2. Konzervatív erő, potenciál, vonalintegrál

2.1. Konzervatív erő, potenciál

Egy tömegpont mozgását a newtoni mechanikában a következő alakú mozgásegyenlet határozza meg:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

ahol $\mathbf{r}$ a tömegpont helyvektora, m a tömege, $\mathbf{F}$ pedig a rá ható erők eredője. Ez az egyenlet egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet az $\mathbf{r}(t)$ függvényre (pontosabban egy differenciálegyenlet-rendszer az $\mathbf{r}(t)$ egyes vektorkomponenseire, az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvényekre Descartes-féle koordinátarendszerben). A jobb oldalon szereplő erő függhet a tömegpont helyétől (pl. rugóerő), a tömegpont sebességétől (pl. közegellenállási erő), és akár közvetlenül az időtől is (ezek a gerjesztett rendszerek).[1]

Különleges jelentősége van azoknak az erőknek, amelyek csak a helytől függenek: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, ezeket erőtereknek nevezzük. Ha létezik olyan $V(\mathbf{r})$ skalárértékű függvény, amelyre

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}),$$

akkor azt mondjuk, hogy az erőtér konzervatív, és $V(\mathbf{r})$ a hozzá tartozó potenciál. A következő állítások ekvivalensek:

- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kozervatív.
- A tömegpont mozgása során a mechanikai energia megmarad:
  $$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = \text{állandó}.$$
- Az erő vonalintegrálja (valamely mozgás során az erő által végzett munka) csak a kezdő- és a végponttól függ:
  $$\int_{\Gamma_\mathrm{A}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Gamma_\mathrm{B}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$$
  minden olyan Γ_A és Γ_B görbére, amiknek a kezdő-, ill. a végpontjuk azonos.
- Az erő vonalintegrálja bármely zárt görbére 0.
- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ minden pontban rotációmentes ($\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$).

Ha $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konzervatív, a potenciál a következő módon számolható:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}'$$

tetszőleges $\mathbf{r}_0$ kezdőponttól tetszőleges görbe mentén, aminek a végpontja $\mathbf{r}$. A különböző kezdőpontokkal számolt potenciálfüggvények egy additív konstansban fognak eltérni egymástól, ami a vonatkozó mozgásegyenletben a deriválás miatt nem jelenik meg, így fizikai tartalma nincs. (Az $\mathbf{r}'$ jelölés azért szükséges, mert $\mathbf{r}$-et a határban „elhasználtuk”.)

[1] Feltételeztük, hogy $\mathbf{F}$ nem függ $\mathbf{r}$-nek az elsőnél magasabb időderiváltjaitól. Ez a klasszikus mechanika döntő többségét lefedi, de nem árt, ha tudjuk: léteznek kivételek.

2.2. Vonalintegrál

Hogyan kell kiszámítani az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ függvény vonalintegrálját valamely Γ görbe mentén? Ehhez a Γ görbét paramétereznünk kell. Ívhossz szerinti paraméterezéssel a görbe a következő formában adható meg:

$$\Gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^3, s \mapsto \mathbf{r}(s),$$

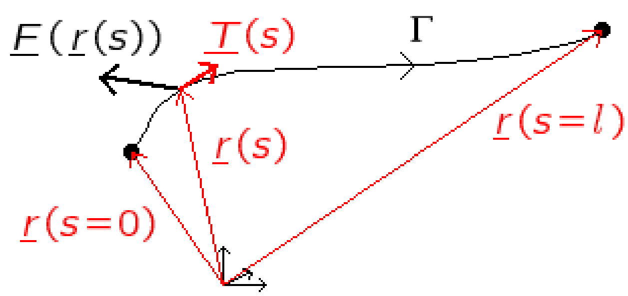
ahol l a görbe hossza, s az ívhossz a görbe kezdőpontjától mérve, $\mathbf{r}(s)$ pedig a görbe vonatkozó pontjába mutató helyvektor. Szemléletesen fogalmazva: amíg az s változó végigfut 0-tól l-ig, addig az $\mathbf{r}(s)$ vektor (mint s függvénye) végigfut a görbe kezdőpontjától a végpontjáig. A paraméterezés segítségével:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^l \mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,$$

ahol

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s} \equiv \mathbf{T}(s)$$

a görbe érintővektora (érintőirányú egységvektor) az $\mathbf{r}(s)$ pontban (lásd az ábrát; az ábrán kiválasztott $\mathbf{r}(s)$ pont valamilyen tetszőlegesen kiválasztott s értékhez tartozik). Ezt kell tehát skalárisan összeszorozni az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ függvénynek az adott $\mathbf{r}(s)$ pontban felvett értékével, majd az így adódó skalárszorzatot, ami s-től függ, kiintegrálni s szerint.



Példa

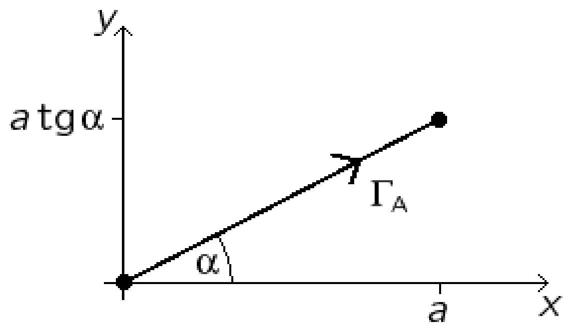
Tekintsük a következő erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Cxy\mathbf{e}_x,$$

ahol C egy paraméter, $\mathbf{e}_x$ pedig az x irányú egységvektor:

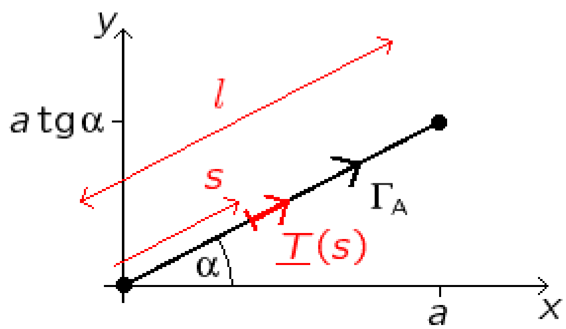
$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az erő vonalintegrálját az ábrán jelölt Γ_A görbe mentén!



Definíció szerint:

$$\int_{\Gamma_\mathrm{A}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^l C\, x(s)\, y(s)\, \mathbf{e}_x\, \mathbf{T}(s)\, \mathrm{d}s.$$



A görbe hossza az ábra szerint

$$l = a/\cos\alpha.$$

Mivel a görbe kezdőpontja az origó, és a görbe egyenes, s megegyezik az origótól mért távolsággal, így

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\alpha \\ s\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Ezzel tehát paramétereztük a görbét. A $\mathbf{T}(s)$ egységnyi hosszúságú érintővektor:

$$\mathbf{T}(s) \equiv \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

amit közvetlenül is le lehet olvasni az ábráról. *Ha* a vizsgált görbe egyenes, akkor $\mathbf{T}(s)$ tipikusan könnyen leolvasható, és *soha nem függ s-től.* A kapott eredményt felhasználva:

$$\mathbf{e}_x \mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \cos\alpha.$$

Behelyettesítve l, $x(s)$, $y(s)$ és $\mathbf{e}_x \mathbf{T}(s)$ értékét a vonalintegrál kifejezésébe:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_A} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_0^{a/cos\alpha} C\, s\, \cos\alpha\, s\, \sin\alpha\, \cos\alpha\, \mathrm{d}s \\ &= C\cos^2\alpha\sin\alpha \int\limits_0^{a/cos\alpha} s^2 \mathrm{d}s \\ &= C\cos^2\alpha\sin\alpha \left[\frac{s^3}{3}\right]_0^{a/cos\alpha} \\ &= \frac{Ca^3 \mathrm{tg}\,\alpha}{3}. \end{aligned}$$