3. 1 dimenziós mozgások, fázistér

3.1. Az 1 dimenziós mozgások leírása, a fázistér fogalma

1 dimenziós mozgás alatt egy tömegpont olyan mozgását értjük ebben a jegyzetben, ami egy egyenes mentén történik. Így a tömegpont pozíciója egyetlen koordinátával jellemezhető, ezt a koordinátát tipikusan x-szel jelöljük. A tömegpont mozgásegyenlete így a következő alakú:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

ahol az F erő egy előjeles skalármennyiség, és az x koordinátától, az $\dot{x}$ sebességtől, valamint a t időtől függhet expliciten. Ha az erő csak a helytől függ: $F = F(x)$, továbbá az $F(x)$ függvény integrálható, akkor mindig definiálhatunk egy $V(x)$ potenciálfüggvényt a következő módon[1]:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x', \tag{2}$$

ahol x_0 egy tetszőlegesen választott pont koordinátája. A mozgásegyenletet a potenciál segítségével felírva

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}\,V(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

adódik. Ez átalakítható az alábbiak szerint:

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}\,V(x)}{\mathrm{d}x}\,\dot{x}, \tag{4}$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = -\frac{\mathrm{d}\,V(x)}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right) = 0. \tag{6}$$

Az elsőből a második sor úgy következik, hogy x-et az idő függvényének tekintjük, egy $x(t)$ függvénynek, ami a mozgásegyenlet megoldása. Ennek megfelelően az (5) alakban az időderiválás a ténylegesen megvalósuló mozgás során jelentkező időbeli megváltozást írja le. A (6) alak így azt jelenti, hogy a zárójelben lévő mennyiség a megvalósuló mozgás során időben állandó:

$$E := \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \equiv T + V = \text{állandó}. \tag{7}$$

Az E mennyiséget mechanikai energiának nevezzük. A mechanikai energia a T kinetikus és a V potenciális energia összege. A (7) képlet a továbbiak szempontjából meghatározó jelentőségű lesz.

Valamely mozgás során a kinetikus és a potenciális energia részesedése a teljes mechanikai energiából folyamatosan változik. V-t szükségszerűen meghatározza a tömegpont x pozíciója,

[1]A potenciál általános definíciójában szereplő vonalintegrál 1 dimenzióban „hagyományos” (Riemann-féle) integrállá egyszerűsödik, ami két pont között mindig egyértelmű.

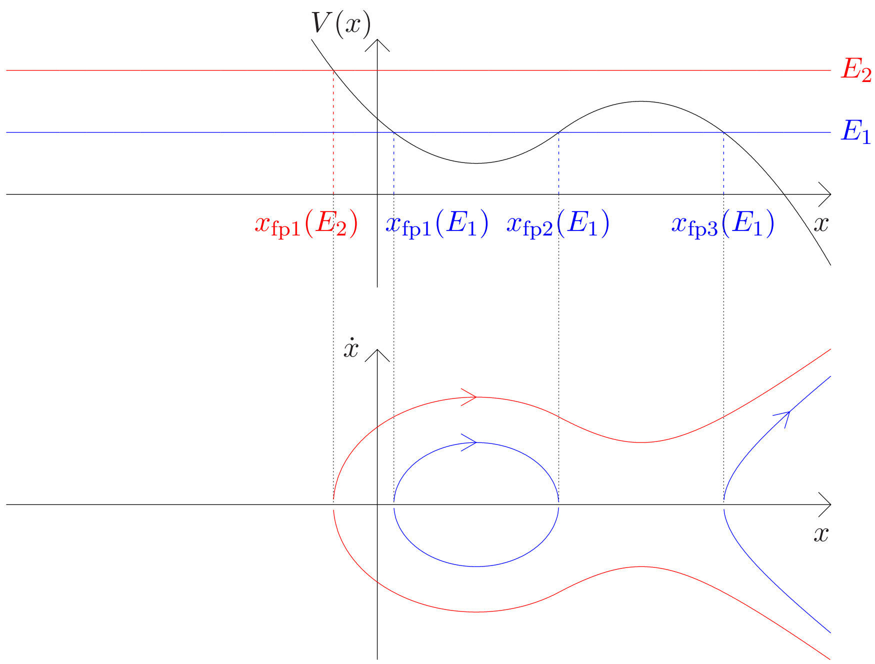
így a T kinetikus energia is felírható a hely függvényében, ha az E mechanikai energia adott: $T = E - V(x)$. A kinetikus energiából a tömegpont sebessége is adódik:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x), \tag{8}$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)}. \tag{9}$$

Vagyis fel tudtuk írni az $\dot{x}(x)$ függvényt, az előjeltől eltekintve egyértelműen. Az előjel, vagyis a mozgás iránya a kinetikus energiából természetesen nem következhet.

Adott E energia mellett ezt a függvényt ábrázolhatjuk is (1. ábra, kék, ill. piros görbe az alsó grafikonon). Az $\dot{x}(x)$ függvény pozitív és negatív ágára együttesen úgy is tekinthetünk, mint



1. ábra. Egy $V(x)$ potenciálfüggvény (felső grafikon, fekete vonal), és a példaként tekintett E_1, ill. E_2 energiaszint mellett lejátszódó mozgás trajektóriája (a kék, ill. a piros görbe) az $(x, \dot{x})$ síkban (alsó grafikon). A mozgás lejátszódásának az irányát nyíl jelöli. A mozgás x_{fp} fordulópontjainak a tulajdonságait a szöveg részletezi.

egy görbe az $(x, \dot{x})$ síkban, amit a (7) egyenlet, vagy annak átrendezett (9) alakja határoz meg, ha E adott. Az $(x, \dot{x})$ síkot fázistérnek nevezzük. Jelentőségét az adja, hogy ha ebben a síkban kijelölünk egy pontot, és megvizsgáljuk, hogy a pontnak megfelelő x és $\dot{x}$ kezdeti feltételekkel milyen mozgás mehet végbe, akkor ez a mozgás egyértelmű lesz (hiszen a mozgást éppen két kezdeti feltétel határozza meg). Hogyan látjuk a mozgás lejátszódását a fázistérben? Vegyük észre, hogy egy pont kijelölésével meghatározzuk a potenciális és a kinetikus energiát (x, ill. $\dot{x}$ értékén keresztül), és így a teljes E mechanikai energiát is. Mivel a mechanikai energia a mozgás során állandó, a mozgás a (7) [vagy (9)] egyenlet által meghatározott görbén fog végighaladni a fázistérben. Ezt a görbét a mozgás trajektóriájának nevezzük. A pozitív $\dot{x}$ (azaz felső) félsíkon a mozgás jobbra, a negatív $\dot{x}$ (alsó) félsíkon balra történik (a sebesség definíciója szerint). A (9) képlet szerint a trajtória mindig szimmetrikus az x tengelyre.

Hol metszi a trajektória az x tengelyt? Milyen x koordinátánál? Jelöljük ezt x_{fp}-vel. A metszéspont definíció szerint ott van, ahol $\dot{x} = 0$. Ekkor $T = 0$, vagyis (7) szerint

$$E = V(x_{\mathrm{fp}}). \tag{10}$$

Ez egy egyenlet x_{fp}-re, aminek lehet egy vagy több megoldása, akár E-től függően. Fontos, hogy a megoldás értéke mindig függ E-től. Az ilyen pontok jelentősége, amint az 1. ábrán is látható, abban rejlik, hogy ezek határolják a mozgás számára megengedett tartományt. A mozgás ugyanis csak ott mehet végbe, ahol

$$E \geq V(x), \tag{11}$$

hiszen $E - V = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \geq 0$ kell legyen. A (11) feltételnek eleget tévő tartományokat tipikusan (10)-nak megfelelő pontok határolják. A trajektórián lejátszódó mozgás szempontjából ezek fordulópontok: mivel az alsó félsík balra, a fölső félsík pedig jobbra történő mozgást ír le, az egyik félsíkról a másikra való áthaladás szükségszerűen a mozgás irányának a megváltozásával jár együtt (lásd az 1. ábrát).[2]

Az 1. ábrán megfigyelhetjük, hogy a mozgás lehet korlátos és nem korlátos. Az előbbi esetben a mozgást balról és jobbról is fordulópont határolja, és a mozgás — miután „körbeért" a trajektórán — önmagát ismétli, azaz *periodikus*.

Észrevehetjük, hogy a fázistérbeli trajektória (7) vagy (9) egyenlete nem hordoz közvetlen információt a mozgás időbeli lefolyására vonatkozóan. Azonban ezek az egyenletek valójában egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet képviselnek, ami az $x(t)$ függvényre vonatkozik. Kiderül, hogy az inverz $t(x)$ függvényt könnyebb kifejezni: $\dot{x} \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ felhasználásával és a (9) alak reciprokát véve:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)}}, \tag{12}$$

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} \mathrm{d}x'. \tag{13}$$

Az előjel a mozgás irányától ($\dot{x}$ előjelétől) függ. Ez a képlet valójában annak a kiszámítására alkalmas, hogy mennyi időbe telik eljutni valamilyen x_0 koordinátától valamilyen ettől eltérő x koordinátába. Ha x_0-t megfeleltejük egy periodikus mozgás bal oldali fordulópontjának (x_{bal}), x-et pedig ugyanezen mozgás jobb oldali fordulópontjának (x_{jobb}), akkor éppen a periodikus mozgás T_{p} periódusidejének kapjuk meg a felét. Azaz:

$$T_{\mathrm{p}} = \sqrt{2m} \int\limits_{x_{\mathrm{bal}}}^{x_{\mathrm{jobb}}} \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} \mathrm{d}x'. \tag{14}$$

[2] Ha az $E = V(x)$ egyenlőség nem izolált pontokban (fordulópontokban), hanem egy folytonos intervallumon teljesül (ez az egyszerűség kedvéért legyen nyitott intervallum), akkor ezen intervallum tetszőleges pontjában tartózkodhat a tömegpont, de a sebessége 0, és tetszőlegesen hosszú ideig 0 is marad, mivel ilyenkor a potenciál hely szerinti deriváltja is 0. Vagyis ilyenkor a tömegpont nem mozog.

3.2. A trajektória grafikus felrajzolásáról

A fázistérbeli trajektóriát, azaz az $\dot{x}(x)$ többértékű függvényt, vagyis az $(x, \dot{x})$ síkban a (7) egyenlet által meghatározott görbét grafikus alapokon is felrajzolhatjuk, ha ismerjük a $V(x)$ potenciálfüggvény grafikonját, és ugyanezen az ábrán az E energia szintjét.

Ebben elsősorban a (7) képlet fog segíteni, ha átrendezzük:

$$T = E - V. \tag{15}$$

Tekintsünk valamilyen adott, tetszőlegesen választott olyan x_0 helyet, ahol (11) szerint tartózkodhat a tömegpont. Nézzük meg, hogy ha innen elindulunk mondjuk jobbra, akkor csökken vagy nő a különbség az E szintje és a $V(x)$ függvény között, ezt le tudjuk olvasni a grafikonról. Ha csökken, akkor a (15) képlet értelmében errefelé a T-nek szintén csökkennie kell, és a

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2T}{m}} \tag{16}$$

összefüggés (a kinetikus energia definíciója) szerint ebben az irányban az $\dot{x}$ abszolútértéke is csökken. Eszerint a fázistér felső felébe egy jobbra csökkenő függvényt kell rajzolnunk, az alsó felébe pedig ennek az x tengelyre tükrözött párját. A felső és az alsó ág eszerint közeledni fog egymáshoz. Ha az E és a $V(x)$ közötti különbség nem csökken, hanem nő, akkor értelemszerűen T és ezért $\dot{x}$ is nő, és a rajzon ennek megfelelően a trajektória felső és alsó ága távolodni fog egymástól. Ha visszatérünk a választott x_0 helyhez, és nem jobbra, hanem balra indulunk el, akkor hasonló megfontolások alapján rajzolhatjuk fel a fázistérbeli trajektóriának az x_0-tól balra eső részét. Ha nem írunk beosztást az $\dot{x}$ tengelyre, akkor mindegy, hogy a trajektóriának az x_0-beli értékét milyen $\dot{x}$ értékhez rajzoljuk.

Mi történik akkor, ha a $V(x)$ függvény maximumához vagy minimumához érkezünk? Itt $T = E - V$-nek minimuma, ill. maximuma van, így (16) szerint a fázistérbeli $\dot{x}(x)$ függvény is ugyanígy viselkedik.

És mi történik, ha az E és a V közötti különbség elfogy? Ekkor az $\dot{x}$ értelemszerűen nullává válik, itt van a mozgásnak fordulópontja. Olyan helyen, ahol a különbség nemnulla, semmiképpen sem találhatunk fordulópontot. Azokon a tartományokon pedig, ahol $E < V$, vagyis T negatív lenne, egyáltalán nem tartózkodhat a tömegpont, ide nem jut el a fázistérbeli trajektória.

Ha figyelünk arra is, hogy $\dot{x}(x)$ különböző extrémumainak az értéke egymáshoz viszonyítva kisebb vagy nagyobb (ami következik abból, hogy az E és a V közötti különbség kisebb vagy nagyobb), akkor mindezen információk alapján fel tudjuk rajzolni a fázistérbeli trajektóriát kvalitatíve helyesen (vagyis úgy, hogy a fordulópontjai és a szélsőértékei „kvalitatíve” jó helyen vannak, és minden részének a monotonitása helyes).

A következő hasonlat érthetőbbé teszi a jelen szakaszt, és az egész fejezetet általában véve is: A tömegpontnak van valamennyi pénze (E), és ahhoz, hogy valamilyen x helyen tartózkodjon, $V(x)$ pénzt letétbe kell helyeznie. A maradék pénzt (T-t) arra fordítja, hogy $\dot{x}$ sebességgel mozogjon. Miközben elmozdul, visszakapja az eredeti x helyért adott $V(x)$ letétet, és elhelyezi az új x helyhez rendelt $V(x)$ letétet. Ha a teljes E pénzét letétbe helyezte, akkor nem mozog. Ott pedig nem is tartózkodhat, ahol a tartózkodáshoz szükséges letétet nem tudja előteremteni (azaz $V(x) > E$).

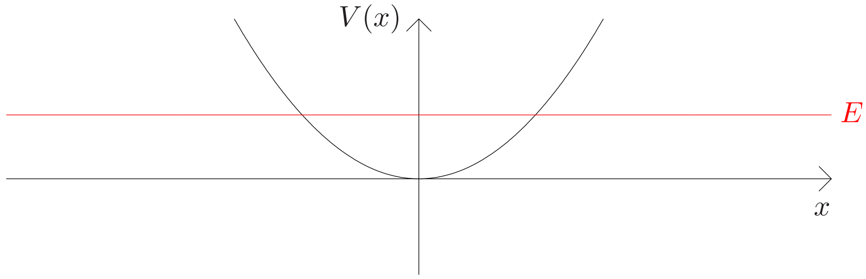
Példa

Tekintsük a következő potenciált:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

ahol $k > 0$, és legyen $E > 0$. Adjuk meg a mozgás fordulópontjait! Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $x = 0$ pontban mért $\dot{x}(x = 0)$ sebességet! Mindennek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát!

A potenciálfüggvény a következőképpen néz ki (fekete vonal):



A mechanikai energiának a feladat feltétele szerint felvett, pirossal bejelölt szintjéből leolvasható, hogy a mozgásnak 2 fordulópontja van. A (10) egyenlet szerint:

$$E = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{fp}}^2,$$

$$x_{\mathrm{fp}\,1,2} = \mp\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

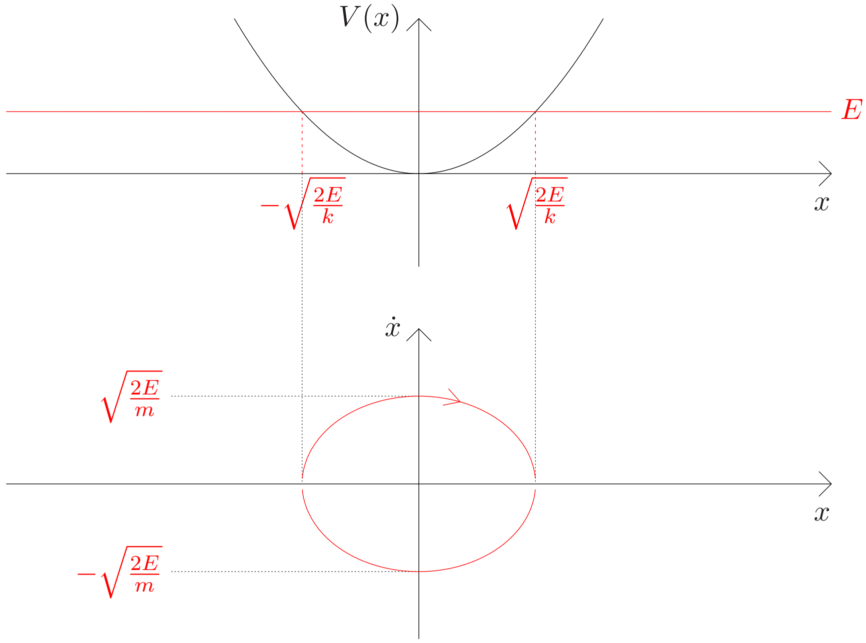
A fázistérbeli trajektória egyenlete a (7) kifejezésnek megfelelően:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E.$$

Ez egy ellipszis egyenlete [1]. A (7) kifejezés használata a (9)-tel szemben gyakran azért előnyös, mert a görbe típusát könnyebb belőle leolvasni. A (9) alakból viszont egyszerű behelyettesítéssel adódik az $x = 0$ pontban mért sebesség:

$$\dot{x}(x = 0) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x = 0)\big)} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}k \cdot 0^2\right)} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Fontos, hogy a sebesség mindkét előjelet felveheti. A fázistérbeli trajektória mindezek alapján így néz ki (alsó grafikon):



Hivatkozások

[1] Koordináta-geometriai segítség:

- Ellipszis: `http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html`, (12) egyenlet
- Hiperbola: `http://mathworld.wolfram.com/Hyperbola.html`, (8) egyenlet
- „Fekvő” parabola: `http://mathworld.wolfram.com/Parabola.html`, (5) egyenlet