1. $$\dot{x}^2 + v_0^2\left(\sin\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)=0 \qquad v_0, \lambda > 0, \ m \text{ ismert}$$

a)

„Rendezzük át" úgy, hogy az energiamegmaradást lássuk:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m v_0^2\left(\sin\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)=0$$

A potenciálnak tartalmaznia kell minden x-függő tagot, a konstansok szabadon írhatók vagy a potenciálba, vagy a teljes energiába. Általánosan:

$$V(x)=\frac{1}{2}m v_0^2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda}+C$$

← szabadon megválasztható konstans

Ezt beírva az energiamegmaradás képletébe:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m v_0^2\sin\frac{2\pi x}{\lambda}+C = -\frac{1}{4}m v_0^2 + C$$

$$T + V = E \implies E = -\frac{1}{4}m v_0^2 + C$$

b)

$$\dot{x}\left(x=-\frac{\lambda}{4}\right)^2 + v_0^2\left(\sin\frac{2\pi\cdot\left(-\frac{\cancel{\lambda}}{4}\right)}{\cancel{\lambda}}+\frac{1}{2}\right)=0$$

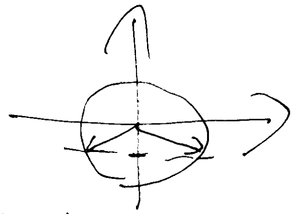
$$\dot{x}\left(x=-\frac{\lambda}{4}\right)^2 = -v_0^2\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left|\dot{x}\left(x=-\frac{\lambda}{4}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot v_0$$

c)

$$\dot{x} = 0 \rightarrow v_0^2\left(\sin\frac{2\pi x_{fp}}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sin\frac{2\pi x_{fp}}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

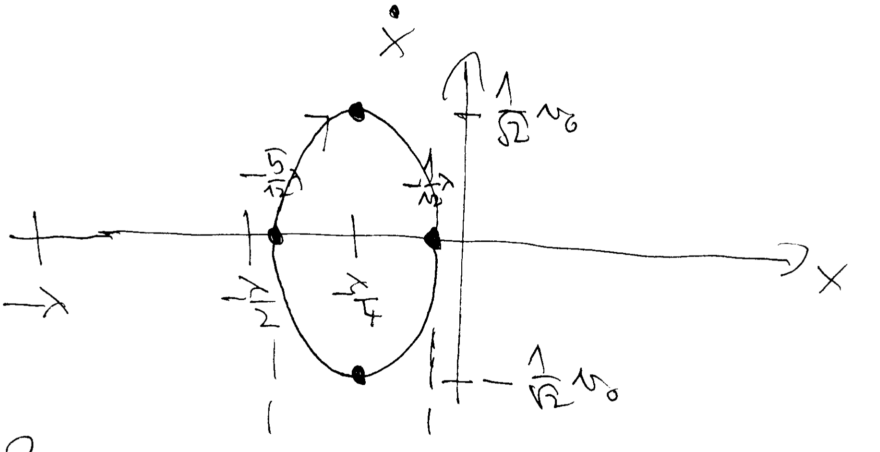


Vegyük figyelembe, hogy a tömegpont áthalad az $x = -\frac{\lambda}{4}$ helyen, így az ehhez szomszédos megoldások lesznek a vizsgált tömegpont fordulópontjai:

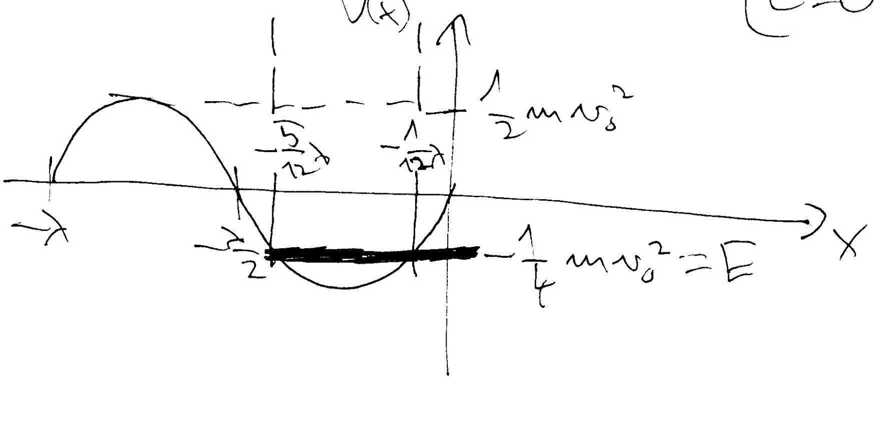
$$\frac{2\pi x_{fp1}}{\lambda} = -\frac{5\pi}{6} \rightarrow x_{fp1} = -\frac{5}{12}\lambda$$

$$\frac{2\pi x_{fp2}}{\lambda} = -\frac{\pi}{6} \rightarrow x_{fp2} = -\frac{1}{12}\lambda$$

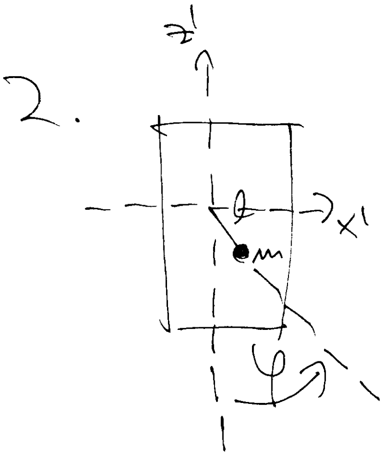
d)



Szemléltetés: (C=0 esetén)

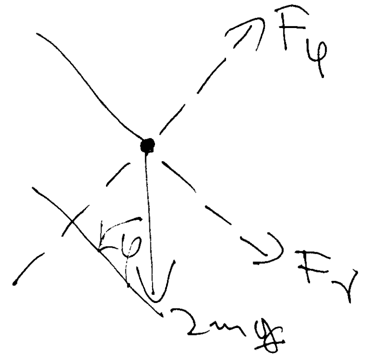


2.



$$m\ddot{\underline{r}}' = -m\underline{a}_0 + m\underline{g} + \underline{K}$$

a) $\underline{a}_0 = -\underline{g} \Rightarrow m\ddot{\underline{r}}' = 2m\underline{g} + \underline{K}$

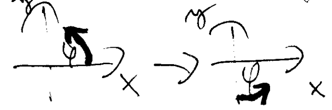


$$(2m\underline{g})_\varphi = -2mg\sin\varphi$$

$K_\varphi = 0$, mert a „kötélerő kötélirányú", ebben az esetben radiális.

$$(m\ddot{\underline{r}}')_\varphi = ma_\varphi = ml\ddot{\varphi} + 0 = ml\ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow \varphi$ egy konstanssal mindig eltolható, a_φ és v_φ kifejezésében ugyanúgy fog megjelenni.



$$\Rightarrow \boxed{ml\ddot{\varphi} = -2mg\sin\varphi}$$

Kis kitérésre: $\sin\varphi \cong \varphi$

$$\Rightarrow ml\ddot{\varphi} \cong -2mg\varphi$$

$$\ddot{\varphi} \cong -2\frac{g}{l}\varphi$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{2\frac{g}{l}}, \quad \underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

b) $\underline{a}_0 = \underline{g} \Rightarrow m\ddot{\underline{r}}' = \underline{K}$

$K_\varphi = 0$ ugyanúgy, mint az előbb

$(m\ddot{\underline{r}}')_\varphi = m l \ddot{\varphi}$ ugyanúgy, mint az előbb

$\Rightarrow$

$$m l \ddot{\varphi} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = 0}$$

Általános megoldás: $\varphi(t) = A \cdot t + B$

ahol A és B integrálási konstansok

$t = 0$: $\varphi(t=0) = B$, $\dot{\varphi}(t=0) = A$ (és $\dot{\varphi}(t) = A$ $\forall t$-re)

$\Rightarrow \varphi(t) = \dot{\varphi}(t=0) \cdot t + \varphi(t=0)$

Vagyis sikerült a konstansokat kifejezni a kezdeti feltételekből.

Kiegészítés: Mekkora $|\underline{K}| \equiv K = ?$ Írjuk fel a radiális komponenst is!

$K_r = -K$

$(m\ddot{\underline{r}}')_r = m a'_r = m \cdot (0 - l \cdot \dot{\varphi}^2) = -m l \dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow -m l \dot{\varphi}^2 = -K$

$\underline{\underline{K}} = m l \dot{\varphi}^2 = m l A^2 = \underline{\underline{m l \dot{\varphi}(t=0)^2}}$

Ezt ismerjük! Tudjuk, hogy konstans.