

## 4. Kis rezgések

### 4.1. Egyensúlyi pont, stabilitás

Egyensúlyi pontnak az olyan  $r^*$  pontokat nevezzük valamely koordináta-rendszerben, ahol a vizsgált tömegpont gyorsulása 0. Ha a tömegpont egy ilyen pontban tartózkodik, és nincs sebessége, akkor a továbbiakban is ott fog maradni. 1 dimenziós mozgások esetében az  $x^*$ -gal jelölt egyensúlyi pontok definíciója így írható:

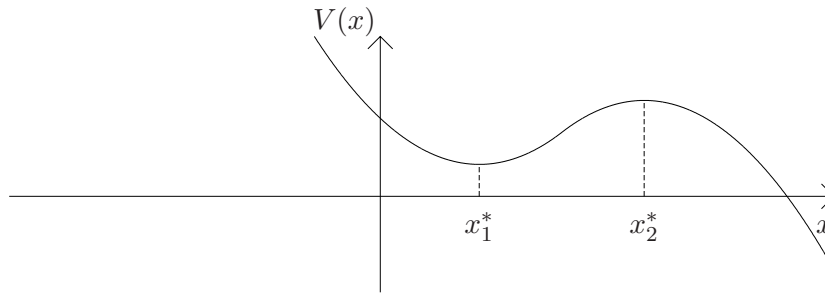
$$m\ddot{x}|_{x=x^*} \equiv 0, \quad (1)$$

amiből a mozgásegyenlet szerint a következő feltétel adódik:

$$\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 0. \quad (2)$$

Ez a képlet más megfogalmazásban azt jelenti, hogy egyensúlyi pontban a potenciálnak szélsőértéke kell legyen (vagy inflexiós pontja).

Az 1. ábrán két, dinamikai szempontból alapvetően különböző egyensúlyi pont látható. Tekintsük először az  $x_2^*$  egyensúlyi pontot, és tegyük fel, hogy benne tartózkodik a tömegpont.



1. ábra. Egy  $V(x)$  potenciálfüggvény két egyensúlyi ponttal. Az  $x_1^*$  egyensúlyi pont stabil, az  $x_2^*$  instabil.

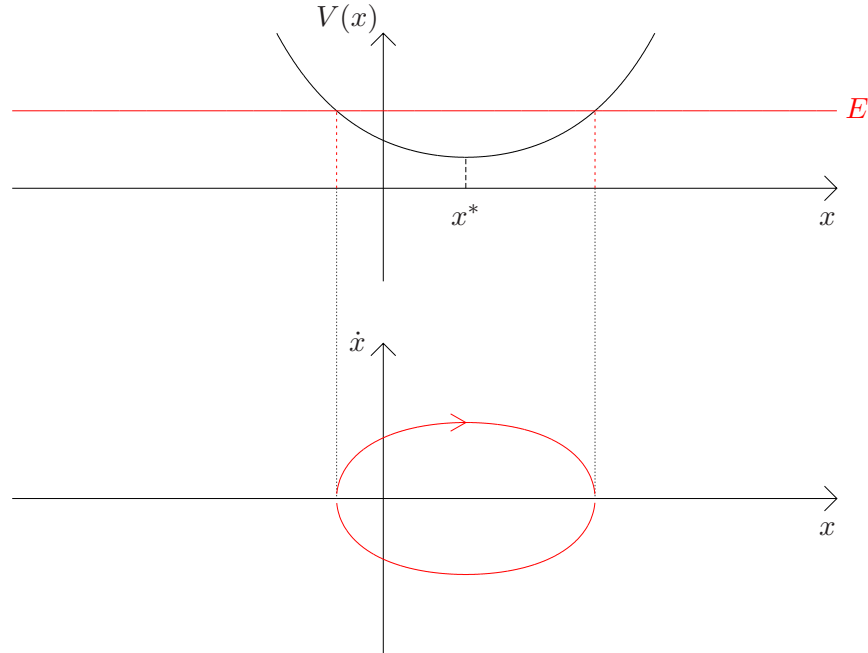
Mi történik akkor, ha a tömegpontot kis mértékben elmozdítjuk? Ekkor a potenciál deriváltja, azaz a tömegpontra ható erő nem lesz 0. Ha a tömegpontot balra mozdítottuk ki, akkor  $F(x) \equiv -dV/dx < 0$ , azaz az erő negatív irányban hat, ami a tömegpontot az  $x_2^*$  egyensúlyi ponttól távolítja. Az erő hasonló módon távolítja az  $x_2^*$  jobb oldalán is. Az ilyen típusú egyensúlyi pontot instabilnak nevezzük. Az instabilitás matematikai feltétele, hogy a potenciálfüggvény második deriváltja az egyensúlyi pontban negatív legyen:

$$\left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} < 0. \quad (3)$$

Az ábra  $x_1^*$  egyensúlyi pontja viszont másmilyen: stabil. Stabil egyensúlyi pontot akkor kapunk, ha

$$\left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} > 0. \quad (4)$$

Ilyenkor létezik az egyensúlyi pontnak olyan környezete, amiben a tömegpontra ható erő visszatérítő irányú. Ez lehetővé teszi, hogy a tömegpont ebben a környezetben *rezgőmozgást* végezzen, amit a 2. ábra szemléltet.



2. ábra. Felső grafikon: egy  $V(x)$  potenciálfüggvény stabil egyensúlyi ponttal. A jelölt  $E$  mechanikai energiával a tömegpont az egyensúlyi pont körül rezeg, ahogyan ez a vonatkozó fázistérbeli trajektóriából is leolvasható (alsó grafikon).

## 4.2. Stabil egyensúlyi pont körüli kis rezgések

Láttuk tehát, hogy stabil egyensúlyi pont valamely környezetében oszcilláció (rezgőmozgás) mehet végbe. Ha ennek kicsi az amplitúdója, vagyis a tömegpont a mozgás során nem távolodik el túlságosan az  $x^*$  egyensúlyi ponttól, akkor a  $V(x)$  potenciált jól közelíthetjük annak vezető rendig tekintett Taylor-sorával:

$$\begin{aligned} V(x) &\simeq V(x^*) + \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x^*} (x - x^*) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} (x - x^*)^2 \\ &= V(x^*) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} (x - x^*)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Az  $x$ -ben lineáris tag együtthatója, azaz a potenciál első deriváltja egyensúlyi pontban (2) szerint 0. A konstans  $V(x^*)$  tagnak nincs jelentősége, az nem jelenik meg a mozgásegyenletben. Így könnyen észrevehető, hogy az (5) kifejezés éppen egy  $x^*$ -ban elhelyezett *harmonikus oszcillátor* potenciálja (lásd Függelék.0, (8) képlet). A rugóállandó megfeleltethető a potenciál második

deriváltjának az egyensúlyi pontban:

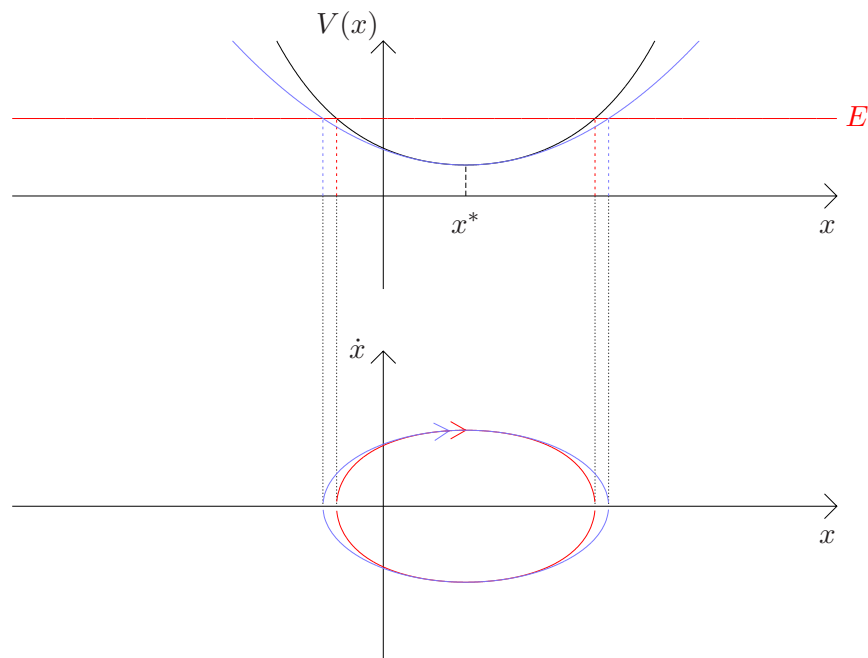
$$k = \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*}. \quad (6)$$

Azt találtuk tehát, hogy egy tömegpontnak valamely tipikus stabil egyensúlyi pont körül végzett kis amplitúdójú rezgése közelítőleg *harmonikus rezgőmozgás*, amelynek a körfrekvenciája a Függlék.0 (18) képlete szerint

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*}}. \quad (7)$$

Az egyetlen kivétel, atipikus eset, amikor ez nem így van, a  $d^2 V(x)/dx^2|_{x=x^*} = 0$  helyzet. Az (5) kifejezésben hallgatólagosan feltételeztük, hogy a második derivált nem tűnik el az egyensúlyi pontban. Ha eltűnik, akkor a sorfejtésben tovább kell mennünk, és az így adódó rezgőmozgás nem lesz harmonikus.

A tipikus esetről mondottakat grafikusan a 3. ábrán követhetjük. A stabil egyensúlyi pontot a környezetében kialakuló fázistérbeli struktúra miatt elliptikus pontnak is szokás nevezni.



3. ábra. Felső grafikon: a  $V(x)$  potenciálfüggvényt (fekete vonal) az  $x^*$  stabil egyensúlyi pont körül parabolával közelíthetjük (világoskék vonal). Ha az  $E$  mechanikai energia nem túl nagy (következésképpen a rezgés amplitúdója sem), akkor a tömegpont trajektóriája a fázistérben (piros vonal, alsó grafikon) jól közelíthető ellipszissel (világoskék vonal).

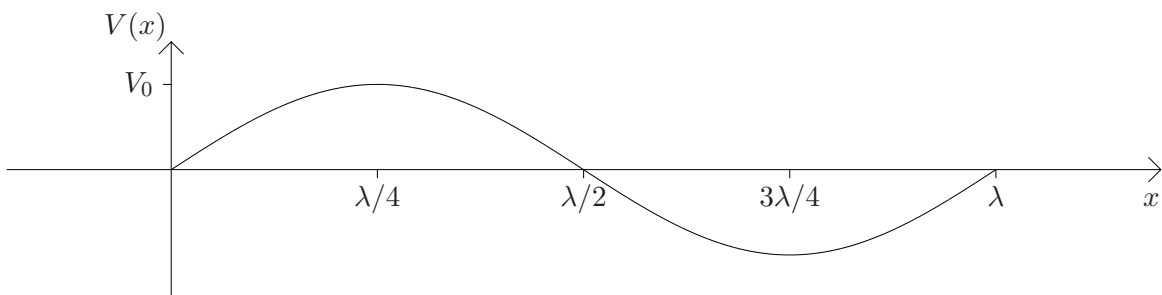
## Példa

Tekintsük a következő, az  $x \in [0, \lambda)$  intervallumon értelmezett potenciált:

$$V(x) = V_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

ahol  $V_0, \lambda > 0$ . Adjuk meg az egyensúlyi pontok helyét, és vizsgáljuk meg a stabilitásukat! Határozzuk meg a stabil egyensúlyi pontok körül kialakuló kis rezgések körfrekvenciáját!

A potenciálfüggvény alakja a következő:



Az egyensúlyi pontok helyének a meghatározásához ki kell számítani a potenciálfüggvény deriváltját:

$$\frac{dV(x)}{dx} = V_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Innen az egyensúlyi pontok:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x^*} &= 0, \\ V_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x^*\right) &= 0. \end{aligned}$$

Ennek két megoldása van:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{4}, \\ x_2^* &= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{3\pi}{2} = \frac{3\lambda}{4}, \end{aligned}$$

összhangban az ábrával. A stabilitás vizsgálatához szükségünk van a potenciál második deriváltjára:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -V_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Az egyensúlyi pontokban:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_1^*} &= -V_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \right) = -V_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 < 0, \\ \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_2^*} &= -V_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{4} \right) = V_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 > 0.\end{aligned}$$

Tehát  $x_1^*$  instabil,  $x_2^*$  stabil, ahogyan az ábra alapján várhattuk is.  $x_2^*$  körül kialakulhatnak kis rezgések, ezek körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_2^*}} = \sqrt{\frac{1}{m} V_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{V_0}{m}}.$$

## Függelék: A harmonikus oszcillátor körfrekvenciája

Az 1 dimenziós harmonikus oszcillátor (az előző összefoglaló kidolgozott példája) kiemelkedő jelentőségű fizikai rendszer. Lényeges tulajdonsága, hogy a periódusideje (és így a körfrekvenciája) egzaktul kiszámítható, a III. rész (14) képletének a segítségével. A teljesség kedvéért ezt a számítást az alábbiakban részletezem, de az anyag többi részének a megértéséhez elegendő a potenciálalaknak és a levezetés eredményének az ismerete.

A harmonikus oszcillátor potenciálfüggvénye általánosan a következő alakú:

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}k(x - a)^2, \quad (8)$$

ahol  $k > 0$ . A  $V_0$  konstans potenciáltként és a parabola minimumpontjának az  $a$  helye nem játszik lényeges szerepet, a harmonikus oszcillátor potenciáljából ezek mindig eltüntethetők, ha megfelelően választjuk meg a koordináta-rendszerünk origóját és a potenciál nullszintjét. A továbbiakban ezért a következő alakot fogjuk használni:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (9)$$

A periódusidő kiszámításának érdekében először fel kell idéznünk, hogy adott  $E > 0$  mechanikai energia mellett hol vannak a (9) potenciál fordulópontjai:

$$x_{\text{fp } 1,2} = \mp \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (10)$$

A periódusidőnek a fentebb hivatkozott képlete szerint:

$$\begin{aligned}
 T_p &= \sqrt{2m} \int_{x_{\text{fp}1}}^{x_{\text{fp}2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} dx' \\
 &= \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx'^2}} dx' \\
 &= \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E}} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x'^2}} dx'. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Éljünk a következő változócserevel:

$$u := \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} x' \right), \tag{12}$$

így

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x' = \sin u, \tag{13}$$

$$dx' = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos u \, du. \tag{14}$$

A határok így alakulnak:

$$u \left( x' = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \right) = \arcsin \left( -\sqrt{\frac{k}{2E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

$$u \left( x' = \sqrt{\frac{2E}{k}} \right) = \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Behelyettesítve mindezeket (11)-be:

$$\begin{aligned}
 T_p &= \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos u \, du \\
 &= \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos u} \cos u \, du \\
 &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, du \\
 &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} [u]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Eljutottunk tehát a harmonikus oszcillátor periódusidejének a jól ismert képletéhez. Figyelemreméltó, hogy a periódusidő nem függ az  $E$  mechanikai energiától, és így, a (10) összefüggés értelmében, a rezgés amplitúdójától sem. A körfrekvencia innen már egyszerűen adódik:

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T_p} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{18}$$