# 8. Merevtestek

## 8.1. A merevtest definíciója

Egy merevtestet leírhatunk pontrendszerként vagy folytonos tömegeloszlású testként. Pontrendszerként $N$ darab különböző tömegpont együtteseként gondolunk rá, ahol minden tömegpontnak saját tömege és helyvekora van: $m_k$, ill. $\mathbf{r}_k$, ahol $k \in \{1, \ldots, N\}$. Folytonos tömegeloszlás esetén egy $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségvektor mondja meg, hogy a test valamely $\mathbf{r}$ pontjában mekkora a test sűrűsége. A merevtest definíciója szerint a merevtest két tetszőleges pontja időben állandó távolságra van egymástól: pontrendszerként

$$|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l| = \text{állandó} \quad \forall k, l \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

ill. folytonos tömegeloszlás mellett

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \text{állandó} \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V, \tag{2}$$

ahol $V$ a test kiterjedését jelöli. A továbbiakban a pontrendszer-leírást fogjuk használni, de minden meggondolás ugyanúgy működik folytonos tömegeloszlással is.

## 8.2. Vezetési pont, szögsebesség

Egy merevtest pozícióját úgy tudjuk jellemezni, hogy megadjuk

- egy tetszőlegesen kiválasztott pontjának, az ún. vezetési pontnak a helyét (ez térben 3, síkmozgásnál 2 koordináta), és
- azt, hogy a test mennyire van elforgatva valamilyen referencia-helyzethez viszonyítva (ez térben 3, síkmozgásnál 1 adat, például 3, ill. 1 szög).

Ez térben összesen 6, síkban 3 adat. Elméleti szinten az (1) képlet biztosítja, hogy ezen adatok ismeretében már a testhez tartozó bármely tömegpont helyét meg tudjuk adni. Anélkül, hogy minden állítást matematikai szinten belátnánk, az alábbiakban végignézünk egy ezzel kapcsolatos gondolatmenetet, amelynek az eredményeként a testhez tartozó tömegpontok *sebességét* tudjuk egyszerűen felírni. Ehhez, amint látni fogjuk,

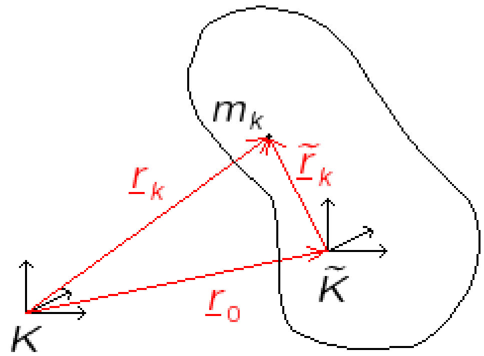
- a vezetési pont sebességvektorára (térben 3, síkmozgásnál 2 adatot jelent), és
- egy szögsebességvektorra (térben 3, síkmozgásnál 1 adattal jellemezhető)

lesz szükségünk.

Ha definiálunk egy $\tilde{K}$ koordináta-rendszert, amelynek az origóját a (tetszőlegesen kiválasztott) vezetési pontban helyezzük el, akkor a testhez tartozó tetszőleges ($k$-adik) tömegpont $\mathbf{r}_k$ helyvektora (egy külső, $K$ koordináta-rendszerben) formálisan a következő képlettel írható fel:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_0 + \tilde{\mathbf{r}}_k, \tag{3}$$

ahol $\mathbf{r}_0$ a vezetési pont helyvektora a $K$ rendszerben, $\tilde{\mathbf{r}}_k$ pedig a vizsgált tömegpont helyvektora a $\tilde{K}$ rendszerben (lásd az ábrát).




A gondolatmenet segítségével csak az egyes tömegpontok sebességét szeretnénk felírni. Ennek érdekében a (3) képletet idő szerint lederiváljuk. Formálisan:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_k, \tag{4}$$

ahol $\mathbf{v}_k$ a tömegpont sebessége a $K$ rendszerben, $\mathbf{v}_0$ a vezetési pont sebessége a $K$ rendszerben, és $\tilde{\mathbf{v}}_k$ a vizsgált tömegpont sebessége a $\tilde{K}$ rendszerben. Mivel $\mathbf{r}_0$ maga is pontja a merevtestnek, $\tilde{\mathbf{r}}_k$ a test két pontja között felírt különbségvektor. Az ilyen vektorok hossza (1) szerint időben állandó. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a tömegpont a $\tilde{K}$ rendszer origójától mindig adott távolságban van. Ez azt jelenti, hogy a tömegpont a $\tilde{K}$ rendszerben minden pillanatban valamilyen *körmozgást* végez. Az ilyen mozgás sebességét mindig egy szögsebességvektornak és az adott pontba mutató helyvektornak a vektoriális szorzataként írhatjuk fel, vagyis

$$\tilde{\mathbf{v}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k. \tag{5}$$

Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor az adott pillanatban érvényes körmozgás forgástengelyének az irányába mutat (a forgástengely értelemszerűen átmegy $\tilde{K}$ origóján). A tömegpont mozgása során azonban a szögsebességvektor iránya és nagysága is változhat, egy adott $\boldsymbol{\omega}$ vektorral leírt körmozgás általánosan csak egy adott pillatban érvényes. Ha az (5) képletet behelyettesítjük a (4) kifejezésbe, a tömegpont teljes, $K$ rendszerbeli sebességvektorára a következőt kapjuk:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k. \tag{6}$$

Belátható, hogy a merevtest definíciójából az következik, hogy $\boldsymbol{\omega}$ a merevtest minden tömegpontjára (minden $k$-ra) egyforma. Joggal mondhatjuk tehát, hogy $\boldsymbol{\omega}$ a mervetest szögsebességvektora. Arra is van tétel továbba, hogy $\boldsymbol{\omega}$ *nem függ a vezetési pont megválasztásától*, mozogjon bárhogyan is a merevtest. ($\mathbf{v}_0$ sajnos nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.) $\boldsymbol{\omega}$-t fel szokás bontani „nagyságra” és „irányra”:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}, \tag{7}$$

ahol $\mathbf{n}$ egy olyan egységvektor, ami a pillanatnyi forgástengely irányába mutat, $\omega$ pedig a pillanatnyi szögsebesség (előjeles) nagysága.

A (6) képlet szerint tehát egy tetszőleges tömegpont sebessége a vezetési pont $\mathbf{v}_0$ sebességére és a vezetési pont körüli forgásra bontható fel. Mivel a vezetési pont $\mathbf{v}_0$ sebessége a test minden tömegpontjának a sebességében egyformán megjelenik, és a vezetési pont körül már csak forgás történik, úgy is fogalmazhatunk, hogy a vezetési pont a test transzlációját (haladó mozgását) jellemzi.

## 8.3. Kinetikus energia

Most írjuk fel a test kinetikus energiáját a (6) képlet felhasználásával! A merevtest kinetikus energiája az azt alkotó egyes tömegpontok kinetikus energiáinak az összegeként adódik:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left[\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0\Big(\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k\Big) + (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k)^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0\Big(\boldsymbol{\omega} \times (m_k \tilde{\mathbf{r}}_k)\Big) + \frac{1}{2} m_k (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right) \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \left[\boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \tilde{\mathbf{r}}_k\right)\right] + \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{2} m_k (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k)^2\right]. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen $M$ a merevtest teljes tömege:

$$M := \sum_{k=1}^{N} m_k, \tag{9}$$

és legyen $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{TKP}}$ a merevtest tömegközéppontja a $\tilde{K}$ rendszerben:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{TKP}} := \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \tilde{\mathbf{r}}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \tilde{\mathbf{r}}_k}{M}. \tag{10}$$

Ezeket beírva (8)-be:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \Big(\boldsymbol{\omega} \times \big(M \tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{TKP}}\big)\Big) + \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{2} m_k (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k)^2\right]. \tag{11}$$

Belátható, hogy az utolsó tag ilyen alakban írható:

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{2} m_k (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_k)^2\right] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}, \tag{12}$$

ahol $\boldsymbol{\Theta}$ a VII. részben bevezetett tehetetlenségi tenzor[1]:

$$\Theta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\tilde{r}_k^2 \delta_{ij} - (\tilde{r}_k)_i (\tilde{r}_k)_j\right), \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{13}$$

[1] Folytonos tömegeloszlás mellett a jelenlegi jelölésekkel:

$$\Theta_{ij} = \int_V \rho(\tilde{\mathbf{r}}) \left(\tilde{r}^2 \delta_{ij} - \tilde{r}_i \tilde{r}_j\right) \mathrm{d}^3 \tilde{\mathbf{r}}, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

A tehetetlenségi tenzor tehát valamilyen adott $\tilde{K}$ koordináta-rendszerre vonatkozik és ebben számítandó. Mivel a $\tilde{K}$ koordináta-rendszer origója a merevtest vezetési pontja, ez annyit jelent, hogy ilyenkor a $\tilde{K}$ koordináta-rendszer origóján átmenő forgástengelyt vizsgálunk. A kinetikus energia végső alakja (13) behelyettesítésével:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0\Big(\boldsymbol{\omega} \times \big(M\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{TKP}}\big)\Big) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}. \tag{14}$$

Az első tag tisztán a merevtest transzlációjából (haladó mozgásából) származik, ez a transzlációs kinetkus energia, a harmadik tag a forgási energia, a második tag pedig az ún. kölcsönös kinetikus energia.

## 8.4. A kinetikus energia egyszerűbb alakjai

Jelentősen megkönnyíti a kinetkus energia felírását, ha a kölcsönös energiatag 0. Ezt a vezetési pont kétféle megválasztásával érhetjük el:

- ha a vezetési pont nem mozog: $\mathbf{v}_0 = 0$, vagy
- ha a vezetési pont, azaz a $\tilde{K}$ rendszer origója a merevtest tömegközéppontjában van, ekkor $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{TKP}} = 0$.

Az utóbbi választás mindig a rendelkezésünkre áll, és bármilyen problémát meg tudunk oldani úgy is, ha mindig csak ezt használjuk.

Ha a kölcsönös energiatag eltűnik, akkor a kinetikus energia a

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega} \tag{15}$$

alakra egyszerűsödik. Látható, hogy a kinetikus energia ekkor csak a következő változóktól függ:

- a vezetési pont $\mathbf{v}_0$ sebességétől, és
- a forgás $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektorától.

A kinetikus energia felírásához ekkor ismernünk kell a merevtest $M$ tömegét és a választott vezetési pontra vonatkozó $\boldsymbol{\Theta}$ tenzort.

A kinetikus energiát a szögsebességvektor (7) felbontásával még hasznosabb alakba is írhatjuk:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{n}\omega^2. \tag{16}$$

Látható, hogy ebben az esetben

- a vezetési pont $\mathbf{v}_0$ sebessége,
- a forgás $\omega$ szögsebessége és
- a forgástengely $\mathbf{n}$ irányvektora

lesznek a változók. Abban a különleges esetben, amikor a forgástengely iránya *rögzített*, vagyis az $\mathbf{n}$ vektor állandó, csak a többi mennyiség lesz valódi változó. Ekkor definiálhatjuk az *adott tengelyre vonatkozó* tehetetlenségi nyomatékot is, ami egy skalármennyiség:

$$\Theta_{\mathbf{n}} := \mathbf{n}\mathbf{\Theta}\mathbf{n}. \tag{17}$$

A középiskolás Négyjegyű függvénytáblázatok... c. kötetben ezt a mennyiséget találjuk meg konkrét (tipikusan homogén) testekre és konkrét forgástengelyekre kiszámítva a test paramétereinek a függvényében. A kinetikus energia ezzel:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}\Theta_{\mathbf{n}}\omega^2. \tag{18}$$

## 8.5. Merevtestek síkmozgása

Ha a mervtest mozgása egy síkra korlátozódik (azaz a harmadik térbeli irányban nincs mozgás, ilyen típusú pl. az összes kiskocsis példa), akkor az $\mathbf{n}$ forgástengely iránya adott és időben állandó: merőleges a síkra. Ilyenkor (a vezetési pont megfelelő megválasztása mellett!) a (18) összefüggést használhatjuk a kinetikus energia felírására. Ebben változóként a

- a vezetési pont $\mathbf{v}_0$ sebessége jelenik meg, ennek ilyenkor 2 komponense van, és
- a forgás $\omega$ szögsebessége, ez 1 további adat.

Síkban tehát erre a 3 változóra van szükségünk a kinetikus energia felírásához. Ezek a következő mennyiségek időderiváltjaiként adódnak:

- a vezetési pont $\mathbf{v}_0$ sebessége a vezetési pont $\mathbf{r}_0$ helyvektorának az időderiváltja,
- a forgás $\omega$ szögsebessége egy $\varphi$ szög időderiváltja: $\omega = \dot{\varphi}$. Ez a $\varphi$ szög azt mutatja meg, hogy mennyire van elforgatva a test valamilyen (tetszőleges választott) referencia-helyzethez képest.

Ha tekintjük az $\mathbf{r}_0$ vektor 2 komponensét (vagyis a vezetési pont két koordinátáját) és az egyedüli $\varphi$ szöget, ez összesen továbbra is 3 változó. Ha a Lagrange-formalizmust szeretnénk használni, ezt a három változót kell kifejeznünk a problémánkban választott általános koordináták segítségével. Ez a 3 változó valójában megfelel a 8.2. fejezet elején felsoroltaknak: ezek teljes mértékben jellemzik a merevtest pozícióját.

A kinetikus energia felírása tehát a fentiek szerint valósítható meg. A Lagrange-formalizmus használatához szükségünk van még a potenciális energiára is. Egy merevtest potenciális energiáját gravitációs erőtérben a merevtest tömegközéppontjának a helyével tudjuk kifejezni. Ha voltunk olyan előrelátóak, hogy a merevtest vezetési pontját a test tömegközéppontjában választottuk, akkor ez nem jelent újonnan megjelenő változókat, hiszen a vezetési pont koordinátáit már a kinetikus energia felírásánál számba vettük.