Függelék

A Boltzmann- egyenlet

Tekintsünk egy zárt rendszert, melyet nagyszámu, gyengén kölcsönható Fermi-részecske alkot. Jellemezzük a rendszer állapotait az un. betöltési számokkal, melyek megadják, hogy adott impulzusu egy-részecske állapotban hány fermion tartózkodik: $n_p = 1$, ha az állapot betöltött és $n_p = 0$, ha nincsen p impulzusu részecske a rendszerben. / Az egyszerüség kedvéért a spineket nem vesszük figyelembe./ A makroállapot definiálása az $\{n\} \equiv \{n_{p_1}, n_{p_2}, \dots\}$ halmaz megadásával történik.

Az időtükrözési szimmetriából következik, hogy az átmeneti valószinüségek függetlenek az átmenet sorrendjétől bármelyik két állapotra:

$$W_{\{n'\},\{n\}} = W_{\{n\},\{n'\}} .$$

Ezt felhasználva a $P_{\{n\}}(t)$ valószinüségeloszlást meghatározó master egyenlet igy irható

$$\dot{P}_{\{n\}}(t) = \sum_{\{n'\}} W_{\{n\},\{n'\}} \left(P_{\{n'\}}(t) - P_{\{n\}}(t) \right) .$$

E bonyolult egyenlet megoldása reménytelen feladat, de lényeges információt nyerhetünk a rendszerről akkor is, ha a p impulzusu részecskék átlagos számának időbeli változását vizsgáljuk. Az átlagos betöltési szám definició szerint

$$< n_p(t) > = \sum_{\{n\}} n_p P_{n_{p_1} \dots n_p \dots} .$$

Az ezt meghatározó egyenlet a master egyenletből adódik, ha azt beszorozzuk n_p -nel és összegzünk a különböző állapotokra:

$$\langle \dot{n}_p(t)\rangle = \sum_{\{n'\},\{n\}} W_{n_{p_1}\dots,\, n'_{p_1}\dots}\left(P_{n'_{p_1}\dots}(t) - P_{n_{p_1}\dots}(t)\right) n_p \ .$$

Indexcsere és W szimmetriájának felhasználása után

$$\langle \dot{n}_p(t)\rangle = \sum_{\{n'\},\{n\}} W_{\{n\},\{n'\}} P_{\{n\}}(t)(n'_p - n_p) \ . \qquad /1/$$

Nem tul sürü anyagban jogos az a föltevés, hogy csak két-részecske ütközések fordulnak elő. Az átmeneti valószinüség tehát csak olyan állapotok között nem zérus, melyekben $\{n'\}$ és $\{n\}$ legfeljebb két helyen különbözik. Az $(i,j) \rightarrow (k,l)$ ütközésnek például az

$n_i = n_j = 1$, $n_k = n_l = 0$ ill. $n'_i = n'_j = 0$, $n'_k = n'_l = 1$

betöltési számok felelnek /miközben a többi azonos/. Az /1/ egyenletből jól látszik hogy azokból a tagokból, amelyekben az i, j, k, l impulzusok egyike nem azonos a vizsgált p értékkel, nem kapunk járulékot. A fentiek figyelembevételével az /1/ egyenlet a következő alakba irható:

$$\langle \dot{n}_p(t)\rangle = \sum_{\substack{\{n\} \\ q,p',q'}} W_{p,q,p',q'} P_{\{n\}}(t)\left[(1-n_p)(1-n_q)n_{p'}n_{q'} - n_p n_q (1-n_{p'})(1-n_{q'})\right] =$$

$$= \sum_{q,p',q'} W_{p,q,p',q'}\left[\langle (1-n_p)(1-n_q)n_{p'}n_{q'}\rangle - \langle n_p n_q (1-n_{p'})(1-n_{q'})\rangle\right] .$$

Itt $W_{p,q,p',q'}$ jelöli a $(p',q') \rightarrow (p,q)$ ütközésnek megfelelő, időegységre eső átmeneti valószinüségét. Mivel a kölcsönhatás gyenge, használhatjuk a perturbáció számitás ismert eredményét, mely szerint

$$W_{p,q,p',q'} = \frac{2\pi}{\hbar} |U(p-p')|^2 \frac{1}{V^2} \delta_{p+q,\,p'+q'} \, \delta(E-E') \ ,$$

ahol $U(p-p')$ a részecskék között ható potenciál Fourier-transzformáltja a $(p-p')/\hbar$ hullámszámnak megfelelő helyen, V a rendszer térfogata, $E=(p^2+q^2)/2m$ az m tömegü ütköző részecskék együttes energiája.

Amennyiben a rendszer már elegendően közel van a termodinamikai egyensulyi állapothoz, a betöltési számok közelitőleg függetlenek /molekuláris káosz/, tehát $\langle n_i n_j\rangle = \langle n_i\rangle\langle n_j\rangle$. A klasszikus határesetben az átlagos részecske-szám minden egy-részecske állapotban jóval kisebb, mint 1, ezért ilyenkor

$$\langle \dot{n}_p(t)\rangle = \sum_{q,p',q'} W_{p,q,p',q'}\left\{\langle n_{p'}\rangle\langle n_{q'}\rangle - \langle n_p\rangle\langle n_q\rangle\right\} .$$

A fenti egyenlet könnyen átirható a jólismert alakra: Vezessük be az átlagos betöltési szám helyett az impulzusra vonatkozó $f(p,t)$ valószinüség-sürüséget, melynek normált kifejezése

$$f(p,t) = \frac{\langle n_p(t)\rangle}{N}\frac{V}{\hbar^3} \ , \quad \left[\int d^3p\, f(p,t) = 1\right] .$$

/ $f(p,t)\,d^3p$ annak a valószinüsége, hogy egy részecske impulzusa a t pillanatban a p körüli d^3p térfogatelembe essen/. A $W_{p,q,p',q'}$ átmeneti valószinüség szoros kapcsolatban van a szórási folyamat tömegközéppponti rendszerben mért σ hatáskeresztmetszetével:

$$\sigma(p-p') = \frac{m^2}{(4\pi)^2\hbar^4} |U(p-p')|^2 .$$

/Born-közelités/. Ezek alapján, az integrálásra való áttérés után

$$\frac{d}{dt} f(p,t) = \frac{\partial f(p,t)}{\partial t} + p \, \mathrm{grad}_p f(p,t) =$$

$$= \frac{4N}{m^2 V}\int \sigma(p-p')\left(f(p')f(q') - f(p)f(q)\right)\delta(p+q-p'-q')\,\delta(E-E')\, d^3q\, d^3p'\, d^3q' ,$$

ami az egy-részecske valószinüség-eloszlásnak az ütközések következtében létrejövő megváltozását leiró Boltzmann-egyenlet /homogén rendszerben/.

Irodalom

BRENIG, W.: Statistische Mechanik, München, 1969 /kézirat/

A feladatok megoldása

1. feladat Ha a rendszerben n számu nukleon van, akkor annak a valószinüsége, hogy ezek közül valamelyik ütközzön és létrehozzon egy másodlagos nukleont: $n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Az n állapotból tehát csak az $n+1$ indexü állapotba történhet átmenet, s $w_{n+1,n} = \lambda n$. A /2.1/ master egyenlet ebben az esetben igy irható:

$$\dot{P}_{n,1}(t) = -\lambda_n P_{n,1}(t) + \lambda(n-1)P_{n-1,1}(t) \quad , \qquad P_{n,1}(0) = \delta_{n,1} \ .$$

2. feladat Indexeljük a rendszer állapotait a müködő gépek n számával $(0 \le n \le N)$! Mivel a gépek egymástól függetlenek, ezért annak a valószinüsége, hogy Δt idő alatt egyszerre több gép kezd el müködni az egyes valószinüségek szorzata, s igy legalább $(\Delta t)^2$ nagyságrendü. A $\Delta t \to 0$ határértékben tehát csak a szomszédos állapotok között van átmenet:

$$w_{n+1,n} = \Lambda(N-n) \quad , \quad w_{n-1,n} = \mu n \ ,$$

$$\dot{P}_{n,m}(t) = \Lambda(N-n+1)P_{n-1,m} + \mu(n+1)P_{n+1,m} - (\mu n + \Lambda(N-n))P_{n,m} \ .$$

/ A megoldások az I. táblázatban megtalálhatók (52-53. old.)/.

3. feladat A master egyenlet

$$\dot{P}_n(t) = w_{n,n-1}P_{n-1}(t) - w_{n+1,n}P_{n+1}(t) \ ,$$

ahol $n = 1,2,3$; $0 \to 3$; $4 \to 1$; $5 \to 2$. Az időtől független megoldás

$$P_n^* = \frac{w_{n+2,n+1} \cdot w_{n,n-1}}{w_{32}w_{21} + w_{13}w_{21} + w_{13}w_{32}} \ ,$$

melyre $w_{n+1,n}P_n^*$ konstans, de a részletes egyensuly elve /2.8/ nem teljesülhet, mert csak egyirányuak az átmenetek.

4. feladat a./ A részletes egyensuly elve /2.11/ alapján

$$w_{-1,1} \equiv w_0' = e^{-2\beta\varepsilon} w_0 \quad ,$$

ahol $\beta = \frac{1}{kT}$, $\varepsilon = \mu H$ a dipólus energiájának abszolut értéke, s $w_0 \equiv w_{1,-1}$. A master egyenlet

$$\dot{P}_{1,m}(t) = -w_0' P_{1,m}(t) + w_0 P_{-1,m}(t) \quad , \qquad P_{1,m}(0) = \delta_{1,m} \quad ,$$

$$\dot{P}_{-1,m}(t) = w_0' P_{1,m}(t) - w_0 P_{-1,m}(t) \quad , \qquad m = 1,2 \quad .$$

A megoldás

$$P_{1,1}(t) = \frac{w_0}{w_0' + w_0} + \left(1 - \frac{w_0}{w_0' + w_0}\right) e^{-t/\tau} \quad , \qquad P_{1,-1}(t) = \frac{w_0}{w_0' + w_0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) ,$$

ahol $\tau = 1/(w_0' + w_0)$. Természetesen $P_{-1,1}(t) = 1 - P_{1,1}(t)$ és $P_{-1,-1}(t) = 1 - P_{1,-1}(t)$. A stacionárius állapothoz, a külső tér jelenléte miatt már nem az egyenletes eloszlás tartozik.

b./ A kezdeti eloszlás

$$P_1 = \frac{e^{\beta_0\varepsilon}}{e^{\beta_0\varepsilon} + e^{-\beta_0\varepsilon}} \quad , \quad P_2 = \frac{e^{-\beta_0\varepsilon}}{e^{\beta_0\varepsilon} + e^{-\beta_0\varepsilon}} \quad , \quad \beta_0 = 1/kT_0 \ .$$

Az a/ rész eredményeinek és /2.4/-nek a felhasználásával

$$P_1(t) = \frac{e^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}} + \left[\frac{e^{\beta_0\varepsilon}}{e^{\beta_0\varepsilon} + e^{-\beta_0\varepsilon}} - \frac{e^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}}\right] e^{-t/\tau} , \quad P_2(t) = 1 - P_1(t).$$

Az eredmény jól mutatja hogyan vált át a T_0 hőmérsékletü kanonikus eloszlás a T hőmérsékletübe. A relaxációs idő nem csak az átmeneti valószinüségek arányától függ, hanem w_0 nagyságától is. Az átlagos energia ugyanolyan ütemben relaxál, mint a valószinüségeloszlás

$$< E(t) > = \varepsilon\left\{P_2(t) - P_1(t)\right\} = -\varepsilon\left\{\operatorname{th}\beta\varepsilon + \left[\operatorname{th}\beta_0\varepsilon - \operatorname{th}\beta\varepsilon\right] e^{-t/\tau}\right\} .$$

Az energia különbség a környezetnek adódik át.

5. feladat Tetszőleges lineáris folyamatra, tehát $\lambda_n = \lambda n + \nu$, $\mu_n = \mu n + \varrho$ mellett a /2.22/ egyenlet stacionárius esetben a következő:

$$(\mu - \lambda z)\frac{d\,G(z)}{dz} = \frac{\nu z - \varrho}{z} G(z) \ .$$

Ennek megoldása a $G(z=1)=1$ kezdőfeltétellel

$$G(z) = z^{-\varrho/\mu}\left|\frac{1 - \lambda/\mu\, z}{1 - \lambda/\mu}\right|^{\varrho/\mu - \nu/\lambda} .$$

Az a./ esetben $\lambda = -\Lambda$, $\nu = \Lambda N$, $\varrho = 0$ ezért

$$G(z) = \left(\frac{\mu + \Lambda z}{\mu + \Lambda}\right)^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{\Lambda}{\mu+\Lambda}\right)^n\left(\frac{\mu}{\mu+\Lambda}\right)^{N-n} z^n \ ,$$

amiből az állitás következik. Szemléletesen is könnyü belátni, hogy a stacionárius eloszlás Bernoulli-tipusu. Az egyszerüség kedvéért gondoljunk a 2. feladatban szereplő gépekre. Bármely gép önmagában egy kétállapotu rendszernek tekinthető: vagy müködik, vagy nem müködik. Az átmeneti valószinüségek a be-ill. kikapcsolás időegységre eső valószinüségével (λ ill. μ) egyeznek meg. Ha beáll a stacionárus állapot a kétállapotu rendszer master egyenletéből már következik, hogy bármely gép egy tetszőleges időpontban $p = \Lambda/(\mu+\Lambda)$ valószinüséggel müködik és $1-p$ valószinüséggel nem müködik. Ha most egy pillanatban mind az N gépet megvizsgáljuk, akkor annak valószinüségét, hogy közülük n van bekapcsolva és $N-n$ kikapcsolva a /2.37/ Bernoulli-eloszlás adja meg.

A b./ esetnek megfelelő megoldást az általános G függvényből a $\varrho=0$ választás mellett, a $\lambda \to 0$ határértékből kaphatjuk meg:

$$G(z) = e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)} = e^{-\frac{\nu}{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} z^n \ .$$

A Poisson-eloszláshoz ugy is eljuthatunk, hogy az a./ folyamatban képezzük az $N\to\infty$, $\lambda\to 0$ limeszt, miközben $\Lambda N=\nu$ állandó.

6. feladat Az átlagértékre vonatkozó /2.28/ egyenlet szerint

$$\frac{d\langle n\rangle}{dt}=(\lambda-\mu)\langle n\rangle+\nu-\varrho \;,$$

melynek a kezdőfeltételt kielégitő megoldása

$$\langle n(t)\rangle = m\,\sigma(t)+\frac{\nu-\varrho}{\lambda-\mu}\left(\sigma(t)-1\right) \quad , \quad \sigma(t)\equiv e^{(\lambda-\mu)t} \;.$$

A szórást meghatározó /2.29/ differenciálegyenlet az összevonások után

$$\frac{d\,\Delta(t)}{dt}=2(\lambda-\mu)\Delta(t)+(\lambda+\mu)\langle n(t)\rangle+\nu+\varrho$$

alaku. $\langle n(t)\rangle$ ismeretében a $\Delta(0)=0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás könnyen megkapható:

$$\Delta(t)=\left[m(\lambda+\mu)\sigma(t)+\frac{\sigma(t)(\lambda\nu-\mu\varrho)+\lambda\varrho-\mu\nu}{\lambda-\mu}\right]\frac{\sigma(t)-1}{\lambda-\mu} \;,$$

ahol $\sigma(t)$-t fent definiáltuk.

Konstans átmeneti valószinüségek $(\lambda_n=\nu\,,\mu_n=\varrho)$ esetén

$$\langle n(t)\rangle = m+(\nu-\varrho)t \quad , \quad \Delta(t)=(\nu+\varrho)t \;.$$

A várható érték és a szórás lineárisan változik az időben, amig azonban a várható értéket az előre-ill. hátralépés valószinüségének különbsége határozza meg, a szórásban e két mennyiség összege lép föl. Ezért pl., ha $\nu=\varrho$, az átlagérték nem változik, a szórás azonban egyre nagyobb lesz. Tanulságos a konstans átmeneti valószinüségü folyamatot összehasonlitani azzal az esettel, amikor $\lambda_n=\lambda n+\nu$ és $\mu_n=\lambda n+\varrho$. Ilyenkor

$$\langle n(t)\rangle = m+(\nu-\varrho)t \quad , \quad \Delta(t)=2m\lambda t+(\nu+\varrho)t+\lambda(\nu-\varrho)t^2 .$$

Az előre, - ill. hátralépés valószinüségének erős, de egyenlő mértékü megváltoztatása a várható értéket tehát nem módositja, a szórást azonban gyorsabban növekedővé teszi.

Abban az esetben, ha konstans az előrelépés valószinüsége, a hátralépésé viszont n-nel arányos $(\lambda_n=\nu\,,\mu_n=\mu n)$

$$\langle n(t)\rangle = m e^{-\mu t}+\frac{\nu}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right) \quad , \quad \Delta(t)=\left(\frac{\nu}{\mu}+m e^{-\mu t}\right)\left(1-e^{-\mu t}\right) .$$

A rendszer hosszu idő mulva nagy valószinüséggel kerül abba az állapotba ahonnét egyforma eséllyel léphet mindkét irányba, ezért $\lim\limits_{t\to\infty}\langle n(t)\rangle=\nu/\mu$. A szórás is ehhez a konstans határértékhez tart. Mindez teljes összhangban van a /2.28/ stacionárius eloszlás tulajdonságaival. A $\nu=0$ esetben mind $\langle n\rangle$, mind Δ nullához tart, ami megfelel annak, hogy rádióaktiv preparátumban az összes atom biztosan elbomlik.

A $\lambda_n=\Lambda(N-n)\,,\mu_n=\mu n$ átmeneti valószinüségekkel definiált folyamatban

$$\langle n(t)\rangle = m e^{-(\mu+\Lambda)t}+\frac{\Lambda}{\mu+\Lambda}N\left(1-e^{-(\mu+\Lambda)t}\right) ,$$

$$\Delta(t)=\left[m e^{-(\mu+\Lambda)t}(\mu-\Lambda)+\frac{\Lambda}{\mu+\Lambda}N\left(\mu+\Lambda e^{-(\mu+\Lambda)t}\right)\right]\frac{1-e^{-(\mu+\Lambda)t}}{\mu+\Lambda} .$$

Az átlagérték is és a szórás is konstanshoz tart.

$$\langle n\rangle \longrightarrow \frac{\Lambda}{\mu+\Lambda}N \quad , \quad \Delta\longrightarrow\frac{\mu\Lambda}{(\mu+\Lambda)^2}N \;.$$

Ezek az értékek adódnak a /2.37/ stacionárius eloszlásból is.

7. feladat A $\lambda_n=\nu\,,\ \mu_n=\mu n\quad(\nu,\mu\geq 0)$ esetben a generátorfüggvényt meghatározó egyenlet:

$$\frac{\partial G_m}{\partial t}=\mu(1-z)\frac{\partial G_m}{\partial z}+\nu(z-1)G_m \quad , G_m(0,z)=z^m \,, G_m(t,1)=1 .$$

A Laplace-transzformálás (/2.33-34/) után:

$$\frac{\partial g_m}{\partial z} - \frac{\nu(1-z)+s}{\mu(1-z)} g_m = -\frac{z^m}{\mu(1-z)} \quad , \quad g_m(s,1) = \frac{1}{s}$$

melynek megoldása

$$g_m(s,z) = \int_1^z \frac{z'^m}{\mu(z'-1)} e^{\frac{\nu}{\mu}(z-z')} e^{-\frac{s}{\mu}\ln\frac{z-1}{z'-1}} dz' .$$

A visszatranszformálás ugyanugy végezhető el, mint a 3. példában (/2.35-36/), s a

$$G_m(t,z) = \left[1-e^{-\mu t}(1-z)\right]^m e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)}\left(1-e^{-\mu t}\right)$$

eredményre vezet. Innét sorbafejtés után

$$P_{n,m}(t) = e^{-\frac{\nu}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)} \sum_{k=0}^{(m,n)} \binom{m}{k} \frac{e^{-\mu k t}\left(1-e^{-\mu t}\right)^{m+n-2k}}{(n-k)!} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{n-k} \quad 1$$

ahol (m,n) a kisebbik értéket jelenti m és n közül.

A $\lambda_n = \Lambda(N-n)$, $\mu_n = \mu n$ $(\Lambda, N, \mu > 0)$ esetben hasonló lépéseket kell végrehajtani:

$$\frac{\partial G_m}{\partial t} = \mu(1-z)\frac{\partial G_m}{\partial z} + \Lambda(z-1)\left(N - z\frac{\partial}{\partial z}\right) G_m , \; G_m(0,z) = z^m , \; G_m(t,1) = 1$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial z} - \frac{\Lambda N(1-z)+s}{(\Lambda z+\mu)(1-z)} g_m = -\frac{z^m}{(\Lambda z+\mu)(1-z)} \quad , \quad g_m(s,1) = \frac{1}{s} .$$

Ezen inhomogén lineáris egyenlet megoldása

$$g_m(s,z) = \int_1^z \frac{z'^m}{(\Lambda z'+\mu)(z'-1)} \left|\frac{\Lambda z+\mu}{\Lambda z'+\mu}\right|^N e^{-s\frac{1}{\mu+\Lambda}\ln\frac{(1-z)(\Lambda z'+\mu)}{(1-z')(\Lambda z+\mu)}} .$$

Az inverz Laplace-transzformálás elvégzése után

$$G_m(t,z) = \left[\frac{\mu(1-\sigma)+(\Lambda+\mu\sigma)z}{\mu+\Lambda}\right]^m \left[\frac{\mu+\Lambda\sigma+\Lambda(1-\sigma)z}{\mu+\Lambda}\right]^{N-m},$$

ahol $\sigma = e^{-(\Lambda+\mu)t}$. Ebből az eloszlás függvény:

$$P_{n,m}(t) = \sum_{k=[0,n+m-N]}^{(m,n)} \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}(1-\sigma)^{m+n-2k}\left(\frac{\mu}{\mu+\Lambda}\right)^{m-k}\left(\frac{\Lambda}{\mu+\Lambda}\right)^{n-k}\left(\frac{\Lambda+\mu\sigma}{\mu+\Lambda}\right)^k\left(\frac{\mu+\Lambda\sigma}{\mu+\Lambda}\right)^{N-m-n-k},$$

itt $[0, n+m-N]$ a két szám maximumát jelenti. Az átmeneti valószinüségek nem lehetnek negativak, ezért $0 \leq n$, $m \leq N$.

Érdekes megfigyelni, hogy az $m=0$ és $m=N$ kezdeti állapot esetén az eloszlásfüggvény Bernoulli-tipusu:

$$P_n(t) = \binom{N}{n} A^n(t)\left[1-A(t)\right]^{N-n} ,$$

ahol $A(t) = \frac{\Lambda}{\mu+\Lambda}\left(1-e^{-(\mu+\Lambda)t}\right)$, ha $m=0$,

és $A(t) = \frac{1}{\mu+\Lambda}\left(\Lambda+\mu e^{-(\mu+\Lambda)t}\right)$, ha $m=N$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a határeloszlások m értékétől függetlenül a stacionárius eloszlást adják (l.: /2.37/ és /2.38/).

<u>8. feladat</u> A folyamat master egyenlete:

$$\dot{P}_{0,0}(t) = -\Lambda_0 P_{0,0}(t) \quad ,$$

$$\dot{P}_{1,0}(t) = -\Lambda_1 P_{1,0}(t) + \Lambda_0 P_{0,0}(t) \quad ,$$

$$\vdots$$

$$\dot{P}_{N,0}(t) = -\Lambda_{N-1} P_{N-1,0}(t) .$$

A valószinüségek pozitivitása alapján az első és utolsó egyenletből rögtön következik az a./ és c./ állitás. A b./ tulajdonság bizonyitásakor célszerü áttérni az $f_n(t) \equiv \lambda_n P_{n,0}(t)$ függvények vizsgálatára és megmutatni, hogy a keresett t_n-eket a szomszédos indexü f_n függvények metszéspontja határozza meg.

<u>9. feladat</u> A folyamatban csak előrelépés lehetséges, λ_n átmeneti valószinüségekkel, s az eloszlás normáltsága miatt

$P_{N,m}(t)$ annak a valószinüsége, hogy a rendszer t idő alatt eljut a végső (N) állapotába. Az $N \to \infty$ határérték elvégzése után leolvashatjuk, hogy $\sum_{n=m}^{\infty} P_{n,m}(t)$ akkor kisebb 1-nél, ha van esély arra, hogy a rendszer véges t idő alatt végigfusson összes állapotán. Az, hogy ez mikor lehetséges attól függ, hogy átlagosan mennyit tartózkodik a rendszer az egyes állapotokban. A kezdeti állapotra vonatkozó master egyenlet

$$\dot{P}_{m,m}(t) = -\lambda_m P_{m,m}(t)\,.$$

Ebből $P_{m,m}(t) = e^{-\lambda_m t}$, amiből az átlagos tartózkodási idő ugyanugy kapható meg, mint a Poisson-folyamat esetén (l.: /2.15/) s eredményül $1/\lambda_m$ adódik. Abban a pillanatban, amikor a rendszer az n állapotba lép, n veszi át a kezdeti állapot szerepét, ezért $1/\lambda_n$ lesz az itteni átlagos tartózkodási idő. Annak az időnek a várható értéke, amely alatt a rendszer áthalad az összes állapotán

$$\sum_{n=m}^{\infty} 1/\lambda_n\,.$$

Ha λ_n eléggé gyorsan nő n-nel, akkor a fenti sor konvergens, ami érthetővé teszi, hogy ilyenkor véges idő alatt is van valószinüsége annak, hogy a rendszer áthalad összes állapotán. Ekkor a $\sum_{n=m}^{\infty} P_{n,m}(t)$ sor összege 1-nél kisebb érték lesz.

/Formálisan az is a normálási feltétel sérülését jelenti, hogy a Poisson-folyamat határeloszlása zérus. Ott ez azt fejezi ki, hogy a rendszer végtelen idő alatt biztosan végigfut minden állapotán./

<u>10. feladat</u> Tiszta kihalási folyamatról van szó, ezért a $P_{n,N}$ valószinüség független attól, hogy az n állapot nyelő-e

, vagy sem. Igy /2.49/ analógiájára és /2.36b/ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$F_{n,N}(t) = \binom{N}{n} e^{-(n+1)\Lambda t}\left(1-e^{-\Lambda t}\right)^{N-n-1}\Lambda(n+1)\,.$$

A $T_{N/2,N}$ átlagos elérési idő egzakt kiértékelése hosszadalmas. Ehelyett közelitő eljárást alkalmazunk, ami azonban nagyon jó közelités, ha a rendszer makroszkópikus mennyiségü aktiv atomot tartalmaz. Ha ugyanis N nagyon nagy, akkor $F_{N/2,N}$ igen éles függvénye az időnek, ezért az átlagértéket a legvalószinübb értékkel helyettesithetjük. $F_{N/2,N}$ maximuma az $\frac{1}{\Lambda}\ln\left(2N/(N+2)\right)$ helyen van. N mellett a 2 elhanyagolható, ezért

$$T_{N/2,N} \cong \frac{\ln 2}{\Lambda}\,,$$

ami a felezési idő és a bomlási állandó között fennálló jólismert összefüggés.

<u>11.feladat</u> Legyen $P(x,t)$ megoldása a

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)P(x,t)\right)$$

egyenletnek. Feladatunk, hogy $P(x,t)$-t kifejezzük a $P(x,0)$ kezdeti eloszlás segitségével. Vezessük be a $\Psi(x,t)$ függvényt, mint az

$$\int_{\Psi(x,t)}^{x} \frac{dz}{b(z)} = t$$

egyenlet megoldását. $\Psi(x,t)$ kielégiti a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -b(\Psi)$$

differenciálegyenletet a $\Psi(x,0) = x$ kezdeti feltétellel. Igy $\Psi(x,t)$ megadja annak a pontnak a koordinátáját, amelyből a

$b(x)$ sebességeloszlású áramlás révén t idő alatt az x pontba érkezünk. Vizsgáljuk most az

$$\int_{\Psi(x',\tau)}^{\Psi(x,\tau)} P(z,t-\tau)\,dz\,, \qquad x>x'\,,\ t>\tau>0,$$

integrált. Ez annak a valószinüsége, hogy a folyamat értéke a $t-\tau$ időben $\Psi(x',\tau)$ és $\Psi(x,\tau)$ közé essen. Könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\Psi(x',\tau)}^{\Psi(x,\tau)} P(z,t-\tau)\,dz = 0\,,$$

azaz az integrál értéke független τ -tól. Az integrálba a $\tau=0$ és a $\tau=t$ értékeket helyettesitve kapjuk:

$$\int_{x'}^{x} P(z,t)\,dz = \int_{\Psi(x',t)}^{\Psi(x,t)} P(z,0)\,dz.$$

Differenciáljuk x szerint az egyenlőség mindkét oldalát:

$$P(x,t) = P(\Psi(x,t),0)\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t)\,.$$

Ezzel a $P(x,t)$ eloszlást kifejeztük a kezdeti eloszlás segitségével. Ha a kezdeti eloszlás az x' pontra van koncetrálva, akkor a folyamat átmeneti valószinüségét kapjuk meg:

$$P(x,t\,|\,x') = \delta(\Psi(x,t)-x')\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t) = \delta(x-\Psi^{-1}(x',t)).$$

12. feladat A /3.2/ Fokker-Planck-egyenletet x^n -nel beszorozva, majd integrálva

$$\frac{d}{dt}\int x^n P(x,t)\,dx = -\int x^n\frac{\partial}{\partial x}\big(b(x,t)P(x,t)\big)dx + \frac{1}{2}\int x^n\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\sigma^2(x,t)P(x,t)\big)dx.$$

Ha $P(x,t)$ elég gyorsan tünik el a végtelenben, akkor parciális integrálás után a következő eredmény adódik:

$$\frac{d}{dt}\langle x^n(t)\rangle = n\langle x^{n-1}(t)\,b(x(t),t)\rangle + \frac{n(n-1)}{2}\langle x^{n-2}(t)\,\sigma^2(x(t),t)\rangle.$$

Az egyenleteket kiegészitő kezdeti feltételek:

$$\langle x^n(0)\rangle = \int x^n P(x,0)\,dx.$$

13. és 14. feladat Utmutatás: a születési-kihalási folyamatokra érvényes összefüggésekben végezzük el a /2.55/-/2.56/-ban kijelölt határátmenetet.

15. feladat Annak valószinüsége, hogy a Wiener-folyamat $w(t)$ növekményének abszolut értéke kisebb legyen mint ct $(c>0)$, a következő integrállal adható meg:

$$P\{|w(t)|<ct\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-ct}^{ct} e^{-\frac{w^2}{2t}}\,dw.$$

Vezessük be az $u=w/\sqrt{t}$ uj változót. Ekkor

$$P\{|w(t)|<ct\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{ct} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \phi(c\sqrt{t}),$$

ahol $\phi(x)$ az un. hibafüggvény. Ha t kicsi,

$$P\{|w(t)|<ct\} \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,c\sqrt{t}\,(1+o(t)).$$

16. feladat Először számitsuk ki a $P(x,t|y)$ átmeneti valószinüséget az $y=0$ feltétel mellett. Az átmeneti valószinüség $x\to\infty$ -re mind az a) mind a b) esetben a természetes határfeltételnek tesz eleget:

$$\lim_{x\to-\infty} P(x,t|0) = 0.$$

Az átmeneti valószinüség

$$p(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} P(x,t|0)\,dt$$

Laplace-transzformáltja kielégiti az

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2 p}{dx^2} - \tau \frac{dp}{dx} - sp = -\delta(x)$$

egyenletet, amelyet a

$$\lim_{x\to-\infty} p(x,s) = 0$$

határfeltétel mellett kell megoldani. Az egyenlet megoldásakor s paraméternek tekintendő. A megoldás:

$$p(x,s) = \begin{cases} \left(a - \frac{1}{\lambda}\right) e^{\frac{\tau+\lambda}{\sigma^2}x} + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{\tau-\lambda}{\sigma^2}x} & , \quad x>0, \\ a\, e^{\frac{\tau+\lambda}{\sigma^2}x} & , \quad x<0, \end{cases}$$

ahol

$$\lambda = \sqrt{\tau^2 + 2\sigma^2 s} \; .$$

Az a integrálási állandót az átmeneti valószinüségre kirótt második határfeltétel segitségével határozhatjuk meg.

Az a) esetben

$$\lim_{x\to\infty} P(x,t|0) = 0,$$

ezért $p(x,s)$ az $x\to\infty$ határesetben el kell tünjön. Igy

$$a = \frac{1}{\lambda} .$$

Az átmeneti valószinüséget inverz Laplace-transzformációval kapjuk meg:

$$P(x,t|0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} p(x,s)\,ds = e^{\frac{\tau x}{\sigma^2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \frac{e^{-\frac{\sqrt{\tau^2+2\sigma^2 s}}{\sigma^2}|x|}}{\sqrt{\tau^2+2\sigma^2 s}} \frac{ds}{2\pi i} .$$

Célszerü bevezetni az

$$s' = \frac{\tau^2}{2\sigma^2} + s$$

uj változót. Ekkor

$$P(x,t|0) = \frac{e^{\left(\frac{\tau x}{\sigma^2} - \frac{\tau^2 t}{2\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2\sigma^2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s't} \frac{e^{-\sqrt{2}\left|\frac{x}{\sigma}\right|\sqrt{s'}}}{\sqrt{s'}} \frac{ds'}{2\pi i} .$$

Fölhasználva az

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{yt - \alpha\sqrt{y}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{t}} , \quad c>0,$$

összefüggést /igazolását l. a feladat végén/, az átmeneti valószinüség igy irható:

$$P(x,t|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\tau t)^2}{2\sigma^2 t}} .$$

A megoldás egy egyre szélesedő Gauss-görbe, amelynek középpontja τ sebességgel mozog.

A b) esetben a

$$P(B,t|0) \equiv 0 , \quad B>0 ,$$

határfeltétellel dolgozunk. Ekkor

$$a = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{2\lambda}{\sigma^2}B}\right).$$

Az átmeneti valószinüség Laplace transzformáltja

$$p(x,s) = \frac{e^{\frac{\tau x}{\sigma^2}}}{\lambda}\left[e^{-\frac{\lambda}{\sigma^2}|x|} - e^{-\frac{\lambda}{\sigma^2}(2B-x)}\right].$$

Az inverz transzformálást az a) esethez hasonlóan végezzük. Az eredmény:

$$P(x,t|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\left[e^{-\frac{(x-\tau t)^2}{2\sigma^2 t}} - e^{-\frac{2\tau B}{\sigma^2} - \frac{(x-2B-\tau t)^2}{2\sigma^2 t}}\right].$$

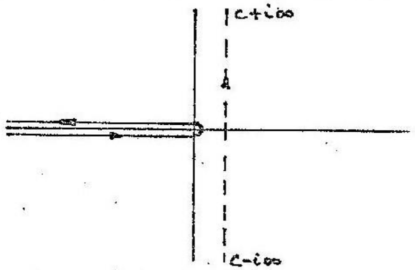
A $P(x,t|y)$ átmeneti valószinüséget $P(x,t|0)$ -ból ugy kapjuk meg, hogy x helyére $(x-y)-t$, B helyére pedig $(B-y)$-t irunk.

Eredményünkből leolvasható, hogy az $\tau=0$ esetben a nyelővel korlátozott folyamat $P(x,t|0)$ átmeneti valószinüsége egyenlő a korlátozás nélküli folyamat átmeneti valószinüségének és ennek B -re vonatkozó tükörképének különbségével. Hasonló megoldással találkoztunk a nyelővel korlátozott diszkrét értékkészletü folyamatok esetében is /1.4. példa, 47. old./

A megoldás során fölhasznált

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{yt-\alpha\sqrt{y}}\frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad c>0$$

integrált a következőképpen számithatjuk ki. Az integrálandó függvény mindenütt analitikus, kivéve a negativ féltengelyt, ahol a $\sqrt{y}$ függvénynek vágása van. Mivel az integrálandó függvény a $\mathrm{Re}\,y<0$ félsikon a végtelenben exponenciálisan tünik el, az integrálás konturja a negativ féltengelyre ráhuzható:



Ekkor az integrál igy irható:

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ut}\left(e^{-i\alpha\sqrt{u}}+e^{i\alpha\sqrt{u}}\right)\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Vezessük be $v^2=u$ uj változót:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-v^2t}\left(e^{-\alpha i v}+e^{\alpha i v}\right)dv.$$

A kitevőkben lévő kifejezéseket teljes négyzetté alakitva és az ismert

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{t}}.$$

Megjegyzés: A korlátozás nélküli folyamat esetében a következőképpen is eljárhatunk. Vezessük be a $z=x-\tau t$ uj változót és a

$$\Psi(z,t)=P(z+\tau t,t|x')$$

függvényt. $\Psi(z,t)$ kielégiti a

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

egyenletet a

$$\Psi(z,0)=P(z,0|x')=\delta(z-x')$$

kezdeti feltétel mellett, igy $\Psi(z,t)$ megegyezik a Wiener-folyamat átmeneti valószinüségével:

$$\Psi(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\,e^{-\frac{(z-x')^2}{2\sigma^2 t}}$$

A feladat megoldása ebből a $z=x-\tau t$ helyettesitéssel adódik.

17. feladat Legyen a kezdeti eloszlás $P_0(x)$. A kezdeti eloszlás momentumai definició szerint

$$\langle x^n(0)\rangle=\int x^n P_0(x)\,dx.$$

A folyamat várható értéke

$$\langle x(t)\rangle = \int x\, P(x,t\,|\,x')\, P_0(x')\, dx\, dx' .$$

A /3.40/ feltételes várható érték felhasználásával kapjuk, hogy

$$\langle x(t)\rangle = e^{-\lambda t}\int x' P_0(x')\,dx' = \langle x(0)\rangle e^{-\lambda t} .$$

Következő lépésként számitsuk ki $x^2(t)$ várható értékét:

$$\langle x^2(t)\rangle = \int x^2 P(x,t\,|\,x')\, P_0(x')\, dx\, dx' .$$

A /3.41/ összefüggés szerint

$$\int x^2 P(x,t\,|\,x')\,dx = \frac{D}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) + x'^2 e^{-2\lambda t} ,$$

s igy

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{D}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) + e^{-2\lambda t}\langle x^2(0)\rangle .$$

Az $\langle x(t)x(t')\rangle$ momentum számitásánál tételezzük fel, hogy $t>t'$. Ekkor

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \int x\, P(x,t+t'\,|\,x')\, x'\, P_1(x',t')\, dx'\, dx =$$
$$= e^{-\lambda(t-t')}\int x'^2 P_1(x',t')\,dx' = e^{-\lambda(t-t')}\langle x^2(t')\rangle .$$

A korábbi eredmények felhasználásával és a $t>t'$ feltétel elhagyásával kapjuk, hogy

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \frac{D}{2\lambda}e^{-\lambda|t-t'|} + \left[\langle x^2(0)\rangle - \frac{D}{2\lambda}\right]e^{-\lambda(t+t')} .$$

A korrelációs függvényt ebből $\langle x(t)\rangle\langle x(t')\rangle$ levonásával kapjuk:

$$k_{11}(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle - \langle x(t)\rangle\langle x(t')\rangle =$$
$$= \frac{D}{2\lambda}e^{-\lambda|t-t'|} + e^{-\lambda(t+t')}\left[\langle x^2(0)\rangle - \langle x(0)\rangle^2 - \frac{D}{2\lambda}\right].$$

Ha kezdeti eloszlásnak a /3.42/ stacionárius eloszlást választjuk, akkor eredményünk /3.45/-tel egyezik meg.

<u>18. feladat</u> Ha egy Markov-folyamat értékét egy t időpontban rögzitjük, akkor a későbbi és korábbi események már függetlenek. Legyen

$$y(t) = c$$

rögzitett. A folyamat értékei az $s>t$ és $u<t$ időpontokban:

$$y(s) = c + \int_t^s x(v)\,dv ,$$
$$y(u) = c - \int_u^t x(v)\,dv .$$

Ezek várható értéke megegyezik:

$$\langle y(s)\rangle = \langle y(u)\rangle = c .$$

Az $y(s)$ és $y(u)$ közötti korreláció:

$$\langle (y(s)-\langle y(s)\rangle)(y(u)-\langle y(u)\rangle)\rangle = -\int_t^s dv\int_u^t dv'\langle x(v)x(v')\rangle =$$
$$= -\frac{D}{2\lambda}\int_t^s dv\int_u^t dv'\, e^{-\lambda v}e^{\lambda v'} \neq 0 .$$

$y(s)$ és $y(u)$ nem függetlenek, tehát a folyamat nem Markov-folyamat.

<u>19. feladat</u> A folyamat várható értéke

$$\langle y(t)\rangle = \int_0^t \langle x(u)\rangle\,du = 0 .$$

A korrelációs függvény /3.45/ felhasználásával igy irható:

$$\langle y(t)y(s)\rangle = \int_0^t du\int_0^s dv\,\langle x(u)x(v)\rangle =$$
$$= \frac{D}{2\lambda}\int_0^t du\int_0^s dv\, e^{-\lambda|u-v|} .$$

Legyen $t>s$. Az $u>v$ és $v>u$ tartományok szétválasztása után:

$$\langle y(t)\,y(s)\rangle = \frac{D}{2\lambda}\left\{\int_0^s dv\, e^{\lambda v}\int_v^t du\, e^{-\lambda u} + \int_0^s dv\, e^{-\lambda v}\int_0^v du\, e^{\lambda u}\right\}$$

$$= \frac{D}{2\lambda^2}\left\{2s + \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda t} + e^{-\lambda s} - e^{-\lambda(t-s)} - 1\right)\right\}.$$

A $t<s$ esetben t és s szerepet cserél. Végeredményben:

$$\langle y(t)y(s)\rangle = \frac{D}{\lambda^2}\left\{\min(t,s) - \frac{1}{2\lambda}\left(1 + e^{-\lambda|t-s|} - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}\right)\right\}.$$

<u>20. feladat</u> Alkalmazzuk a /3.93/ összefüggést az $f(w)=\frac{w^2}{2}$ függvényre. Mivel $w(0)=0$,

$$\int_0^t w(s)\,dw(s) = \frac{w^2(t)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t dt = \frac{w^2(t)}{2} - \frac{t}{2}.$$

<u>21. feladat</u> Vezessük be az $u(t)=x(t)-\sigma w(t)$ folyamatot. $u(t)$ közönséges differenciálegyenletet elégít ki:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda u(t) - \lambda\sigma w(t).$$

Az egyenlet $u(0)=x(0)=x'$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$u(t) = x'e^{-\lambda t} - \lambda\sigma e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} w(s)\,ds.$$

Ebből

$$x(t) = x'e^{-\lambda t} - \lambda\sigma e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} w(s)\,ds + \sigma w(t).$$

A megoldásban szereplő integrált a

$$d\left(g(t)w(t)\right) = w(t)\frac{dg(t)}{dt}dt + g(t)\,dw(t)$$

összefüggés fölhasználásával, parciális integrálással átala-

kithatjuk:

$$\lambda\int_0^t e^{\lambda s} w(s)\,ds = e^{\lambda t}w(t) - \int_0^t e^{\lambda s}\,dw(s).$$

Ezután a megoldás igy is irható:

$$x(t) = x'e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}\,dw(s).$$

A $P(x,t\,|\,x')$ átmeneti valószinüség meghatározásához elegendő $x(t)$ kumulánsait kiszámolni az $x(0)=x'$ kezdeti feltétel mellett. $x(t)$ várható értéke $\langle dw(s)\rangle=0$ miatt:

$$\langle x(t)\rangle = x'e^{-\lambda t}.$$

$x(t)$ szórásának négyzete:

$$\langle (x(t)-\langle x(t)\rangle)^2\rangle = \sigma^2 e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}\int_0^t e^{\lambda u}\langle dw(s)dw(u)\rangle.$$

Mivel a Wiener-folyamat egymásba nem nyuló intervallumokra vonatkozó növekményei egymástól függetlenek,

$$\langle dw(s)dw(u)\rangle = \langle (w(s+ds)-w(s))(w(u+du)-w(u))\rangle = 0,$$

ha az $(s,s+ds)$ és $(u,u+du)$ intervallumok nem metszik egymást. Ezért a fenti integrálok közelitő összegeiben azonos felosztást véve, az átlagolás után csak azok a tagok maradnak meg, amelyekben u és s értéke megegyezik. Igy $\langle (dw(s))^2\rangle = ds$ miatt

$$\langle (x(t)-\langle x(t)\rangle)^2\rangle = \sigma^2 e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda s}ds = \frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) \equiv V^2(t).$$

Mivel $x(t)$ lineárisan tartalmazza a Wiener-folyamatot, $x(t)$ kettőnél magasabb rendü kumulánsai nullával egyenlőek. Ebből következik, hogy a feltételes valószinüség eloszlás Gauss-eloszlás, melyet várható értéke és szórása egyértelmüen meghatároz:

$$P(x,t|x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2(t)}} e^{-\frac{(x-x'e^{-\lambda t})^2}{2V^2(t)}} .$$

/3.38/-cal összehasonlitva látjuk, hogy $x(t)$ Ornstein-Uhlenbeck-folyamat.

22. feladat Legyen $x(t)$ a

$$dx(t) = x(t)dw(t)$$

Ito-SDE megoldása. Föltételezve, hogy $x(t)>0$,vezessük be az

$$y(t) = \ln x(t)$$

folyamatot. A /3.84/ Ito-formula felhasználásával

$$dy(t) = -\frac{1}{2}dt + dw(t).$$

Az $u = y - w$ folyamat közönséges differenciálegyenletet elégit ki,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} ,$$

melynek az $u(0) = y(0) = \ln x(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása

$$u = -\frac{1}{2}t .$$

Ebből

$$x(t) = e^{w - \frac{1}{2}t} .$$

23. feladat A megoldandó két egyenlet speciális esete az

$$(S) \quad dx(t) = -\frac{\alpha}{2}x(t)dt + x(t)dw(t)$$

Stratonovich-SDE-nek. Az egyenlet mindkét oldalát osztjuk $x(t)$-vel:

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -\frac{\alpha}{2}dt + dw(t) .$$

A Stratonovich-féle stochasztikus integrál /3.108/ definiciójában $w(t)$ helyére akármilyen diffuziós folyamatot irhatunk. Igy — figyelembe véve, hogy a Stratonovich-integrált ugy lehet kezelni, mint a közönséges integrálokat — azt kapjuk, hogy

$$(S) \int_0^t \frac{dx(t)}{x(t)} = \ln\frac{x(t)}{x(0)} = \ln x(t) .$$

Másrészt

$$-\frac{\alpha}{2}\int_0^t dt + \int_0^t dw(t) = -\frac{\alpha}{2}t + w(t) .$$

A két kifejezést egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$x(t) = e^{w(t) - \frac{\alpha}{2}t} .$$

Az $\alpha = 0$ esetben a most megoldott Stratonovich-SDE formális alakja megegyezik a 22. feladat Ito-SDE-ének alakjával. Az eltérő értelmezés következtében azonban a megoldás most más,

$$x(t) = e^{w(t)} .$$

A /3.127/ és /3.128/ egyenletek tanusága szerint az $\alpha = 1$ esetben a fenti Stratonovich-SDE ekvivalens a 22. feladatban megoldott Ito-SDE-val. Valóban, mindkettő megoldása

$$x(t) = e^{w(t) - t/2} .$$

24. feladat A stacionárius eloszlást meghatározó egyenlet

$$-\frac{d}{dx}\left(b(x)P^*(x)\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\sigma^2(x)P^*(x)\right) = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$-b(x)P^*(x) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sigma^2(x)P^*(x)\right) = \text{állandó} .$$

Ha $b(x)$ és $\sigma^2(x)$ korlátos, akkor a természetes határfeltételeket csak ugy tudjuk kielégiteni, ha ez az állandó nullával egyenlő. $P^*(x)$ -re igy közönséges szétválasztható differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{2}{\sigma^2(x)}\left(b(x)-\sigma(x)\sigma'(x)\right)P^*(x) .$$

Ennek az egyenletnek az általános megoldása:

$$P^*(x) = C\, e^{\int \frac{2}{\sigma^2}(b-\sigma\sigma')dx} .$$

A C állandót ugy kell megválasztani, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} P^*(x)dx = 1$ legyen. Az Ornstein-Uhlenbeck—folyamat esetében $\sigma^2 = D$, $b(x) = -\lambda x$, és igy /3.42/-vel összhangban azt kapjuk, hogy

$$P^*(x) = C\, e^{-\frac{\lambda}{D}x^2} .$$

25. feladat A Brown-mozgást végző részecske sebessége Ornstein-Uhlenbeck-folyamat, ezért erre alkalmazhatjuk a 17. feladat eredményeit. Természetesen figyelembe kell vennünk, hogy a /3.154/ Einstein-reláció szerint

$$D = \sigma^2 = \frac{2kT}{m}\lambda .$$

A részecske elmozdulása a kiindulási ponttól mérve

$$r(t) = \int_0^t v(s)ds .$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a részecske kezdeti sebessége adott: $v(0)=v_0$. A 17. feladat eredményei szerint (l. a /3.46/ és /3.47/ összefüggéseket):

$$\langle v(t)\rangle = v_0 e^{-\lambda t} ,$$

$$\langle v(t)v(t')\rangle - \langle v(t)\rangle\langle v(t')\rangle = \frac{kT}{m}\left(e^{-\lambda|t-t'|} - e^{-\lambda(t+t')}\right).$$

A részecske elmozdulásának várható értéke

$$\langle r(t)\rangle = \int_0^t \langle v(s)\rangle ds = \frac{v_0}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) .$$

A részecske elmozdulásának korrelációs függvénye a sebesség-korrelációs függvényével fejezhető ki:

$$\langle r(t)r(t')\rangle - \langle r(t)\rangle\langle r(t')\rangle = \int_0^t ds\int_0^{t'} du\left[\langle v(s)v(u)\rangle - \langle v(s)\rangle\langle v(u)\rangle\right] =$$

$$= \frac{kT}{m}\int_0^t ds\int_0^{t'} du\left(e^{-\lambda|u-s|} - e^{-\lambda(u+s)}\right) .$$

Az integrálást hasonló módon végezzük el, mint a 19. feladatban. Az eredmény:

$$\langle r(t)r(t')\rangle - \langle r(t)\rangle\langle r(t')\rangle =$$

$$= \frac{kT}{m\lambda}\left\{2\min(t,t') + \frac{1}{\lambda}\left(2e^{-\lambda t} + 2e^{-\lambda t'} - 2 - e^{-\lambda|t-t'|} - e^{-\lambda(t+t')}\right)\right\}.$$

Ha a sebesség kezdeti eloszlása a Maxwell-Boltzmann— eloszlás, akkor a sebesség stacionárius Ornstein-Uhlenbeck-folyamat. A /3.45/ összefüggés és az Einstein-reláció fölhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\langle v(t)v(t')\rangle = \frac{kT}{m}e^{-\lambda|t-t'|} .$$

Az $r(t)$ folyamatot a 19. feladatban vizsgáltuk részletesen. Az ott kapott eredményeket az Einstein-reláció segitségével átirva:

$$\langle r(t)\rangle = 0 ,$$

$$\langle r(t)r(t')\rangle = \frac{2kT}{m\lambda}\left\{\min(t,t') - \frac{1}{2\lambda}\left(1 + e^{-\lambda|t-t'|} - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}\right)\right\}.$$

Könnyen belátható, hogy mivel a sebesség mind a két vizsgált esetben Gauss-folyamat, a részecske elmozdulása is Gauss-folyamat. Ebben a feladatban meghatároztuk a Gauss-folyamat eloszlásait egyértelmüen meghatározó várható értékeket és korrelációs függvényeket. Pl. ha a kezdeti sebesség eloszlása a Maxwell-Boltzmann-eloszlás, akkor

$$P(r,t|0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\langle r^2(t)\rangle}}\,e^{-\frac{r^2}{2\langle r^2(t)\rangle}},$$

ahol

$$\langle r^2(t)\rangle=\frac{2kT}{m\lambda}\left(t-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right).$$

26. feladat Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a részecske kezdeti sebességének eloszlása a Maxwell-Boltzmann-eloszlás. Ha

$$\lambda \min(t,t')=\alpha \gg 1,$$

akkor az előző feladat eredménye szerint:

$$\langle r(t)r(t')\rangle=\frac{2kT}{m\lambda}\min(t,t')\left(1+\Theta\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

Az $\Theta(\frac{1}{\alpha})$ nagyságrendü tagokat elhagyva látható, hogy $r(t)$ kumulánsai ekkor megegyeznek a

$$D=\sigma^2=\frac{2kT}{m\lambda}$$

diffuziós állandóval jellemzett Wiener-folyamat kumulánsaival, tehát $r(t)$ közelitőleg Wiener-folyamatnak tekinthető.

Ha a folyadék viszkozitása igen nagy, akkor λ értéke is nagy, és az $\alpha \gg 1$ helyzet már rövid idő elteltével fennáll. Ekkor az $r(t)$ folyamatot jó közelitéssel kezdettől fogva Wiener-folyamatnak tekinthetjük.

27. feladat Az oszcillátor Brown-mozgását leiró egyenletrendszer

$$\dot v=-\omega_0^2 x-2\gamma v+\xi,$$
$$\dot x=v,$$

ahol $2\gamma m v$ a közegellenállási erő, ξ Gauss-tipusu fehér zaj, melynek korrelációs függvénye

$$\langle\xi(t)\xi(t')\rangle=2\,\frac{2\gamma kT}{m}\,\delta(t-t').$$

Célhoz juthatnánk az x-re vonatkozó másodrendü differenciálegyenlet formális megoldásával is, érdemesebb azonban áttérnünk uj változókra az

$$a_\pm=\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\left(x+\tau_\mp v\right)$$

definicióval, ahol

$$\frac{1}{\tau_\pm}=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\ .$$

Behelyettesitéssel könnyen igazolható, hogy az a_+ és a_- mennyiségek mozgásegyenletei egymástól függetlenek, hiszen

$$\dot a_\pm=-a_\pm/\tau_\pm+\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\,\tau_\mp\,\xi.$$

Mindkét modus tehát Ornstein-Uhlenbeck-folyamattal irható le, épp ugy, ahogyan a szabad részecske Brown-mozgása során a sebesség. Az átlagértékek időbeli változása

$$\langle a_\pm(t)\rangle=a_\pm(0)e^{-t/\tau_\pm},$$

amiből leolvasható, hogy τ_+ ill. τ_- éppen az egyes módusok relaxációs idejét adja meg. A zaj tulajdonságainak felhasználásával könnyen meghatározhatók a négyzetes átlagok is:

$$\langle a_\pm^2(t)\rangle - \langle a_\pm(t)\rangle^2 = \frac{\gamma kT}{m}\tau_\mp\left(1-e^{-2t/\tau_\pm}\right),$$

$$\langle a_+(t)a_-(t)\rangle - \langle a_+(t)\rangle\langle a_-(t)\rangle = \frac{\gamma kT}{m}\frac{1}{\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right).$$

Az összes magasabb rendü kumuláns eltünik.

Az eredeti változókra az

$$x = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2m\omega_0}\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\left(a_-\tau_- - a_+\tau_+\right), \quad v = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2m\omega_0}\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\left(a_+ - a_-\right)$$

összefüggések segitségével térhetünk vissza. A fenti eredmények ismeretében a keresett átlagértékek egyszerü behelyettesitéssel adódnak. Összevonások után

$$\langle x(t)\rangle = e^{-\gamma t}\left[x_0\left(\mathrm{ch}\,\gamma_1 t + \frac{\gamma}{\gamma_1}\mathrm{sh}\,\gamma_1 t\right) + \frac{v_0}{\gamma_1}\mathrm{sh}\,\gamma_1 t\right],$$

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle x(t)\rangle^2 + \frac{kT}{m\omega_0^2}\left\{1 - e^{-2\gamma t}\left[2\frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}\mathrm{sh}^2\gamma_1 t + \frac{\gamma}{\gamma_1}\mathrm{ch}\,2\gamma_1 t + 1\right]\right\},$$

$$\langle v(t)\rangle = e^{-\gamma t}\left[v_0\left(\mathrm{ch}\,\gamma_1 t - \frac{\gamma}{\gamma_1}\mathrm{sh}\,\gamma_1 t\right) - x_0\frac{\omega_0}{\gamma_1}\mathrm{sh}\,\gamma_1 t\right],$$

$$\langle v^2(t)\rangle = \langle v(t)\rangle^2 + \frac{kT}{m}\left\{1 - e^{-2\gamma t}\left[2\frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}\mathrm{sh}^2\gamma_1 t - \frac{\gamma}{\gamma_1}\mathrm{ch}\,2\gamma_1 t + 1\right]\right\},$$

$$\langle x(t)v(t)\rangle = \langle x(t)\rangle\langle v(t)\rangle + \frac{2\gamma kT}{m\gamma_1^2}e^{-2\gamma t}\mathrm{sh}^2\gamma_1 t,$$

ahol

$$\gamma_1 \equiv \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,.$$

Jól látható, hogy a $t\to\infty$ esetben az ekvipartició tételnek megfelelő értékeket kapjuk meg:

$$\langle x^2(t)\rangle \to \frac{kT}{m\omega_0^2}, \quad \langle v^2(t)\rangle \to \frac{kT}{m}.$$

A fent meghatározott mennyiségekkel kapcsolatos kummulánsokon kivül az összes többi zérus, ezért az x ill. a v változóhoz tartozó átmeneti valószinüségek

$$P(x,t\,|\,x_0,v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left[\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2\right]}}\,e^{-\frac{(x-\langle x(t)\rangle)^2}{2\left[\langle x^2(t)\rangle-\langle x(t)\rangle^2\right]}},$$

$$P(v,t\,|\,x_0,v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left[\langle v^2(t)\rangle - \langle v(t)\rangle^2\right]}}\,e^{-\frac{(v-\langle v(t)\rangle)^2}{2\left[\langle v^2(t)\rangle-\langle v(t)\rangle^2\right]}}.$$

Amennyiben a v_0 mennyiség nem ismert a megfigyelés kezdetén, a kezdősebességre is átlagolni kell a

$$\langle v_0\rangle_T = 0, \quad \langle v_0^2\rangle_T = \frac{kT}{m}$$

összefüggéseknek megfelelően.

A tulcsillapitott eset a

$$\gamma \gg \omega_0$$

feltétel teljesülése esetén valósul meg. Ekkor

$$\tau_+ \approx \frac{1}{2\gamma}, \quad \tau_- \approx \frac{2\gamma}{\omega_0^2},$$

és $\tau_- \gg \tau_+$, vagyis az $a_- \approx \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\,x$ mennyiség sokkal lassabban változik, mint a_+, ami egyébként éppen a sebességgel arányos. Amennyiben τ_+-nál jóval hosszabb időtartamokig vizsgáljuk a folyamatot ($\gamma t \gg 1$), a_+ érdektelen. a_- egyenletéből pedig azt kapjuk, hogy

$$\dot{x} = -\frac{\omega_0^2}{2\gamma}x + \zeta,$$

ahol a ζ Gauss-zaj korrelációs függvénye

$$\langle \zeta(t)\zeta(t')\rangle = 2D\,\delta(t-t'),$$

$$D = \frac{kT}{2m\gamma}.$$

A tulcsillapitott határesetben tehát a kitérés a fenti Langevin-egyenlettel definiált Ornstein-Uhlenbeck- folyamatnak tesz eleget. Eredményünk a kiindulási egyenletből is megkapható, amennyiben ott $\dot{v}$ -ot elhanyagoljuk.

Ajánlott irodalom

Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan témakört, melyet az előző fejezetekben nem érintettünk, s megadjuk az ezekkel kapcsolatos legkönnyebben hozzáférhető irodalmat.

A Fokker-Planck- egyenlet megoldása pálya-integrálok segitségével

ONSAGER, L. , MACHLUP, S.: Phys. Rev. 91, 1505, 1512 /1953/

GRAHAM, R.: Quantum Statistics in Optics and Solid State Physics, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 66. p.l. Springer Verlag, 1973.

GRAHAM, R.: Path Integral Methods in Nonequilibrium Thermodynamics and Statistics, in Stochastic Processes in Nonequilibrium Systems, Lecture Notes in Physics 84, p 83, eds.: L. Garrido, P. Seglar, P.J. Shepherd, Springer Verlag, 1978.

Telefonvonalak forgalma, sorbanállási problémák

BRETSCHNEIDER, G.: in Cooperative Phenomena p. 283, ed.: H. Haken, North Holland Publishing Company, 1974.

FELLER, W.: Bevezetés a valószinüségszámitásba és alkalmazásaiba, Müszaki Könyvkiadó, 1978.
TAKÁCS, L.: Introduction to the theory of Queues, Oxford University Press, 1962.

Nem természettudományi alkalmazások

WEIDLICH, W.: Collective Phenomena 1, 51 /1972/
WEIDLICH, W.: in Cooperative Phenomena, ed.: H. Haken, North Holland Publishing Company, 1974.
WEIDLICH, W. ; HAAG, G.: Collective Phenomena, /megjelenés alatt./

A stochasztikus folyamatok és a kvantummechanika kapcsolata

FÉNYES, I.: Z. Physik 132, 81 /1952/
NELSON, E.: Phys. Rev. 150, 1079 /1966/
LA PEÑA, L.de: Phys. Lett. 27 A, 594 /1968/
LA PEÑA, L.de ; CETTO, A.M.: J. Math. Phys. 18, 1612 /1977/