7. A tehetetlenségi tenzor kiszámítása

A tehetetlenségi tenzort a merevtestek forgómozgásának a leírása során használjuk. A merevtest olyan pontrendszer vagy folytonos tömegeloszlással jellemezhető test, amelynek tetszőleges két pontja időben állandó távolságra van egymástól. Egy merevtest tehetetlenségi tenzorát valamilyen adott koordináta-rendszerben számíthatjuk ki, és azt jellemzi, hogy *a koordináta-rendszer origóján átmenő* forgástengelyek körül mennyire nehéz a merevtestet megforgatni.

A tehetetlenségi tenzor egy 3×3-as mátrix. Ha a vizsgált merevtest folytonos tömegeloszlással jellemezhető, vagyis a testnek van egy $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségfüggvénye, amely a test bármely $\mathbf{r}$ pontjában megadja a test sűrűségét, akkor a tehetetlenségi tenzort a következő képlet definiálja:

$$\Theta_{ij} := \int_V \rho(\mathbf{r}) \left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right) \mathrm{d}^3\mathbf{r}, \qquad i,j \in \{1,2,3\}. \tag{1}$$

Itt r a helyvektor hosszát jelöli, r_i pedig a helyvekor i-edik komponensét: $r_1 \equiv x$, $r_2 \equiv y$, $r_3 \equiv z$. δ_{ij} az ún. Kronecker-féle delta-szimbólum, ami az 1 értéket veszi fel akkor, ha a két indexe megegyezik, és 0-t, ha nem, azaz:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha}\, i = j\,, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2}$$

Az (1) képletben szereplő integrálás térfogati integrál a test teljes térbeli kiterjedésére (V térfogatára). Abban a speciális esetben, amikor a merevtest téglatest alakú, a térfogati integrál három egymásba ágyazott, de fix határokkal jellemezhető 1 dimenziós („hagyományos”, Riemann-féle) integrállá egyszerűsödik:

$$\int_V \ldots \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

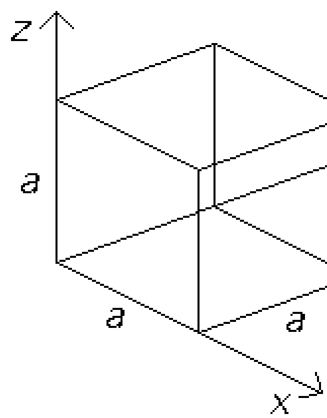
ahol az x_1, x_2 stb. határok a téglaest határait jelölik az adott koordináta-rendszerben. Az 1 dimenziós integrálok egymásba ágyazásának a sorrendje ilyenkor felcserélhető, vagyis mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el őket.

Vegyük észre, hogy a $\boldsymbol{\Theta}$ tenzor szimmetrikus: az (1) kifejezés az i és a j indexek felcserélésével nem változik, így $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$. Ha a mervetest alakja *és* sűrűségeloszlása valamilyen speciális szimmetriát mutat, akkor a $\boldsymbol{\Theta}$ tenzor további elemei eshetnek egybe.

Példa

Számítsuk ki egy a élhosszúságú kocka tehetetlenségi tenzorának a főátlóbeli elemeit az ábrán látható koordináta-rendszerben, ha a kocka sűrűségeloszlását a következő függvény adja meg:

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0}{a^2} xy.$$



Egy mátrix főtálóját definíció szerint azok az elemek alkotják, amelyeknek a két indexe megegyezik. Esetünkben ezek a Θ_{11}, a Θ_{22} és a Θ_{33} elemek, ezeket kell tehát kiszámítanunk.

Az ábra alapján az integrálok határai:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad x_2 = a, \\ y_1 &= 0, \quad y_2 = a, \\ z_1 &= 0, \quad z_2 = a. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy térben $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a Θ_{11} elem a következő lesz:

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &\equiv \int_V \rho(x, y, z) \left(r^2 \cdot 1 - x \cdot x\right) \mathrm{d}^3\mathbf{r} \\ &= \int_V \rho(x, y, z) \left(x^2 + y^2 + z^2 - x^2\right) \mathrm{d}^3\mathbf{r} \\ &= \int_V \rho(x, y, z) \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}^3\mathbf{r} \\ &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\rho_0}{a^2} xy \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \left(xy^3 + xyz^2\right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a \int_0^a \left(xy^3 a + xy \frac{a^3}{3} \right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a \left(x \frac{a^4}{4} a + x \frac{a^2}{2} \frac{a^3}{3} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{a^2}{2} \frac{a^4}{4} a + \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} \frac{a^3}{3} \right) \\
&= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} \right) \rho_0 a^5 \\
&= \frac{5}{24} \rho_0 a^5 .
\end{aligned}
$$

A Θ_{22} elem ezzel meg fog egyezni, amit a következő gondolatmenet segítségével lehet belátni. Ha képzeletben felcseréljük az x és az y tengely jelölését, akkor a minket most érdeklő elemet ugyanazzal az alapképlettel tudjuk kiszámítani, mint az előzőleg számolt elemet[1]:

$$
\int_V \rho(x, y, z) \left(r^2 \cdot 1 - x \cdot x \right) \mathrm{d}^3 \mathbf{r}.
$$

Ha kiválasztottuk azt a jelöléscserét, ami a régebbi számolásunkkal megegyező alapképletet eredményez, ezt követően mindig a következőt kell megvizsgálni: a jelölés felcserélése után változnak-e a testre jellemző mennyiségek, vagyis az egyes integrálok határai és a sűrűségfüggvény? Láthatjuk, hogy az x változóban ugyanazok az integrálás határai, mint az y változóban. Ha a sűrűségfüggvényben felcseréljük az x és az y változókat, a szorzás kommutativitása (felcserélhetősége) miatt formálisan visszakapjuk az eredeti sűrűségfüggvényt: $\frac{\rho_0}{a^2} yx = \frac{\rho_0}{a^2} xy$. Mindennek megfelelően a testre jellemző mennyiségek nem változnak a jelölés (képzeletbeli) felcserélése után.

Nem ez a helyzet az x és a z változó képzeletbeli felcserélése esetén. Bár az integrálok határai megegyeznek, a sűrűségfüggvény nem marad változatlan: $\frac{\rho_0}{a^2} zy \neq \frac{\rho_0}{a^2} xy$. Így nincs más hátra, mint hogy a Θ_{33} elemet külön számítsuk ki (természetesen az eredeti jelölésekkel):

$$
\begin{aligned}
\Theta_{33} &\equiv \int_V \rho(x, y, z) \left(r^2 \cdot 1 - z \cdot z \right) \mathrm{d}^3 \mathbf{r} \\
&= \int_V \rho(x, y, z) \left(x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \right) \mathrm{d}^3 \mathbf{r} \\
&= \int_V \rho(x, y, z) \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}^3 \mathbf{r} \\
&= \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\rho_0}{a^2} xy \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

[1] Utána lehet gondolni, hogy ez akkor igaz, ha az integrálok sorrendje felcserélhető és az összeadás kommutatív; ezek a feltételek szerencsére teljesülnek.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \left(x^3 y + x y^3\right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a \int_0^a \left(x^3 y a + x y^3 a\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a \left(x^3 \frac{a^2}{2} a + x \frac{a^4}{4} a\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{a^4}{4} \frac{a^2}{2} a + \frac{a^2}{2} \frac{a^4}{4} a\right) \\
&= \frac{1}{4} \rho_0 a^5 .
\end{aligned}
$$

Láthatjuk, hogy ez az eredmény valóban eltér az előzőtől. Az eredmények fizikai jelentése az, hogy a testet akár az x, akár az y tengely körül könnyebb megforgatni, mint a z tengely körül.