Elméleti mechanika B
Gyakorló-feladatsor, 1. témakör

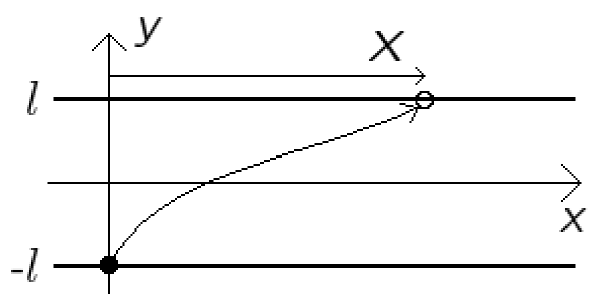
1. Egy $2l$ szélességű folyó sebességkomponensei a hely függvényében következők:

$$v_{\mathrm{f}\,x}(y) = v_0 \left(\frac{y}{l} + 1\right)\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right) ,$$
$$v_{\mathrm{f}\,y} = 0 .$$

A $t = 0$ időpillanatban az $x = 0$, $y = -l$ pontból (tömör karika) elindítunk egy vízen úszó szondát. A szonda folyóhoz viszonyított relatív sebességét időben az alábbi függvények adják meg:

$$v_{\mathrm{rel}\,x}(t) = a_0 t ,$$
$$v_{\mathrm{rel}\,y}(t) = \frac{1}{2} b_0 t^2 .$$

Milyen x koordinátánál (jelöljük ezt X-szel) fog a szonda a túlpartra érni?



---

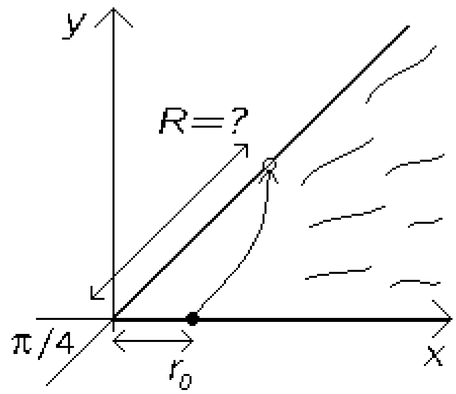
2. Az ábrán látható, forrást modellező, $\pi/4$ nyílásszögű folyó sebességének tangenciális komponense nincs, radiális sebességét pedig az alábbi függvény adja meg a φ polárszög függvényében:

$$v_{\mathrm{f}\,r}(\varphi) = v_0 \left(1 - \frac{(\varphi - \pi/8)^2}{(\pi/8)^2}\right) .$$

A $t = 0$ időpillanatban az $x = r_0$, $y = 0$ pontból (tömör karika) elindítunk egy vízen úszó szondát. A szonda radiális irányban a folyóval együtt mozog, a folyóhoz viszonyított relatív szögsebessége pedig időben állandó:

$$\dot{\varphi}_{\mathrm{rel}}(t) \equiv \omega_{\mathrm{rel}}(t) = \omega_0 .$$

Milyen r koordinátánál (jelöljük R-rel) érkezik a szonda a túlpartra (üres karika)?



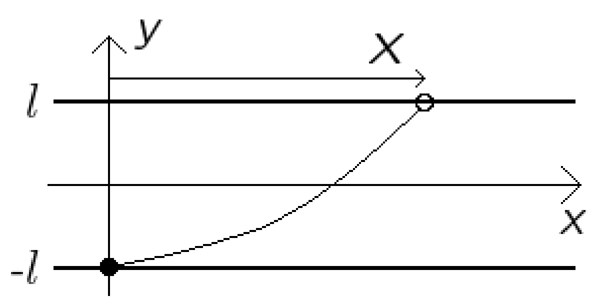
3. Egy $2l$ szélességű folyón megnyitnak egy zsilipet a $t = 0$ időpillanatban. Ezt követően a folyó sebességkomponensei az idő függvényében a következők:

$$v_{\mathrm{f}\,x}(t) = v_0 + \frac{1}{2} b_0 t^2 \,,$$
$$v_{\mathrm{f}\,y}(t) = 0 \,,$$

a folyó tetszőleges pontján mérve. A $t = 0$ időpillanatban az $x = 0$, $y = -l$ pontból (tömör karika) elindítunk egy vízen úszó szondát. A szonda a folyóhoz viszonyított relatív sebességét x irányban $-v_0$ értéken tartja. A szondának y irányú kezdősebessége nincs, az y irányú relatív gyorsulás pedig a szonda x pozíciójának a függvénye:

$$a_{\mathrm{rel}\,y}(x) = a_0 \frac{x^2}{l^2} \,.$$

Milyen x koordinátánál (jelöljük ezt X-szel) fog a szonda a túlpartra érni (üres karika)?



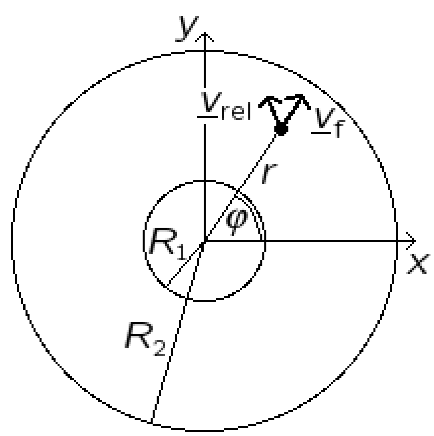
4. Egy gyűrű alakú medencében a víz a belső peremtől a külső felé áramlik. A víz sebességének radiális, ill. tangenciális komponensét az alábbi függvények adják meg a pozíció függvényében:

$$v_{\mathrm{f}\,r}(\varphi) = v_0 \sin^2\varphi\,,$$
$$v_{\mathrm{f}\,\varphi} = 0\,.$$

A $t = 0$ időpillanatban egy úszó indul el az $x = R_1$, $y = 0$ pontból. A vízhez viszonyított relatív sebességét a következő módon választja meg:

$$v_{\mathrm{rel}\,r}(t) = a_0 t\,,$$
$$v_{\mathrm{rel}\,\varphi}(r) = u_1 \frac{r}{R_1}\,,$$

vagyis a vízhez viszonyított relatív radiális sebessége közvetlenül az időtől, a relatív tangenciális sebessége pedig az ő saját radiális pozíciójától függ. Milyen távol lesz az úszó a belső peremtől (jelöljük ezt a távolságot D-vel), mire megtesz egy kört a medencében?

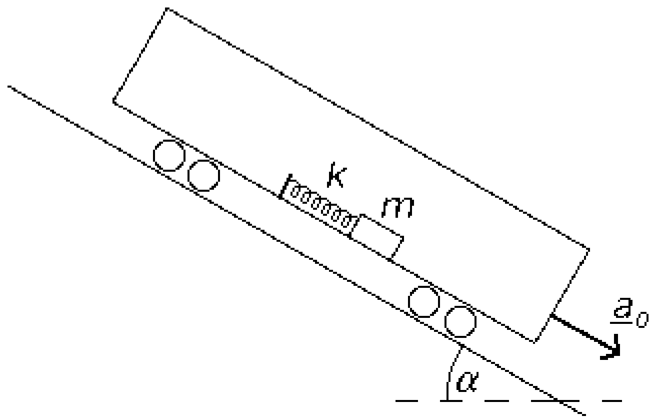


---

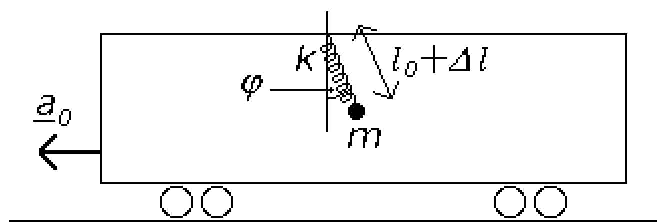
5. Egy kocsi $\mathbf{a}_0$ gyorsulással mozog egy α hajlásszögű lejtő mentén. A padlóján elhelyezkedő, k direkciós erejű rugóhoz egy m tömegű testet rögzítünk.

   a) Írjuk föl a test mozgásegyenletének a lejtővel párhuzamos komponensét a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben! Mérjük a test pozícióját a rugó nyújtatlan helyzetétől.

   b) Mekkora lesz a rugó egyensúlyi megnyúlása?



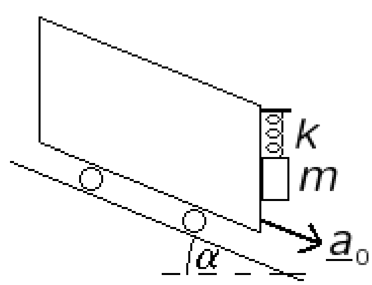
6. Egy vasúti kocsi $\mathbf{a}_0$ gyorsulással mozog vízszintes irányban. A plafonra akasztunk egy elhanyagolható tömegű, k direkciós erejű rugót, amelynek a megnyújtatlan hossza l_0. A rugó végéhez egy m tömegű testet rögzítünk. Jelölje a rugó megnyúlását Δl, a rugó hossztengelyének a függőlegessel bezárt szögét φ. Mekkora az egyensúlyi φ^* szög és az egyensúlyi Δl^* megnyúlás?



7. Egy siklókocsi $\mathbf{a}_0$ gyorsulással mozog egy α hajlásszögű lejtő mentén. A homlokfalára felfüggesztett k direkciós erejű rugóhoz egy m tömegű testet rögzítünk, amely felfekszik a homlokfalra, de a súrlódás elhanyagolható.

   a) Írjuk fel a test mozgásegyenletének a homlokfallal párhuzamos (azaz függőleges) komponensét a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben! Mérjük a test pozícióját a rugó nyújtatlan helyzetétől.

   b) Mekkora legyen a_0, hogy a rugó egyensúlyi megnyúlása eltűnjön?



8. Rajzoljuk fel a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(x+a)^2 & , \text{ha}\, x \le -a\,, \\ V_0\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & , \text{ha}\, |x| < a\,, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ha}\, x \ge a\,, \end{cases}$$

ahol $a, k, V_0 > 0$. Adjuk meg a mozgás fordulópontjait! Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x=-a)$, az $\dot{x}(x=0)$ és az $\dot{x}(x=a)$ sebességeket! Mindennek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát! Diszkutáljuk külön az *a)* $0 < E < V_0$ és a *b)* $E > V_0$ eseteket!

9. Tekintsük a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha x & , \text{ha}\, x < 0\,, \\ 0 & , \text{ha}\, 0 \le x < a\,, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ha}\, x \ge a\,, \end{cases}$$

ahol $\alpha, a, k > 0$. Adjuk meg a mozgás fordulópontjait! Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x=0)$ és az $\dot{x}(x=a)$ sebességet! Mindennek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát! Diszkutáljuk külön az *a)* $E < 0$ és a *b)* $E > 0$ eseteket!

10. Tekintsük a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} -\alpha x - V_0 & , \text{ha}\, x \le 0\,, \\ -V_0 \cos\frac{\pi x}{2a} & , \text{ha}\, 0 < x \le a\,, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ha}\, x > a\,, \end{cases}$$

ahol $\alpha, V_0, a, k > 0$. Legyen $-V_0 < E < 0$. Hol van a mozgásnak fordulópontja? Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és $x \le 0$-ra nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x=0)$ sebességet! Rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát!

11. *Ez a feladat a 2. témakörbe került át.*

12. *Ez a feladat szintén a 2. témakörbe került át.*

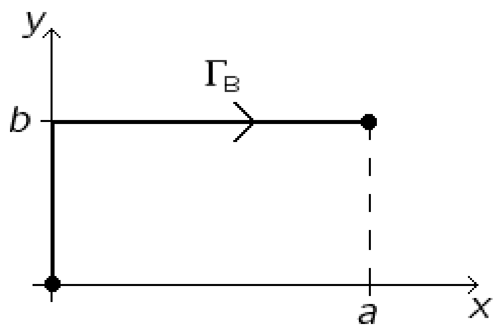
13. Tekintsük a következő erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Cx^2y\mathbf{e}_-\,,$$

ahol C egy konstans paraméter, $\mathbf{e}_-$ pedig az alábbi egységvektor:

$$\mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ_B görbe mentén!



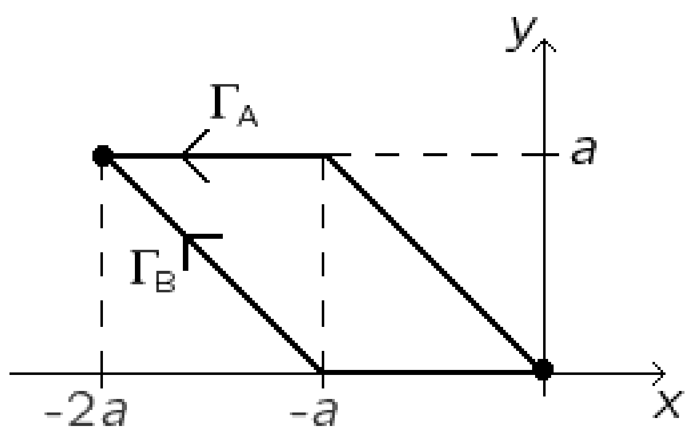
14. Tekintsük a következő erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Cy^2\mathbf{e}_+ \,,$$

ahol C egy konstans paraméter, $\mathbf{e}_+$ pedig az alábbi egységvektor:

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \,.$$

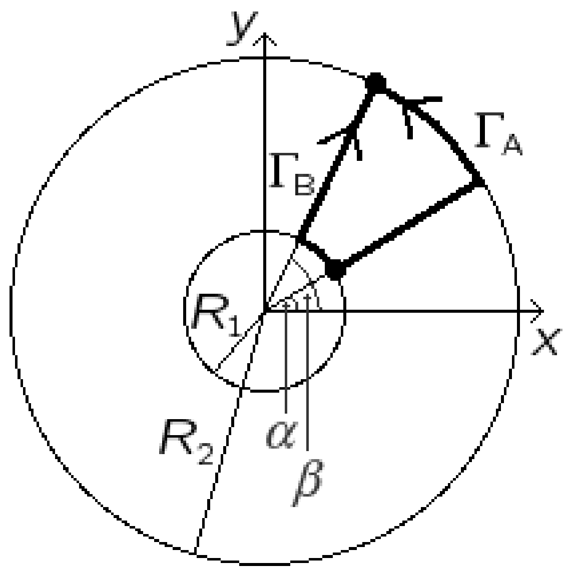
Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ_A és Γ_B görbék mentén! Lehet-e az eredmények alapján az erőtér konzervatív?



15. Tekintsük a következő (Lennard-Jones-féle) erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\varepsilon \left[12 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - 6 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{6} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^2} \,,$$

ahol ε és σ konstans paraméterek. Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ_{A} és Γ_{B} görbék mentén! Az eredmények alapján lehet-e az erőtér konzervatív?



http://theorphys.elte.hu/~drotos/emb/Gyakorlo1.pdf