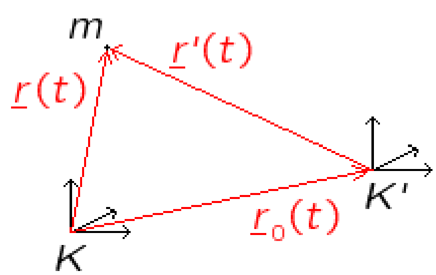
1. A mozgás leírása gyorsuló vonatkoztatási rendszerben

Képzeljük el, hogy vonaton utazunk, és az egyenes pályán egyenletesen haladó vonaton leteszünk a padlóra egy labdát. A labda mozgását a vonathoz rögzített vonatkoztatási rendszerben szeretnénk leírni. Ennek szemléltetésére egy vonalzót is a padlóra helyezünk a labda mellé úgy, hogy a beosztás párhuzamosan álljon a menetiránnyal, és előrefelé növekedjen. A nullpontot a labda mellé igazítjuk, ez jelöli a koordináta-rendszer origóját. A koordináta-rendszer egyik tengelyét a vonalzó beosztással ellátott éle jelöli ki, nevezzük ezt x' tengelynek.

Amíg a vonat egyenletesen halad, addig a labda a koordináta-rendszerünkben nyugalomban marad, x' koordinátája időben konstans 0. A továbbra is egyenes pályán haladó vonat azonban elkezd fékezni. Ekkor a labda előregurul: x' koordinátája megnő. Tekintve, hogy előzőleg nyugalomban volt, az x' koordináta növekedése a labda *gyorsulását* jelenti. A gyorsulás azonban úgy vált 0-tól különbözővé, hogy „ennek érdekében” szemmel láthatóan *nem hatott valóságos erő* a labdára. Levonhatjuk a következtetést, hogy a fékező vonat nem inerciarendszer, és *nem használható benne Newton II. törvénye*, módosítás nélkül legalábbis semmi esetre sem.



1. ábra. Egy m tömegű tömegpont két különböző koordináta-rendszerben.

Vizsgáljuk meg egy m tömegű tömegpont mozgását az 1. ábrán látható két koordináta-rendszerben. A K-val jelölt koordináta-rendszer legyen inerciarendszer, ebben a koordináta-rendszerben a tömegpont mozgását, azaz a tömegpont $\mathbf{r}(t)$ helyvektorának időfejlődését Newton II. törvénye határozza meg:

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \sum \mathbf{F}, \tag{1}$$

ahol $\sum \mathbf{F}$ a tömegpontra ható összes erő eredőjét jelöli.

Most térjünk át a mozgás vizsgálatára a K'-vel jelölt koordináta-rendszerben. A K' rendszer origójának a K rendszerbeli helyvektora, az $\mathbf{r}_0(t)$ vektor legyen az időnek egy ismert függvénye, azaz a K' rendszer mozogjon a K-hoz képest, de a K' rendszer se forogjon (vagyis a K és a K' tengelyei maradjanak páronként párhuzamosak). A tömegpont K rendszerbeli $\mathbf{r}(t)$ helyvektora az ábra alapján kifejezhető a tömegpont K' rendszerbeli $\mathbf{r}'(t)$ helyvektorával és az $\mathbf{r}_0(t)$ vektorral, a vektori összeadás szabályai szerint:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t). \tag{2}$$

Ezt átrendezve $\mathbf{r}'(t)$ így írható:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0(t). \tag{3}$$

Kétszeri idNew deriválással[1]:

$$\ddot{\mathbf{r}}'(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) - \ddot{\mathbf{r}}_0(t). \tag{4}$$

A K rendszerbeli helyvektor második idődeviráltjára vonatkozó mozgásegyenletet ismerjük, ez Newton II. törvénye, az (1) egyenlet. Ezt behelyettesítve, továbbá bevezetve az

$$\mathbf{a}_0(t) := \ddot{\mathbf{r}}_0(t) \tag{5}$$

jelölést a K' rendszer gyorsulására, (4)-ből a következő mozgásegyenlet adódik a tömegpont K' rendszerbeli $\mathbf{r}'(t)$ helyvektorára:

$$\ddot{\mathbf{r}}'(t) = \frac{\sum \mathbf{F}}{m} - \mathbf{a}_0(t). \tag{6}$$

Ismertebb alakban:

$$m\ddot{\mathbf{r}}'(t) = \sum \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0(t). \tag{7}$$

Ez az eredmény interpretálható úgy is, hogy gyorsuló (de nem forgó) koordináta-rendszerben úgy kell felírni egy tömegpont mozgásegyenletét, hogy a valóságos erőkön (a $\sum \mathbf{F}$ tagon) kívül egy ún. tehetetlenségi erőt is figyelembe veszünk. Ennek a tehetetlenségi erőnek a nagysága arányos a tömegpont *saját* tömegével és a koordináta-rendszer gyorsulásának a nagyságával, iránya pedig a koordináta-rendszer gyorsulásával *ellentétes*. (Ha a koordináta-rendszer forogna is, további tehetetlenségi erőket is be kellene vezetni.)

Ennek a tehetetlenségi erőnek a jelenléte mellett érthetővé válik, hogy a fékező vonathoz képest miért gurul előre a labda: miközben a vonat „hátrafelé gyorsul”, a labdára egy előrefelé mutató tehetetlenségi erő hat a vonathoz rögzített koordináta-rendszerben.

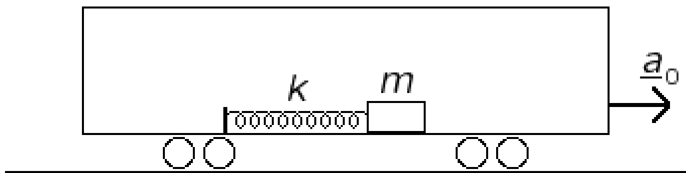
[1]Ennek a lépésnek bonyolultabb következményei vannak, ha a K' rendszer bázisvektorai forognak. A (3) egyenlet nem forgó K'-vel nyilván igaz a geometriai vektorokra és külön-külön a vektorkomponensekre is, de forgó K' esetén a vektorkomponensek között még egy időfüggő forgatási mátrix is fellép. Habár a geometriai vektorokra természetesen ilyenkor is igaz a (3) összefüggés, $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z$ idődeviráltjában $\dot{\mathbf{e}}'_x \neq 0$ stb. miatt a vektorkomponensek összekeverednek. Mivel mi a mozgásegyenletünket értelemszerűen komponensenként is fel szeretnénk írni, az ilyenkor követendő eljárást részletesen az Elméleti mechanika előadás tárgyalja. A gyakorlaton nem foglalkozunk forgó K' koordináta-rendszerrel.

Példa

Egy vasúti kocsi konstans $\mathbf{a}_0$ gyorsulással mozog vízszintes irányban. A padlóján elhelyezkedő, k direkciós erejű rugóhoz egy m tömegű testet rögzítünk, amely súrlódásmentesen mozoghat a padlón.

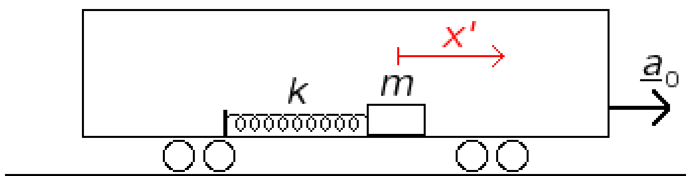
a) Írjuk föl a test mozgásegyenletének a padlóval párhuzamos komponensét a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben! Mérjük a test pozícióját a rugó nyújtatlan helyzetétől.

b) Mekkora lesz a rugó egyensúlyi megnyúlása?



---

a) Jelöljük x'-vel a test kitérését a rugó nyújtatlan helyzetétől:



Vízszintes irányban valódi erőként egyedül a rugóerő hat a testre. A rugó megnyúlása (hosszváltozása) megegyezik a test x' kitérésével. Ha x' pozitív, vagyis a test jobbra térül ki, akkor a rugóerő balra hat, így a $-kx'$ kifejezés adja meg a rugóerő vízszintes komponensét. Ha x' negatív, azaz a test balra tér ki, akkor a rugóerő jobbra hat, de ekkor is a $-kx'$ kifejezés ad helyes eredményt. A rugóerő keresett komponense tehát mindig $-kx'$. Összefoglalva:

$$\left(\sum \mathbf{F}\right)_{\parallel} = \left(\mathbf{F}_{\text{rug}}\right)_{\parallel} = -kx'.$$

(A $_{\parallel}$ index ebben az esetben a padlóval párhuzamos komponenst jelöli.)

A kocsi gyorsulásának az iránya párhuzamos a padlóval, és jobbra mutat, így a $-m\mathbf{a}_0(t)$ tehetetlenségi erő szintén párhuzamos a padlóval, és balra mutat. Ha a gyorsulás nagyságát a_0-val jelöljük, akkor a tehetetlenségi erő teljes nagysága ma_0 (ez definíció szerint egy pozitív érték). A padlóval párhuzamos komponens nagysága ugyanekkora, hiszen a tehetetlenségi erőnek más komponense nincs. Mivel a tehetetlenségi erő balra mutat, a padlóval párhuzamos komponense negatív előjelű kell legyen. Az ma_0 nagyság és a negatív előjel alapján a tehetetlenségi erő keresett komponensét a következő alakban írhatjuk:

$$\left(-m\mathbf{a}_0(t)\right)_{\parallel} = -ma_0.$$

A mozgásegyenlet vízszintes komponense (7) alapján:

$$m\ddot{x}' = -kx' - ma_0.$$

Kitérő: Miért is jó nekünk, hogy így írtuk fel a mozgásegyenletet? Miért nem maradhattunk a talajhoz rögzített koordináta-rendszerben, ami inerciarendszer? A talajhoz viszonyítva a kocsi egyenletesen gyorsuló mozgást végez, a rugó rögzítési pontja is ugyanígy mozog. A rugó x' megnyúlását így az $x' = x - \frac{1}{2}a_0t^2$ képlet adja meg, ha x a vizsgált test vízszintes pozíciója a talajhoz viszonyítva (vö. a (3) képlettel). Az x-re vonatkozó mozgásegyenletbe természetesen nem kell beírni a tehetetlenségi erőt, ezért a mozgásegyenlet vízszintes komponense a következő alakot veszi fel:

$$m\ddot{x} = -k\left(x - \frac{1}{2}a_0t^2\right).$$

Ezt a differenciálegyenletet az explicit időfüggés miatt sokkal körülményesebb megoldani, mint a gyorsuló koordináta-rendszerben kapottat (lásd a szövegdoboz fölött). Ez utóbbi egy olyan harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete, amire egy konstans erő is hat.

b) Az egyensúlyt a gyorsulás hiánya, vagyis $\ddot{x}' = 0$ definiálja. Az ennek megfelelő x' pozíciót jelöljük x'^*-gal, ez a mondottak szerint a test pozícióján kívül megadja a rugó megnyúlását is. A mozgásegyenletből a következő értéket kapjuk x'^*-ra:

$$\begin{aligned} 0 &= -kx'^* - ma_0, \\ x'^* &= -\frac{ma_0}{k}. \end{aligned}$$

Az eredmény szerint a test akkor lehet mozdulatlan a kocsihoz képest, ha a rugó (a negatív előjelnek megfelelően) össze van nyomva.