

Elméleti mechanika B  
Gyakorló-feladatsor, 2. témakör

1. Tekintsük a következő, az  $x \in [0, \frac{\pi}{K})$  intervallumon értelmezett 1 dimenziós potenciált:

$$V(x) = V_0 \sin^2(Kx).$$

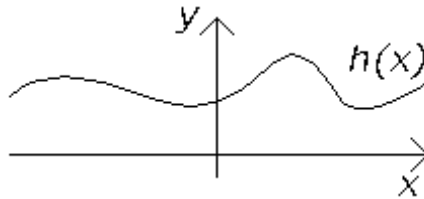
Adjuk meg az egyensúlyi pont(ok) helyét! Vizsgáljuk meg, hogy milyen  $V_0$  és  $K$  paraméterek mellett stabil(-ak)! Határozzuk meg, hogy stabil esetben mekkora a körülötte(-ük) kialakuló kis rezgések körfrekvenciája!

2. Van-e az alábbi, az  $x \in (-a, a)$  intervallumon értelmezett 1 dimenziós potenciálnak olyan szélsőértéke, amelynek a környezetében kialakulhatnak kis rezgések? Ha igen, mi ezek körfrekvenciája?

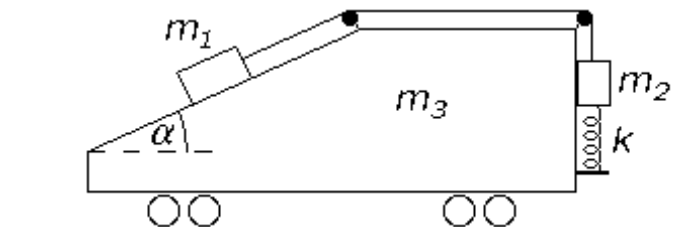
$$V(x) = V_0 \left( \frac{a}{x+a} - \frac{a}{x-a} \right),$$

ahol  $a, V_0 > 0$ .

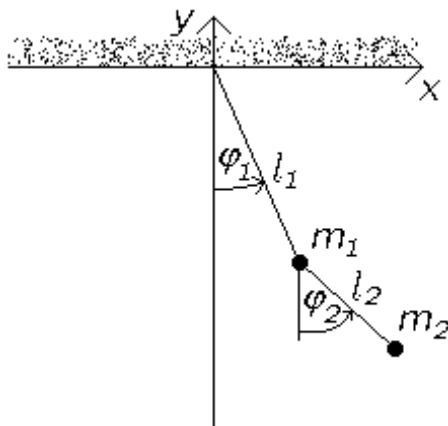
3. Határozzuk meg egy tetszőleges  $h(x)$  függvénnyel jellemezhető domborzaton súrlódás nélkül mozgó tömegpont Lagrange-függvényét, majd származtassuk belőle az Euler-Lagrange-egyenletet!



4. Írjuk fel az ábrán látható, súrlódásmentes rendszer Lagrange-függvényét, és számítsuk ki az Euler-Lagrange-egyenlete(ke)t! (Feltesszük, hogy az  $m_2$  tömegű test nem leng ki oldalirányban.)



5. Függesszünk egy matematikai inga végére egy újabb matematikai ingát, és írjuk fel az így adódó ún. kettős inga Lagrange-függvényét, majd határozzuk meg az Euler–Lagrange-egyenleteket! *Javaslat: Használjuk általános koordinátáknak az ábrán látható  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  szögeket!*

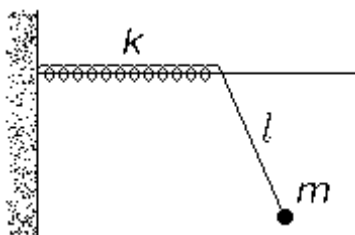


Kedvcsináló videó az Euler–Lagrange-egyenletek megoldásával kapcsolatban:

<http://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU>

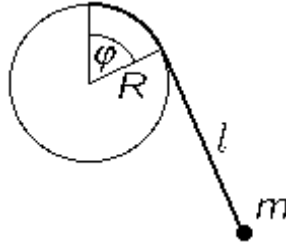
A videón látható rendszer annyiban tér el az általunk vizsgálttól, hogy ott fizikai ingákról van szó, és a súrlódás nem hanyagolható el.

6. (Elméleti fizikai példatár 11.26.)  $l$  hosszúságú,  $m$  tömegű fonálinga felfüggesztési pontja  $k$  direkciós állandójú rugóhoz van rögzítve. A felfüggesztési pont vízszintesen mozoghat. Határozzuk meg a Lagrange-függvényt és az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!



7. Tekintsünk egy súrlódásmentes asztalt, melyre egy vízszintes helyzetű rugót helyezünk. A rugó direkciós ereje  $k$ , megnyújtatlan hossza  $l_0$ . A rugó egyik végét gombostűvel rögzítjük, a gombostű tengelye körül a rugó szabadon elfordulhat. A rugó másik végére egy  $m$  tömegű test kerül. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét, és származtassuk belőle az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!

8. (11.27.)  $l$  hosszúságú nyújthatatlan fonal (vastag vonal az ábrán) egyik végét  $R$  sugarú, függőleges síkban álló rögzített korong tetején rögzítjük. Másik végére  $m$  tömegű testet akasztunk. Határozzuk meg a Lagrange-függvényt, és írjuk fel az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!



9. Lássuk be, hogy centrális potenciál mellett a radiális irányú, effektív potenciálban történő mozgás mechanikai energiája megegyezik a centrális mozgás teljes mechanikai energiájával!
10. A Kepler-problémában adott  $E$  energia és  $N$  impulzusmomentum mellett milyen  $r$  értékeknél van a radiális mozgásnak fordulópontja? Diskutáljuk külön az  $E < 0$ , az  $E \rightarrow 0^-$ , az  $E = 0$  és az  $E > 0$  eseteket! Összhangban vannak-e a megfigyeléseink a különböző pályaalakokról tanultakkal?
11. Mozogjon egy  $m$  tömegű tömegpont a

$$V(r) = \alpha r$$

potenciálban, ahol  $\alpha > 0$  egy ismert paraméter. A tömegpont  $N$  impulzusmomentuma adott. Mekkora sugarú körpálya valósulhat meg? Ezen milyen szögsebességgel haladhat a tömegpont? Stabil-e a körpálya? Ha igen, mekkora a körpálya körüli kis rezgések körfrekvenciája? Záródik-e a síkban ezen kis rezgések pályája?

12. Mozogjon egy  $m$  tömegű tömegpont  $R$  sugarú körpályán a

$$V(r) = \alpha r, \quad \alpha > 0$$

potenciálban. Mekkora lehet a tömegpont impulzusmomentuma?

13. Tekintsük a következő centrális potenciált:

$$V(r) = \frac{1}{4}\gamma r^4, \quad \gamma > 0.$$

Egy  $m$  tömegű tömegpont mozgását ebben a potenciálban a

$$\varphi(t) = \Omega t$$

függvény írja le,  $\Omega$  ismert konstans. A tömegpont  $N$  impulzusmomentuma adott. Mekkora a tömegpont sebessége? Mekkora a potenciálban szereplő  $\gamma$  paraméter? Mekkora a körpálya körüli kis rezgések körfrekvenciája?

14. Centrális potenciálban megkerüli-e a tömegpont az origót (lesz-e a szögelfordulása  $2\pi$  nagyságú), ha radiális irányban a mozgása korlátos? Mit mondhatunk arról az esetről, amikor nem korlátos?

<http://theorphys.elte.hu/~drotos/emb/Gyakorlo2.pdf>