahoz.}

{A programban hasznalt valtozok es jelentesuk:}
const
  nmax=4;      {A fazister dimenzioja.}

  a=1;        {A parameterek megadasa.}
  b=2;

  x10=0.1;    {Kezdofeltetelek: xi0 (i=1,...4).}
  x20=0.1;
  x30=0.1;
  x40=0.1;

  h=0.01;    {A numerikus eljaras dimenziotlan idolepese.}
  tmax=10000; {Legfeljebb ennyi idolepesig kovetjuk}
              {a mozgast.}
  xmax=5;    {A kepernyore kirajzolando terület meretei.}
  ymax=4;

type vector=array[1..nmax] of double;

var
  x          : vector;
  t          : double;
  szaml     : longint;
  ox,oy     : integer; {Az origo pixel koordinatai}
              {a kepernyon.}
  sx,sy     : real;    {A rajzolashoz szukseges}
              {skalaszorzok.}

```

```

grDriver,grMode: integer; {A grafika beallitasahoz}
                        {szukseges valtozok.}

procedure varakozas; {Varakozas valamely billentyu}
                    {megnyomasara.}
var ch:char;
begin
  repeat until keypressed;
  while keypressed do ch:=readkey;
end;

procedure derivalt(t: double; x:vector; var xp: vector);
{Az nmax=4 elemu x vektor által kijelolt helyen a t }
{idopillanatban kiszamitja az x derivaltjat, es xp-ben}
{visszaadja.}

begin
  xp[1]:=F1(x[1],x[2],x[3],x[4]); {Itt F1,...,F4 helyett}
  xp[2]:=F2(x[1],x[2],x[3],x[4]); {adjuk meg az egyenletek}
  xp[3]:=F3(x[1],x[2],x[3],x[4]); {jobb oldalainak}
  xp[4]:=F4(x[1],x[2],x[3],x[4]); {konkret alakjat!}
end;

procedure RungeKutta4(var x:vector; t,h:double);
{Az nmax = 4 elemu x vektort h idovel tovabbfejleszti}
{a negyedrendu Runge--Kutta-modszer segitsegevel.}
{A derivalt rutin szamitja x derivaltjat.}
var
  k1,k2,k3,k4,y: vector;
  i                : integer;
begin
  derivalt(t,x,k1);
  for i:=1 to nmax do y[i]:=x[i]+h*k1[i]/2;
  derivalt(t+h/2,y,k2);
  for i:=1 to nmax do y[i]:=x[i]+h*k2[i]/2;
  derivalt(t+h/2,y,k3);
  for i:=1 to nmax do y[i]:=x[i]+h*k3[i];
  derivalt(t+h,y,k4);
  for i:=1 to nmax do x[i]:=x[i]+h*(k1[i]+2*(k2[i]+k3[i]) \
                                +k4[i])/6;
end;

```

```
{A program torzse:}
begin
  {A grafikus ablak megnyitasa:}
  grDriver := Detect;
  InitGraph(grDriver,grMode,'c:\tp\bgi');
  {A 'c:\tp\bgi' helyen azt kell megadni, hogy a Turbo}
  {Pascal program (itt c:\tp) bgi nevu konyvtara hol}
  {talalhato.}

  {A skalaszorzok kiszamitasa, melyekkel a kivant}
  {teruletet a kepernyore tudjuk rajzolni:}
  ox:=320;
  oy:=240;
  sx:=ox/xmax;
  sy:=oy/ymax;

  {A kezdeti ertekek megadasa:}
  x[1]:=x10;
  x[2]:=x20;
  x[3]:=x30;
  x[4]:=x40;
  {A kezdopont kirajzolasa az x1,x3 sikon:}
  PutPixel(ox+round(x[1]*sx),oy-round(x[3]*sy),11);
  {Az utolso argumentum 11-es erteke}
  {a vilagoskek szinnek felel meg.}

  {Ciklus, amely elvegzi a Runge--Kutta-lepest,}
  {es a pont uj helyzetet kirajzolja az x1,x3 sikon:}
  szaml:=1; {Az idoszamlalas megkezdesese.}
  repeat
    t:=szaml*h;
    RungeKutta4(x,t,h);
    PutPixel(ox+round(x[1]*sx),oy-round(x[3]*sy),14);
    {Az utolso argumentum 14-es erteke}
    {a sarga szinnek felel meg.}
    szaml:=szaml+1;
  until szaml>tmax;

  varakozas; {Billentyunyomasra varunk.}

  CloseGraph; {A grafikus ablak bezarasa.}
end.
```


8.5. Konzervatív rendszerek kanonikus formalizmusa

8.5.1. A Hamilton-függvény

A konzervatív rendszerek mozgása mindig jellemezhető egy H Hamilton-függvény-nel.¹ A függvény változói a rendszer pillanatnyi helyzetét egyértelműen megadó q_i általános helykoordináták és az ezekhez tartozó p_i impulzusok. Eddigi példánkban a q_i helyváltozók derékszögű x, y koordináták vagy-szögek voltak, ennek megfelelően az impulzusok a sebességgel vagy a szögsebességgel arányosak. A rendszer állapotát megadó független q_i koordináták N számát a *szabadsági fokok számának* nevezzük. Gerjesztett mozgásokra a Hamilton-függvény az időtől is függ. Általában tehát

$$H = H(q_i, p_i, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.30)$$

A Hamilton-függvénnyel a mozgásegyenletek

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (8.31)$$

alakban adhatók meg. Ezt a $2N$ elsőrendű differenciálegyenletből álló rendszert nevezzük kanonikus egyenleteknek. A fázis-teret a q_i, p_i általános koordináták és impulzusok feszítik ki. Az időfüggetlen Hamilton-függvénnyel leírt problémák fázis-tere $2N$ -dimenziós. Ekkor a Hamilton-függvény értéke a mozgás során állandó, mert $dH/dt = \sum_i (\dot{q}_i \partial H / \partial q_i + \dot{p}_i \partial H / \partial p_i) = 0$, és H ezen állandó értéke a mozgás összenergiájával azonosítható. A gerjesztett esetekben a gerjesztés fázisa is független változó, s ezért a fázis-teret $2N + 1$ -dimenziós. A Hamilton-függvény értéke ekkor nem állandó (és nem is egyezik meg az összenergiával).

A Hamilton-függvény a mozgásegyenletek generátorfüggvénye, ugyanis egyszerű parciális deriváltjai határozzák meg az egyes kanonikus egyenleteket. Szembeszökő a különbség az $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{2N}, t)$, ($i = 1, \dots, 2N$) általános differenciálegyenlettel megadott problémával. Ebben az esetben $2N$ számú *különböző* f_i függvény határozza meg a (disszipatív) mozgást, míg a konzervatív viselkedést *egyetlen* függvény, a Hamilton-függvény írja le. A konzervatív eset ezért igen speciális. Meghatározó tulajdonsága, hogy a fázis-terefogat-összehúzóási aránya (ami (3.60) szerint a folyam divergenciája):

$$\sigma = -\sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right), \quad (8.32)$$

¹Ebben a függelékben feltételezzük az analitikus mechanika alapjainak ismeretét.

a (8.31) kanonikus egyenletek miatt azonosan zérus (Liouville-tétel). A Hamilton-függvény létezéséből tehát következik a konzervatív viselkedés, akkor is, ha a rendszer gerjesztett (H időfüggő) és az energia nem megmaradó mennyiség.

Azokat a változócsereket, melyek után a rendszer mozgásegyenlete továbbra is a kanonikus alakban írható, *kanonikus transzformációknak* nevezzük. A kanonikus transzformációk ismerete azért érdekes, mert az új mozgásegyenlet jóval egyszerűbb lehet, mint az eredeti. A Hamilton-függvény természetesen más alakú lesz az új q'_i , p'_i változóiban. A $H'(q'_i, p'_i, t)$ új alak ismeretéből a \dot{q}'_i , \dot{p}'_i mozgásegyenletek (8.31) szerint következnek (mindenütt a vesszős mennyiségek állnak). A kanonikus transzformációk egy lehetséges megadása az $S(p'_i, q_i, t)$ alkotófüggvény segítségével történhet, amely a régi hely- és az új impulzusváltozók és – általános esetben – az idő függvénye. A transzformációs összefüggés

$$q'_i = \frac{\partial S}{\partial p'_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.33)$$

Az S alkotófüggvény ismeretében a második egyenletcsoport meghatározza az új p'_i impulzust a régi változók függvényeként, s ezután az első egyenletcsoport közvetlenül megadja az új q'_i helyváltozókat. Az új Hamilton-függvény

$$H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (8.34)$$

Kívülről nem gerjesztett esetben tehát az új Hamilton-függvény értéke megegyezik a régi értékével: a kanonikus transzformáció az összenergiát nem változtatja meg.

8.5.2. Integrálható rendszerek

Az időfüggetlen $H(q_i, p_i)$ Hamilton-függvénnyel leírt N szabadsági fokú rendszert akkor nevezzük *integrálhatónak*, ha éppen annyi független mozgásállandóval rendelkezik, mint amennyi a szabadsági fokok száma. Ez N megszorítást jelent a $2N$ -dimenziós fázistérben (a megmaradó mennyiségek egyike természetesen az összenergia). Az integrálhatóság feltétele az, hogy létezzen egy olyan kanonikus transzformáció, mely után a Hamilton-függvény *csak* az új impulzusoktól függ. Ezeket az új impulzuskoordinátákat I_i *hatásváltozóknak* nevezzük. Látni fogjuk, hogy értékük időben nem változik, a hatásváltozók megfeleltethetők az N megmaradó mennyiségnek. A hozzájuk tartozó koordináták a $q'_i \equiv \theta$ *szögváltozók*, mert a q_i eredeti változó egy periódusa alatt a θ_i érték éppen 2π -vel változik. Integrálható rendszerek esetén található tehát egy $S(q_j, I_j)$ alkotófüggvény, melyre igaz, hogy

$$\theta_i = \frac{\partial S(q_j, I_j)}{\partial I_i}, \quad p_i = \frac{\partial S(q_j, I_j)}{\partial q_i}. \quad (8.35)$$

A (8.34) transzformáció szerint az új Hamilton-függvény értéke adott állapotban megegyezik a régiével, és (8.33) értelmében a keresett alkotófüggvénynek ki kell elégítenie a

$$H\left(q_i, \frac{\partial S(q_j, I_j)}{\partial q_i}\right) = H'(I_i) \quad (8.36)$$

Hamilton–Jacobi-egyenletet.

Mivel az új Hamilton-függvény csak az új impulzusoktól, a hatásváltozóktól függ, a (8.31) kanonikus egyenletek szerint

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H'}{\partial I_i} \equiv \omega_i(I_j), \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.37)$$

Ez mindig megoldható egyszerű integrálással, s azt látjuk, hogy a mozgás az új változóiban

$$\theta_i = \omega_i(I_j)t + \theta_{i,0}, \quad I_i = \text{állandó}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.38)$$

A szögváltozók tehát időben egyenletesen nőnek a rendszer ω_i frekvenciái szerint. A szögváltozók többértékűségét úgy kerülhetjük el, hogy a 2π értékkel eltolt szögértékeket – mint azt eddig is tettük – azonosnak tekintjük. A mozgás a $2N$ -dimenziós fázistér egy N -dimenziós felületén történik (hiszen az N mozgásállandó jelenléte a független változók számát N -re csökkenti). Az integrálható rendszerek mozgását N független frekvencia jellemzi. A mozgás tehát kváziperiodikus, ami a $2N$ -dimenziós tér N -dimenziós tóruszfelületein zajlik.

Ez a tulajdonság is jól mutatja, hogy a konzervatív rendszerek milyen speciálisak. Az N független elsőrendű mozgásegyenlettel leírt disszipatív rendszer általában kaotikus, ha $N > 2$ (l. 4.8. szakasz). A konzervatív rendszerek integrálhatósága azonban azt jelenti, hogy a mozgásegyenletek (a hatás- és szögváltozóiban) lineárisak, s ezért a mozgás nem kaotikus tetszőleges N szabadsági fok esetén sem. A következő gondolatmenet azt mutatja meg, hogy az integrálhatóság kivételes.

8.5.3. A perturbációszámítás érvényét veszti

Tételezzük most fel, hogy egy integrálható rendszerhez kis perturbációt adunk. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy két szabadsági fokú időfüggetlen problémát. Legyen az eredeti rendszer hatásváltozókkal kifejezett Hamilton-függvénye $H_0(I_1, I_2)$. A perturbációról feltesszük, hogy kicsi, ezért a Hamilton-függvényhez adódó járulékat εH_1 -gyel jelöljük, ahol ε a perturbáció erősségét mérő dimenziótlan szám. A H_1 járulékot a perturbálatlan rendszer hatás- és szögváltozóival adjuk meg. A perturbált rendszer teljes H Hamilton-függvénye tehát

$$H(\theta_i, I_i) = H_0(I_i) + \varepsilon H_1(\theta_i, I_i), \quad i = 1, 2. \quad (8.39)$$

Feltesszük, hogy a perturbált rendszer is integrálható, és megmutatjuk, hogy ez általában ellentmondásra vezet. Ha H integrálható, akkor definíció szerint létezik egy olyan kanonikus transzformáció, amely egy új H' Hamilton-függvényre vezet, és H' csak az új I'_i hatásváltozóktól függ.

A (8.36) Hamilton–Jacobi-egyenlet szerint a keresett kanonikus transzformáció $S(\theta_i, I'_i)$ alkotófüggvénye (l. (8.35)) kielégíti a

$$\theta'_i = \frac{\partial S(\theta_i, I'_i)}{\partial I'_i}, \quad I_i = \frac{\partial S(\theta_i, I'_i)}{\partial \theta_i} \quad (8.40)$$

egyenleteket, és

$$H(\theta_i, \frac{\partial S(\theta_i, I'_i)}{\partial \theta_i}) = H'(I'). \quad (8.41)$$

Ha a perturbáció gyenge, $\varepsilon \ll 1$, akkor az alkotófüggvény írható mint

$$S = \sum_{i=1}^2 \theta_i I'_i + \varepsilon S_1(\theta_i, I'_i), \quad (8.42)$$

mert az ε -ban magasabb rendű korrekciók elhagyhatók. Az első tag az

$$S_0 = \sum_{i=1}^2 \theta_i I'_i$$

alkotófüggvény, ami (8.40) szerint a perturbálatlan rendszert önmagába vivő kanonikus transzformációját írja le. A második, korrekciós tag a feltevés szerint kicsi, vagyis az S_1 alkotófüggvény-járuléknak *korlátosnak* kell lennie. Ennek megfelelően (8.40)-ből a hatásváltozókra fennáll, hogy

$$I_i = I'_i + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i}. \quad (8.43)$$

Ezt az eredeti Hamilton-függvénybe helyettesítve és azt ε -ban első rendig sorbafejtve

$$H_0(I_i) = H_0(I'_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \frac{\partial H_0}{\partial I'_i} \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i}. \quad (8.44)$$

A (8.41) Hamilton–Jacobi-egyenlet első rendig érvényes alakja tehát

$$H_0(I'_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \frac{\partial H_0}{\partial I'_i} \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i} + \varepsilon H_1(\theta_i, I'_i) = H'(I'_i). \quad (8.45)$$

Itt felhasználtuk, hogy a régi és az új hatás közötti különbség ε rendű, ezért az ε -nal arányos H_1 -ben I helyett I' is írható. Hasonló ok miatt vehetjük H_0 deriváltját a régi hatásváltozó szerint. A $\partial H_0/\partial I_i$ derivált azonban nem más, mint az *eredeti* probléma ω_i frekvenciája (l. (8.37)). Az S_1 járulékot az a feltétel határozza meg, hogy a Hamilton–Jacobi-egyenlet bal oldalának is függetlennek kell lennie a szögváltozótól. Ezért fenn kell állnia annak, hogy

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i} = -H_1(\theta_i, I'_i). \quad (8.46)$$

Az egyenlet megoldását csak a legegyszerűbb esetben vizsgáljuk, mert a problémát ez is világosan mutatja. Mivel a Hamilton-függvényben megjelenő H_1 perturbáló járuléknak periodikusnak kell lennie a szögváltozóban, tegyük fel, hogy az egyszerű szinuszos függés,² ami komplex írásmódban

$$H_1 = Ae^{i(n_1\theta_1+n_2\theta_2)}, \quad (8.47)$$

ahol n_1, n_2 egész számok (különben nem teljesülhet a 2π szerinti periodicitás). Ezzel a konkrét alakkal a (8.46) egyenlet megoldása

$$S_1 = iA \frac{e^{i(n_1\theta_1+n_2\theta_2)}}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}. \quad (8.48)$$

A (8.42) alkotófüggvényben megjelenő S_1 korrekciós tag *divergál*, ha

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_2}{n_1}, \quad (8.49)$$

vagyis, ha a perturbálatlan tórusz csavarási száma *racionális*. Ez az ún. *kis nevezők problémája*, amely azt mutatja, hogy a perturbációs számítás *racionális* csavarási számokra, sőt azok környékén is (ahol $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ kicsi) *érvényét veszti*. Ellentmondásra vezet ugyanis saját kiindulási feltevésével, miszerint a korrekciók kicsik.

Ez arra utal, hogy a rezonáns tóruszokon és azok környékén a rendszer viselkedése alapvetően eltér az integrálhatóakétól. Az itt kialakuló kaotikus mozgás tehát *nem írható le analitikus függvényekkel*, mert ha végtelen sorokat írunk is fel (pl. ε hatványaiban), akkor azok nem konvergálnak. A KAM-tétel (6.5.2. szakasz) éppen azt mutatja meg, hogy milyen messzire kell kerülnünk a rezonáns tóruszoktól ahhoz, hogy az ilyen sorok konvergálhassanak. Ott viszont, ahol konvergálnak, a mozgás már szükségszerűen szabályos: kváziperiodikus. A fázistér egészére ez azonban nem jellemző. A legkisebb perturbáció is lerombolja a teljes integrálhatóságot, és a rendszert kaotikussá, nemintegrálhatóvá teszi.

²Az általános perturbáció ilyen tagok összegeként Fourier-sorba fejthető.

A feladatok megoldása

2.1. megoldás. A szabályos n -szög éleinek hossza $\varepsilon = 2 \sin(\pi/n)$, kerülete $K = n\varepsilon$. A kerületet az ε felbontással kifejezve, $K = \pi\varepsilon/\arcsin(\varepsilon/2)$. Finom felbontás (nagy n) esetén az arcsin függvény sorba fejthető ($\arcsin x \approx x + x^3/6$), s azt kapjuk, hogy $K = 2\pi(1 - \varepsilon^2/24)$. A kerület tehát a felbontás négyzetével tart az ismert 2π értékhez. (Kevésbé szabályos görbék vagy kevésbé szabályos közelítés esetén a korrekció általában ε -nal arányos: a közelítés miatt egy lépésben elkövetett hiba ugyan ε^2 rendű, de a lépések száma $1/\varepsilon$ -nal nő.)

2.2. megoldás. Legyen a szigetbe írható legnagyobb szabályos háromszög területe T_0 , ami egyben a Koch-sziget szerkesztésének nulladik lépésében kapott terület. Az első lépésben ehhez meg három kisebb háromszög adódik, melyek területe egyenként $T_0/9$. A második lépésben 12 újabb $T_0/81$ területű háromszög jelenik meg. Az n -edik lépésben a $T_0/9^n$ területű háromszögek száma $3 \times 4^{n-1}$. Az összes kis háromszög területe tehát $T_0 \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times 4^{n-1} 9^{-n} = T_0/3 \sum_{n=0}^{\infty} (4/9)^n$. Ez egy mértani sor, melynek kvóciense $4/9$. A területnövekmény tehát véges: $T_0/(3(1 - 4/9))$. A Koch-sziget teljes területe $(8/5)T_0$.

2.3. megoldás. Ha az egységintervallumot ε hosszúságú szakaszokkal fedjük le, a szükséges szakaszok száma általában $[1/\varepsilon] + 1$, ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. Kis felbontásra ez $1/\varepsilon$ -nal arányos, s így az egyenes szakasz (2.3) dimenziójára valóban $D_0 = 1$ adódik.

Az egyenlőszárú derékszögű háromszög esetén használjunk az egyszerűség kedvéért olyan felbontást, mely az egységnyi szárhosszat n egyenlő részre osztja: $\varepsilon = 1/n$. Fedjük le a háromszöget ε szélességű oszlopokkal! A közvetlenül szár mentén elhelyezkedő oszlop magassága legyen 1, a mellette lévő $1 - 1/n$, az amelletl lévő $1 - 2/n$, stb. Az oszlopokat lefedő $1/n$ élű négyzetek teljes száma $n(1 + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - i/n)) = n(1 + n - 1 - (n-1)/2) = n(n+1)/2$. A felbontással kifejezve $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}(1 + \varepsilon)/2$, s ezért $D_0 = 2$.

2.4. megoldás. $D_0 = \ln 3 / \ln 2 = 1,585$.

2.5. megoldás. a) $D_0 = \ln 4 / \ln(1/r)$, b) $D_0 = \ln 3 / \ln 2 = 1,585$, c) $D_0 = \ln 5 / \ln 3 = 1,465$.

2.6. megoldás. A szerkesztés n -edik lépésének megfelelő $\varepsilon = r^n$ felbontásban $K = 4^{n+1} \times r^n$, $T = 4^n \times r^{2n}$. A K/T arány mindig arányos $(1/\varepsilon)$ -nal, tehát nő. A kerület maga viszont csak akkor divergál, ha $r > 1/4$, vagyis, ha $D_0 > 1$. Az $r = 1/4$ érték esetén a Cantor-felhő dimenziója éppen 1! A halmaz-természetesen ekkor sem sima görbe, de az a tulajdonsága közös a szokásos görbékkel, hogy megfigyelt kerülete nem függ a felbontástól.

2.7. megoldás. $D_0 = \ln 20 / \ln 3 = 2,727$.

2.8. megoldás. Ha $r_2 = r_1^2$, akkor az $r_1^{D_0} + r_1^{2D_0} = 1$ másodfokú egyenlet egyetlen pozitív megoldása $D_0 = \ln[(\sqrt{5} - 1)/2] / \ln r_1$, ami $r_1 = 1/2$ -re $D_0 = 0,694$.

2.9. megoldás. A fraktál öt hasonló részre bontható. Közülük négy egybevágó, s az egésznek $r_1 = 2/5$ arányú kicsinyített képe, az ötödikre nézve pedig $r_2 = 1/5$ a kicsinyítési tényező. A dimenziót meghatározó egyenlet $4(2/5)^{D_0} + (1/5)^{D_0} = 1$, mely a $D_0 = 1,601$ kitevővel teljesül.

2.10. megoldás. $\beta = (D_0 - 1)/(2 - D_0)$. Ez a kitevő mindig pozitív. A fraktálok alapvető új tulajdonságát mutatja, hogy a hagyományos alakzatokra jellemző $K \sim T^{1/2}$ összefüggést semmilyen D_0 -ra sem kapjuk vissza (még a kitevők előjele is különbözik!).

2.11. megoldás. Az egységkocka belsejéből vágjunk ki annyit, hogy a kocka sarkain nyolc egybevágó, $1/3$ élű kis kocka maradjon vissza! Folytassuk ezt minden kis kockában. A megfigyelt térfogat az $\varepsilon = 3^{-n}$ felbontással $(8/27)^n$. A Menger-szivacsban ezzel szemben 20 kocka marad vissza, ezért a megfigyelt térfogat $(20/27)^n$, ami sokkal lassabban csökken, mint $(8/27)^n$. A Cantor-halmaz háromszoros direkt szorzatának és a Menger-szivacs megfigyelt térfogatának aránya az $\varepsilon \exp\{-(D_0^{(3C)} - D_0^{(M)})\}$ kifejezés szerint csökken, ahol $D_0^{(3C)} = \ln 8 / \ln 3 = 1,893$ a direkt szorzat, $D_0^{(M)} = 2,727$ pedig a Menger-szivacs fraktáldimenziója.

2.12. megoldás. A kivágott szakaszok hossza a második lépésben $1/3 \times 1/9$, a megmaradóké pedig $(1/3 - 1/27) \times 1/2 = 4/27$. A harmadik lépésben megmaradt szakaszok hossza $(1/3 - 1/27) \times (1 - 1/81) \times 1/4 = 169/3^7$, s általánosan az n -edikben $2^{-n} \prod_{j=1}^n (1 - 3^{-j})$. Ezekből 2^n darab létezik, ezért az n -edik lépéshez tartozó hossz (térfogat) $V_n = \prod_{j=1}^n (1 - 3^{-j})$. A V teljes hossz az $n \rightarrow \infty$ esetben adódik: $V = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 3^{-j})$. Mivel a tényezők értéke gyorsan tart 1-hez, a szorzat véges, numerikus értéke $V = 0,560$.

A véges felbontással mért hossz és a teljes hossz különbségének logaritmusai $\ln(V_n - V) = \ln V_n + \ln(1 - \prod_{j=n+1}^{\infty} (1 - 3^{-j}))$. Az első tag véges, mert V_n véges határértékkel rendelkezik. A második tagban elegendően nagy n -re $\prod_{j=n+1}^{\infty} (1 - 3^{-j}) \approx$

$1 - \sum_{j=n+1}^{\infty} 3^{-j}$, ami a mértani sor összegképlete szerint $1 - 3^{-n}(9/2)$. Az n -edik lépésben szereplő legkisebb távolság a lyukak mérete $\varepsilon = 3^{-n}2^{-n+1}\prod_{j=1}^{n-1}(1 - 3^{-j})$, ezért az alakzatot ilyen méretű intervallumokkal fedjük le. Nagy n -re a szorzat a teljes V hosszhoz tart, s jó közelítéssel igaz, hogy $\ln \varepsilon \approx -n \ln 6$. Ezért a kövér fraktál exponense

$$\alpha = \frac{\ln(V_n - V)}{\ln \varepsilon} = \frac{\ln(1 - \prod_{j=n+1}^{\infty} (1 - 3^{-j}))}{n \ln 1/6} = \frac{\ln 3}{\ln 6} = 0,613.$$

2.13. megoldás. Az n -edik lépésben 2^n számú, $\prod_{j=1}^n r_j$ hosszúságú intervallumunk van. Az $\varepsilon = \prod_{j=1}^n r_j$ választással $N(\varepsilon) = 2^n = \exp(n \ln 2)$. Mivel $\ln \varepsilon = n(1/n \sum_{j=1}^n \ln r_j)$, a dimenzióra azt kapjuk, hogy

$$D_0 = \ln 2 / \overline{\ln(1/r_j)}.$$

A nevezőben az $\ln(1/r_j)$ számok egész szerkesztésre vett átlaga, a $-1/n \sum_{j=1}^n \ln r_j$ mennyiség határértéke áll. Annak feltétele, hogy a dimenzió egységnyi legyen, az, hogy az átlag $\ln 2$ -vé váljon (annak ellenére, hogy minden egyes $\ln(1/r_j)$ nagyobb $\ln 2$ -nél!).

2.14. megoldás. Az adott m indexhez tartozó dobozok teljes valószínűsége az n -edik lépésben $N_m p_m$. Ennek logaritmusza a Stirling-formula szerint

$$\ln(N_m p_m) = n \ln n - m \ln m - (n - m) \ln(n - m) + m \ln p_1 + (n - m) \ln p_2.$$

A szélsőérték annál az m^* indexnél található, melyre az $\ln(N_m p_m)$ mennyiség m szerinti deriváltja eltűnik. Ennek feltétele $\ln(n/m^* - 1) = \ln(p_2/p_1)$, amiből $m^* = p_1 n$. Az ehhez az indexhez tartozó dobozok száma $N^* \equiv N_{m^*}$, amire $\ln N^* = -n(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2)$. Ekkor $\ln(N^* p_m^*) = 0$, azaz a Stirling-formula közelítésének megfelelő pontossággal a tipikus dobozok teljes valószínűsége 1. Mivel a felbontás az n -edik szinten $\varepsilon = 3^{-n}$, írhatjuk, hogy $D_1 = \ln N^* / (n \ln 3)$, amiből

$$D_1 = -\frac{p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2}{\ln 3}.$$

Ha $p_1 \neq 1/2$, a $-(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2)$ információ mindig kisebb a homogén esethez tartozó $\ln 2$ -nél. Ezért D_1 mindig kisebb, mint a tartó $D_0 = \ln 2 / \ln 3$ fraktáldimenziója, s annál kisebb, minél kisebb p_1 .

2.15. megoldás. A lehetséges dobozvalószínűségek most is $p_m = p_1^m p_2^{n-m}$. A p_m valószínűségű dobozok száma az n -edik szinten $N_m = 2^m \binom{n}{m}$ (az összes doboz száma 3^n). Teljes valószínűségük az n -edik lépésben $N_m p_m$. Ennek logaritmusza a Stirling-formula szerint

$$\ln(N_m p_m) = n \ln n - m \ln m - (n - m) \ln(n - m) + m \ln 2 + m \ln p_1 + (n - m) \ln p_2.$$

A szélsőérték az $m^* = 2np_1$ indexhez tartozik. Az ilyen dobozok száma $N^* \equiv N_{m^*}$, amire $\ln N^* = -n(2p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2)$ adódik. Mivel a felbontás az n -edik szinten $\varepsilon = 3^{-n}$,

$$D_1 = -\frac{2p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2}{\ln 3}.$$

Ez mindig kisebb, mint 1, ha $p_1 \neq 1/3$, s annál kisebb, minél kisebb p_1 . Ugyanez adódik a (2.18) definícióból is.

3.1. megoldás. A függőlegessel φ szöget bezáró állapotban a tömegpont érintőlegesen mozog. Mivel az érintő a vízszintessel φ szöget bezáró lejtőt alkot, a lejtő irányú gyorsulás $g \sin \varphi$, ahol g a gravitációs gyorsulás. Az érintőleges gyorsulás az $l\ddot{\varphi}$ kerületi gyorsulás, ezért a Newton-egyenlet $l\ddot{\varphi} = g \sin \varphi$. Kis kitérésekre a szinuszfüggvény közelíthető az argumentumával, s ezért az egyenlet $\ddot{\varphi} = (g/l)\varphi$, ugyanolyan típusú, mint (3.2), az $s_0 = \sqrt{g/l}$ taszítási paraméterrel.

3.2. megoldás. A (3.15) kitérés-idő függvényből a sebesség: $v = \lambda_+ c_+ \exp(\lambda_+ t) + \lambda_- c_- \exp(\lambda_- t)$. Ezért a $v - \lambda_\mp x$ kombináció $\exp(\lambda_\pm t)$ -vel arányos, amiből következik, hogy mind $(v - \lambda_- x)^{\lambda_-}$, mind $(v - \lambda_+ x)^{\lambda_+}$ az $\exp(\lambda_- \lambda_+ t)$ időfüggést mutatja, s ezért (3.17) teljessül.

3.3. megoldás. Kis súrlódás esetén $\lambda_\pm = \pm s_0 - \alpha/2$. Az aszimptoták iránytangensei ugyanazzal a kis $(\alpha/2)$ értékkel csökkennek, ami azonos – kicsiny – szögelfordulásoknak felel meg.

3.4. megoldás. A függőlegessel φ szöget bezáró állapotban a gyorsulás $-g \sin \varphi$, ellentétes a szögkitéréssel. Az érintőleges gyorsulás az $l\ddot{\varphi}$ kerületi gyorsulás, ezért a Newton-egyenlet $l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$. Kis kitérésekre a szinuszfüggvény közelíthető az argumentumával, s ezért az egyenlet $\ddot{\varphi} = -(g/l)\varphi$, ugyanolyan típusú, mint (3.23), az $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ sajátfrekvenciával.

3.5. megoldás. A (3.35) összefüggésből a sebesség

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -\frac{\alpha}{2}x(t) + \omega_\alpha A e^{-(\alpha/2)t} \cos(\omega_\alpha t + \delta).$$

A $Q = \sqrt{x^2 + [v + (\alpha/2)x]^2 / \omega_\alpha^2}$, $\phi = \omega_\alpha t$ polárkoordinátákban ez a logaritmikus spirál

$$Q = A e^{-\alpha/(2\omega_\alpha)\phi}$$

egyenletére vezet.

3.6. megoldás. A trajektóriák egyenletét a (3.17) összefüggés adja, csak most mindkét λ_\pm kitevő negatív.

3.7. megoldás. Az $x^* = c$ pontban az erő deriváltja $F'(x^* = c) = ac$. Az egyensúlyi helyzet vonzó vagy taszító jellege az ac szorzattól függ. Az $x^* = c$ fixpont stabil, ha $ac < 0$, s ekkor a sajátfrekvencia $\omega_0 = \sqrt{-ac}$. A fixpont instabil, ha $ac > 0$, s ekkor a taszítási paraméter $s_0 = \sqrt{ac}$.

3.8. megoldás. Az erőtvény $F(\varphi) = (g/l)\sin\varphi \approx (g/l)(\varphi - \varphi^3/6)$ (l. 3.1. feladat). A második tag addig hanyagolható el az elsőhöz képest, amíg a radiánban mért szögkitérésre igaz, hogy $\varphi \ll \sqrt{6} = 2,450$. A lineáris közelítés érvényességi körének megtalálásához meg kell állapodni abban, mit értünk azon, hogy az egyik szám jóval kisebb, mint a másik. Az 1 nagyságrendnyi különbség ésszerű választás. A lineáris közelítés tehát addig jogos, amíg a szögkitérés kisebb, mint $\sqrt{6}$ egytizede. Ez negyed radián, ami körülbelül 15° . Csekély súrlódást feltételezve az instabil sokaság menti mozgás $\varphi(t) = \varphi_0 \exp(s_0 t)$, ahol $s_0 = \sqrt{g/l}$. Ebből a lineáris közelítés addig a t ideig érvényes, amelyre

$$t = \frac{1}{s_0} \ln \frac{15^\circ}{\varphi_0},$$

ahol a kezdeti szögkitérés is fokokban mérendő. A ceruza tipikus hossza $l = 10$ cm, ezért $s_0 = \sqrt{g/l} \approx 10 \text{ s}^{-1}$. Eszerint a feldőlő ceruza mozgása $\varphi_0 = 1, 1/100$ és 10^{-4} foknyi kezdeti szögkitérésből indulva rendre $t \approx 0,3, 0,7$ és $1,2$ másodpercig követi a (3.1) lineáris egyenletet.

3.9. megoldás. Az $(x^*, 0)$, $(-x^*, 0)$ fixpontok elliptikusak, az origó pedig hiperbolikus. A trajektória egyenletét az energiamegmaradás $v^2/2 + V(x) \equiv \mathcal{E} = \text{állandó}$ alakja határozza meg, ahol \mathcal{E} az egységnyi tömegre jutó összenergia. Ebből

$$v(x) = \pm \sqrt{2(\mathcal{E} + bx^2 - dx^4)}.$$

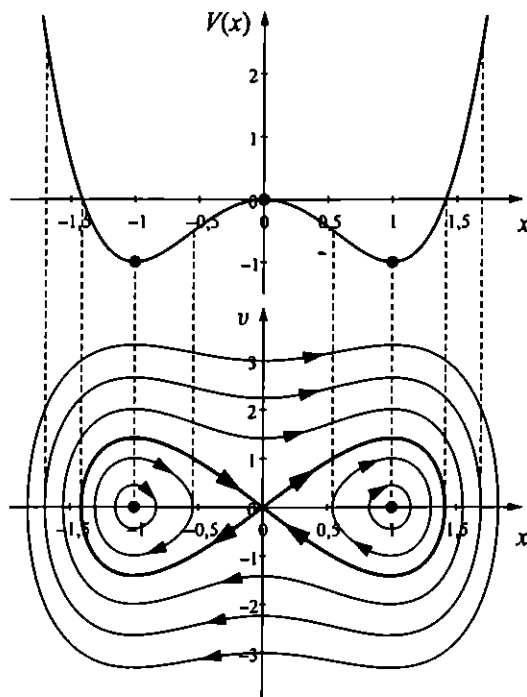
Innét leolvasható, hogy negatív energiákra a trajektóriák a jobb vagy bal völgyhöz kötött zárt görbék, melyek a völgy aljához közeledve természetesen ellipszisekké válnak (9.1. ábra). A nulla energiaszint elérésekor a trajektória a $v(x) = \pm x[s_0^2 - 2dx^2]^{1/2}$ görbébe megy át, ahol s_0 a (3.45) taszítási paraméter. Az origó környékén ez az egyenlet a $v(x) = \pm s_0 x$ linearizált alakkal helyettesíthető, a hiperbolikus pontok körüli viselkedésnek megfelelően. A nemlineáris egyenlettel definiált görbe azonban érvényes az origótól távol is, s megadja a lokális stabil és instabil egyenesek folytatását, a stabil és instabil sokaságokat. A két sokaság – szemben a súrlódásos esettel – egybeesik. Együtt egy szétválasztó görbét, szeparátrixot alkotnak.

3.10. megoldás. A súrlódásmentes esetben az $x_-^* = c$ pont elliptikus, az origó pedig hiperbolikus. A trajektóriák egyenlete

$$v(x) = \pm \sqrt{2(\mathcal{E} - acx^2/2 + ax^3/3)}.$$

Az $\mathcal{E} = 0$ fázisgörbe szeparátrix, mely most háromféle mozgástípust választ szét: a gödörbeli periodikus viselkedést, a potenciálhegy jobbról történő megközelítését, ill. pozitív energiákra a gödör megkerülése utáni kifutást a végtelenbe (9.2. ábra).

A súrlódás jelenlétében az origó stabil és instabil sokaságának bal oldali ágai többé nem esnek egybe. Az instabil sokaság a fixpontattraktorba fut, a stabil sokaság pedig kinyúlik a végtelenbe. A stabil sokaság két ága az attraktor vonzási tartományát fogja körül. Az ezen kívüli kezdőpontokból induló trajektóriák mind kifutnak a végtelenbe, a hajó felborul. Úgy is tekinthető, hogy az $(x^* = \infty, v^* = \infty)$ állapot egy második (egyszerű) attraktor.



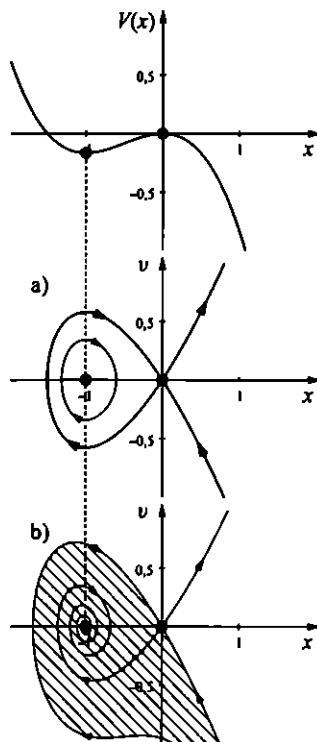
9.1. ábra. A kétvölgyű potenciál és a súrlódásmentes mozgás trajektóriái ($a = 4$, $x^* = 1$). A vastaggal rajzolt szeparátrixon az energia nulla. Ez a görbe választja szét a kis gödrökben rekedt negatív energiájú mozgásokat a dombon átjutó pozitív energiájú mozgásoktól.

3.11. megoldás. A (3.47) erőtvény az origó körül: $F(x) = -2kx(1 - l_0/h)$. A frekvencia ezért a $h > l_0$ tartományban $\omega_0 = \sqrt{2k(h - l_0)/h}$. Az erő deriváltja az $x^* = [l_0^2 - h^2]^{1/2}$ helyen (3.47)-ből $F'(x^*) = -2k(1 - h^2/l_0^2)$. A frekvencia ezért $\omega_0 = [2k(1 - h^2/l_0^2)]^{1/2}$, ami a bifurkációs pont környékén $\omega_0 \approx \sqrt{4k(l_0 - h)/h}$. A stabil állapot körüli kis rezgések periódusideje tehát egyre hosszabb, bármelyik oldalról közeledünk is a bifurkációs ponthoz (9.3. ábra).

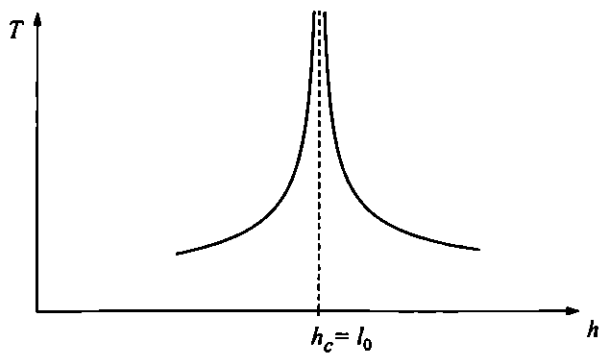
3.12. megoldás. A bifurkációs pont környékén h alig különbözik l_0 -tól, s ezért a lehetséges x értékek kicsik, és az olyan kifejezésekben, ahol $(h - l_0)$ nem szerepel, h helyettesíthető l_0 -val. Használjuk az $[1 + (x/h)^2]^{-1/2} \approx 1 - (1/2)(x/h)^2$ közelítő összefüggést, amivel a (3.47) erő

$$F(x) \approx -2k \left(1 - \frac{l_0}{h}\right) x - \frac{k}{l_0^2} x^3 \approx -\frac{k}{l_0^2} x \left[x^2 - 2l_0(l_0 - h) \right]. \quad (9.1)$$

Ez megfelel a (3.43) erőtvénynek, hiszen a fixpontérték $h \approx l_0$ mellett $x^* \approx \sqrt{2l_0(l_0 - h)}$.



9.2. ábra. A „feldőlő hajó” probléma potenciálja és fázistérképe a súrlódásmentes (a) és a súrlódásos (b) esetben ($a = 1$, $c = -1$, $\alpha = 0,2$).

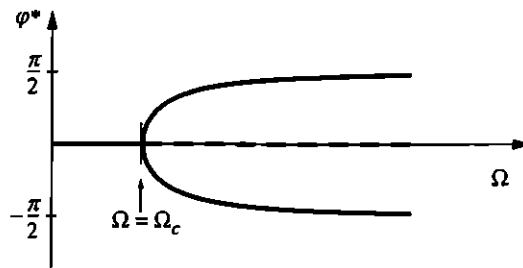


9.3. ábra. A kis rezgések periódusidejének függése a bifurkációs pont két oldalán.

3.13. megoldás. Az együttforgó rendszerben a testre a súlyán kívül a centrifugális erő is hat. A függőlegessel φ szöget bezáró helyzetben a vízszintesen kifelé mutató centrifugális gyorsulás $l \sin \varphi \Omega^2$. Az erők rúdra merőleges komponenseiből az egységnyi tömegre vonatkoztatott erőtvény:

$$F(\varphi) = \sin \varphi (\Omega^2 l \cos \varphi - g).$$

Kis forgási szögsebességek esetén (amikor a zárójel nem válthat előjelet) csak egy nyugalmi állapot létezik, $\varphi_0^* = 0$. Az $\Omega_c = \sqrt{g/l}$ kritikus szögsebesség felett viszont megjelennek a $\varphi_{\pm}^* = \arccos(g/(\Omega^2 l))$ megoldások is.



9.4. ábra. A forgatott gyűrűn mozgó test (3.14b. ábra) vasvilla-bifurkációja az Ω forgatási szögsebesség függvényében.

A bifurkációs pont közelében a szögkitérés kicsi, s $\varphi \ll 1$ -re az erőtvény a szögfüggvények sorfejtése alapján az

$$F(\varphi) \approx \sin \varphi \left[(\Omega^2 l - g) - \frac{\Omega^2 l}{2} \varphi^2 \right] \approx -\frac{\Omega^2 l}{2} \varphi \left[\varphi^2 - 2 \left(1 - \frac{g}{\Omega^2 l} \right) \right] \quad (9.2)$$

közelítő alakot ölti, amely ugyanolyan típusú, mint (3.43).

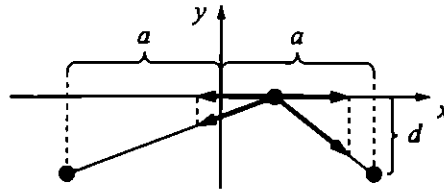
3.14. megoldás. Ha az inga jó közelítéssel síkban mozog, akkor rá a kitéréssel lineárisan arányos visszatérítő erő hat, s az ebből adódó sajátfrekvencia $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ (l. 3.5. feladat). Az r távolságban lévő egységnyi tömegű testek között ható mágneses erőt Coulomb-erővel közelítve, annak nagysága γ/r^2 , ahol γ pozitív állandó. A vízszintes síkban ható erőkomponensek a 9.5. ábráról leolvashatók.

Az erőtvény:

$$F(x) = -\frac{g}{l}x + \gamma \frac{a-x}{(d^2 + (a-x)^2)^{3/2}} - \gamma \frac{a+x}{(d^2 + (a+x)^2)^{3/2}}.$$

Ha feltesszük, hogy az x kitérés kicsi az a és d távolságokhoz képest, akkor x -ben sorba fejtve azt kapjuk, hogy

$$F(x) \approx \left(-\frac{g}{l} + \frac{2\gamma(2a^2 - d^2)}{(a^2 + d^2)^{5/2}} \right) x - \frac{3\gamma(4a^2 - d^2)}{(a^2 + d^2)^{7/2}} x^3.$$



9.5. ábra. Az ingára ható mágneses erők és vízszintes komponenseik. Feltételezzük, hogy a testek között a mágneses hatás vonzó.

Az origó tehát csak akkor lehet egyáltalán instabil, ha a mágnesek nincsenek túl mélyen, ha $d < \sqrt{2}a$. Ha ez teljesül, az instabilitáshoz még az is szükséges, hogy a γ paraméter elég nagy vagy g/l eléggé kicsi legyen. Ilyenkor a kifejezés megfelel a (3.43) erőtvénynak.

3.15. megoldás. A körhinta $d \ll l$ hosszúságú vízszintes rúdjának jelenlétében a centrifugális gyorsulás $(d + l \sin \varphi)\Omega^2$. A rúdra merőleges eredő erő

$$F(\varphi) = \Omega^2(d + l \sin \varphi) \cos \varphi - g \sin \varphi.$$

A bifurkáció kis szögkitéréseknél történik, ezért az erőtvényt sorba fejtjük kis φ értékekre:

$$F(\varphi) \approx \Omega^2 d \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + \left[\varphi(\Omega^2 l - g) - \frac{\Omega^2 l}{2} \varphi^3\right] \left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right).$$

Mivel a d rúd rövid és a szögkitérés kicsi, a gömbölyű zárójelekben a szög négyzetével arányos járulékok elhagyhatóak l mellett,¹ és így az

$$F(\varphi) \approx \Omega^2 l \left(\frac{d}{l} + \varphi \left(1 - \frac{g}{\Omega^2 l}\right) - \frac{\varphi^3}{2}\right) \quad (9.3)$$

alakra jutunk. Ez csak az első tagban különbözik a forgatott gyűrűn lévő test (9.2) erőtvényétől.

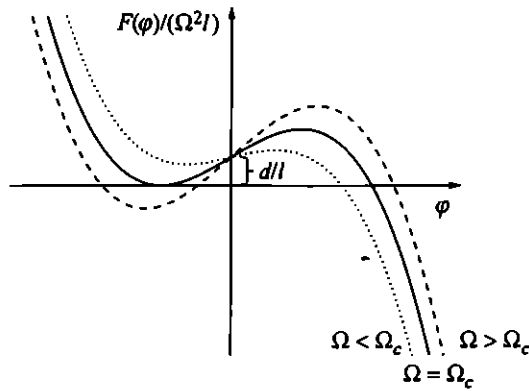
Kis szögsebességekre egy nyugalmi állapot létezik. Ez csak úgy lehetséges, ha az $F(\varphi)$ függvény minimuma pozitív (9.6. ábra). A szélsőérték ahhoz a φ_0 értékhez tartozik, ahol $F'(\varphi_0) = 0$. Innét

$$\varphi_0 = -\sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{g}{\Omega^2 l}\right)}.$$

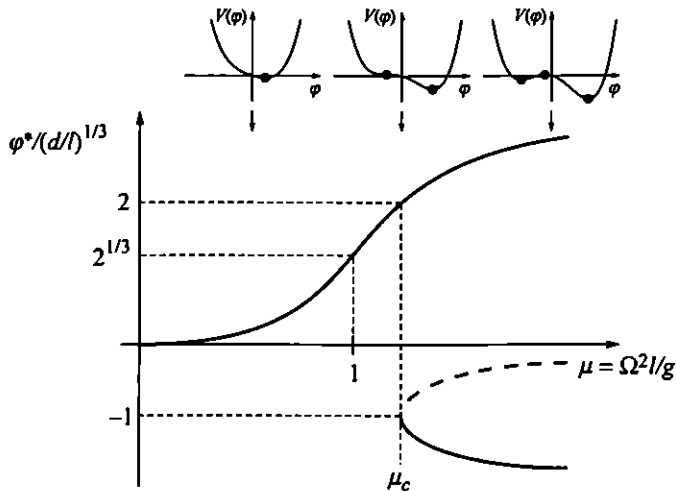
Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az erőfüggvény értéke itt $F(\varphi_0) = \varphi_0^3 + d/l$. A kritikus szögsebességnél ez az érték éppen zérus, ebből

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - (3/2)(d/l)^{2/3}}}}.$$

¹A végeredményből látszik, hogy φ nagyságrendje $(d/l)^{1/3}$.



9.6. ábra. Az erőtorvény grafikonja az Ω_c kritikus szögsebesség körül. A pontozott, folytonos és szaggatott vonal rendre az $\Omega < \Omega_c$, $\Omega = \Omega_c$ és $\Omega > \Omega_c$ esethez tartozik.



9.7. ábra. A körhintamodell rendszere torzított vasvilla-bifurkáción megy keresztül. Feltüntettük az erőtorvényhez tartozó potenciálgörbe alakját is három jellegzetes paraméterre.

Az új egyensúlyi állapot a $-(d/l)^{1/3}$ szögkitérésnél jelenik meg (ekkor a pozitív megoldás éppen $2(d/l)^{1/3}$). A teljes bifurkációs diagram vázlatát a 9.7. ábrán látható.

3.16. megoldás. A rúd mentén ható rugóerőt a (3.47) kifejezés adja, ahol x most a rugók végpontjait összekötő egyenes és a rúd metszéspontjától mért távolság. Új erőként fellép a súly lejtő irányú komponense, ami kis hajlásszög esetén $g\alpha$ gyorsulást jelent. Az erőtvény ezért

$$F(x) = -2kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}} \right) - g\alpha.$$

A bifurkációs pont környékén a kitérés kicsi. Az x/h mennyiségben sorba fejtvé, és felhasználva, hogy $h \approx l_0$ (l. (9.1))

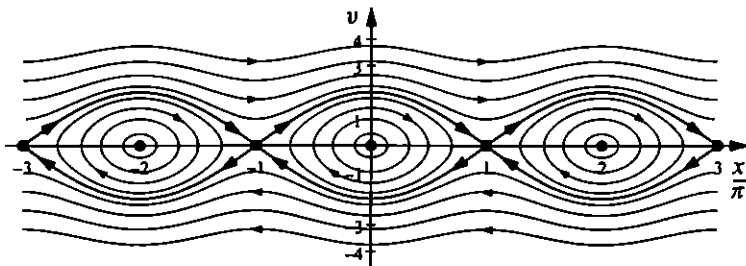
$$F(x) \approx -2kx \left(1 - \frac{l_0}{h} \right) - \frac{k}{l_0^2} x^3 + g\alpha \approx 2kl_0 \left[\frac{g\alpha}{2kl_0} + \frac{x}{l_0} \left(1 - \frac{h}{l_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l_0} \right)^3 \right].$$

A kifejezés ugyanolyan alakú, mint (9.3), a bifurkáció környékén a rendszer úgy viselkedik, mint a körhinta-modell rendszere. A szögsebességgel analóg mennyiség most $1/h$. A bifurkáció fizikai oka az, hogy nagyon enyhe összenyomás esetén a rugóerő még nem elegendő ahhoz, hogy egy felső nyugalmi állapot is kialakulhasson. Egy kritikus h_c -nél kisebb hosszakra azonban két felfelé tolt nyugalmi állapot is létezik (a kevésbé magasán lévő instabil).

3.17. megoldás. A fázistérbeli trajektóriák

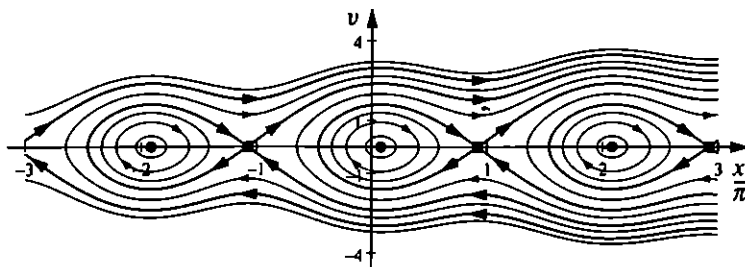
$$v(x) = \pm \sqrt{2(\mathcal{E} + A \cos x)} \quad (9.4)$$

alakúak (l. 9.8. ábra). Az $\mathcal{E}_c = A$ energiához tartozó szeparátrixok a szomszédos hiperbolikus pontokat kötik össze.



9.8. ábra. A periodikus erő potenciálja és fázistérképe súrlódásmentes esetben ($A = 1$). A potenciálgörbe lokális maximumaiban lévő hiperbolikus pontok instabil és stabil sokaságai alkotják a vastaggal rajzolt szeparátrixot, mely elválasztja a lokális potenciálhegyek felett haladó testek trajektóriáit a völgyekben rekedt testek pályáitól (vagy az inga átforduló mozgását a kisebb energiájú lengésektől).

3.18. megoldás. A hiperbolikus pontok instabil és stabil sokaságai bal oldali ágai egybeesnek, és ezek zárt görbéje elválasztja a völgyben való periodikus mozgást a többitől (9.9. ábra). Az instabil sokaságok felső ága emelkedik, annak megfelelően, ahogyan a lokális maximumon túljutott részecskék egyre gyorsabban futnak lefelé.



9.9. ábra. A gödrös lejtő fázistérképe. A vastag vonalak a hiperbolikus pontok stabil és instabil sokaságai. A paraméterek: $A = 1$, $F_0 = 0,25$.

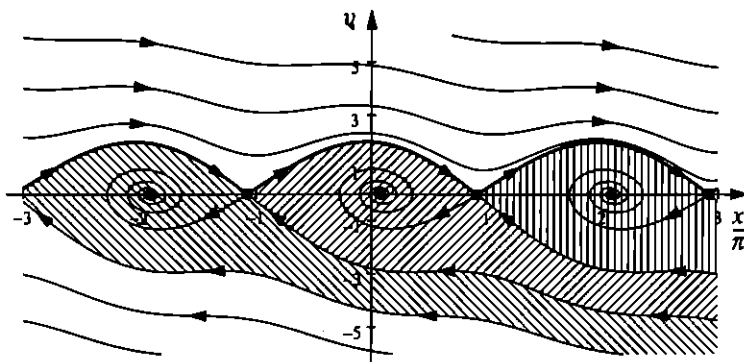
3.19. megoldás. Ha a sűrűdés erősödik, az állandósult mozgás lelassul, a határciklus lejebb csúszik. Ezzel párhuzamosan a fixpontok vonzási tartománya megduzzad. Egy kritikus sűrűdési együtthatónál a határciklus felülről eléri a hiperbolikus pontokat (9.10. ábra). A kritikus helyzet akkor áll elő, ha a valamelyik buckáról kezdősebesség nélkül elengedett test éppen felér a jobb oldali szomszéd bucka tetejére. Ehhez végtelen hosszú időnek kell eltelnie, s ezért az ennek megfelelő attraktor szigorú értelemben már nem is határciklus, mert nem kapcsolatos periodikus mozgással. Ezen egyetlen értéknél a stabil és instabil sokaság felső ágai egybeesnek (9.10. ábra). Ez egyben jele annak, hogy még nagyobb sűrűdásokra már nem létezik periodikus lesikló megoldás: minden test megáll valamelyik völgyben (túl puha a hó). A kezdősebességtől csak az függ, melyikben. Ilyenkor az instabil sokaságok mindkét ága fixpontattraktorba vezet (9.11. ábra).

3.20. megoldás. $\sigma = \alpha(x_1^2 - 1)$. A fázistérfogat-összehúzódsági ráta függ az x_1 koordinátától. σ pozitív, amennyiben távol vagyunk az origótól, $|x_1| > 1$. Itt a rendszer energiája csökken, hiszen $\alpha(x_1^2 - 1)$ helyfüggő sűrűdési együtthatónak is tekinthető. Az origó környékén, az $|x_1| < 1$ tartományban a fázistérfogat tágul, itt ugyanis energiabetáplálás történik: az $\alpha(x_1^2 - 1)$ helyfüggő sűrűdési együttható negatív.

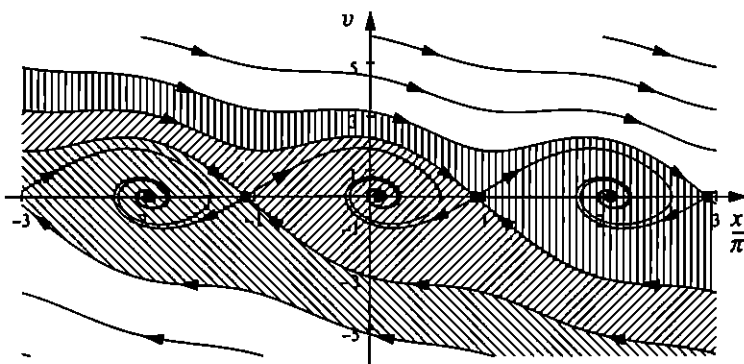
3.21. megoldás. A (3.57) mechanikai probléma $(x^*, 0)$ fixpontja körül linearizált egyenletének stabilitási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x^*) & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Ennek nyoma $-\alpha$, determinánsa pedig $-F'(x^*)$. Ezzel a (3.69) sajátérték-egyenlet $\lambda^2 + \lambda\alpha - F'(x^*) = 0$, ami a (3.14), ill. (3.29) egyenletekre vezet attól függően, hogy $F'(x^*)$ pozitív (ekkor értékét s_0^2 jelöli) vagy negatív (ekkor értéke $-\omega_0^2$).



9.10. ábra. A gödörös lejtőn történő mozgás fázistérképe a kritikus súrlódás mellett. Az stabil sokaságok alsó ágai most is a spirális attraktorok vonzási határait rajzolják ki. A paraméterek: $A = 1$, $F_0 = 0,25$, $\alpha = 0,198$.



9.11. ábra. A gödörös lejtőn történő mozgás fázistérképe erős súrlódás mellett. A határciklus megszűnt, az összes kezdőfeltételhez a gödörök alján megálló mozgás tartozik. A paraméterek: $A = 1$, $F_0 = 0,25$, $\alpha = 0,3$.

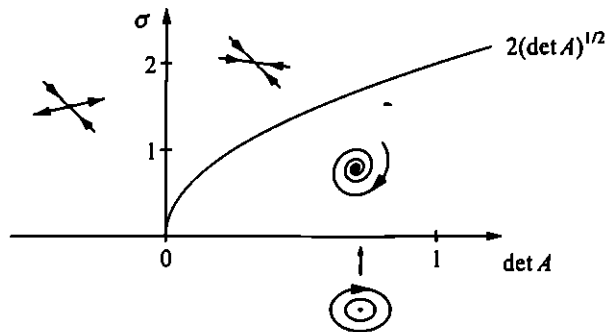
3.22. megoldás. A sajátértékek $\lambda_{\pm} = -3/4 \pm \sqrt{25/16 + a}$. A fixpont hiperbolikus, ha $a > -1$. A $-25/16 < a < -1$ tartományban csomópont, egyébként pedig spirális attraktor.

3.23. megoldás. A (3.69) egyenletből, ahol $\text{Tr } A \equiv -\sigma$, a fázistérfogat-összehúzódsági ráta ellentettje,

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4 \det A}}{2}.$$

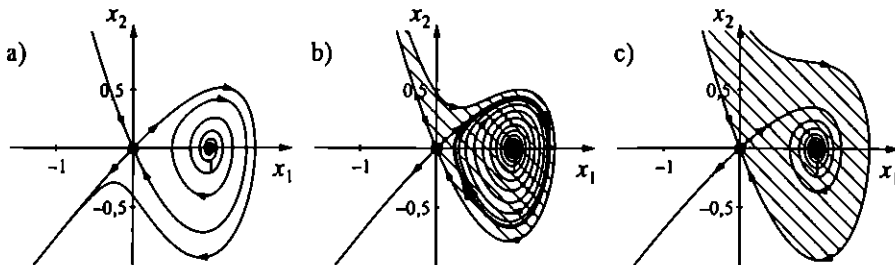
A hiperbolikus pontok a negatív determinánsú tartományba esnek (5.12. ábra). A rend-

szer stabilitását tehát a $\det A$ előjele határozza meg. Pozitív determináns mellett mindkét sajátérték valós, ha $\sigma > 2\sqrt{\det A}$. A $\sigma = 2\sqrt{\det A}$ parabolaív alatt spirális attraktor található, felette csomópont (l. 9.12. ábra). (Táguló fázistérhez, $\sigma < 0$, az itt látott viselkedés időbeli megfordítottja tartozik.)



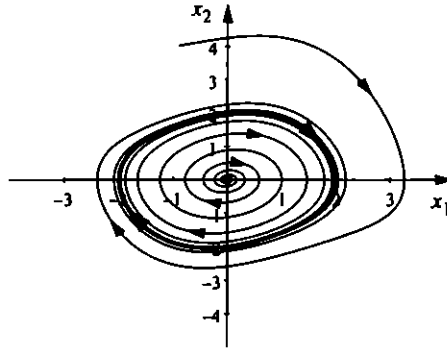
9.12. ábra. A fixpont jellege a $\sigma \geq 0$, $\det A$ paramétersíkon.

3.24. megoldás. A rendszernek α függvényében három jellegzetes fázistérképe létezik (l. 9.13. ábra). Az origó mindig hiperbolikus fixpont. A fázistérfogat-összehúzósi ráta $\sigma = \alpha - x_1$, ezért az $(1, 0)$ pont repellor, ha $\alpha < 1$ és attraktor egyébként. Ha $\alpha < 0,865$, akkor a repellor olyan erős, hogy a trajektóriákat kipörgeti a végtelenbe. Ha $0,865 < \alpha < 1$, akkor a repellort egy határciklus-attraktor veszi körbe, melynek vonzási tartományát a hiperbolikus fixpont stabil sokaságai határolják. Az ezen területen kívül indított pontok a $(-\infty, -\infty)$ -be tartanak. Az $\alpha > 1$ tartományban a határciklus nem létezik, az $(1, 0)$ fixpont az egyetlen attraktor.



9.13. ábra. Három jellegzetes fázistérkép a numerikus megoldás alapján, a) $\alpha = 0,8$, b) $\alpha = 0,9$ és c) $\alpha = 1,1$. A b) képen a határciklust vastag vonal jelöli.

3.25. megoldás. Az origó spirális repellor, amelyet határciklus-attraktor vesz körül (l. 9.14. ábra).



9.14. ábra. A van der Pol-oszcillátor fázistérképe a numerikus megoldás alapján ($\alpha = 0,2$).

4.1. megoldás. $F_g(x, t) = uI(x(t)) \sum_0^{\infty} \delta(t - nT - T\varphi_0/(2\pi))$.

4.2. megoldás. A (4.31) összefüggés alapján a $\varrho_n = [\Delta x_n^2 + \Delta v_n^2/\omega_0^2]^{1/2}$ polárkoordináta és a $\phi_n = \omega_0 nT$ polárszög között azt a kapcsolatot találjuk, hogy

$$\varrho_n = A e^{-\alpha/(2\omega_0)\phi_n}. \quad (9.6)$$

A trajektória tehát a stroboszkopikus leképezésen is logaritmikus spirálon mozog. Az $A = [\Delta x_0^2 + \Delta v_0^2/\omega_0^2]^{1/2}$ amplitúdó a kezdőfeltétel egyértelmű függvénye.

4.3. megoldás. A leképezés lineáris, mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix} E \left(C + S \frac{\alpha}{2\omega_\alpha} \right) & \frac{ES}{\omega_\alpha} \\ -ES\omega_\alpha \left(1 + \left(\frac{\alpha}{2\omega_\alpha} \right)^2 \right) & E \left(C - S \frac{\alpha}{2\omega_\alpha} \right) \end{pmatrix}.$$

Az S és C rövidítésekben most nem ω_0 , hanem $\omega_\alpha = [\omega_0^2 - (\alpha/2)^2]^{1/2}$ szerepel. A sajátértékek: $\Lambda_{\pm} = E(C \pm iS) = e^{(-\alpha/2 \pm i\omega_\alpha)T}$.

4.4. megoldás. A partikuláris megoldást $x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0 + \delta)$ alakban keresve, azt kapjuk, hogy

$$A = -\frac{f_0}{\sqrt{(s_0^2 + \Omega^2)^2 + \alpha^2 \Omega^2}},$$

és

$$\delta = \text{arctg} \left(\frac{\alpha \Omega}{s_0^2 + \Omega^2} \right).$$

Mivel az amplitúdóban az s_0 paraméter és a gerjesztési frekvencia négyzetösszege szerepel, rezonancia most nem lép fel.

4.5. megoldás. A (4.36), (4.37) összefüggésekből $\Delta x_n s_0 \pm \Delta v_n = 2s_0 c \pm \Lambda_{\pm}^n$. Felhasználva, hogy $\Lambda_{\pm}^n = e^{(-\alpha/2 \pm s_0)Tn}$, megfelelő hatványra emelés után mindkét egyenlet jobb oldala e^n -nel arányos, amiből

$$\frac{(\Delta x_n s_0 - \Delta v_n)^{\alpha/2 - s_0}}{(\Delta x_n s_0 + \Delta v_n)^{\alpha/2 + s_0}} = \text{állandó.}$$

4.6. megoldás. $\Lambda_{\pm} = \exp\{(-\alpha/2 \pm [s_0^2 + \alpha^2/4]^{1/2})T\}$.

4.7. megoldás. Az n -edik lökés előtti v_n sebesség a lökés hatására hirtelen a $\tilde{v}_n = v_n + uI(x_n)$ értéket veszi fel. Ettől kezdve a következő lökésig a mozgás harmonikus rezgés, ezért az új koordinátákra igaz, hogy $x_{n+1} = \tilde{v}_n E / \omega_0$ és $v_{n+1} = -E\omega_0 x_n$. A teljes leképezés

$$x_{n+1} = \frac{E}{\omega_0} (v_n + uI(x_n)), \quad v_{n+1} = -E\omega_0 x_n.$$

4.8. megoldás. A lökdösött oszcillátor stroboszkopikus leképezése tetszőleges T gerjesztési periódussal és tetszőleges csillapítás mellett a 4.3. feladat alapján

$$x_{n+1} = E \left(C + \frac{\alpha}{2\omega_{\alpha}} S \right) x_n + \frac{ES}{\omega_{\alpha}} v_n, \quad (9.7)$$

$$v_{n+1} = -ES \left(\omega_{\alpha} + \frac{\alpha^2}{4\omega_{\alpha}} \right) x_n + E \left(C - \frac{\alpha}{2\omega_{\alpha}} S \right) v_n + uI(x_{n+1}),$$

ahol a (4.19) rövidítések érvényesek, de ω_0 helyett $\omega_{\alpha} = \sqrt{\omega_0^2 - (\alpha/2)^2}$ -t véve. A leképezés inverze

$$x_{n+1} = \frac{1}{E} \left(C - \frac{\alpha}{2\omega_{\alpha}} S \right) x_n - \frac{S}{\omega_0 E} (v_n - uI(x_n)), \quad (9.8)$$

$$v_{n+1} = \frac{S}{E} \left(\omega_{\alpha} + \frac{\alpha^2}{4\omega_{\alpha}} \right) x_n + \frac{1}{E} \left(C + \frac{\alpha}{2\omega_{\alpha}} S \right) (v_n - uI(x_n)).$$

4.9. megoldás. A fixpont $x^* = I_0 E / (1 + E^2)$, $v^* = I_0 / (1 + E^2)$. A sajátértékek $\Lambda_{\pm} = \pm iE$, a határciklus spirális attraktor.

4.10. megoldás. A Δx_1 és Δx_2 élhosszúságú $P_0 P_1 P_2 P_3$ téglalap csúcsainak képei rendre a $P'_0 = (M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2))$, $P'_1 = (M_1(x_1 + \Delta x_1, x_2), M_2(x_1 + \Delta x_1, x_2))$, $P'_2 = (M_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2), M_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2))$ és a $P'_3 = (M_1(x_1, x_2 + \Delta x_2), M_2(x_1, x_2 + \Delta x_2))$ pont (l. 9.15. ábra). A P'_0 ponthoz rögzített koordináta-rendszerben kis élhosszak esetén a koordináták

$$P'_1 = \left(\frac{\partial M_1}{\partial x_1} \Delta x_1, \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \Delta x_1 \right),$$

$$P'_2 = \left(\frac{\partial M_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x_2} \Delta x_2, \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \right),$$

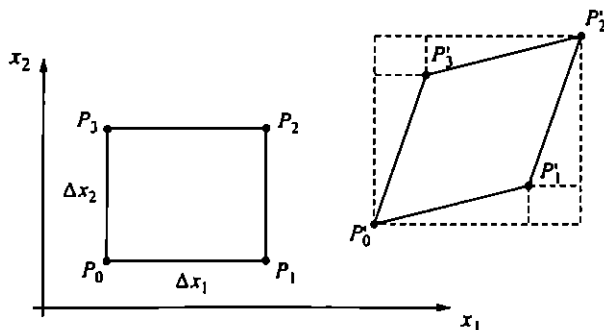
és

$$P'_3 = \left(\frac{\partial M_1}{\partial x_2} \Delta x_2, \frac{\partial M_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \right).$$

A paralelogramma területére a 9.15. ábra szerint

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial x_1} \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial M_1}{\partial x_2} \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \right) \Delta x_1 \Delta x_2,$$

ami a kiindulási téglalap $\Delta x_1 \Delta x_2$ területének J -szerese.



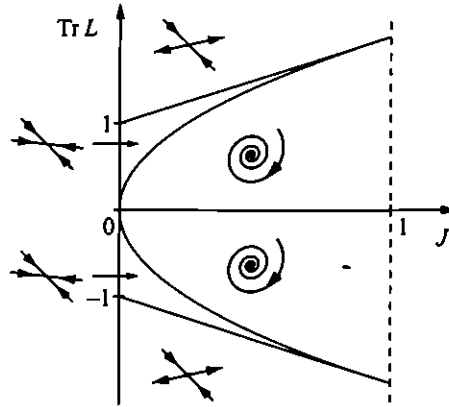
9.15. ábra. A Δx_1 és Δx_2 élhosszúságú téglalap és képe.

4.11. megoldás. A Jacobi-determináns $J = -1 - a$, ami a $-2 < a < -1$ tartományban esik 0 és 1 közé. A sajátértékek $\Lambda_{\pm} = -3/4 \pm \sqrt{25/16 + a}$. A fixpont hiperbolikus a $-3/2 < a < -1$ tartományban, csomópontattraktor, ha $-25/16 < a < -3/2$, és spirális attraktor, ha $-2 < a < -25/16$. A feladat stabilitási mátrixa formálisan megegyezik a 3.22. feladatival. Az eredmény mutatja, hogy ugyanaz a mátrix mennyire különböző jelentésű a leképezésben és a folytonos idejű dinamikában.

4.12. megoldás. Az általános L kétdimenziós lineáris leképezés sajátértékei

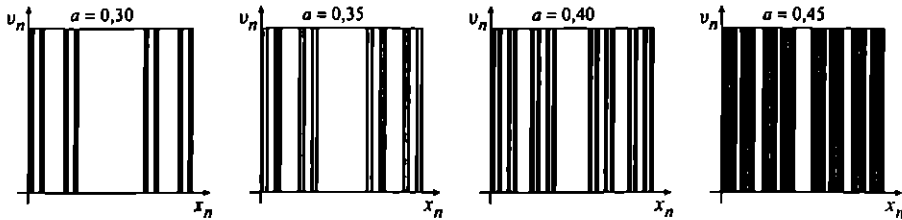
$$\Lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr } L \pm \sqrt{(\text{Tr } L)^2 - 4J}}{2}.$$

Ez valós, ha $|\text{Tr } L| > 2\sqrt{|J|}$. A $2\sqrt{|J|}$ parabolaív belsejében spirális attraktort találunk, mert itt a sajátértékek abszolút értéke $J < 1$. A parabolán kívül a sajátértékek valósak. Ha az $1 + J$ vonal fölött vagy a $-1 - J$ vonal alatt vagyunk, akkor a fixpont hiperbolikus, ha a vonalakon belül, de a parabolán kívül, akkor a fixpont csomópontattraktor (l. 9.16. ábra).



9.16. ábra. A fixpont jellege a stabilitási mátrix $\text{Tr } L$ nyoma és a J ($0 < J \leq 1$) Jacobi-determináns függvényében.

5.1. megoldás.



9.17. ábra. Négy különböző a paraméterű (0,30, 0,35, 0,4, 0,45) pékleképezés kaotikus attraktora. A a paraméter növelésekor a disszipáció csökken, az attraktor kinézete egyre kiterjedtebb, noha területe mindig zérus. A fraktáldimenzió rendre a $D_0 = 1,576, 1,660, 1,756, 1,868$ értékeket veszi fel.

5.2. megoldás. A kétszer iterált leképezés

$$B^2(x_n, v_n) = \begin{cases} (a^2 x_n, 4v_n), & \text{ha } v_n \leq 1/4, \\ (1 - a + a^2 x_n, 4(v_n - 1/4)), & \text{ha } 1/4 < v_n \leq 1/2, \\ (a + a^2(x_n - 1), 4(v_n - 1/2)), & \text{ha } 1/2 < v_n \leq 3/4, \\ (1 + a^2(x_n - 1), 4(v_n - 3/4)), & \text{ha } v_n > 3/4. \end{cases}$$

Innét látszik, hogy $P_1 = (1/(1+a), 1/3)$ az $1/4 < v_n \leq 1/2$, $P_2 = (a/(1+a), 2/3)$ pedig az $1/2 < v_n \leq 3/4$ tartományba eső fixpontja a kétszer iterált leképezésnek. Mivel ezek nem fixpontjai a B leképezésnek, csakis egy kettes ciklus pontjai lehetnek.

5.3. megoldás. A két hármasciklus:

$$\left(\frac{1}{A}\right) \xrightarrow{B_0} \left(\frac{c}{A}\right) \xrightarrow{B_0} \left(\frac{c^2}{A}\right) \xrightarrow{B_1} \left(\frac{1}{A}\right) \xrightarrow{B_0} \dots$$

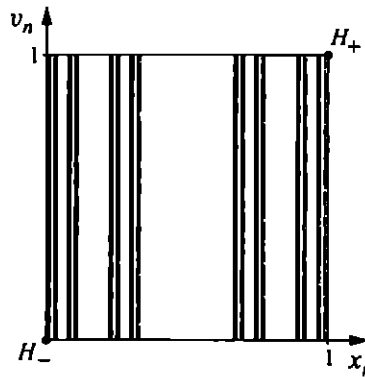
és

$$\left(\frac{(c+1)}{3/A}\right) \xrightarrow{B_0} \left(\frac{c(c+1)}{6/A}\right) \xrightarrow{B_1} \left(\frac{(c^2+1)}{5/A}\right) \xrightarrow{B_1} \left(\frac{(c+1)}{3/A}\right) \xrightarrow{B_0} \dots,$$

ahol $A = c^2 + c + 1$.

5.4. megoldás. Az m -szer iterált pékleképezésben a sebességtengely 2^m egyforma intervallumra bontható, s ezeken rendre különböző az új sebességértéket megadó függvénykapcsolat. A leképezés azt fejezi ki, hogy minden 2^{-m} hosszúságú sebességintervallum 2^m -szeresére nyúlik, és a teljes $(0, 1)$ hossza képződik. Az első, $v_n \leq 2^{-m}$ intervallumban ezért $v_{n+m} = 2^m v_n$, a szomszédosban $v_{n+m} = 2^m(v_n - 2^{-m})$, a k -adikban $v_{n+m} = 2^m(v_n - k2^{-m})$, és $k = 1, 2, \dots, 2^m$. Az m -szer iterált leképezés fixpontjának sebességértéke ezért a $v^* = 2^m v^* - k$ egyenlet megoldása. Ebből $v^* = k/(2^m - 1)$. (A kétszer iterált leképezésre nézve l. az 5.2. feladatot.) Mivel $k = 1, 2, \dots, 2^m$, összesen 2^m különböző fixpont létezik.

5.5. megoldás.



9.18. ábra. Az $a = b = 1/3$, $c = 2/3$ paraméterekhez tartozó aszimmetrikus pékleképezés kaotikus attraktora. A fraktáldimenzió $D_0 = 1 + \ln 2 / \ln 3$, mint a szimmetrikus esetben, de az eloszlás inhomogén: az attraktort alkotó Cantor-szálak a numerikus szimulálás szerint nem egyformán feketék. Az egyes szálakat különböző valószínűséggel látogatja a hosszú ideje az attraktoron mozgó pont.

5.6. megoldás. Az aszimmetrikus pékleképezés 2.7. ábrán bemutatott szerkesztési szabályának x tengelyre vett vetülete megfelel a 2.2.1. szakaszban tárgyalt kétskálájú Cantor-halmaz szerkesztésének, ha $r_1 = a$, $r_2 = b$. A teljes kaotikus attraktor Cantor-szálakból áll, melyek egyik parciális dimenziója 1 (l. 2.2.2. szakasz). Ezért a másik parciális dimenzió $D_0 - 1$, ami kielégíti a (2.9) egyenletet. A D_0 teljes fraktáldimenzió tehát az $a^{D_0-1} + b^{D_0-1} = 1$ egyenlet megoldása.

5.7. megoldás. $c = a/(a+b)$, a Jacobi-determináns ekkor $J = a+b$.

5.8. megoldás. Az alsó térfélen a terület-összehúzóási arány, vagyis a Jacobi-determináns a/c , a felsőn $b/(1-c)$. A második kifejezés az első reciproka, ha $a/c = (1-c)/b$. Megoldás csak akkor létezik, ha $ab < 1/4$, s ekkor két c érték is lehetséges. Az egyik térfél terület-összehúzóási aránya ilyenkor kisebb 1-nél, a másik nagyobb. Ennek ellenére a teljes fázistér fogat minden lépésben $(a+b) < 1$ -szeresére változik, s ezért a leképezés területösszehúzó, azaz disszipatív.

5.9. megoldás. A csomópontattraktor létezésének feltétele: $2E < |f'^*| < 1 + E^2$. Ha nem valósak a sajátértékek ($|f'^*| < 2E$), akkor minden esetben spirális attraktort kapunk. A lökdösött oszcillátor fixpontjainak osztályozását a 9.1. táblázat foglalja össze.

9.1. táblázat. A lökdösött oszcillátor fixpontjainak stabilitási tulajdonságai az amplitúdófüggvény fixpontban képzett deriváltjának különböző tartományaiiban.

$ f'^* < 2E$	$2E < f'^* < 1 + E^2$	$1 + E^2 < f'^* $
spirális attraktor	csomópontattraktor	hiperbolikus pont

5.10. megoldás. A leképezés:

$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + 1 - a v_n.$$

Egyetlen fixpont létezik, ennek koordinátája:

$$x^* = v^* = \frac{1}{1 + E^2 + a}.$$

$f'^* = -a$, tehát $a > 1 + E^2$ esetén hiperbolikus a fixpont, a $2E < a < 1 + E^2$ tartományban csomópontattraktor, egyébként pedig ($a < 2E$) spirális attraktor. Mivel f lineáris, a leképezés is az, következésképpen *káosz nem alakulhat ki*. A sajátértékek:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4E^2}}{2}.$$

Ezért $a > 1 + E^2$ esetén az egész fázistérben ugyanaz a vonzó és a taszító irány, mint a fixpont körül, azaz a sokaságok teljes egyenesek. Egyenletüket a fixpont koordinátái és a sajátvektorok ismeretében az (5.33) képlet adja meg.

5.11. megoldás. Ebben az esetben a lökés nagysága állandó, független a rendszer mozgás-állapotától, és $f^* \equiv 0$. A sajátértékek minden esetben komplexek ($f^* = 0 < 2E$), a fixpont spirális attraktor, koordinátái pedig:

$$x^* = v^* = \frac{1}{1 + E^2}.$$

A rendszer hasonlóan viselkedik a folytonosan gerjesztett harmonikus oszcillátorhoz, ahol a kezdeti tranziensek csillapodása után a mozgás mindig „beáll” a gerjesztéssel megegyező frekvenciájú periodikus mozgásra, határciklusra.

5.12. megoldás. Kettes ciklusról akkor beszélhetünk, ha a fázistérbeli pontot két iterálás után helyben hagyja a leképezés: $K^2(x_i^*, v_i^*) \equiv K(K(x_i^*, v_i^*)) = (x_i^*, v_i^*)$. A lökdösött oszcillátor (5.19) leképezésének kétszeres iteráltja:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= v_{n+1} = -E^2 x_n + f(v_n), \\ v_{n+2} &= -E^2 x_{n+1} + f(v_{n+1}) = -E^2 v_n + f(-E^2 x_n + f(v_n)). \end{aligned}$$

A kettes ciklusok pontjait meghatározó egyenletrendszert az $x_i^* \equiv x_n = x_{n+2}$, $v_i^* \equiv v_n = v_{n+2}$ helyettesítésekkel kapjuk meg:

$$\begin{aligned} x_i^* &= -E^2 x_i^* + f(v_i^*), \\ v_i^* &= -E^2 v_i^* + f(-E^2 x_i^* + f(v_i^*)) = -E^2 v_i^* + f(x_i^*). \end{aligned}$$

Ebből két egymástól független egyváltozós egyenletre jutunk:

$$x_i^*(1 + E^2) = f\left(\frac{f(x_i^*)}{1 + E^2}\right), \quad v_i^*(1 + E^2) = f\left(\frac{f(v_i^*)}{1 + E^2}\right).$$

A két egyenlet azonos alakú, de nem feltétlenül következik az, hogy a kettes ciklus pontjainak x és v koordinátái megegyeznének egymással. A konkrét $f(x)$ függvényalakkal több megoldást is kaphatunk x_i^* -ra, illetve v_i^* -ra.

5.13. megoldás. L. 9.19. ábra.

5.14. megoldás. Az általános egyenletben (l. 5.12. feladat) két $f(x)$ függvény van egymásba ágyazva. Mivel a signumfüggvény is két értéket vehet fel, ezért összesen négy különböző módon lehet az $f = ax_i^* + 1$ és az $f = ax_i^* - 1$ kifejezéseket behelyettesíteni. Ha a „belső” függvénynek az $f = ax_i^* - 1$, a „külsőnek” pedig az $f = ax_i^* + 1$ kifejezést vesszük, akkor az

$$x_1^*(1 + E^2) = a \frac{ax_1^* - 1}{1 + E^2} + 1$$

egyenlethez jutunk. Ennek megoldása:

$$x_1^* = \frac{1}{a + 1 + E^2}.$$

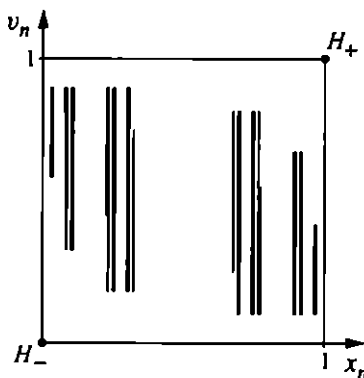
Mivel a sebességkoordinátára vonatkozó egyenletben az f függvények sorrendje fordított, ezért

$$v_1^*(1 + E^2) = a \frac{av_1^* + 1}{1 + E^2} - 1.$$

Ebből látható, hogy $x_1^* = -v_1^*$. Ha fordított sorrendben helyettesítjük be a kifejezéseket, akkor a kettes ciklus másik pontját kapjuk:

$$x_2^* = -x_1^* (= -v_2^*).$$

(Ha f helyére mindkét esetben az $f_i = ax_i^* + 1$ vagy az $f_i = ax_i^* - 1$ kifejezést helyettesítjük be, akkor a már ismert fixpontokat kapjuk vissza (l. (5.35)), amelyek egyúttal nyilvánvalóan kettes ciklusok is.)



9.19. ábra. Az $a = 1,8$ -as megnyújtási arányú pékleképezés kaotikus attraktora. Vegyük észre, hogy az attraktor hasonlít az 5.21. ábra fűrészfogattraktorára, csak itt minden egyenes szakasz függőleges.

5.15. megoldás. Az előző feladat jelölését használva, a P_1 pont alapágának egyenlete

$$v_n = v_{1+}(x_n) = \Lambda_+(x_n - x_1^*) - x_1^*, \quad (9.9)$$

ahol Λ_+ -t az (5.29) kifejezés adja az $f'^* = a$ helyettesítéssel. A felső alapág egyenlete ugyanez, csak x_1^* helyett ellentettje szerepel benne. Ennek az alapágának a v_n tengellyel vett metszete a $(0, x_1^*(\Lambda_+ + 1))$ pont, ami az $(x_1^*(\Lambda_+ + 1), ax_1^*(\Lambda_+ + 1) - 1)$ pontba képződik. A sajátérték és az x_1^* koordináta behelyettesítésével ellenőrizhető, hogy a képpont kielégíti a (9.9) egyenletet. A P_1 pont alapágának végpontjai tehát

$$(0, -x_1^*(1 + \Lambda_+)), \quad (x_1^*(1 + \Lambda_+), ax_1^*(1 + \Lambda_+) - 1),$$

a P_2 pont alapága végpontjai pedig ezek origóra vett tükörképei.

5.16. megoldás. Az (5.33) egyenlet alapján az alapágak egyenlete

$$v_n = v_+(x_n) = \Lambda_+(x_n - x_\pm^*) + x_\pm^*,$$

ahol Λ_+ -t az (5.29) kifejezés adja az $f'' = a$ helyettesítéssel. H_- alapága a negatív, H_+ -é a pozitív x_n értékekhez tartozó félsíkon értelmezett félegyenes. A v_n tengelyre eső végpontok: $(0, x_\pm^*(1 - \Lambda_+))$.

5.17. megoldás. A H_+ pont alapágának egyenlete (l. (5.33))

$$v_n = v_+(x_n) = \Lambda_+(x_n - x_+^*) + x_+^*, \quad (9.10)$$

ahol x_+^* -t az (5.38) összefüggés adja, Λ_+ pedig az (5.29) kifejezésből kapható az $f'' = -a$ helyettesítéssel. Mivel Λ_+ definíció szerint a nagyobb abszolút értékű megoldás, a gyökjel előtt a negatív előjelet kell venni, Λ_+ tehát negatív. Az alapágnak a v_n tengellyel vett metszete a $(0, x_+^*(1 - \Lambda_+))$ pont, ami az $(x_+^*(1 - \Lambda_+), 1 - ax_+^*(1 - \Lambda_+))$ pontba képződik. A sajátérték és az x_+^* koordináta behelyettesítésével ellenőrizhető, hogy a képpont kielégíti a (9.10) egyenletet. A H_+ pont alapágának végpontjai tehát

$$(0, x_+^*(1 - \Lambda_+)), \quad (x_+^*(1 - \Lambda_+), 1 - ax_+^*(1 - \Lambda_+)).$$

5.18. megoldás. L. 9.20. ábra.

5.19. megoldás. A számítás a fűrészfogatraktor kettes ciklusáéhoz hasonlóan történik (l. 5.14. feladat). A végeredmény:

$$P_1 = (x_1^*, v_1^*) = \left(\frac{1 + E^2 + a}{(1 + E^2)^2 + a^2}, \frac{1 + E^2 + a}{(1 + E^2)^2 - a^2} \right),$$

$$P_2 = (x_2^*, v_2^*) = \left(\frac{1 + E^2 + a}{(1 + E^2)^2 - a^2}, \frac{1 + E^2 + a}{(1 + E^2)^2 + a^2} \right).$$

A P_1 pontban az (5.28) stabilitási mátrix az $f'' = -a$ helyettesítéssel, a P_2 -ben pedig az $f'' = a$ helyettesítéssel veendő. A kétszer iterált leképezés stabilitási mátrixa ezek szorzata. A P_1 pontban ez a mátrix

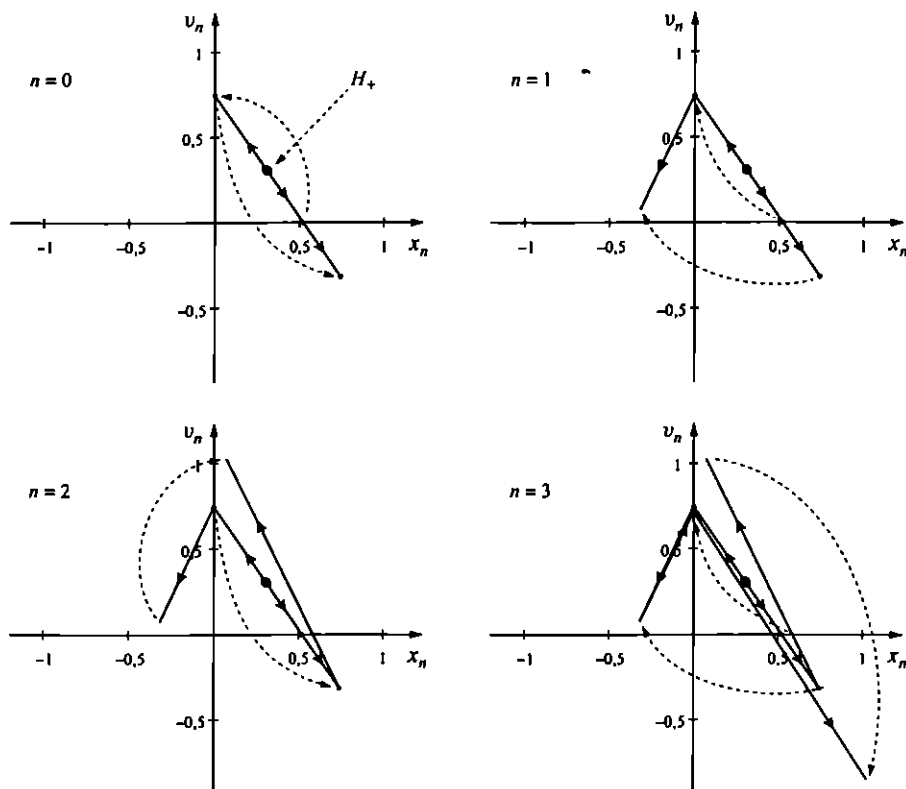
$$\begin{pmatrix} -E^2 & -a \\ -aE^2 & -a^2 - E^2 \end{pmatrix}.$$

A P_2 pontban a kétszeres leképezés stabilitási mátrixa ugyanez a mátrix, csak benne $-a$ helyett mindenütt a veendő. Mindkét mátrix Jacobi-determinánsa E^4 , azaz az egy lépésre eső Jacobi-determináns négyzete. A sajátértékek

$$\Lambda_\pm^{(2)} = \frac{-a^2 - 2E^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2E^2}}{2}.$$

A sajátérték nem függ a előjelétől, összhangban azzal, hogy a ciklus stabilitási tulajdonságainak függetlennek kell lennie attól, hogy melyik cikluspontban vizsgáljuk.

A sajátvektorok $\mathbf{u}_{\pm} = (1, -(\Lambda_{\pm} + E^2)/a)$, különböznek mindkét fixpont (5.32) sajátvektoraitól. A $\Lambda_{\pm}^{(2)}$ sajátértékek két iterációs lépésre vonatkoznak. Ezért ezek egy lépésre vetített értéke, azaz abszolút értékük négyzetgyöke hasonlítandó össze a fixpontok Λ_{\pm} (1. (5.29)) sajátértékeivel. Egyezéstről itt sincs szó.

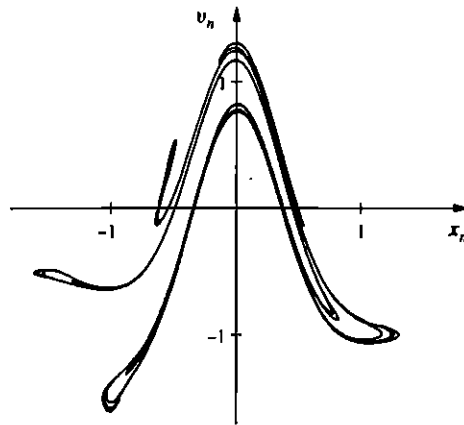


9.20. ábra. A H_+ instabil sokasága alapágának képei három, egymás utáni iterálás hatására, a végpontok és töréspontok elmozdulását szaggatott vonallal jelölve.

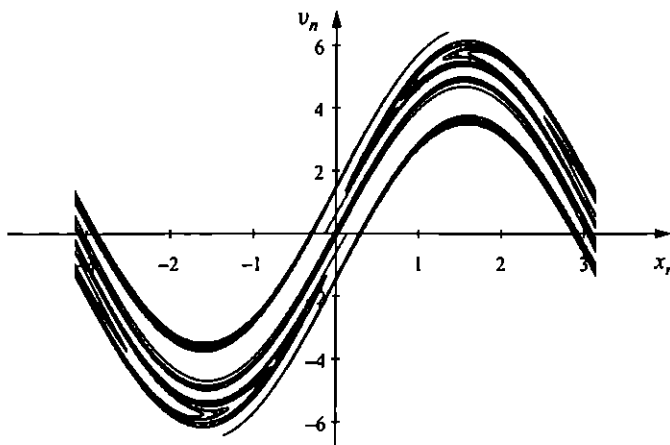
5.20. megoldás. L. 9.21. ábra

5.21. megoldás. L. 9.22. ábra.

5.22. megoldás. Az aszimmetrikus pékleképezésben a v irányban az egész egységnyezetet átszelő szakaszok éppen kétszeresükre nyúlnak, ezért $h = \ln 2$. Az (5.34) leképezésben az instabil irányban fekvő szakaszok megnyúlási aránya az (5.29) összefüggéssel megadott Λ_+ sajátérték, ahol $f'^* = a$. Ezért $h = \ln \Lambda_+$.



9.21. ábra. Az $f(x) = a(e^{-4x^2} - 1) + 1$ harang alakú amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktora ($a = 2$, $E = 0,7$).



9.22. ábra. A $f(x) = a \sin x$ amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktora ($a = 5$, $E = 0,7$).

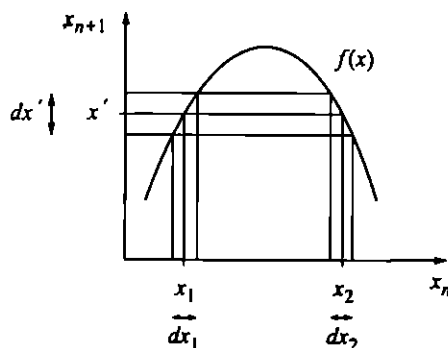
5.23. megoldás. A kezdeti eloszlás értékei az $(1 - \gamma/2, 1 + \gamma/2)$ intervallumba esnek. Egy lépés után az x intervallum a -szorosára csökken, a függvényértékek mindkét a szélességű fázistérbeli oszlopban $1/(2a)$ -szorosukra nyúlnak, azaz a bal szélén $(1 - \gamma/2)/(2a)$, a jobb szélén pedig $(1 + \gamma/2)/(2a)$ értéket vesznek fel (közöttük lineárisan változnak). Az n lépés után kialakuló, a^n vastagságú oszlopokon a függ-

vényértékek $(1 - \gamma/2)/(2a)^n$ és $(1 + \gamma/2)/(2a)^n$ között változnak. Amikor n nagyon nagy, az oszlopok olyan keskenyek, hogy az oszlopokon belüli eloszlás már nem bontható fel. Ilyenkor csak az egyes oszlopok teljes súlya, az eloszlás oszlopokon belüli integrálja a lényeges. Ez az $1/(2a)^n$ középérték és a vastagság szorzata, azaz 2^{-n} , éppúgy, mint a homogén kezdeti eloszlásból indulva.

5.24. megoldás. Az $1/2$ -nél kisebb sebességtartományban érvényes, $1 - \gamma/2$ és 1 közé eső eloszlásszakasz a v irányban kétszeresére nyúlik, és a $0 < x < a$ oszlopra képződik. Annak a valószínűsége, hogy az oszlopba eső bármelyik pont sebessége v értéket vegyen fel, $(1 - \gamma/2)/2 + v\gamma/4$. Hasonlóan a jobb oldali sávban a valószínűség-eloszlás $1/2 + v\gamma/4$. Annak a valószínűsége, hogy a sebesség egy lépés után valahol v legyen, a két oszlopra érvényes eloszlás összege, azaz $1 - \gamma/4 + v\gamma/2$. Az eloszlás meredeksége a v irányban tehát átlagosan feleződik. Sok lépés után az eloszlás ezért függetlenné válik a sebességtől. Az x irányú egyenletlenségek az előző feladatban bemutatott mechanizmus szerint válnak az $n \rightarrow \infty$ határesetben lényegtelené.

5.25. megoldás. A $0 < x < a$ tartományban $P_1 = g(x/a, v/2)/(2a)$, az $1 - a < x < 1$ tartományban pedig $P_1 = g(1 + (x - 1)/a, (1 + v)/2)/(2a)$.

5.26. megoldás. Mivel az eloszlásnak két ága van, két pontból juthatunk ugyanabba a képpontba, azaz minden pontnak két előképe is lehet (a leképezés ezért nem fordítható meg). Legyen az $(n + 1)$ -edik lépésben kiválasztott x' pont két előképe x_1 és x_2 (9.23. ábra).



9.23. ábra. Az $f(x)$ egydimenziós leképezés az x' pont és két előképe környezetében.

A képpont körüli kis dx' hosszúságú intervallumon lévő $P_{n+1}(x')dx'$ részecske-számnak meg kell egyeznie az x_1 és x_2 pontok körüli kis dx_1, dx_2 hosszú intervallumokon lévő részecskék $P_n(x_1)dx_1 + P_n(x_2)dx_2$ számával. Itt dx_1, dx_2 természetesen a dx' intervallum két előképének hossza, s ezért dx'/dx_1 a leképező függvény deriváltjának nagysága az x_1 helyen, dx'/dx_2 pedig ugyanez a mennyiség az x_2 helyen.

Ezért tehát $P_n(x_1)dx'/|f'(x_1)| + P_n(x_2)dx'/|f'(x_2)| = P_{n+1}(x')dx'$, amiből az $(n + 1)$ -edik lépés utáni valószínűség-eloszlás

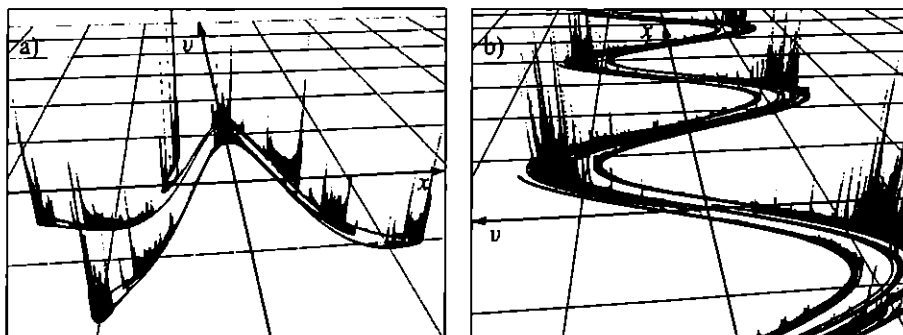
$$P_{n+1}(x') = \sum_{x=f^{-1}(x')} \frac{P_n(x)}{|f'(x)|}$$

Az összegzés mindazokra az x értékekre történik, melyek az x' előképei. Ebben a formában az egyenlet akárhány ágú leképező függvényre is érvényes. A természetes eloszlásra $P^* \equiv P_n = P_{n+1}$. Az állandó meredekségű a), b) leképezésekben a természetes eloszlás sűrűsége állandó: $P^* = \text{konstans}$, az eloszlás egyenletes. A c) parabola-leképezésben az eloszlás szimmetriáját feltételezve a

$$P^*(x') = 2 \frac{P^* \left(\sqrt{(1-x')/2} \right)}{4\sqrt{(1-x')/2}}$$

összefüggésre jutunk. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ennek megoldása $P^*(x') \sim (1-x'^2)^{-1/2}$. A természetes eloszlás itt helyfüggő. Az egydimenziós leképezések a kétdimenziós leképezések kaotikus attraktorai instabil sokasága mentén kialakuló viselkedést modellezik. A példák jól mutatják, hogy a természetes eloszlás az instabil irányban folytonos.

5.27. megoldás.



9.24. ábra. A harang- (a) és a szinuszos amplitúdófüggvénnyel (b) lökdösött oszcillátor kaotikus attraktorának természetes eloszlása. A paraméterek ugyanazok, mint az 5.20., 5.21. feladatban. Ezek az eloszlások láthatók más nézetből a XV. és XVI. színes táblán.

5.28. megoldás. A 2.14. feladathoz képest most az az eltérés, hogy az intervallumhosszak az n -edik lépésben $l_m = a^m b^{n-m}$ alakúak. Ezért az $m^* = cn$ értékhez tartozó l_{m^*} -gal kell a dimenziót számolni, amiből

$$D_1^{(2)} = \frac{c \ln c + (1-c) \ln(1-c)}{c \ln a + (1-c) \ln b}$$

5.29. megoldás. A $p_m = c^m(1-c)^{n-m}$ valószínűségű intervallumban a megnyúlási arány az y irányban n lépés alatt $c^{-m}(1-c)^{m-n}$. A lokális Ljapunov-exponensek ezért $m/n \ln c + (n-m)/n \ln(1-c)$ alakúak. Átlaguk

$$\bar{\lambda} = - \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{m}{n} \ln c + \frac{n-m}{n} \ln(1-c) \right) c^m (1-c)^{n-m}.$$

A c és $(1-c)$ paramétereket független változóknak tekintve, ez kifejezhető a

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} c^m (1-c)^{n-m}$$

binomiális sor deriváltjaival:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= -c \ln c \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial c} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} c^m (1-c)^{n-m} \\ &\quad - (1-c) \ln(1-c) \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial(1-c)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} c^m (1-c)^{n-m}. \end{aligned}$$

Mivel a binomiális sor értéke $(c + (1-c))^n = 1$, a deriváltak n -et adnak, és visszakapjuk (5.70)-et.

5.30. megoldás. A lokális Jacobi-determináns a bal oldali a szélességű fázistérszlopban a/c , a jobb oldaliban $b/(1-c)$. Az átlaguk $\overline{\ln J} = c \ln(a/c) + (1-c) \ln(b/(1-c))$, ami természetesen az (5.70) és (5.71) Ljapunov-exponensek összege.

5.31. megoldás. Az (5.34) leképezés szakaszonként lineáris, és az (5.28) stabilitási mátrix bármely pontban ugyanakkora. A lokális Ljapunov-exponensek az (5.29) képletből az $f^{**} = a$ helyettesítéssel kapott Λ_{\pm} értékek logaritmusai, a fázistérbeli helytől függetlenül, és ezért egyben az átlagértékek is:

$$\bar{\lambda} = \ln \Lambda_+, \quad \bar{\lambda}' = \ln \Lambda_-.$$

5.32. megoldás. A Kaplan–Yorke-összefüggés szerint

$$D_0 = D_1 = 1 + \frac{\ln \Lambda_+}{|\ln \Lambda_-|},$$

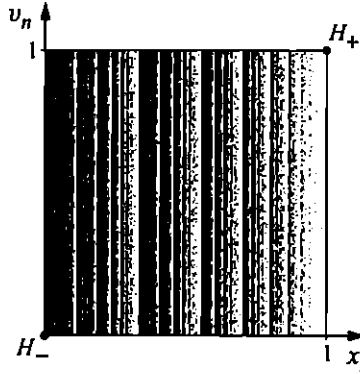
ahol Λ_{\pm} az (5.29) képletből az $f^{**} = a$ helyettesítéssel kapott sajátértékek. A két dimenzió azért egyezik meg, mert a lokális Ljapunov-exponensek helytől függetlenek. Az 5.21. ábra paramétereivel $\Lambda_+ = 1,532$, $\Lambda_- = 0,418$, s ezzel $D_0 = D_1 = 1,489$.

5.33. megoldás. A $c = 1/2 + \delta$ jelöléssel a $|\delta| \ll 1$ esetben azt kapjuk, hogy

$$-\overline{\ln J} = -c \ln((1-c)/c) - (1-c) \ln(c/(1-c)) \approx 4\delta^2,$$

$$D_1^{(2)} = \frac{c \ln c + (1-c) \ln(1-c)}{c \ln(1-c) + (1-c) \ln c} \approx 1 - \frac{4\delta^2}{\ln 2}.$$

Bármilyen előjelű is a δ aszimmetriaparaméter, a fázistér fogat átlagosan csökken, a rendszer disszipatív, a parciális információs dimenzió mindig kisebb 1-nél (a teljes információs dimenzió kisebb 2-nél), annak ellenére, hogy az attraktor kitölti a teljes fázistert: $D_0 = 2$ (l. az 5.6. feladat megoldása, ahol $a = 1 - c$, $b = c$).



9.25. ábra. Az $a = 1/3$, $b = 2/3$, $c = 2/3$ paraméterekhez tartozó aszimmetrikus pékleképezés kaotikus attraktora. A fraktáldimenzió $D_0 = 2$, de az eloszlás inhomogén. Az egyes szálakat különböző valószínűséggel látogatja az attraktoron mozgó pont, de még hosszabb idejű mozgást vizsgálva, a fehér tartományok is befekednének.

5.34. megoldás. Az adatokkal $q_c = \kappa^2 \alpha / (g R \pi) \approx 10^{-3}$ kg/s, ami óránként 3,6 liternyi esőt jelent. A $q = 2q_c$ értéknél az (5.99) frekvencia $\omega = \kappa$, tehát a forgás periódusideje $2\pi / \kappa = 62,8$ s, vagyis egy perc. Az amplitúdók: $A^* = B^* = \kappa \alpha / (g R \pi) \approx 10^{-2}$ kg.

5.35. megoldás. Az origó körül linearizált egyenletek

$$\Delta \dot{x} = \sigma(\Delta y - \Delta x), \quad \Delta \dot{y} = r \Delta x - \Delta y, \quad \Delta \dot{z} = -\Delta z.$$

A stabilitási mátrix tehát

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A sajátérték-egyenlet $(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma(1 - r)) = 0$. Ebből $\lambda_3 = -1$ és

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 - \sigma \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2},$$

amiből látszik, hogy minden sajátérték negatív, ha $r < 1$. Mivel $r > 1$ -re az egyik sajátérték pozitív, ebben a tartományban az origó instabil, hiperbolikus.

5.36. megoldás. A nemtriviális fixpont körül linearizált egyenletek

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \sigma(\Delta y - \Delta x), & \Delta \dot{y} &= r\Delta x - \Delta y - z^*\Delta x - x^*\Delta z, \\ \Delta \dot{z} &= -\Delta z + y^*\Delta x + x^*\Delta y.\end{aligned}$$

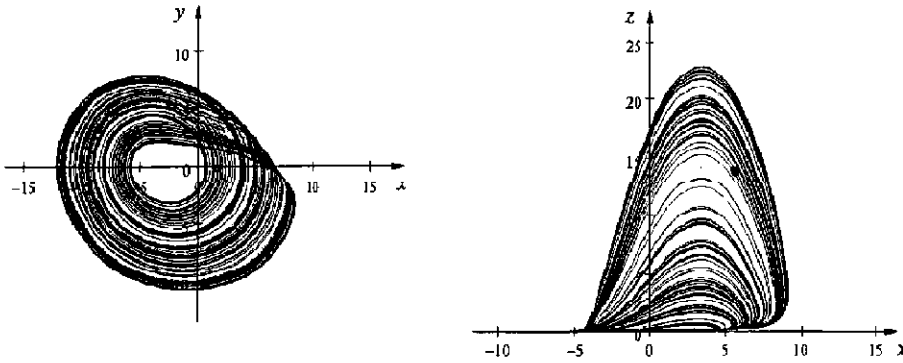
A stabilitási mátrix tehát

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & -x^* \\ x^* & x^* & -1 \end{pmatrix}.$$

A sajátérték-egyenlet $\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 2) + \lambda(\sigma + r) + 2\sigma(r - 1) = 0$, ami csak az $r > 1$ értékekre érvényes. Az $r_c = 1$ bifurkációs pont fölött mindhárom sajátérték valós és negatív, a nemtriviális fixpont stabil. Az r paraméter növelésekor két sajátérték egyszer csak komplexszé válik. A stabilitásvesztés r'_c pontjában e sajátértékek valós része eltűnik, és $r > r'_c$ -re pozitív lesz. Az r'_c értéknél ezért a komplex gyökök $\lambda = \pm i\omega_c$ alakúak. A sajátérték-egyenletbe behelyettesítve, a valós és képzetes részeket csoportosítva látszik, hogy ez csak $\sigma > 2$ esetén lehetséges, mégpedig akkor, ha az r paraméter az

$$r'_c = \frac{\sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}$$

értéket veszi fel. (A sajátértékek képzetes részére ekkor fennáll, hogy $\omega_c^2 = 2\sigma \times (\sigma + 1)/(\sigma - 2)$.) A nemtriviális fixpont tehát az $1 < r < r'_c$ tartományban stabil. A $\sigma = 10$ paraméternél a stabilitásvesztés az $r'_c = 17,5$ értéknél következik be.

5.37. megoldás.

9.26. ábra. A Rössler-modell kaotikus attraktora az $a = b = 0,2$, $c = 5,7$ paraméterek mellett.

6.1. megoldás. Egy 2×2 -es valós mátrix sajátértékei kifejezhetők a mátrix nyomával és determinánsával. Az utóbbi azonban a területtartás miatt egységnyi. A stabilitást tehát egyedül az L mátrix nyoma határozza meg. A sajátértékek $\Lambda_{\pm} = \{\text{Tr } L \pm [(\text{Tr } L)^2 - 4]^{1/2}\}/2$, és szorzatuk mindig 1. Ha $|\text{Tr } L| < 2$, akkor a sajátértékek komplexek, de abszolút értékük egységnyi. A periodikus mozgás ilyenkor stabil, a fixpont elliptikus. A $|\text{Tr } L| > 2$ esetben a periodikus mozgás instabil, a fixpont hiperbolikus.

6.2. megoldás. Az m hosszúságú instabil ciklusok száma éppúgy, mint a disszipatív esetben, most is 2^m . Ugyanez adódik a függőleges vonaldarabok megnyúlási arányából is (1. (5.51)). A topologikus entrópia ezért $h = \ln 2$.

6.3. megoldás. A $v_n = a$ vonal alatti pontpárok függőleges (vízszintes) távolsága egy lépésben $1/a$ -szorosra nő (a -szorosra csökken). A vonal feletti pontpárokra ugyanez az arány $1/(1-a)$. Az egyenletes eloszlás miatt az első típusú megnyúlás az esetek a -ad részében, a második az esetek $(1-a)$ -ad részében fordul elő. Ezért a megnyúlási arányok logaritmusának, azaz a lokális Ljapunov-exponenseknek az átlaga $\bar{\lambda} = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a)$. Hasonlóan, a negatív átlagos exponens $\bar{\lambda}' = a \ln a + (1-a) \ln(1-a) = -\bar{\lambda}$.

Az inverz leképezés:

$$\begin{aligned} (x_{n+1}, v_{n+1}) &= \left(\frac{x_n}{a}, a v_n \right), & \text{ha } x_n \leq a, \\ (x_{n+1}, v_{n+1}) &= \left(1 + \frac{x_n - 1}{1-a}, 1 + (1-a)(v_n - 1) \right), & \text{ha } x_n > a. \end{aligned}$$

Az $x \rightarrow v$, $v \rightarrow x$ cserével ez az eredetivel ekvivalenssé válik, aminek egyik következménye, hogy a két leképezés átlagos Ljapunov-exponensei is azonosak.

6.4. megoldás. Az origó hiperbolikus a $\Lambda_{\pm} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ sajátértékekkel. Mivel a leképezés lineáris, ezek jellemzik bármely pont környezetét is. A természetes eloszlás egyenletes (9.27. ábra.), ezért az átlagos Ljapunov-exponensek a sajátértékek logaritmusai: $\bar{\lambda} = \ln((3 + \sqrt{5})/2) = 0,962 = -\bar{\lambda}'$. Az instabil sokaság egyenes vonalakból áll, melyek iránytangense $(1, (\sqrt{5} - 1)/2)$. Tetszőleges vonaldarab előbb-utóbb ebben az irányban nyúlik tovább, s hossza minden lépésben a Λ_+ tényezővel szorozódik. A topologikus entrópia ezen szám logaritmus, azaz $h = \bar{\lambda}$.

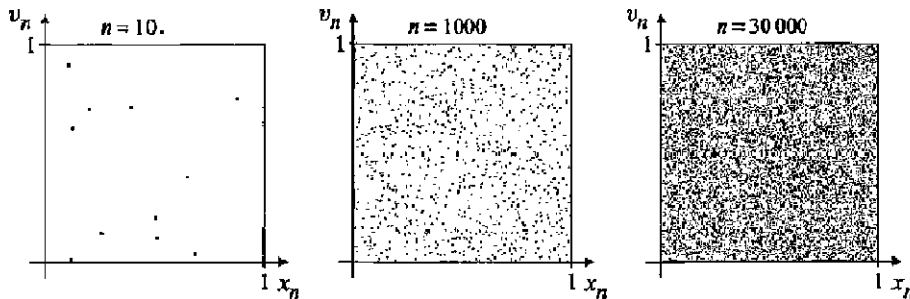
6.5. megoldás. $x_{n+1} = x_n + v_{n+1}$, $v_{n+1} = v_n + f(x_n)$.

6.6. megoldás. Lineáris csillapítás esetén a sebesség időben exponenciálisan csökken, az n -edik lökés után tehát $v(t) = v_n \exp(-\alpha t)$, ahol α a súrlódási együltható, és $t < T$. Az elmozdulás ennek megfelelően $x(t) = x_n + v_n(1 - \exp(-\alpha t))/\alpha$. Az $E = \exp(-\alpha T/2)$ jelöléssel, a lökés utáni állapotokat összekapcsoló leképezés

$$x_{n+1} = x_n + v_n \frac{(1 - E^2)}{\alpha}, \quad v_{n+1} = v_n E^2 + f(x_{n+1}),$$

a lökés előttiekre pedig

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \frac{(E^{-2} - 1)}{\alpha}, \quad v_{n+1} = (v_n + f(x_n))E^2.$$



9.27. ábra. A macskaleképezés egy trajektóriájának pontjai a fázistérben. A pontok szemmel láthatóan ismét egyenletesen járják be az egységnégyzetet. A kezdőfeltétel és az iterációk száma ugyanaz, mint a pékleképezés 6.2. ábráján.

6.7. megoldás. A sajátvektorok $(1, (a \pm \sqrt{4a + a^2})/2)$ irányúak, ahol a pozitív előjel az instabil sokaságnak felel meg.

6.8. megoldás. A kétszer iterált standard leképezés

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= x_n + 2v_n + a \sin(x_n + v_n), \\v_{n+2} &= v_n + a \sin(x_n + v_n) + a \sin x_{n+2}.\end{aligned}\quad (9.11)$$

Mivel a pont mozog, de sebessége két lépés után ugyanakkora, ezért a kettes ciklus létezésének feltétele az, hogy létezzen olyan $x_n \equiv x^*$, $v_n \equiv v^*$ pont, melyre $x_{n+2} = x^* + 2\pi$ és $v_{n+2} = v^* = \pi$ legyen. A periodicitás miatt ez ugyanis azt jelenti, hogy (x^*, v^*) a kétszer iterált leképezés fixpontja. Mind a $(0, \pi)$, mind a (π, π) pont kielégíti ezt a feltételt. Az előbbi körül linearizált leképezés mátrixa

$$L = \begin{pmatrix} 1 - a & 2 - a \\ -a^2 & 1 + a - a^2 \end{pmatrix}.\quad (9.12)$$

A kettes ciklus instabil, ha $2 - a^2 < -2$, azaz, ha $a > 2$.

6.9. megoldás. Az (u_n, w_n) sebességkomponensek a vízszintes és függőleges összetevőkkel így fejezhetők ki (6.12. ábra):

$$u_n = v_{x_n} \cos \alpha + v_{y_n} \sin \alpha, \quad w_n = -v_{x_n} \sin \alpha + v_{y_n} \cos \alpha, \quad (9.13)$$

és fordítva:

$$v_{x_n} = u_n \cos \alpha - w_n \sin \alpha, \quad v_{y_n} = u_n \sin \alpha + w_n \cos \alpha. \quad (9.14)$$

Ezzel a (6.16) repülési idő

$$gt_n = 2 \frac{w_n}{\cos \alpha}. \quad (9.15)$$

A következő ütközés előtti sebességek (6.15) alapján:

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n - gt_n \sin \alpha = u_n - 2w_n \tan \alpha, \quad \tilde{w}_{n+1} = w_n - gt_n \cos \alpha = -w_n. \quad (9.16)$$

Mivel az ütközéskor w előjelet vált, míg u nem változik, az elpattanási sebességeket (6.17) adja.

6.10. megoldás. A kiindulási u_n, w_n sebességekkel a repülési időben szereplő kombináció (9.13) alapján $v_{xn} \operatorname{tg} \alpha + v_{yn} = (u_n \sin(2\alpha) + w_n \cos(2\alpha)) / \cos \alpha$. A becsapódáskor érvényes sebességet az új lejtőre merőleges és azzal párhuzamos komponensekben adjuk meg (ami annak felel meg, hogy (9.13)-ban α helyett $-\alpha$ -t veszünk, s az u komponens előjelét azután ellentettjére változtatjuk). Ezért (6.15) alapján az ütközés előtti sebességek

$$\bar{u}_{n+1} = -v_{xn} \cos \alpha + (v_{yn} - g t_n) \sin \alpha, \quad \bar{w}_{n+1} = v_{xn} \sin \alpha + (v_{yn} - g t_n) \cos \alpha. \quad (9.17)$$

A kiindulási v_{xn}, v_{yn} sebességeket az eredeti lejtőnek megfelelő (9.14) felbontással kifejezve, és a repülési időt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+1} &= -u_n + w_n \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{D_n} \sin \alpha, \\ \bar{w}_{n+1} &= -\sqrt{D_n} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Az ütközés hatására $u_{n+1} = \bar{u}_{n+1}$, $w_{n+1} = -\bar{w}_{n+1}$, amivel (6.22)-re jutunk.

6.11. megoldás. Mindez az energiamegmaradás (6.21) alakjából következik. Tekintetbe véve, hogy a helyzeti energia csak pozitív lehet, dimenziótlánítás után $u_n^2 + w_n^2 \equiv u_n^2 + z_n \leq 1$.

6.12. megoldás. A fixpont stabilitási mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2} \sin(4\alpha) \operatorname{tg} \alpha & \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{z^*}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin(4\alpha) \operatorname{tg} \alpha\right) \\ \sqrt{z^*} \sin(4\alpha) & -1 - \frac{1}{2} \sin(4\alpha) \operatorname{tg} \alpha \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

6.13. megoldás. A (6.25) leképezés ebben az esetben a z változóra azt adja, hogy $z_{n+1} = 1 - z_n$. A lejtőre merőleges sebességkomponens tehát lecsatolódik a lejtővel párhuzamos komponensről, s egyszerű lineáris szabályt követ, ezért a mozgás nem lehet kaotikus.

6.14. megoldás. Az elliptikus fixpont Λ_{\pm} sajátértékei egységnyi abszolút értékű komplex számok (l. 4.2 táblázat), $\Lambda_{\pm} = \exp(\pm i \phi)$, ahol ϕ a komplex szám fázisa. Az iterált pont szögelfordulása egy lépés alatt ϕ . A csavarási szám tehát $\nu = \phi / (2\pi)$, azaz a sajátérték fázisával arányos.

Az ω_0 sajátfrekvenciájú stabil állapot körül T periódussal szinuszosan gerjesztett mozgás esetén a sajátérték (l. (4.28), ha $\alpha = 0$) $\Lambda_{\pm} = \exp(\pm i \omega_0 T)$. Innét $\nu = \omega_0 T / (2\pi) = \omega_0 / \Omega$, valóban két frekvencia, a sajátfrekvencia és a gerjesztési frekvencia hányadosa.

6.15. megoldás. $\pi - 3 = [7, 15, 1, 292, 1]$, $e - 2 = [1, 2, 1, 1, 4]$, $\sqrt{2} - 1 = [2, 2, 2, 2, 2]$, $\sqrt{3} - 1 = [1, 2, 1, 2, 1]$ és $(\sqrt{5} - 1)/2 = [1, 1, 1, 1, 1]$. Az egzakt számoktól való eltérések rendre: 8×10^{-5} , 4×10^{-4} , 8×10^{-5} , 1×10^{-3} és 3×10^{-3} .

6.16. megoldás. Általános alakjuk $g_k = 1/(k + g)$, s ezért az „ezüst közép” aránya $g_1 = 0,382$, a következő nemes szám pedig $g_2 = 0,276$.

Irodalom

Általános irodalom

Káosztankönyvek

- E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 1993)
- H.-G. Schuster, *Deterministic Chaos: An Introduction* 3. bővített kiadás (VCH, Weinheim, 1995)
- S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos – With applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (Addison Wesley, Reading, 1994)
- H.J. Korsch, H.-J. Jodl, *Chaos – A Program Collection for the PC*, 2. kiadás (Springer, Berlin, 1998)
- H.E. Nusse, J.A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations* (Springer, Berlin, 1994)
- E.A. Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. I–II (Cambridge University Press, 1990)

Modern mechanikatankönyvek káoszról szóló fejezetekkel

- L.N. Hand, J.D. Finch, *Analytical Mechanics* (Cambridge University Press, 1998)
- J.V. José, E.J. Saletan, *Classical Dynamics: a Contemporary Approach* (Cambridge University Press, 1998)
- H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, *Classical Mechanics* 3. kiadás (Prentice Hall, 2002)

Káoszsakkönyvek

- Szépfalusy P., Tél T. (szerk.), *A Káosz: Véletlenszerű jelenségek nemlineáris rendszerekben* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982)
- J. Guckenheimer, F. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York, 1983)
- A.J. Lichtenberg, M.A. Leiberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer, New York, 1983)
- C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems* (Cambridge University Press, 1993)

J.M.T. Thompson, H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2. kiadás (Wiley, Chichester, 2002)

P. Cvitanović, R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Valtay, N. Whelan, A. Wirzba, *Classical and Quantum Chaos*, <http://www.nbi.dk/ChaosBook/> (Niels Bohr Institute, Copenhagen, 1999)

Ismeretterjesztő káoszkönyvek

J. Gleick, *Káosz, egy új tudomány születése* (Göncöl Kiadó, Budapest, 1999)

E.N. Lorenz, *The Essence of Chaos* (University of Washington Press, Seattle, 1993)

I. Peterson, *Newton's Clock, Chaos in the Solar System* (Freeman, New York, 1993)

Differenciálegyenletek

L.Sz. Pontrjagin, *Közönséges differenciálegyenletek* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972)

V.I. Arnold, *A mechanika matematikai módszerei* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985)

Hatvani L., Pintér L., *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában* (Polygon, Szeged, 1997)

Irodalom az egyes fejezetekhez

1.2.1. Szabálytalan rezgések, rezegtetett inga – kaotikus attraktor

Y. Ueda, Explosion of strange attractors exhibited by Duffing's equation, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **357**, 422 (1980)

R. van Dooren, Chaos in pendulum with forced horizontal support motion, *Chaos, Solitons, and Fractals* **7**, 77 (1996)

1.2.2. Mágneses és rezegtetett ingák – fraktál vonzási határ, tranziens káosz

C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics, *Science* **238**, 632 (1987)

H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science* (Springer, Berlin, 1992) 12.8. fejezet

T. Tél, Transient chaos, in: *Directions in Chaos*, Vol. 3, ed.: Hao Bai-lin (World Scientific, Singapore, 1990)

1.2.3. Csigán lengő test, lejtőkön pattogó labda – kaotikus sávok

H.E. Lehtihet, B.N. Miller, Numerical study of a billiard in a gravitational field, *Physica D* **21**, 93 (1986)

C.S. Adams, M. Sigel, J. Mlynek, Atom Optics, *Physics Reports* **240**, 143 (1994)

1.2.4. Korongok között pattogó golyó, tükröződő karácsonyfadíszek

- B. Eckhardt, Irregular scattering, *Physica D* **33**, 89 (1988)
 E. Ott, T. Tél, Chaotic scattering: an introduction, *Chaos* **3**, 417 (1993)
 J. Walker, The distorted images seen in Christmas-tree ornaments and other reflecting balls, *Scientific American* **259** (6), 84 (1988)
 D. Sweet, E. Ott, J. A. Yorke, Topology in Chaotic Scattering, *Nature* **399**, 315 (1999)

1.2.5. Szennyeződések sodródása – a káosz alkalmazása

- J. M. Ottino, *The kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport* (Cambridge University Press, 1989)
 H. Aref, Stirring by chaotic advection, *J. Fluid. Mech.* **143**, 1 (1984)
 H. Aref et al., Vortices, kinematics and chaos, *Physica D* **37**, 423 (1989)
 G. Károlyi, T. Tél, Chaotic tracer scattering and fractal basin boundaries in a blinking vortex-sink system, *Physics Reports* **290**, 125 (1997)

2. Fraktálalakzatok

- B.B. Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1983)
 T. Tél, Fractals, Multifractals, and Thermodynamics, *Z. Naturforsch.* **43a**, 154 (1988)
 T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989)

2.2.3. Sovány fraktálok – kövér fraktálok

- J.D. Farmer, Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 351 (1985)
 D.K. Umberger, J.D. Farmer, Fat fractals on the energy surface, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 661 (1985)
 R. Eykholt, D.K. Umberger, Fat fractals in nonlinear dynamical systems, *Physica* **30D**, 43 (1988)

2.3. Fraktáleloszlások

- J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke, The dimension of chaotic attractors, *Physica* **7D**, 153 (1983)

5.3. Paraméterfüggés, a perióduskettőző bifurkációsorozat

- M.J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **21**, 669 (1979)

5.4.1. A bonyolultság mérőszáma: a topologikus entrópia

S. Newhouse, T. Pignataro, On the estimation of topological entropy, *J. Stat. Phys.* **72**, 1331 (1991)

5.6. A vízikerék

S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos – With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (Addison Wesley, Reading, 1994), 9. fejezet

6.5.2. A KAM-tétel

A.N. Kolmogorov, General theory of dynamical systems in classical mechanics, in: *Proceedings of the 1954 International Congress of Mathematics* (North Holland, Amsterdam, 1957)

V.I. Arnold, Small denominators II.: Proof of a theorem by A.N. Kolmogorov on the preservation of conditionally-periodic motion under a small perturbation of the Hamiltonian, *Russ. Math. Surveys* **18**, 9 (1963) [*Uspekhi Mat. Nauk* **18**, 13 (1963)]

J. Moser, On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* **1**, 1 (1962)

6.5.5. Erősen kaotikus rendszerek

D. Szász, *Hard Ball systems and the Lorentz Gas*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 101 (Springer, Berlin, 2000)

7. Utószó

Egyszerű mechanikai kísérletek

F.C. Moon, *Chaotic Vibrations* (Wiley, New York, 1987)

F.C. Moon, P.J. Holmes, A magnetoelastic strange attractor, *J. Sound. Vib.* **69**, 339 (1979)

K. Briggs, Simple experiments in chaotic dynamics, *Am. J. Phys.* **55**, 1083 (1987)

T.M. Mello, N.M. Tuffilaro, Strange attractors of a bouncing ball, *Am. J. Phys.* **55**, 316 (1987)

N.M. Tuffilaro, Nonlinear and chaotic string vibrations, *Am. J. Phys.* **57**, 408 (1989)

R.L. Zimmerman, The electronic bouncing ball, *Am. J. Phys.* **60**, 378 (1992)

T. Shinbrot et al., Chaos in a double pendulum, *Am. J. Phys.* **60**, 491 (1992)

J.A. Blackburn, G.L. Baker, A comparison of commercial chaotic pendulum, *Am. J. Phys.* **66**, 821 (1998)

J.P. Berdahl, K.V. Lugt, Magnetically driven chaotic pendulum, *Am. J. Phys.* **69**, 821 (2001)

W.L. Ditto (szerk.), *Proceedings of the 5th Experimental Chaos Conference* (World Scientific, Singapore, 2001)

Irodalom a kitekintő olvasmányokhoz

1. Káosz különböző tudományokban

Műszaki tudományok

M.J. Ogorzalek, *Chaos and Complexity in Nonlinear Electronic Circuits* (World Scientific, Singapore, 1997)

A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concepts in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, 2001)

F.C. Moon, *Chaos and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers* (Wiley, New York, 1992)

T. Kapitaniak, *Chaos for Engineers: Theory, Applications, and Control* (Springer, Berlin, 2000)

Meteorológia

E. Kalnay, *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability* (Cambridge University Press, 2002)

Geofizika

D.L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* (Cambridge University Press, 1997)

Kémia

S.K. Scott, *Oscillations, Waves, and Chaos in Chemical Kinetics* (Oxford University Press, 1994)

I.R. Epstein, J.A. Pojman, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos* (Oxford University Press, 1998)

Biológia

A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Spinger, New York, 1980)

L.S. Liebovitch, *Fractals and Chaos: Simplified for the Life Sciences* (Oxford University Press, 1998)

R.F. Costantino et al., Experimentally induced transitions in the dynamic behaviour of insect populations, *Nature* **375**, 227 (1995); Chaotic dynamics in an insect population, *Science* **275**, 389 (1997)

K. McCann, A. Hastings, G.R. Huxel, Weak trophic interactions and the balance of Nature, *Nature* **395**, 794 (1998)

P.A. Bednekoff, S.L. Lima, Randomness, chaos and confusion in the study of antipredator vigilance, *TREE* **13**, 284 (1998)

J. Huisman, F.J. Weissing, Fundamental unpredictability in multispecies competition, *The American Naturalist* **157**, 488 (2001)

Orvostudomány

B.J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medicine* (World Scientific, Singapore, 1990)

R.T. Sataloff, M. Hawkshaw, *Chaos in Medicine: Source Readings* (Singular Publishing Group, 2000)

A.L. Goldberger: Non-linear dynamics for clinicians: chaos theory, fractals, and complexity at the bedside, *Lancet* **347**, 1312 (1996); Fractal variability versus pathologic periodicity: complexity loss and stereotypy in disease, *Perspective in Biology and Medicine* **40**, 543 (1996)

S.P. Ellner et al., Noise and nonlinearity in measles epidemics: combining mechanistic and statistical approaches to population modeling, *The American Naturalist* **151**, 425 (1998)

Társadalomtudományok

Fokasz N., *Káosz és fraktálok, Bevezetés a kaotikus dinamikus rendszerek matematikájába – szociológusoknak* (Új Mandátum Könyvkiadó, Budapest, 1999)

E.E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility* (Wiley, New York, 1996)

T. Puu, *Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics* (Springer, New York, 2000)

A káosz szabályozása

E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990)

V. Petrov, V. Gáspár, J. Masere, K. Showalter, Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction, *Nature* **361**, 240 (1993)

H.-G. Schuster (szerk.), *Handbook of Chaos Control* (Wiley-VCH, New York, Weinheim, 1998)

2. A káosz rövid története

H. Poincaré, *Les Methods Nouvelles de la Mécanique Celeste I–III.* (Gauthier-Villars, Paris, 1894)

S. Kovalevskaya, Sur le problem de la rotation d'un corps solide d'un point fixe, *Acta Math.* **12**, 177 (1889)

T.Y. Li, J.A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* **82**, 983 (1975)

3. A fraktálok rövid története

B.B. Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1983)

Szőkefalvi-Nagy B., *Valós függvények és függvénysorok* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1961) 15. o.

- P. Grassberger, I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica* **9D**, 189 (1983)
- C. Grebogi et al., Final state sensitivity: An obstruction to predictability, *Phys. Lett.* **99**, 415 (1983); Exterior dimension of fat fractals, *Phys. Lett.* **110**, 1 (1985)
- The Selected Papers of A. Rényi* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976)

6. A nem megfordítható leképezések világa

- Kecskés L., *Egy ölnyi végtelen* (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002, megjelenés alatt)
- H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The Beauty of Fractals* (Springer, Berlin, 1986)
- A. Csordás et al., Statistical properties of chaos demonstrated in a class of one-dimensional maps, *Chaos* **3**, 31 (1993)

7. Hénon-típusú leképezések

- M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50**, 69 (1976)
- R. Lozi, Un attracteur étrange(?) du type attracteur de Hénon, *J. Physique* **39**, C5, 9 (1978)
- T. Tél, Invariant curves, attractors and phase diagram of a piecewise linear map with chaos, *J. Stat. Phys.* **33**, 195 (1983); Fractal dimension of the strange attractor in a piecewise linear two-dimensional map, *Phys. Lett.* **119 A**, 65 (1983)

12. A Lorenz-modell

- E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963)
- C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer, New York, 1982)

13. A pékleképezés eredete

- E. Hopf, On causality, statistics and probability, *J. Math. Phys.* **13**, 51 (1934); *Ergoden-theorie* (Springer, Berlin, 1937)
- J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke, The dimension of chaotic attractors, *Physica* **7D**, 153 (1983)

16. A lópatkó-leképezés

- S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747 (1967)

17. Káosz a Naprendszerben

- Érdi B., *A Naprendszer dinamikája* (Eötvös Kiadó, Budapest, 2001)
- G.I. Contopoulos, *Order and Chaos in Dynamical Astronomy* (Astronomy and Astrophysics Library, 2002)
- G.J. Sussman, J. Wisdom, Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic, *Science* **241**, 433 (1988); Chaotic evolution of the Solar System, *Science* **257**, 56 (1992)
- J. Laskar, A numerical experiment on the chaotic behavior of the Solar System, *Nature* **338**, 237 (1989); Large scale chaos and marginal stability in the Solar System, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **64**, 115 (1996)
- M. Moons, Review of the dynamics in the Kirkwood gaps, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **65**, 175 (1997)
- R. Malhotra, Chaotic planet formation, *Nature* **402**, 599 (1999)
- N. Murray, M. Holman, The origin of chaos in the outer Solar System, *Science* **283**, 1877 (1999)

19. Konzervatív káosz és irreverzibilitás

- P. Gaspard, *Chaos, Scattering, and Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, 1998)
- J.R. Dorfman, *An introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, 1999)
- D.L. Shepelyansky, Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems, *Physica* **8D**, 208 (1983)

21. Turbulencia, térbeli és időbeli káosz

- U. Frish, *Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995)
- T. Bohr, M.H. Jensen, *Dynamical Systems Approach to Turbulence* (Cambridge University Press, 1998)
- A. Garfinkel et al., Quasiperiodicity and Chaos in Cardiac Fibrillation, *J. Clinical Investigations* **99**, 305 (1997)
- B. Blasius, A. Huppert, L. Stone, Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems, *Nature* **399**, 354 (1999)
- D.J.D. Earn et al., A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* **287**, 667 (2000)
- D.A. Egolf et al., Mechanism of extensive spatiotemporal chaos in Rayleigh–Bénard convection, *Nature* **404**, 733 (2000)
- A.T. Winfree, Electrical turbulence in three-dimensional heart muscle, *Science* **266**, 1003 (1994)
- S. Ghashghaie et al., Turbulent cascades in foreign exchange markets, *Nature* **381**, 767 (1996)

Fogalomtár

Attraktor (*attractor*): a fázistér vonzó halmaza, vagyis olyan halmaza, amely felé a trajektóriák közelednek. Attraktorok disszipatív rendszerekben fordulnak elő, fázistérfogatuk mindig zérus (l. fixpontattraktor, határciklus-attraktor, kaotikus attraktor). Az attraktor azokat a trajektóriákat vonzza, melyek a fázistér bizonyos tartományába, az attraktor vonzási tartományába esnek.

Bifurkáció (*bifurcation*): nemlineáris rendszerek viselkedésének hirtelen kvalitatív változása a paraméterek változtatása következtében (l. perióduskettőző bifurkáció).

Csavarási szám (*winding number, rotation number*): a kváziperiodikus mozgás frekvenciáinak hányadosa (l. tórusz).

Determinisztikus rendszer (*deterministic system*): olyan rendszer, melynek mozgástörvénye (pl. közönséges differenciál- és differenciaegyenlet formájában) csak a rendszer pillanatnyi állapotától függ és nem tartalmaz a környezet véletlenszerű hatását leíró zaj változót. Az ilyen rendszer egész mozgása egyértelműen következik a végtelen pontosan ismert kezdőállapotból, azonban az óhatatlanul csak véges pontossággal ismert kezdőállapotok következtében a mozgás véletlenszerűnek bizonyulhat a rendszer determinisztikus jellege ellenére is (l. káosz).

Disszipatív rendszer (*dissipative system*): olyan rendszer, melyben bármilyen kiszemelt fázistartomány térfogata a mozgás során (legalább átlagosan) csökken. Ez a csökkenés a környezetnek történő energiaátadás (általában valamilyen súrlódás vagy közegellenállás) következménye.

Egyszerű attraktor (*simple attractor*): a szabályos, nem kaotikus mozgásokhoz tartozó attraktorok gyűjtőneve (l. fixpont- és határciklus-attraktor).

Elliptikus pont (*elliptic point*): konzervatív, súrlódásmentes rendszerek stabil állapotának megfelelő pont, mely a kétdimenziós fázistérben nyugalmi állapotnak, a síkbeli leképezésen stabil határciklusnak felel meg.

Fázistér (*phase space*): az a tér, melynek derékszögű koordinátáit az időfüggést egyértelműen megadó független, elsőrendű autonóm differenciálegyenletekben szereplő változók (pl. egy tömegpont hely- és sebességkoordinátái) adják meg. Ezek száma a fázistér dimenziója.

- Fixpontattraktor** (*fixed point attractor, attracting fixed point*): 1) a fázistér olyan attraktora, amely a mozgás leállításának felel meg, s képe egyetlen pont; 2) a kétdimenziós leképezés olyan attraktora, mely a legegyszerűbb periodikus mozgásnak felel meg, s képe egyetlen pont (vö. magasabb rendű ciklus).
- Fraktál, sovány fraktál** (*fractal, thin fractal*): olyan alakzat, mely végtelen sok részletet tartalmaz, statisztikusan önhasonló és nem térkitöltő: megfigyelt felülete vagy kerülete hatványfüggvény szerint függ a felbontástól. A fraktál D_0 fraktáldimenziója kisebb az alakzatot tartalmazó tér d (1, 2 vagy 3) beágyazási dimenziójánál. A fraktálnak nincs d -dimenziós térfogata, nullmértékű halmaz (l. kövér fraktál).
- Fraktáldimenzió** (*fractal dimension*): az alakzat tagoltságára jellemző D_0 mérőszám, mely a dimenzió fogalmát nem egész értékekre is kiterjeszti.
- Fraktáeloszlás** (*fractal distribution*): olyan pozitív eloszlások, melyek annál inhomogénebbek, minél finomabb skálán figyeljük meg őket. A fraktáeloszlások D_1 információs dimenziója kisebb, mint tartójuk D_0 fraktáldimenziója: $D_1 < D_0$.
- Fraktál vonzási határ** (*fractal basin boundary*): két vagy több attraktor vonzási tartományának fraktálstruktúrában történő összegyűrődése (l. vonzási tartomány). A határ közelében történő mozgás tranziensen kaotikus.
- Határciklus** (*limit cycle*): időben periodikus állandósult mozgás, melynek képe a fázistérben periodikus vagy zárt görbe, a kétdimenziós leképezésen pedig fixpont vagy magasabb rendű ciklus.
- Határciklus-attraktor, vonzó határciklus** (*limit cycle attractor, attracting limit cycle*): olyan attraktor, amely időben periodikus mozgásnak felel meg. Fázistérbeli képe periodikus vagy zárt görbe, kétdimenziós leképezésen fixpontattraktorként vagy magasabb rendű vonzó ciklusként jelenik meg. A kétdimenziós fázistér legbonyolultabb attraktorai határciklusok lehetnek.
- Heteroklinikus pont** (*heteroclinic point*): valamely hiperbolikus pont stabil sokaságának egy másik hiperbolikus pont instabil sokaságával képzelt metszéspontja. A kaotikus attraktor, nyereghalmaz és sáv végtelen sok heteroklinikus pontot is tartalmaz.
- Hiperbolikus pont, nyeregpont** (*hyperbolic point, saddle point*): a fázistér olyan pontja, amely valamilyen irányban (az instabil görbe mentén) tisztán taszító, egy másik irányban (a stabil görbe mentén) tisztán vonzó hatású. A stabil görbén kívüli pontok mind eltávolodnak. A hiperbolikus pont instabil állapotot ír le, és környezetében a mozgás érzékenyen függ a kezdőfeltételtől. A közeli pontok időben exponenciális ütemben távolodnak egymástól.
- Homoklinikus pont** (*homoclinic point*): valamely hiperbolikus pont stabil és instabil sokaságának metszéspontja. A kaotikus attraktor, nyereghalmaz és sáv végtelen sok homoklinikus pontot is tartalmaz.
- Információs dimenzió** (*information dimension*): a fraktáeloszlás tagoltságára jellemző D_1 mérőszám, mely megadja, hogy mennyi információt nyerünk, ha az eloszlás meghatározásához használt felbontást finomítjuk.
- Instabil** (*unstable*): a mozgás vagy nyugalmi állapot, melyet kissé megváltoztatva, az új mozgás eltávolodik az eredetitől.

Instabil sokaság (*unstable manifold*): az időben megfordított mozgásnak az adott fixpont-hoz vezető stabil sokasága. Úgy is értelmezhető, mint a hiperbolikus pont egyre kisebb sugarú környezetéből induló trajektóriák határértéke.

Káosz, determinisztikus káosz (*chaos, deterministic chaos*): egyszerű, azaz néhány közös differenciálegyenlettel vagy néhány leképezéssel (differenciaegyenlettel) leírt determinisztikus rendszer időben szabálytalan mozgása. Az ilyen mozgás előre jelezhetetlen, rendszerint a fázistér fraktálalakzataihoz kötött (l. kaotikus attraktor, kaotikus sáv, kaotikus nyereghalmaz), és hosszú távú leírása egy időfüggetlen valószínűség-eloszlással (l. fraktáeloszlás, determinisztikus rendszer) lehetséges.

Kaotikus attraktor, különös attraktor (*chaotic attractor, strange attractor*): a kaotikus mozgásnak megfelelő attraktor. Képe mind a fázistérben, mind a leképezés síkján sovány fraktál, azaz zérus térfogatú alakzat. Végtelen sok instabil periodikus mozgást, a leképezésen végtelen sok hiperbolikus pontot tartalmaz. Létezése a mozgások hagyományos szemlélete szempontjából meglepő és újszerű.

Kaotikus nyereghalmaz (*chaotic saddle*): a fázistér olyan nem vonzó részhalmaza, amely minden irányban fraktál jellegű. A kaotikus nyereghalmaz is végtelen sok hiperbolikus pontot tartalmaz, a rajta mozgó pontok tetszőlegesen hosszú ideig kaotikusak. A nyereghalmazt csak megközelítő trajektóriák tranziens káoszt mutatnak.

Kaotikus sáv (*chaotic band, chaotic sea*): a fázistér azon részhalmaza, melyhez a konzervatív kaotikus rendszerek mozgása kötődik. A kaotikus sáv is végtelen sok hiperbolikus pontot tartalmaz, de térkitöltő. Általában kövér fraktál, melyet szabályos mozgásra jellemző elliptikus szigetek (l. elliptikus pont) szakítanak meg. A kaotikus sávot bármely benne levő trajektória egyenletesen járja be.

Kaotikus szórás (*chaotic scattering*): olyan szórási folyamat, azaz egyenes vonalú egyenletes mozgással érkező és ugyanígy távolodó mozgás, mely a köztes időben tetszőlegesen bonyolult is lehet. Mindig kaotikus tranziensek formájában jelenik meg.

Konzervatív rendszer (*conservative system*): olyan rendszer, melyben bármilyen kiszemelt fázisstartomány térfogata a mozgás során állandó. Ez csak súrlódásmentes esetekben lehetséges.

Kövér fraktál (*fat fractal*): olyan egész dimenziós, tagolt alakzatok, melyek minden pontja tetszőleges környezetének véges térfogatú hányada tartozik mind a fraktálhoz, mind annak kiegészítő halmazához. A fraktáldimenzió megegyezik a beágyazási dimenzióval: $D_0 = d$, a d -dimenziós térfogat véges, és a kövér fraktálexponens $\alpha < 1$.

Közönséges differenciálegyenlet (*ordinary differential equation*): a mozgásoknak a folytonos időben történő leírására szolgáló egyenlet, mely megadja az ismeretlen függvény és annak időderiváltjai közötti kapcsolatot.

Kváziperiodikus mozgás (*quasiperiodic motion*): olyan mozgás, melyet kettő vagy több (rendszerint nem összemérhető) frekvencia jellemez (l. csavarási szám). A trajektória bizonyos időnként majdnem visszatér a kezdőpontba, a mozgás a fázistérben tóruszon történik. A legbonyolultabb szabályos mozgás.

- Leképezés** (*map, mapping*): a mozgás egymás utáni diszkrét időpillanatokban érvényes jellemzői között fennálló kapcsolat. Matematikai értelemben a leképezés differenciaegyenlet. A kétdimenziós, síkbeli leképezések fixpontjai ugyanolyan típusúak, mint a kétdimenziós fázistér fixpontjai, azonban ezekhez periodikus mozgások tartoznak.
- Lineáris rendszer** (*linear system*): olyan rendszer, melynek válasza mindig egyenesen arányos a kiváltó okkal. Mozgástörvénye lineáris differenciálegyenlet vagy differenciaegyenlet, mozgása nem lehet kaotikus.
- Ljapunov-exponens** (*Lyapunov exponent*): a kaotikus mozgást végző, eredetileg közeli trajektóriák időben exponenciális ütemű szétlartásának a mértéke (λ), az előrejelezhetetlenség mérőszáma.
- Magasabb rendű (n -es) ciklus** (*higher order cycle, n -cycle*): olyan határciklus, melynek periódusa nem a rendszer természetes periódusa, hanem annak n -szerese. Képe a fázistérben egy n hurok után ismétlődő görbe, a kétdimenziós leképezésen pedig n pont, melyek egymásra képződnek.
- Nemlineáris rendszer** (*nonlinear system*): olyan rendszer, melynek válasza nem arányos a kiváltó okkal. Mozgástörvénye nemlineáris differenciálegyenlet vagy differenciaegyenlet. A kaotikus rendszerek mindig nemlineárisak.
- Pékleképezés** (*baker map*): kétdimenziós leképezés, melynek hatása a fázistérben a téstanyújtáshoz hasonló. A kaotikus viselkedés legegyszerűbb, analitikusan is kezelhető modellje, mely révén a káosz minden alaptípusa és alapulajdonsága tanulmányozható.
- Perióduskettőző bifurkációsorozat** (*period doubling bifurcations*): a káosz kialakulásának egy gyakori módja, melynek során valamely paraméter változtatása következtében a határciklus-attraktor periódusa mindig megkétszereződik. A paraméter véges mértékű változtatására, a végtelen periódusú határeset után megjelenik a kaotikus attraktor.
- Poincaré-leképezés** (*Poincaré map*): a trajektóriák egy sík felülettel való elmetszése révén kapott szabály, mely az egymás utáni metszéspontok koordinátái közötti kapcsolatot adja meg.
- Stabil** (*stable*): a mozgás vagy nyugalmi állapot, melyet kissé megváltoztatva, az új mozgás nem távolodik el az eredetitől. Disszipatív rendszerben az új mozgás az eredetihez konvergál.
- Stabil sokaság** (*stable manifold*): azon fázistérbeli pontok összessége, amelyekből indítva a trajektóriák a hiperbolikus pontba jutnak (vö. instabil sokaság).
- Standard leképezés** (*standard map, Chirikov's map*): területtartó kétdimenziós leképezés, mely a konzervatív rendszerekbeli kaotikus viselkedés egyik alapmodellje. A lökdösött rotátor mozgása szinuszos amplitúdófüggvény esetén a standard leképezésnek felel meg.
- Stroboszkopikus leképezés** (*stroboscopic map*): a trajektóriáknak a gerjesztési periódus egész számú többszöröseinek megfelelő pillanatokban vett koordinátái közötti kapcsolat.
- Súrlódásmentes rendszer** (*undamped, frictionless system*): olyan rendszer, melyben nem hat súrlódási, közeg-ellenállási erő. Csak súrlódásmentes rendszer lehet konzervatív.
- Súrlódásos rendszer** (*damped, viscous system*): olyan rendszer, melyben hat súrlódási, közeg-ellenállási erő. Az ilyen rendszer mindig disszipatív.

- Szeparátrix** (*separatrix*): olyan fázistérbeli görbe vonal vagy felület, mely alapvetően különböző jellegű mozgások tartományait választja el egymástól. Disszipatív rendszerben a szeparátrix egy stabil sokaság (a vonzási tartományok határa). A nem kaotikus konzervatív rendszerek szeparátrixait egybeeső stabil és instabil sokaságok alkotják.
- Térbeli és időbeli káosz** (*spatio-temporal chaos*): a térbeli kiterjedéssel is rendelkező rendszerekben bizonyos térbeli mintázatok időben aperiodikus ismétlődése vagy egymásba alakulása.
- Természetes eloszlás (természetes mérték)** (*natural distribution (natural measure)*): az az időfüggetlen valószínűség-eloszlás, mely megadja, hogy a kaotikus attraktor, a kaotikus sáv vagy a kaotikus nyereghalmaz egyes pontjait milyen gyakran látogatja a hosszú ideje kaotikus mozgást végző pont.
- Topologikus entrópia** (*topological entropy*): a rendszerben rejlő mozgási lehetőségek h mérőszáma, mely megadja, hogy milyen kitevővel nő az instabil periodikus pályák (n -es ciklusok) száma az n hossz növelésével.
- Tórusz** (*torus*): legalább két független görbülettel jellemezhető gyűrű alakú felület a fázistérben. A tóruszon történő mozgás kváziperiodikus, a különböző görbületek mentén különböző frekvenciák jellemzik (l. csavarási szám).
- Tranziens káosz** (*transient chaos*): a káosz megjelenési formája olyan rendszerekben, melyekben kaotikus nyereghalmaz létezik (pl. a fraktál vonzási határ vagy a kaotikus szórás jelenségeihez kötődően). Ilyenkor a tipikus kezdőfeltételekből induló mozgás csak véges ideig kaotikus, a káosz élettartama véges.
- Vonzási tartomány** (*basin of attraction*): azon fázistérbeli pontok összessége, amelyekből kiinduló trajektóriák ugyanahhoz az attraktorhoz tartanak. Egyetlen attraktor esetén a vonzási tartomány az egész fázistér.
- Zaj** (*noise*): egy rendszernek a sok összetevőből álló környezetével való kölcsönhatása következtében kialakuló véletlen hatás.

Tárgymutató

- akkumulációs pont, 191
alapág, 155, 172, 180
aranymetszési arány, 268
Arnold-diffúzió, 282
attraktor, 22, 71, 83–86, 113, 127, 135,
152, 171, 214, 347
autonóm differenciálegyenlet, 107
- bifurkáció, 98, 231, 347
torzított vasvilla-, 100
vasvilla-, 98
biliárd, 276
bistabil rendszer, 91–95
bolyongás, 251
Brown-mozgás, 40, 252
- Cantor-felhő, 55, 66
Cantor-halmaz, 51
Cantor-szálak, 55, 66
- csavarási szám, 266–268, 271, 347
csomópontattraktor, 86, 113, 135
csomópontrepellor, 114, 135
- determinisztikus káosz, 210
determinisztikus rendszer, 209, 347
diffúzió, 251
dimenziótlan alak, 285
dinamikai entrópiák, 282
dinamikai instabilitás, 197
disszipatív rendszer, 76, 347
- egydimenziós leképezés, 189
elliptikus tartományok, 251, 273
elliptikus fixpont, 82, 113, 135, 347
előrejelezhetetlenség, 18, 39, 149, 200,
216, 275
- előrejelzési idő, 200, 275
ergodikus rendszer, 277
érzékenység a kezdőfeltételre, 18, 39, 197,
216
- fázistér, 37–39, 107–111, 118–120, 238,
347
fázistérfogat-összehúzóadási arány, 136, 137
fázistérfogat-összehúzóadási ráta, 109, 238,
300
fázistérkép, 96, 102, 105, 115, 116, 139,
260, 262, 264
Feigenbaum-exponensek, 192
fixpont, 71–86, 134–135, 168–170, 229–
230, 239, 248, 348
folyam, 107
fraktál, 20, 39, 43–59, 348
kövér, 58, 67, 194, 274, 275, 349
sovány, 57
fraktál vonzási határ, 25, 27, 348
fraktáldimenzió, 48–50, 155, 213, 216,
220, 348
fraktáeloszlás, 59–65, 208, 348
Frobenius–Perron-egyenlet, 205
fűrészfog-amplitúdó, 166
fűrészfogattraktor, 170
- gerjesztés, 19, 117, 123, 124, 128, 131,
221
- Hamilton–Jacobi-egyenlet, 302
határciklus, 71, 96, 129, 130, 157, 160,
219, 348
-attraktor, 105, 125, 348
hatásváltozó, 301
háztető-amplitúdó, 166, 245

- háztetőattraktor, 179
Hénon-attraktor, 188
Hénon-típusú leképezés, 188, 189
heteroklinikus pont, 162, 215, 272, 274, 348
hiperbolikus pont, 74, 78, 113, 130, 135, 147, 197, 214, 219, 348
homoklinikus pont, 162, 215, 219, 272, 274, 348
- időlépés, 290
időtüközésre invariáns rendszerek, 112
információs dimenzió, 62–64, 67, 208, 213, 216, 220, 348
 parciális, 208, 213
instabil állapot, 72–79, 91
instabil görbe, 75
instabil sokaság, 71, 95, 97, 104, 106, 117, 130, 139, 155–157, 159, 176, 180, 185, 215, 218, 253–254, 349
instabilitási exponens, 78
integrálható rendszer, 268
intermittencia, 282
invariáns felület, 265
invariáns görbe, 129, 266
invertálható rendszer, 111, 139, 140
irreverzibilitás, 279–280
- Jacobi-determináns, 137, 139, 199, 211, 240
- KAM-tétel, 269–270, 274, 276
KAM-tórusz, 270, 274
kanonikus transzformáció, 301
káosz, 17, 80, 209, 349
kaotikus attraktor, 23, 66, 152, 171, 201, 215, 224, 234, 349
kaotikus nyereghalmaz, 27, 349
kaotikus sáv, 27–28, 67, 244, 249, 253, 275, 349
kaotikus sodródás, 33–35
kaotikus szórás, 31–33, 349
Kaplan–Yorke-összefüggés, 212, 220
keverő rendszer, 278
- kezdőfeltételekre való érzékenység, 197
Kirkwood-zóna, 276
kis nevezők problémája, 304
Koch-görbe, 45–47, 50–51, 67
kontinuitási egyenlet, 228
konzervatív rendszer, 110, 349
kövér fraktál, 58, 67, 194, 274, 275, 349
különös attraktor, 23
kváziperiodikus mozgás, 266, 272, 349
- leképezés, 117, 121, 122, 138–141, 239, 247, 350
lineáris, 71, 350
Liouville-tétel, 109, 301
Ljapunov-exponens, 150, 200, 210, 220, 350
 átlagos, 198, 210, 216, 275
 lokális, 197, 210
logisztikus leképezés, 190
lópatkó-leképezés, 255
Lorenz-modell, 232
Lozi-attraktor, 188
lökdősozott oszcillátor, 131–134, 165–187
lökdősozott rotátor, 245
- macskaleképezés, 243
megfigyelt térfogat, 57
megfordítható rendszer, 111, 189
molekuláris káosz, 282
- n -es ciklus, 120, 157, 160–161, 197, 214, 239, 350
- Naprendszer, 275
nemautonóm, 118
nemes számok, 268
nemhiperbolikus viselkedés, 282
nemlineáris, 71, 141, 350
nemlinearitási paraméter, 167, 190
numerikus hiba, 290
- őskép, 134
- parabola-amplitúdó, 166
parabolaattraktor, 184
parciális dimenzió, 57, 202, 208
pékleképezés, 145–164, 240–244, 350

- periodikus ablak, 193
 perióduskeltető bifurkációsorozat, 190
 Poincaré–Bendixson-tétel, 115
 Poincaré–Birkhoff-tétel, 272
 Poincaré-leképezés, 39, 234, 239, 262, 350
 Poincaré-metszet, 239
 Poincaré-térkép, 239, 262, 264
 potenciálfüggvény, 79, 87, 89, 93, 94, 98, 102–104

 repellor, 114, 135
 rezonancia, 19, 124
 Rössler-modell, 236

 sokaság
 instabil, 71, 95, 97, 104, 106, 117, 130, 139, 155–157, 159, 176, 180, 185, 215, 218, 253–254, 349
 stabil, 71, 93, 97, 106, 117, 130, 139, 162, 177, 181, 253–254, 350
 sovány fraktál, 57
 spirális attraktor, 84, 113, 127, 135
 spirális repellor, 114, 135
 stabil állapot, 80–88
 stabil görbe, 75
 stabil sokaság, 71, 93, 97, 106, 117, 130, 139, 162, 177, 181, 253–254, 350
 stabilitási mátrix, 113, 135, 169
 standard leképezés, 248
 stroboszkopikus leképezés, 39, 121, 125, 129, 350

 strukturális stabilitás, 78
 súrlódásos rendszer, 19–27, 40, 76, 350
 súrlódásmentes rendszer, 27–32, 40, 350

 szabadsági fok, 300
 szabályos mozgás, 17, 105
 számábrázolási hiba, 279, 293
 szeparátrix, 96, 249, 351
 szigét
 elliptikus, 244
 szögváltozó, 301

 térbeli és időbeli káosz, 283, 351
 természetes eloszlás, 203–209, 214, 235, 351
 természetes mérték, 203, 351
 terület-összehúzóási arány, 136
 topologikus entrópia, 162, 196–197, 210, 216, 221, 275, 351
 lórusz, 265, 351
 rezonáns, 269, 271
 lóruszattraktor, 282
 trajektória, 37, 74, 77, 82, 84, 86, 122
 tranziens káosz, 25, 40, 66, 195, 351
 turbulencia, 283

 univerzalitás, 192

 valószínűség-eloszlás, 60, 202
 vízikerek, 225–236
 vonzási tartomány, 27, 96, 102, 105, 106, 178, 183, 351
 határa, 96, 105, 178, 183, 187, 215

 zaj, 40, 151, 282, 351

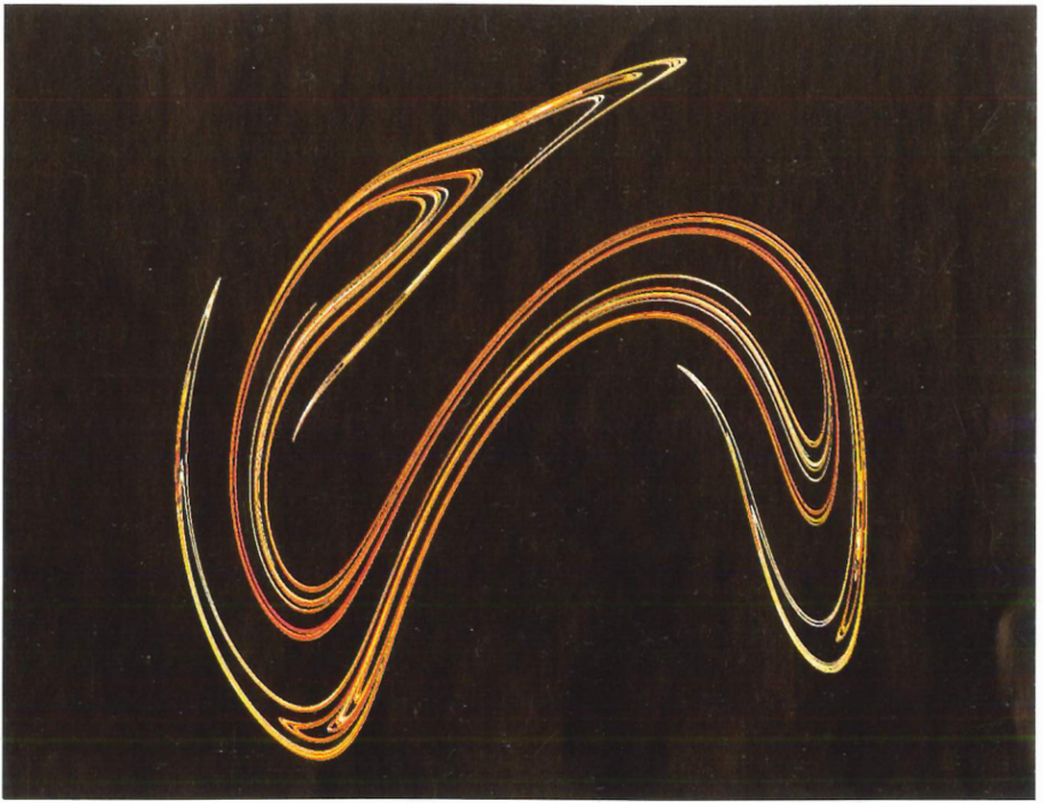
A színes táblák jegyzéke

- I. tábla.** A szabálytalanul rezgő test (gerjesztett anharmonikus oszcillátor, 1.2.1., 5.52. szakasz, (5.85) egyenlet) mozgásához tartozó kaotikus attraktor a stroboszkopikus leképezésen (1.4. ábra), a bejárési valószínűségek szerinti színezéssel. Az eloszlás maximális értékének 8 százalékáig pirosból sárgába, afölött sárgából fehérbe hajló színeket, 30 százalék fölött tiszta fehér színt használtunk. A kép 1000×1000 pontból áll.
- II. tábla.** A rezegtetett inga (1.2.1., 5.5.3. szakasz, (5.89) egyenlet) mozgásához tartozó kaotikus attraktor a stroboszkopikus leképezésen (1.8. ábra), a bejárési valószínűségek szerinti színezéssel. Az eloszlás maximális értékének 4 százalékáig sötétzöld, 4–50 százalékáig középzöldből sárgába hajló, 50 százalék fölött pedig teljesen sárga színt használtunk. A kép 1000×1000 pontból áll.
- III. tábla.** A mágneses inga (1.2.2. szakasz) három nyugalmi állapotának (fehérrel jelölt pontattraktorok) vonzási tartományai a mágnesek síkjára vetített kezdőhelyzetek síkján, sebességmentes állapotból elengedve. A súrlódási együttható 1,5-ször akkora, mint az 1.10. ábrán, minden más adat változatlan. A vonzási tartományok fraktálhatárai kevésbé kiterjedtek. A szomszédos kezdőhelyzetek távolsága $1/240$ (az ábra 1280×960 pontot tartalmaz).
- IV. tábla.** A mágneses inga attraktorainak vonzási tartományai az 1.10. ábrán látottnál kétszer gyorsabban lengő (rövidebb) inga esetén (minden más adat, mint az 1.10. ábrán). A vonzási tartományok fraktálhatárai ismét nagy kiterjedésűek.
- V. tábla.** A mágneses inga attraktorainak vonzási tartományai a IV. tábla adataival, de az inga függőleges helyzete most a mágnesek súlypontjától kissé eltérő (0,2 egységgel átlósan eltolt) pontra esik. Az előző kép szimmetriája megszűnt, de jellege nem változott.
- VI. tábla.** A mágneses inga attraktorainak vonzási tartományai a III. táblának megfelelő súrlódással, de az ottaninál négyszer gyorsabban lengő és a mágnesek síkjához közelebb elhelyezkedő inga esetén.
- VII. tábla.** A rezegtetett inga (1.2.2. szakasz) két állandósult periodikus mozgásának (fehér ponttal jelölt határciklus-attraktorok) vonzási tartományai a stroboszkopikus metseten (mint az 1.13. ábrán). A világosabb kék, ill. piros árnyalatok azokhoz a kezdőfeltételekhez tartoznak, melyekből a test több mint 8 periódus után jut el az attraktorok kis környezetébe. A képen 1280×960 kezdőfeltételt ábrázoltunk.

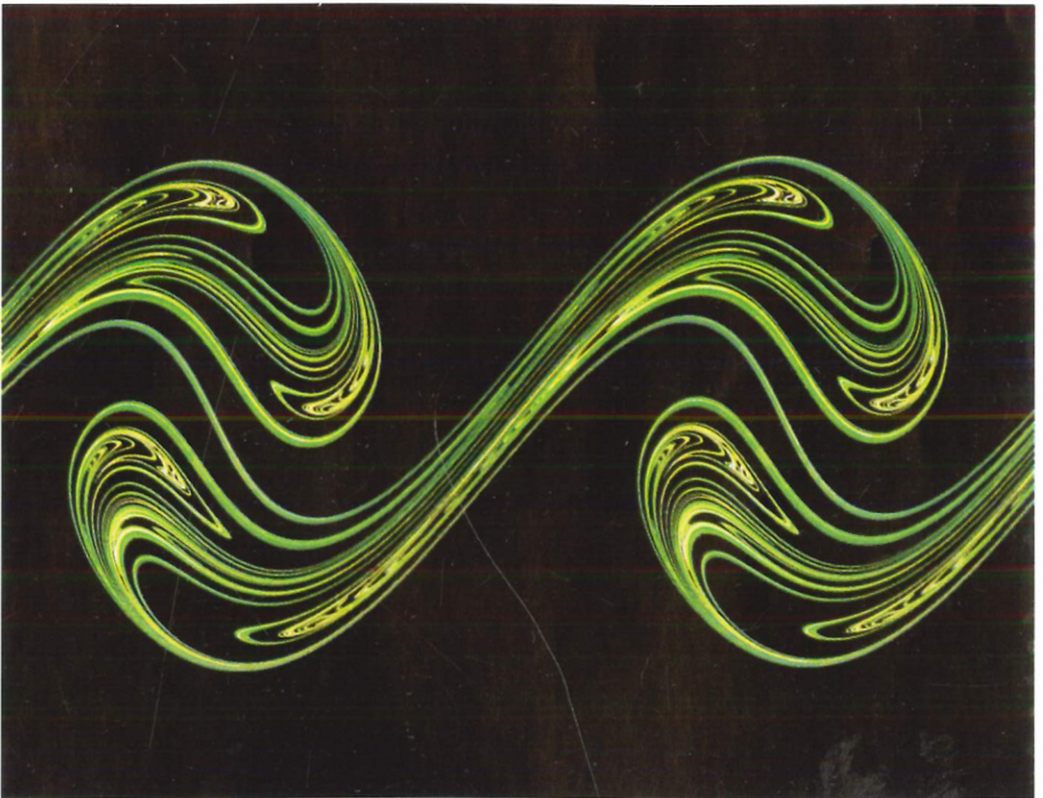
- VIII. tábla.** A csigán lengő test (1.2.3., 6.4.3. szakasz, (6.38) egyenlet) súrlódásmentes mozgásának áttekintő képe a Poincaré-leképezésen. A lengő test tömege kisebb, mint az 1.17. ábrán. A pöttyözött tartomány egy kaotikus sáv, a zárt gyűrűkhöz viszont szabályos, nemkaotikus mozgások tartoznak. Az azonos színű gyűrűsorozatok a mozgás következtében egymásra kerülnek. Középpontjaik magasabb rendű ciklust alkotnak (a sárga például 2-es, a zöld 5-ös, a kék pedig 6-os ciklust). A kaotikus sáv egyetlen, a gyűrűk pedig 24 különböző kezdőfeltételhez tartoznak.
- IX. tábla.** Tükröző karácsonyfagömbök (1.2.4. szakasz). A négy gömb érintkezik, és középpontjaik egy tetraéder csúcsain helyezkednek el. A jobb oldali piros, a bal oldali sárga, a hátsó és a felső ezüst színű. A képen a vaku villanásának visszaverődési mintázata látható.
- X. tábla.** Egymásban tükröződő karácsonyfagömbök (1.2.4. szakasz). Most mind a négy gömb ezüst színű, de a tetraéder oldallapjai színesek: fehér, sárga, piros, a negyedik oldal (a fényképezőgép irányában) pedig feketének tűnik. A kisebb méretű, bevágott képek a tetraéderek közepén kialakult tükröződést mutatják, kissé különböző nézetekből.
- XI. tábla.** Színes csepp mozgása a kétleflyós kádban (1.2.5. szakasz). A bal felső képen a négyzet alakú csepp kezdeti és egy időegység utáni alakja látható (a lefolyók fehér pontok). A jobb felső, bal alsó és jobb alsó kép rendre a 2, 3 és 4 időegység utáni helyzetet mutatja. A csepp még ki nem folyt része egyre tagoltabb szerkezetű, és a színek egyre jobban elkeverednek. A képek 640×480 pontot tartalmaznak.
- XII. tábla.** A lökdösött oszcillátor háztetőattraktorán kialakult természetes eloszlás (ugyanaz, mint az 5.48b. ábra, de más nézetből). Az attraktor szomszédos pontjai közötti távolság $\varepsilon = 1/500$. Minden oszlop színezése az eloszlás képen látható maximális értékének 2 százalékáig piros, onnan sárgába hajló, 50 százalék fölött pedig teljesen sárga.
- XIII. tábla.** A szabálytalanul rezgő testnek az I. táblán látott kaotikus attraktorán kialakult természetes eloszlás. Az eloszlás maximális értékének 10 százalékáig kékből pirosba, onnan 60 százalékáig sárgába hajló, afölött pedig teljesen sárga színt használtunk.
- XIV. tábla.** A rezgetett inga II. táblán látott kaotikus attraktorán kialakult természetes eloszlás. Az eloszlás maximális értékének 2 százalékáig sötétzöld, onnét 5 százalékáig középzöldbe, 30 százalékáig sárgába hajló, afölött pedig teljesen sárga színt használtunk.
- XV. tábla.** Az exponenciális amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktorának természetes eloszlása ($\varepsilon = 1/800$). Ugyanaz, mint a 9.24a. ábra, de más nézetből (az eloszlásfüggvény a leképezés síkján tükröződik).
- XVI. tábla.** A szinuszos amplitúdófüggvénnyel lökdösött oszcillátor kaotikus attraktorának természetes eloszlása. Ugyanaz, mint a 9.24b. ábra, de alulnézetből ($\varepsilon = 1/200$). Az eloszlás látható maximális értékének 2 százalékáig kékből zöldbe hajló, onnét 20 százalékáig sárgába hajló, afölött teljesen sárga színt használtunk.

B 183524





I.



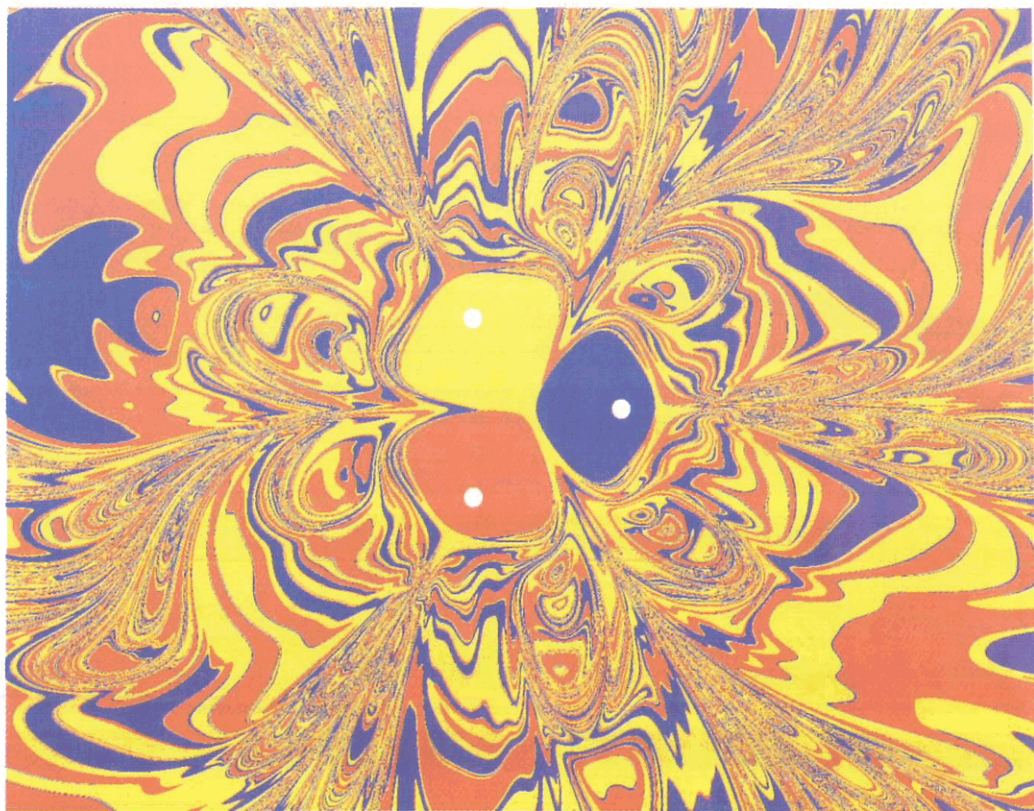
II.



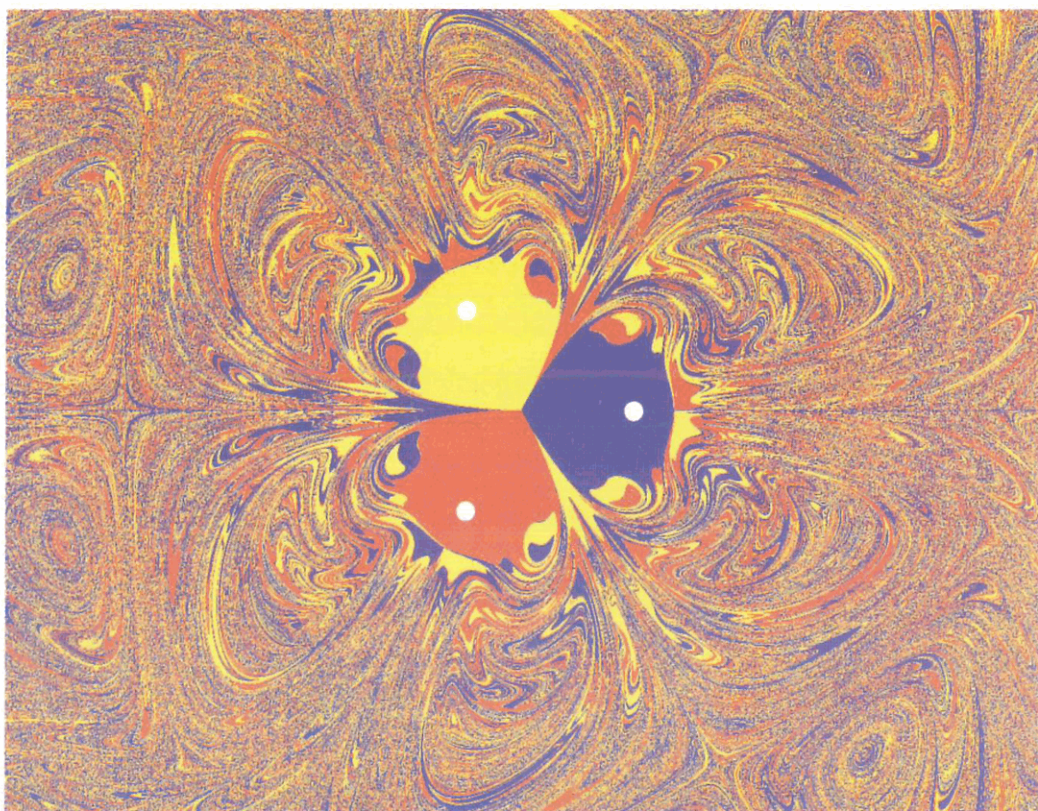
III.



IV.



V.



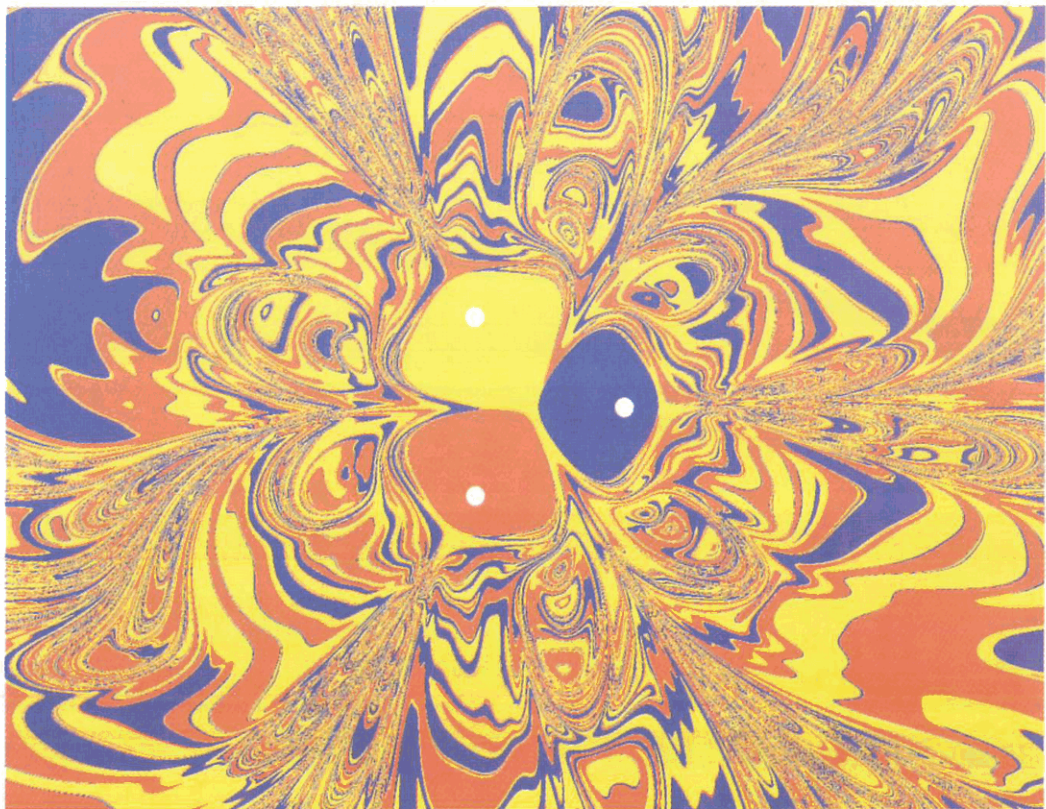
VI.



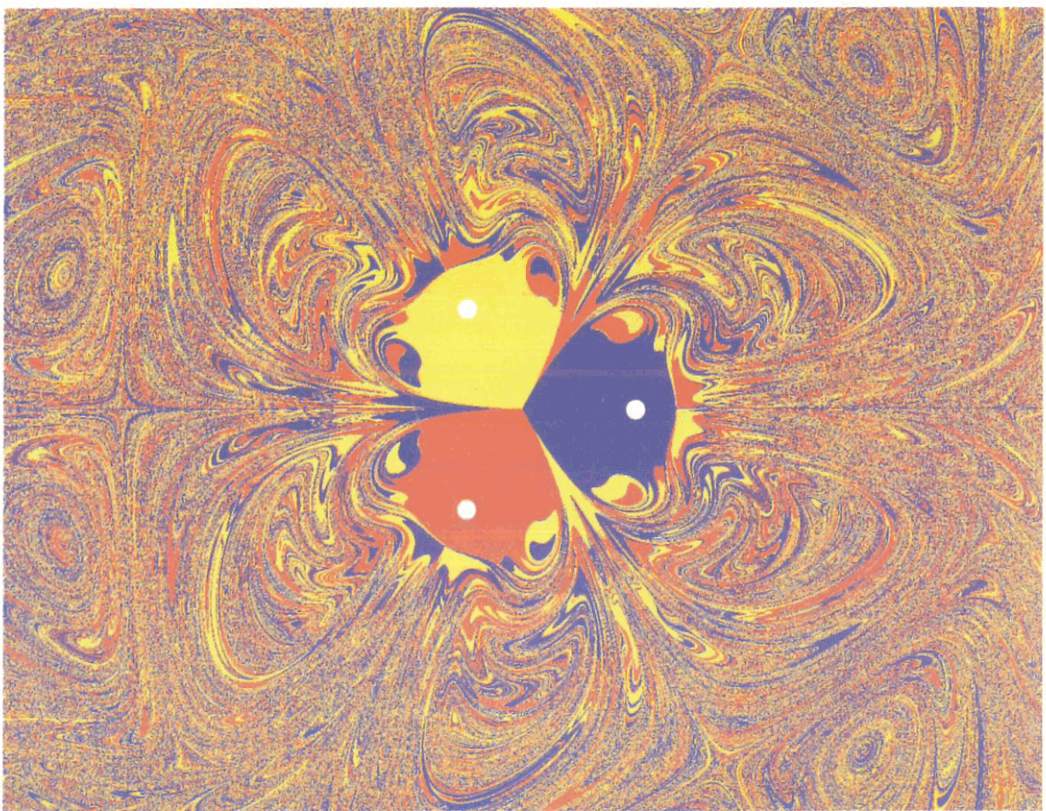
III.



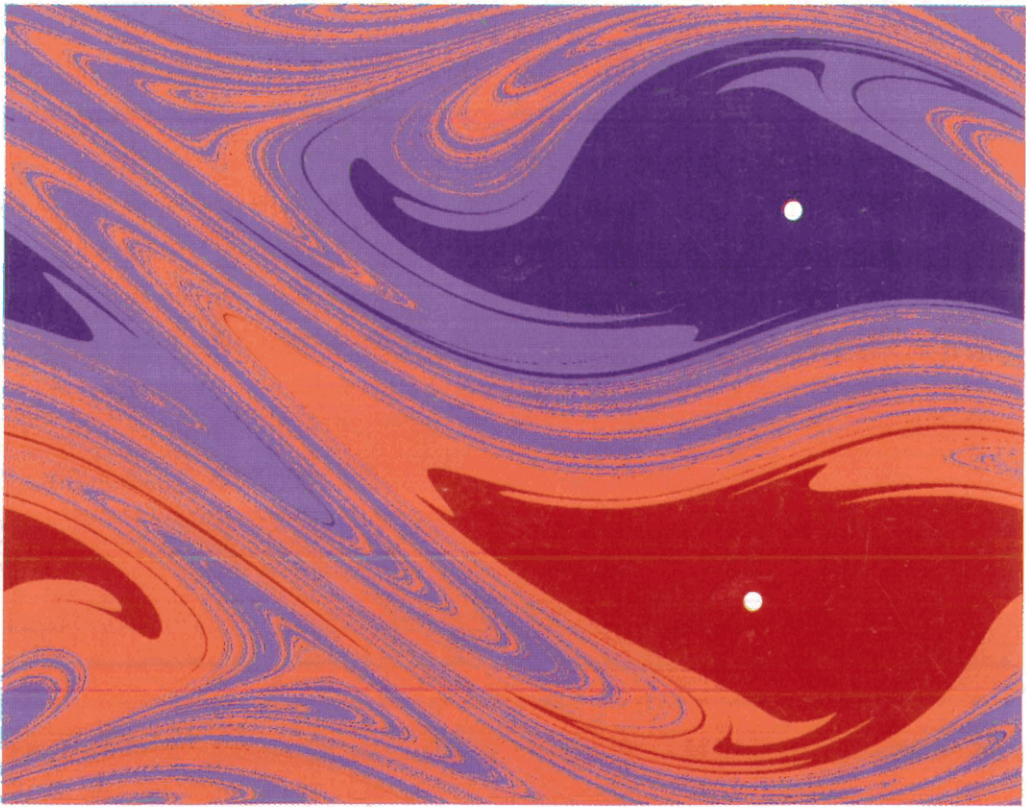
IV.



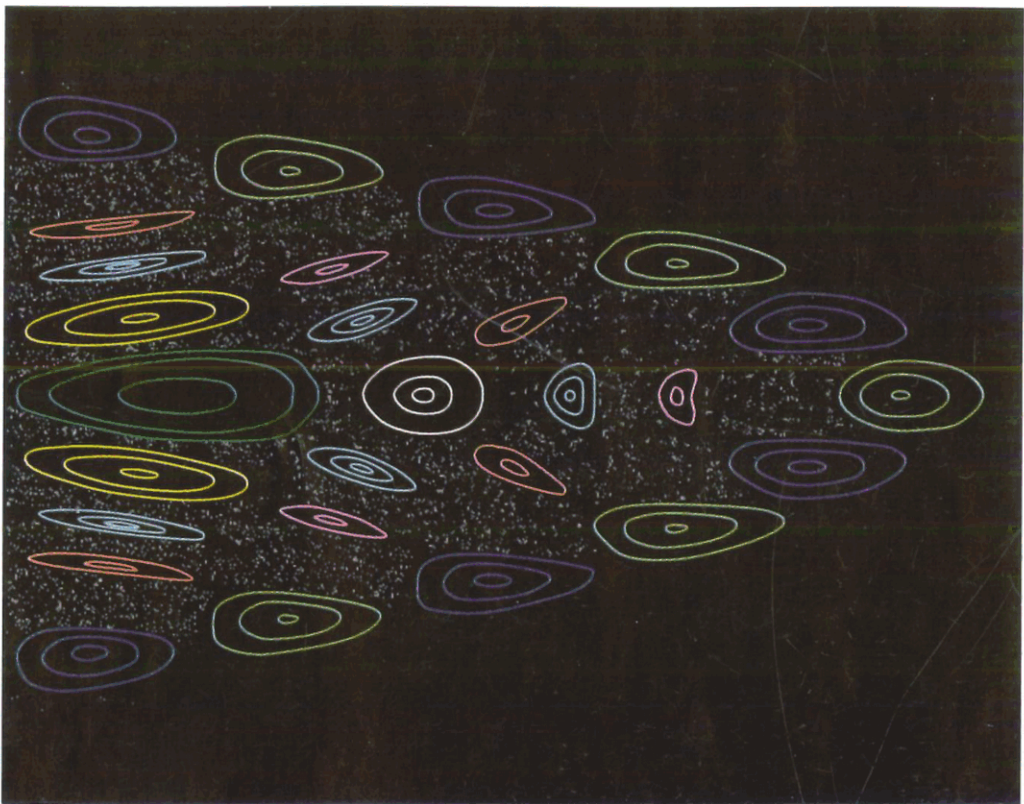
V.



VI.



VII.



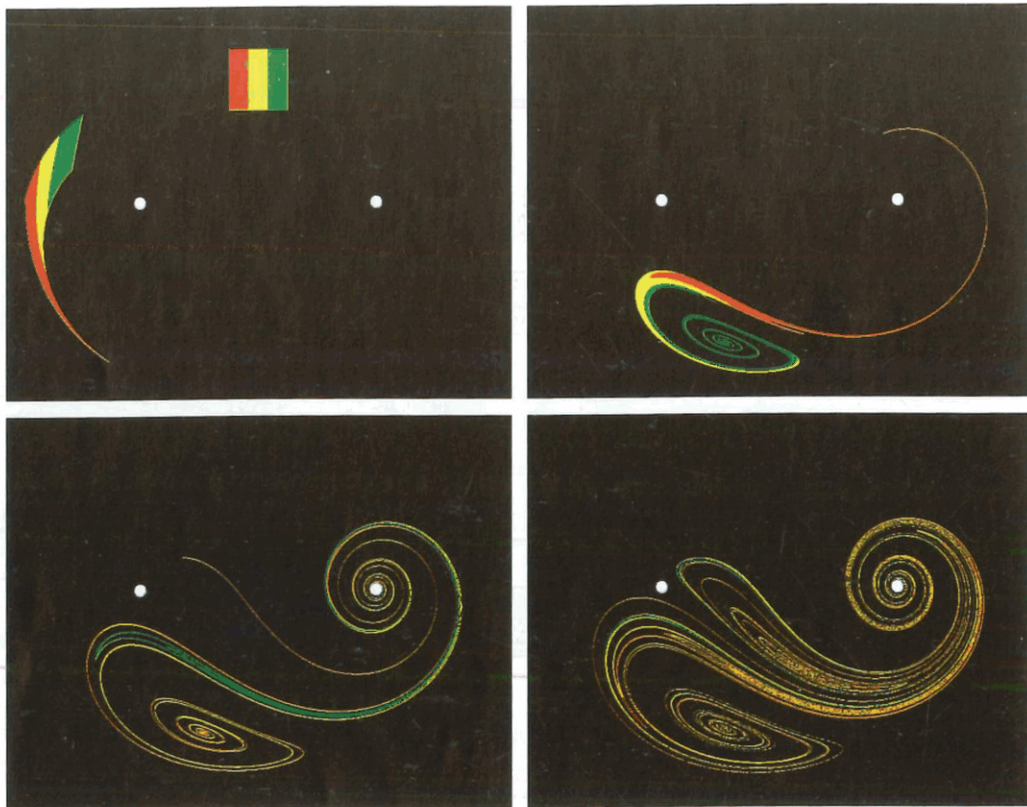
VIII.



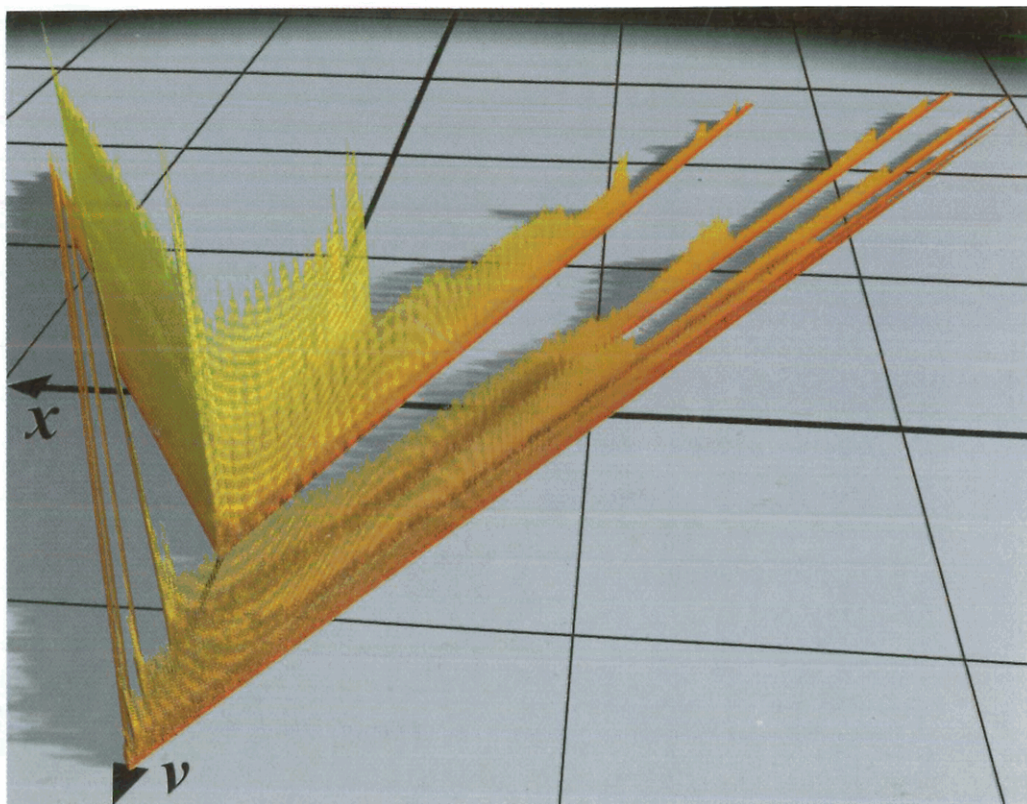
IX.



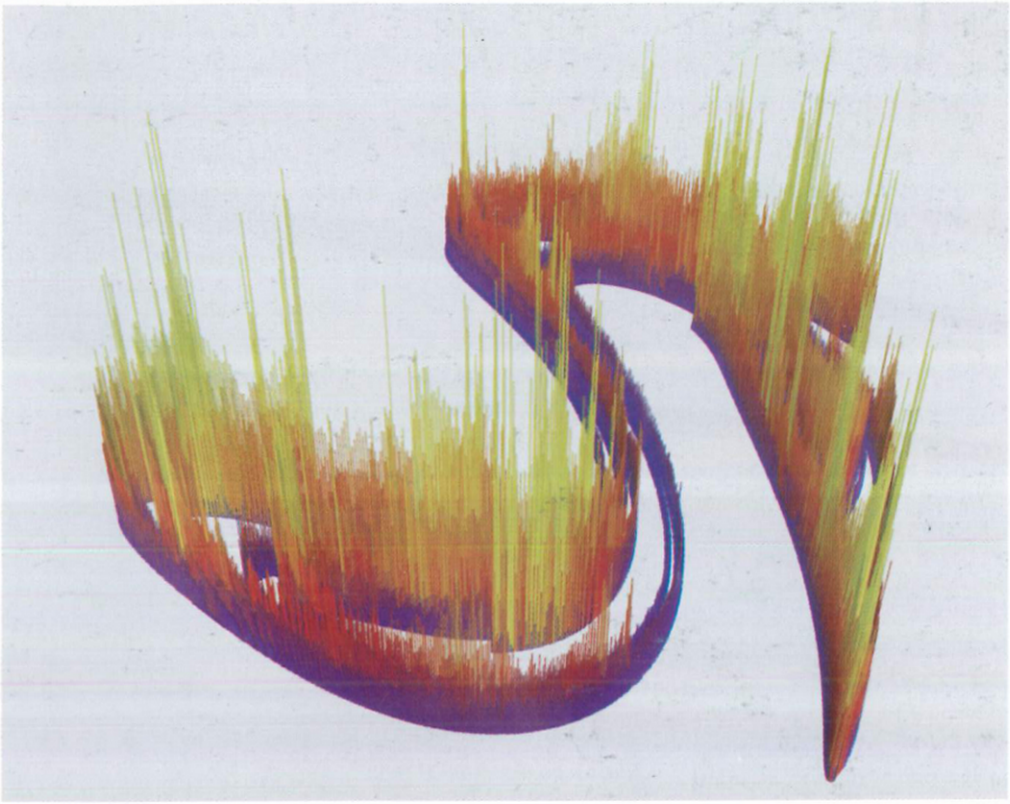
X.



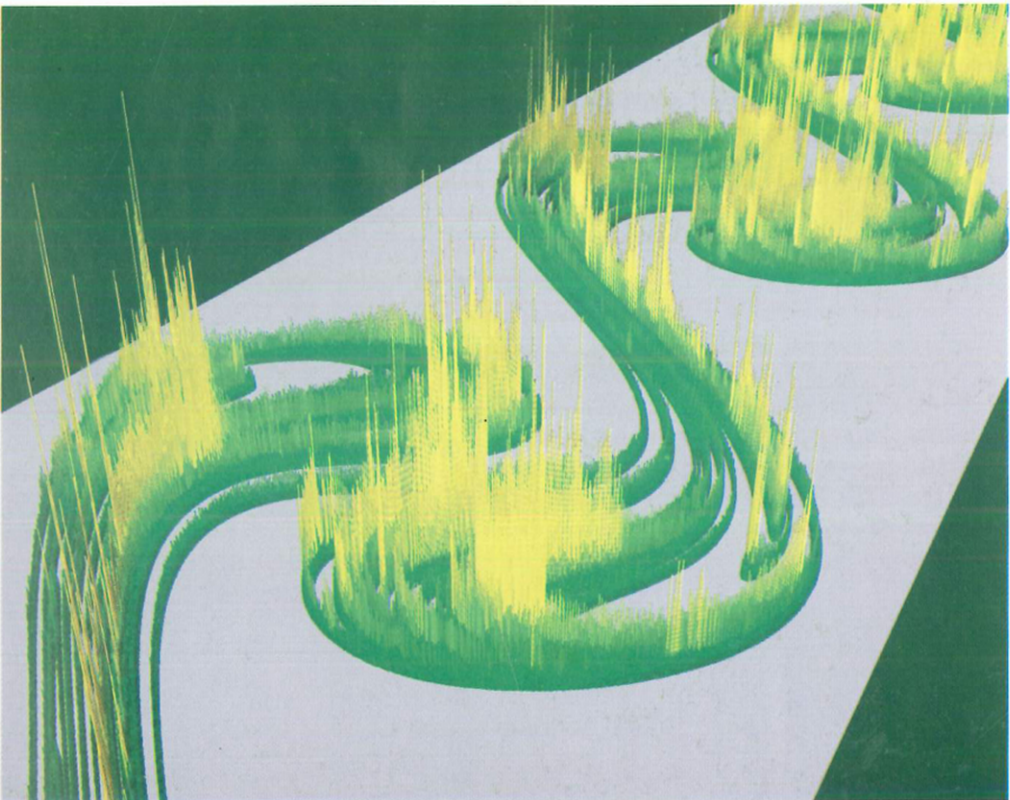
XI.



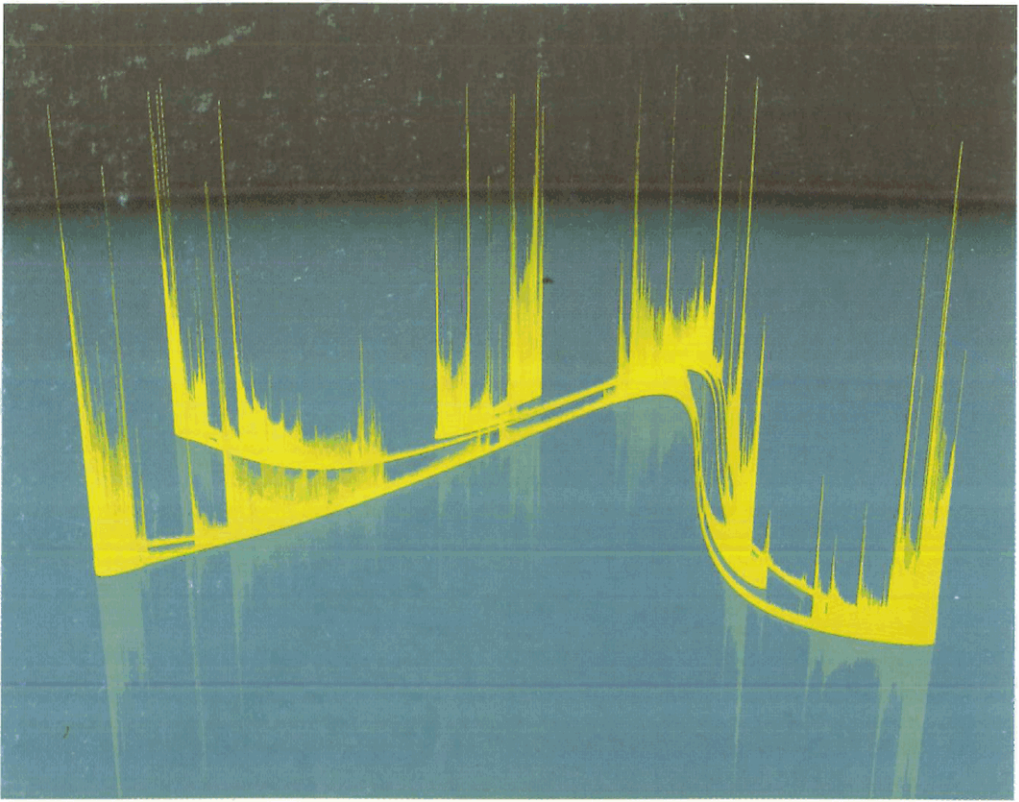
XII.



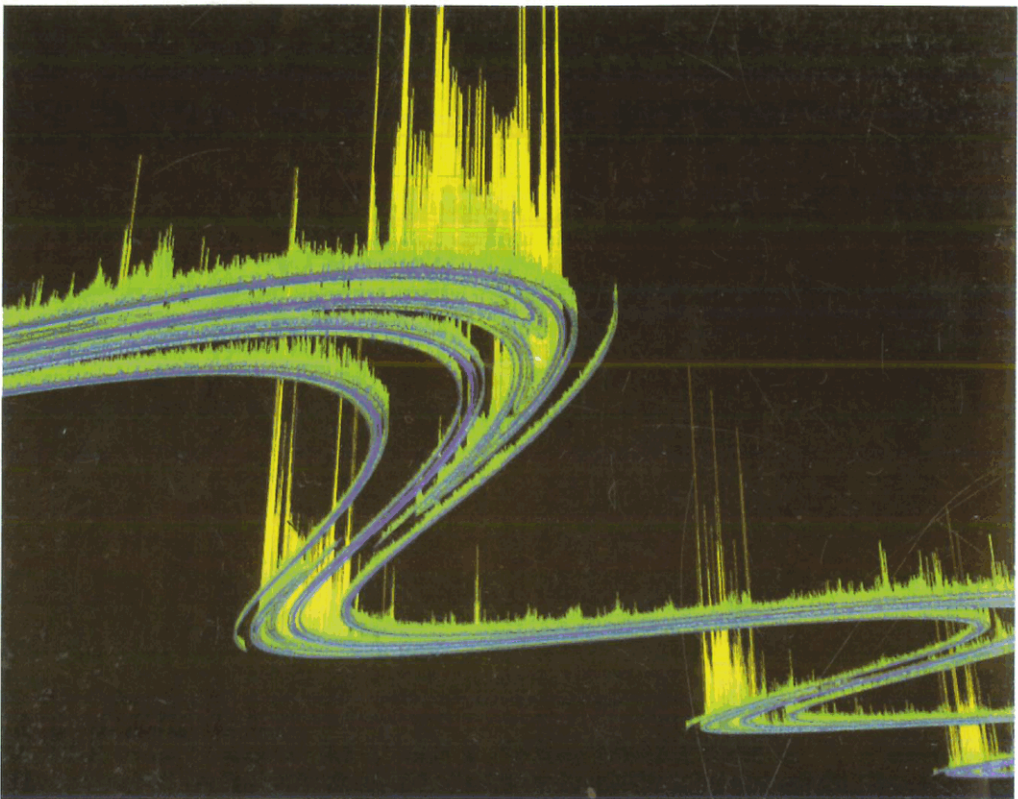
XIII.



XIV.



XV.



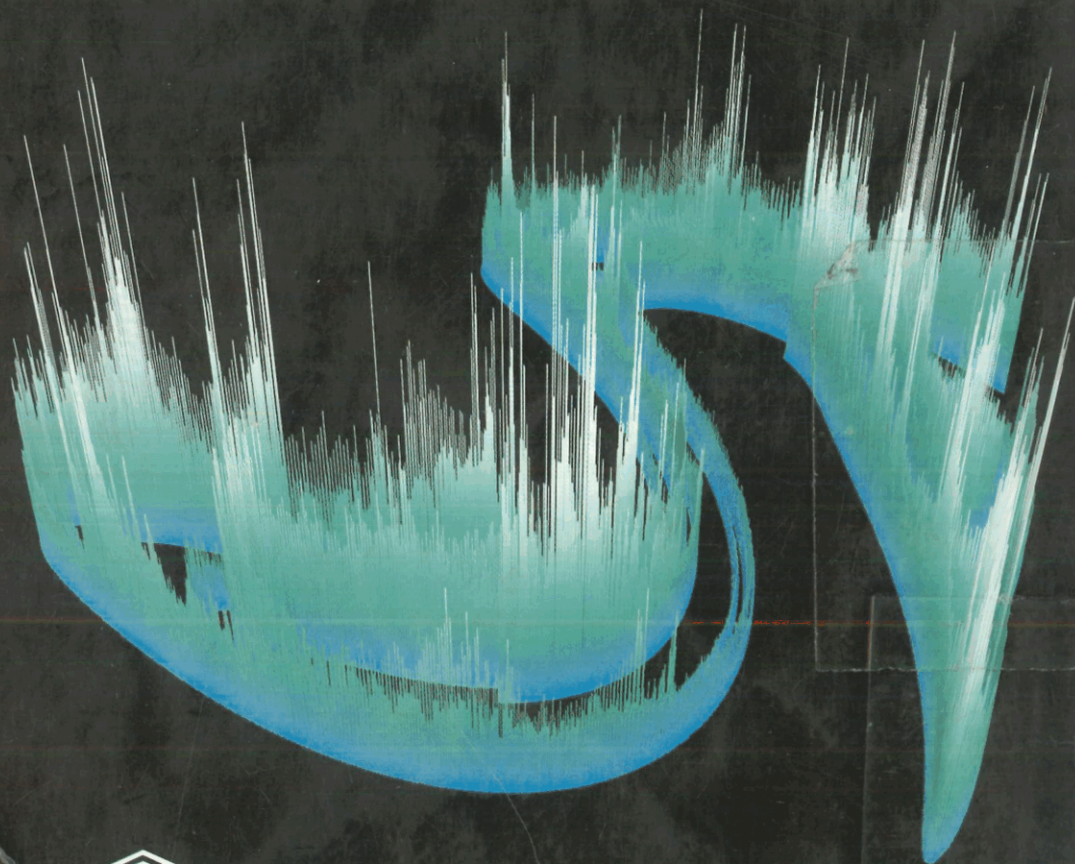
XVI.

A káosz egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése. A káosz nem térbeli, nem statikus rendetlenség, hanem egy mozgástípus. Számos hétköznapi folyamat (a flipperautomata golyójának mozgása, a kávé tejben történő elkeveredése) mellett szerepel áramkörök működésében, egyes betegségek és járványok lefolyásában, gazdasági részfolyamatokban és jóval nagyobb időléptékben is: például a Naprendszer alkotóelemeinek mozgásában.

Annak ellenére, hogy a káosz szabálytalan, sőt véletlenszerű, megfelelő ábrázolásban határozott szerkezettel, az ún. fraktálszerkezettel társul, mely minden nagytábszabán újabb és újabb részleteket tár fel. A káosz vizsgálata újfajta geometriai szemlélettel, eddig nem tapasztalt esztétikájú grafikus ábrázolással jár.

Könyvünk a klasszikus mechanika keretén belül – melynek alaptörvényeit minden középiskolás ismeri – mutatja be a káosszal kapcsolatos jelenségeket. Talán itt a legmeglepőbb az a tény, hogy a valószínűségi szemlélet a kaotikus folyamatok érdemi megértésében elkerülhetetlen.

A könyv elsősorban a felsőoktatás hallgatóihoz szól, de jelentős részeit a matematikában kevésbé jártas érdeklődők is megérthetik.



UNIVERSITAS



4293 Ft (3833 Ft + áfa)

OKTATÁSI
MINISZTERIUM

