5. Centrális mozgás

5.1. Centrális mozgás, effektív radiális potenciál

Centrális mozgásról akkor beszélünk, ha a mozgás olyan potenciálban történik, amely kizárólag az origótól mért távolságtól függ[1]:

$$V(\mathbf{r}) = V(r). \tag{1}$$

A potenciálra ilyenkor szintén azt mondjuk, hogy centrális.

A centrális mozgás mindig síkmozgás, ezt Newton-képben (tehát a mechanika „hagyományos” megfogalmazásában, erők és forgatónyomatékok használtával) lehet a legkönnyebben belátni. Tekintsük először a centrális potenciálhoz rendelhető erőt. Ennek a nagysága szintén csak az origótól mért távolságtól függ, és iránya radiális:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\, V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\mathrm{grad}\, r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\mathbf{e}_r. \tag{2}$$

Itt $\mathbf{e}_r$ a vizsgált pontra vonatkozó radiális irányú egységvektor. Az erő radiális irányának a következménye, hogy az $\mathbf{N}$ impulzusmomentum megmarad:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\mathbf{r}\times\mathbf{e}_r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} r\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_r = 0, \tag{3}$$

mivel egy vektornak az önmagával vett vektoriális szorzata 0. Az impulzusmomentum definíciója szerint tehát

$$m\mathbf{r}\times\mathbf{v} \equiv \mathbf{N} = \text{állandó}. \tag{4}$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai miatt $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v}$ is merőlegesek $\mathbf{N}$-re, egy állandó irányú vektorra. Ez csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v}$ az $\mathbf{N}$-re merőleges síkban maradnak a mozgás során mindvégig. Vagyis a tömegpont centrális potenciálban *síkmozgást* végez.

A továbbiakban elegendő a mozgás síkjában vizsgálni a dinamikát. A mozgásegyenleteket Newton- és Lagrange-képben is könnyen fel tudjuk írni, az alábbiakban mindkét levezetés olvasható.

A) Newton-képben

A centrális potenciálhoz rendelhető erő radiális, ill. tangenciális komponense a következő:

$$F_r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}, \tag{5a}$$

$$F_\varphi = 0. \tag{5b}$$

A gyorsulás radiális, ill. tangenciális komponense[2]:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \tag{6a}$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{6b}$$

[1] Elvileg elegendő, ha a potenciál kizárólag valamely adott ponttól mért távolságtól függ, mi azonban mindig ebben az adott pontban helyezzük el a koordináta-rendszerünk origóját.

[2] A levezetés megegyezik a gyorsulásnak a hengerkoordináta-rendszerbeli komponenseire vonatkozó levezetéssel, ha elhagyjuk a z komponenst, lásd például: `http://arpad.elte.hu/~bene/elmfiz1/01/1b_eloadas.html`.

A mozgásegyenlet két komponense tehát:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}, \tag{7a}$$

$$mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \tag{7b}$$

Ez a két egyenlet határozza meg a mozgást.

A (7b) komponenst átírva:

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 0. \tag{9}$$

A (9) egyenlet zárójelében szereplő kifejezés, amit konvenció szerint N-nel jelölünk, időben tehát állandó[3]:

$$N := mr^2\dot{\varphi} = \text{állandó}. \tag{10}$$

B) Lagrange-képben

A Lagrange-formalizust minden akadály nélkül alkalmazhatjuk a problémára, az alább olvasható gondolatmenet a VI. részben részletezett szisztémát követi.

1.) A vizsgált tömegpont síkbeli mozgását két változóval tudjuk jellemezni. Az egyszerűség kedvéért legyenek ezek az x és az y koordináta.

2.) Kényszer *nincs* a rendszerben.

3.) Két általános koordinátát kell választanunk, legyenek ezek az r radiális koordináta és a φ polárszög.

4.)

$$x = r\cos\varphi\,, \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}\,,$$
$$y = r\sin\varphi\,, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}\,.$$

5.)

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

(azonnal is írható: radiális és tangenciális sebességkomponensek négyzetösszege),

$$V = V(r)$$

(csak annyit teszünk fel, hogy φ-től nem függ és r-től függhet),

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)\,.$$

[3] Ez lényegében Kepler II. törvénye: a vezérsugár által egy infinitezimális $\mathrm{d}t$ idő alatt súrolt $\mathrm{d}A$ területet az $\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\mathrm{d}\varphi$ képlettel számíthatjuk ki, így $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ = állandó ekvivalens azzal, hogy $r^2\dot{\varphi}$ = állandó.

6.) A számunkra fontos deriváltak:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\,.$$

Innen az Euler–Lagrange-egyenletek:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V(r)}{\partial r}, \tag{11a}$$
$$mr^2\dot{\varphi} = \text{állandó}, \tag{11b}$$

Megkaptuk tehát a fizikai rendszerünk mozgásegyenleteit. Ha a φ általános koordinátához tartozó általános impulzust, a konvenciót követve, N-nel jelöljük:

$$N := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\,, \tag{12}$$

akkor a (11b) Euler–Lagrange-egyenlet egyszerűen így írható:

$$N = \text{állandó}\,. \tag{13}$$

Könnyen belátható, hogy N éppen az impulzusmomentum-vektornak a síkra merőleges (egyetlen nemnulla) komponense. Mint ilyen, N előjeles mennyiség, és N abszolútértéke megegyezik az impulzusmomentum-vektor hosszával:

$$|N| = |\mathbf{N}|\,. \tag{14}$$

A levezetésről és az előjelekről bővebb információ a külön letölthető Függelékben olvasható.

N a mondottak szerint a mozgás során állandó, így a továbbiakban egy, a kezdeti feltételek által meghatározott konstansként tekintünk rá. A (10), ill. (12) definícióból kifejezhetjük $\dot{\varphi}$-ot ezen konstans, a tömegpont m tömege és az r változó függvényeként:

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2}, \tag{15}$$

és ezt felhasználhatjuk a (7a), ill. (11a) mozgásegyenlet-komponensben:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V(r)}{\partial r}, \tag{16}$$
$$m\ddot{r} = mr\frac{N^2}{m^2r^4} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}, \tag{17}$$
$$m\ddot{r} = \frac{N^2}{mr^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}. \tag{18}$$

Tekintve, hogy N állandó (de csak ezért!), (18) egy *zárt*, önmagában megoldható differenciálegyenlet az $r(t)$ függvényre. A radiális irányú mozgást tehát a tangenciális irány vizsgálata *nélkül* le tudjuk írni. Sőt, ennél többet is mondhatunk: a (18) egyenlet olyan alakú, mint egy m tömegű tömegpont 1 dimenziós mozgását meghatározó mozgásegyenlet, amiben a $-\partial V(r)/\partial r$ erőn kívül egy „látszólagos", valójában a tehetetlenségi erők családjába tartozó erő, az $F_{\mathrm{cf}} = N^2/(mr^3)$ centrifugális erő is megjelenik. Lényeges különbség egy általános 1 dimenziós mozgáshoz képest, hogy a helykoordináta itt nem a teljes számegyenesen, hanem csak a pozitív féltengelyen van értelmezve: r definíció szerint az origótól mért távolság, így $r \geq 0$.

(18) jobb oldalát továbbalakítva:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{N^2}{2mr^2} + V(r)\right). \tag{19}$$

Eszerint definiálhatunk egy effektív potenciált mint egy centrifugális tag és a valódi potenciál összegét:

$$V_{\mathrm{eff}}(r) := \frac{N^2}{2mr^2} + V(r), \tag{20}$$

és a radiális mozgásra tekinthetünk úgy, mint egy tömegpontnak a V_{eff} effektív potenciálban történő 1 dimenziós mozgására:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}(r)}{\partial r}. \tag{21}$$

Így a radiális mozgás tulajdonságait az 1 dimenziós mozgásoknál megismert általános módszerekkel jellemezhetjük.

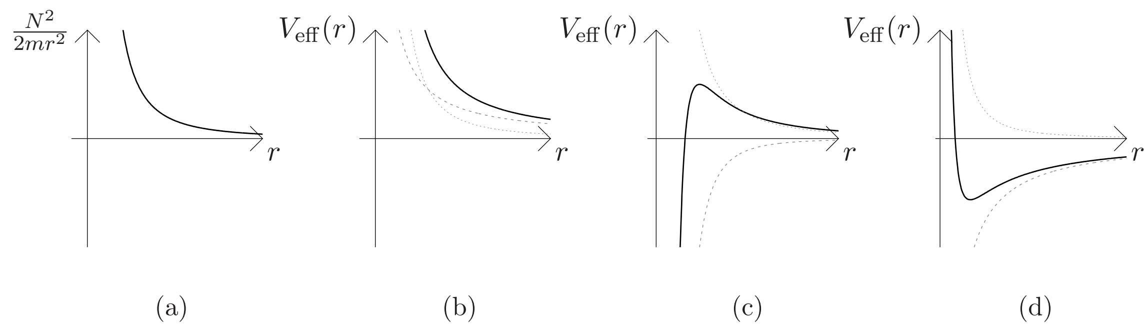
A mozgás teljes leírásához az $r(t)$ függvény mellett szükség van a $\varphi(t)$ függvényre is. Ha az $r(t)$ függvényt már ismerjük, akkor $\varphi(t)$ egyszerűen a (15) képlet integrálásával adódik:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{N}{m}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r(t')^2}\,\mathrm{d}t', \tag{22}$$

ahol felhasználtuk, hogy N időben állandó.

5.2. Körpálya, kis rezgések

A mozgás vizsgálatát az előző szakaszban mondottak szerint érdemes a radiális komponenssel kezdeni. A radiális irányú mozgás szempontjából alapvető fontosságú az effektív potenciál $N^2/(2mr^2)$ centrifugális tagja: ez hosszú távon (nagy r-re) lecsengő, de az origónál divergáló függvény (1a. ábra). A vizsgált $V(r)$ valódi potenciál hosszú távon általában szintén lecseng. Ha $V(r)$ taszító jellegű, akkor $V_{\text{eff}}(r)$ monoton csökkenő függvény (1b. ábra). Ha $V(r)$ vonzó és „erős", akkor $V_{\text{eff}}(r)$-nek tipikusan csúcsa van (1c. ábra), míg vonzó és „gyenge" $V(r)$ mellett tipikusan egy gödör alakul ki $V_{\text{eff}}(r)$-ben (1d. ábra). Ez utóbbi esetben $E < 0$-ra az r változóban korlátos mozgás, rezgés alakul ki, azaz az $r(t)$ függvény periodikus. Ne felejtsük el, hogy ez a teljes (x, y) síkban [más jelöléssel (r, φ) síkban] történő mozgás szempontjából annyit jelent, hogy a tömegpont periodikusan közelebb és távolabb kerül az origótól.



1. ábra. (a): A centrifugális potenciáltag önmagában ábrázolva. (b)-(d): Az effektív potenciál (b) taszító, (c) vonzó és „erős", valamint (d) vonzó és „gyenge" valódi potenciál mellett. A szürke szaggatott, ill. pontozott vonal a példákhoz felhasznált valódi potenciált, ill. centrifugális potenciáltagot mutatja.

Legyen a $V_{\text{eff}}(r)$ potenciálnak szélsőértéke az r^* helyen. Az 1 dimenziós mozgásokra vonatkozó ismereteink alapján tudjuk, hogy az r változó szempontjából ez egy egyensúlyi hely: ha a tömegpont az r^* helyen tartózkodik, és $\dot{r} = 0$, akkor a tömegpont r^*-ban is marad:

$$r(t) = r^*. \tag{23}$$

Mit jelent ez az (r, φ) síkbeli mozgásra nézve? $r(t) = r^* =$ állandó annyit tesz, hogy a tömegpont az origótól *mindig ugyanolyan távolságban* található meg. Az ilyen pontok halmaza a síkban éppen az origó körüli r^* sugarú kör. Azt várjuk tehát, hogy a tömegpont ebben az esetben körpályán halad.

Nézzük meg, hogy $r(t) = r^*$ mellett mit kapunk a $\varphi(t)$ függvényre! (22) alapján:

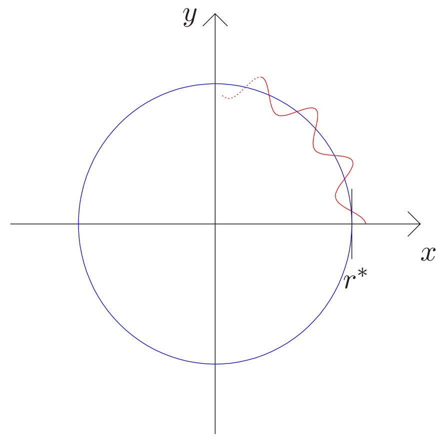
$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{N}{m}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r^{*2}}\,\mathrm{d}t' = \varphi(t_0) + \frac{N}{mr^{*2}}(t - t_0), \tag{24}$$

hiszen r^* egy konstans mennyiség. Azt találtuk tehát, hogy φ időben egyenletesen nő, miközben r állandó. Ez nem más, mint egy *egyenletes körmozgás* (2. ábra, kék vonal). A körmozgás szögsebessége:

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^{*2}}, \tag{25}$$

akár (24)-at deriváljuk, akár (15)-be helyettesítünk be. Erre az értékre vezessük be az Ω^* jelölést:

$$\Omega^* := \frac{N}{mr^{*2}}. \tag{26}$$



2. ábra. r^* sugarú egyenletes körmozgás pályája (kék vonal), és egy körpálya körüli kis rezgés pályájának egy szakasza (piros vonal).

r^* mint a radiális irányú mozgás egyensúlyi pontja lehet stabil vagy instabil, $\partial^2 V_{\text{eff}}(r)/\partial r^2|_{r=r^*}$ előjelétől függően. Ha stabil, akkor létrejöhetnek körülötte kis rezgések,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \right|_{r=r^*}} \tag{27}$$

körfrekvenciával. Az r változó kis rezgései — mint közeledés és távolodás az origótól — az (r, φ) síkban az r^* sugarú kör körülötti ingadozásnak felelnek meg (2. ábra, piros vonal). Az r változó időfüggésének köszönhetően a (15) képlet szerint a $\dot{\varphi}$ szögsebesség is időfüggő lesz (ez egyébként éppen a területi sebesség megmaradását illusztrálja).

Belátható, hogy a kis rezgésekhez rendelhető $\dot{\varphi}$ szögsebesség a körmozgás Ω^* szögsebessége körül ingadozik, és az ingadozás időbeli ütemét ebben az esetben is az ω körfrekvencia írja le. Ennek a következménye, hogy a kis rezgésekhez rendelhető (r, φ) síkbeli pálya (mint amilyen a 2. ábra piros vonala) akkor *záródik*, ha az Ω^* mennyiség és az ω körfrekvencia aránya felírható két egész szám hányadosaként, azaz racionális. Ez a gondolatmenet azonban semmit nem mond el azoknak a pályáknak a záródásáról, amelyek nem kellően kis amplitúdóval ingadoznak az r^* sugarú kör körül.