

Tél Tamás:

**Milyen tudomány a fizika? c. cikke függeléke:**

**A középiskolai feladat és megoldása**

**A feladat** pontos megfogalmazása a következő:

- Egy motorcsónak állandó teljesítménnyel halad a Dunán Komáromból Esztergom felé. Határozzuk meg a csónak Dunához viszonyított  $v$  sebességét egyre jobb közelítéseket (modelleket) használva, ha a motor nettó (azaz teljes egészében a csónak mozgására fordított) teljesítménye  $P = 0,35$  kW, a Duna áramlási sebessége  $U = 1$  m/s, és a szél a Duna folyási irányában fúj, ugyancsak 1 m/s-os sebességgel. A többi adatot szükség szerint vegyük fel.

**Megoldás:**

A választ több szintre bontva adjuk meg. Először kialakítunk egy képet a motorcsónakról. Az adott teljesítmény nem nagy, tehát semmiképpen sem gondolhatunk egy vizisít húzó modern csónakra. Képzeljünk tehát magunk elé egy régi típusú, kicsi (lakkozott) fa csónakot, mely egy vagy két személyes. Szélessége ezért kb.  $L = 1$  m, magassága a szélvédővel együtt szintén kb. 1 m, súlya pedig 50 kg. A megoldás alapgondolata az, hogy a csónak haladási sebessége állandó, ezért a motor teljes teljesítménye az  $F_k$  közegellenállási erő legyőzésére fordítódik (ilyen kis teljesítmény, lassú haladás mellett a hullámkeltéssel kapcsolatos energiavesztés elhanyagolható). Mivel a teljesítményt a motor a vízben adja le, az a  $v$  sebesség és a közegellenállási erő szorzata. A központi összefüggés tehát:

$$P = F_k v.$$

Attól függően kaphatunk lényegesen különböző eredményt, hogy mit tételezünk fel az  $F_k$  közegellenállási erőről.

**1. közelítés (1. modell):** Feltételezzük, hogy a közegellenállási erő a relatív sebességben lineáris, és hogy a levegő járuléka elhanyagolható. A lineáris közegellenállási erő gömbre ismert pontosan, alakja, a Stokes-törvény értelmében,  $F_k = 6\pi\eta Rv$ . Itt  $R$  a gömb sugara és  $\eta$  a víz dinamikai viszkozitása. A csónak vízbe merülő részének alakjára egzakt kifejezés nyilván nem létezik, de feltételezhetjük, hogy  $R$  helyett a csónak  $L$  szélessége veendő, és a  $6\pi$  együttható, egy kisebb számértékkel (a csónak ugyanis áramvonalasabb a gömbnél) helyettesítendő. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy ez az együttható egységyi. Így a közegellenállási erő

$$F_k = \eta Lv. \quad (1)$$

A teljesítmény-egyenletből:  $P = \eta Lv^2$ . A víz viszkozitását  $\eta = 10^{-3}$  Ns/m<sup>2</sup>-nek véve, a  $v$  sebességre m/s egységben a  $350 = 10^{-3} \cdot 1 \cdot v^2$ , azaz  $350\,000 = v^2$

összefüggést kapjuk, amiből  $v = 592$  m/s. Ez azonban a nagy utasszállító repülőgépek sebességének mintegy háromszorosa, s nem képzelhető el a Dunán! Legkésőbb itt eszünkbe kell jutnia annak, hogy a Stokes-törvény csak kis sebességekre érvényes. Ennek a feltételnek eredményünk számértéke nyilvánvalóan ellentmond (utólag tehát kiderül, hogy nem is lényeges az egységnyiinek tekintett együttható pontos ismerete). Fizikailag, a Stokes-törvény a test körüli réteges (lamináris) áramlás feltevéséből adódik, de már egy úszó ember mögött is jelentős örvények keletkeznek, az áramlás turbulens.

**2. közelítés (2. modell):** A csónak mögötti örvényszóna miatt tehát realisabb a négyzetes közegellenállási erő használata, de a légellenállást továbbra is elhanyagoljuk. Az ismert összefüggés szerint

$$F_k = \frac{1}{2}k\rho A v^2, \quad (2)$$

ahol  $k$  az alaktényező,  $\rho$  a víz sűrűsége,  $A$  pedig a mozgó test felülete a haladásra merőleges irányban. A csónakunk merülése dm körüli, a vízzel érintkező, haladásra merőleges felületet ezért becsülhetjük  $A = 0,1$  m<sup>2</sup>-nek. A teljesítmény-egyenletből:  $P = k\rho A v^3/2$ . A víz  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> sűrűségét behelyettesítve, és az áramvonalas test miatt  $k = 0,1$  alaktényezőt véve  $350 = 0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,1/2 \cdot v^3$ , amiből  $v = (70)^{1/3} = 4,12$  m/s. Ez már teljesen reális eredmény egy kis teljesítményű motorcsónak sebességére. (Ahogy a főszövegben említettük, a Duna sebességének fluktuációi miatt, nem érdemes a sebességet mm/s-os pontossággal megadni.) Az előző közelítéssel összehasonlítva, levonhatjuk a meglepő következtetést: a négyzetes törvény annyival erősebb közegellenállást ír le, ami több mint két nagyságrenddel kisebb sebességre vezet adott teljesítmény mellett.

**3. közelítés (3. modell):** Ezen a szinten már nem tekintünk el attól, hogy a csónak egyszerre *két közegben* mozog: a vízben és a levegőben. Mivel a szél ugyanolyan gyorsan fúj, mint a Duna, és a Duna folyása irányába, a szélhez viszonyított relatív sebesség is  $v$ . A közegellenállási erő most a két közegben két hasonló jellegű tag összege, hiszen a csónak körüli légáramlás is nyilván turbulens:

$$F_k = \frac{1}{2}k\rho A v^2 + \frac{1}{2}k_l\rho_l A_l v^2. \quad (3)$$

Az  $l$  indexű mennyiségek a levegőbeli értékekre vonatkoznak. A felépítmény (szélvédő) nem áramvonalas, ezért legyen  $k_l = 1$ , a levegőbe eső felületet pedig becsülhetjük  $A_l = 1$  m<sup>2</sup>-nek. A levegő sűrűségét az egyszerű számértékek érdekében  $\rho_l = 1$  kg/m<sup>3</sup>-nek véve, a  $P = (k\rho A + k_l\rho_l A_l)v^3/2$  teljesítmény-egyenlet  $350 = (0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,1 + 1)/2 \cdot v^3$  alakú. Ebből  $v = (700/11)^{1/3} = 3,99$  m/s. A levegő jelenléte tehát mintegy 3 százalékkal lassítja a motorcsónakot.

**4. közelítés (4. modell):** Mivel a két utolsó eredmény közötti eltérés néhány százaléknyi, az ennél is kisebb jelentőségű hatásokat csak becsülni érdemes. Ebben a közelítésben figyelembe vesszük a Föld forgását, és felvetjük a kérdést, hogyan befolyásolja a csónak mozgását ez a tény. A Duna Komárom-Esztergomi szakasza kelet-nyugati irányú, s a Föld forgásából adódó Coriolis-hatás az ilyen irányban mozgó testek súlyát csökkenti (Eötvös-effektus). Vizsgáljuk meg, mennyire jelentős ez példánkban. A Coriolis-erő a Földön mozgó

testekre hat a Földhöz viszonyított sebesség és a forgási szögsebesség vektoriális szorzata irányába. A vízszintes síkbeli eltérítő hatást a kormányzás kompenzálja. Az emelő hatás nagyságának meghatározásához a forgási szögsebesség helyi észak-déli komponense szükséges, amit  $\Omega_{ED}$ -vel jelölünk. A Coriolis-erőből származó függőleges gyorsulás nagysága  $2v_x\Omega_{ED}$ , ahol  $v_x$  a Földhöz viszonyított keleti irányú sebesség. Számukra ennek a  $g$  gravitációs gyorsuláshoz való viszonya,

$$\frac{2v_x\Omega_{ED}}{g} \quad (4)$$

az érdekes. A Föld  $7,3 \cdot 10^{-5}$  1/s nagyságú szögsebességének észak-déli komponense a teljes szögsebességnek és a szélességi fok koszinuszának a szorzata. A mi közel 45 fokos szélességünkön a koszinusz becsülhető  $1/\sqrt{2}$ -nek, s ezzel  $\Omega_{ED}$  jó közelítéssel  $5 \cdot 10^{-5}$  1/s. A keleti sebességkomponens Esztergom felé haladva  $v_x = v + U \approx 4 + 1 = 5$  m/s. A keresett arány ezért  $5 \cdot 10^{-5}$ . A csónak súlya Esztergom felé haladva tehát 5 százszázrednyivel csökken. Ennek következtében a csónak kissé jobban kiemelkedik,  $A_l$  is kb. ilyen arányban nő,  $A$  pedig hasonló arányban csökken. Mivel a víz ellenállása a jelentősebb, az eredő közegellenállási erő csökken. A 3. közelítésben kapott sebességnél tehát egy hajszálnyival nagyobb sebességet kapunk, de az eltérés csak a tizedesvessző utáni 4.-5. jegyben jelenik meg, nem mérhető. A Föld forgásából adódó hatás tehát gyakorlatilag nem mutatható ki a csónak haladási sebességében.

**5. közelítés (relativisztikus korrekció):** Ennek meghatározásához gondoljuk végig, hogy a motorcsónak mozgásának skáláján a Föld jó közelítéssel inerciarendszer (ezzel összhangban az Eötvös-hatás elhanyagolhatóan bizonyult), ezért a jelenséget, mint az első három közelítésben is, jogosan írjuk le az egyenletesen folyó Dunához rögzített koordinátarendszerben. A relativitáselméletben tipikus a  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  tényező megjelenése, ahol  $c$  a vákuumbeli fénysebesség. A klasszikus fizika a  $c \rightarrow \infty$  határesetben kapható vissza, ahol ez a tényező 1. Az eltérésre ezért az  $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}$  mennyiség jellemző. A motorcsónak  $v$  sebessége sokkal kisebb  $c$ -nél, ezért alkalmazhatjuk a  $\sqrt{1 - x} \approx x/2$  összefüggést, mely kis  $x$ -re igen pontosan teljesül. Így azt kapjuk, hogy a relativisztikus korrekció súlya

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2. \quad (5)$$

A fénysebesség  $3 \cdot 10^8$  m/s, ezért a korrekciós tényező  $0,5 (4/3 \cdot 10^{-8})^2 = 0,89 \cdot 10^{-16}$ . Ez tehát a sebességre vonatkozó eredmény 16. tizedesjegyében jelentene csak különbséget. Ilyen pontosságú sebességmérés elvileg elérhetetlen.

[Megjegyezzük, hogy a gyorsvonal rövidülésére a szövegben található állítás a fenti korrekciós tényező alkalmazásával kapott  $L_0/2(v/c)^2$  képletből következik, ahol most  $v$  a gyorsvonal Földhöz viszonyított sebessége.  $v = 30$  m/s-mal számolva, és  $L_0 = 100$  méteres nyugalmi hosszát véve, az eredmény  $50 \cdot 10^{-14} = 0,5 \cdot 10^{-12}$  m, azaz fél pm.]

**6. közelítés (kvantum hatások):** A makroszkopikus testek alapvetően különböznek az atomi szintű részecskéktől. Ennek ellenére, a kvantummechanika jelentőségét egy jelenségben megbecsülhetjük úgy, hogy képezzük a  $\lambda$  de

Broglie-hullámhossznak a test méretéhez való viszonyát. Mivel  $\lambda = h/(mv)$ , ahol  $h$  a Planck-állandó, a keresett arány

$$\frac{h}{mvL}. \quad (6)$$

A Planck-állandó  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Js értékével, a csónak  $m = 50$  kg tömegével,  $L = 1$  m méretével és  $v \approx 4$  m/s vízhez viszonyított sebességével számolva,  $6,6 \cdot 10^{-34}/(50 \cdot 4 \cdot 1) = 3,3 \cdot 10^{-36}$ -t kapunk. A sebességben megjelenő korrekció ennek 4 m/s szerese, azaz a kvantummechanika szerepe a 35. tizedesben mutatkozna csak meg, de ez éppúgy a mérési lehetőségeinken kívül van, mint a relativisztikus korrekciók.