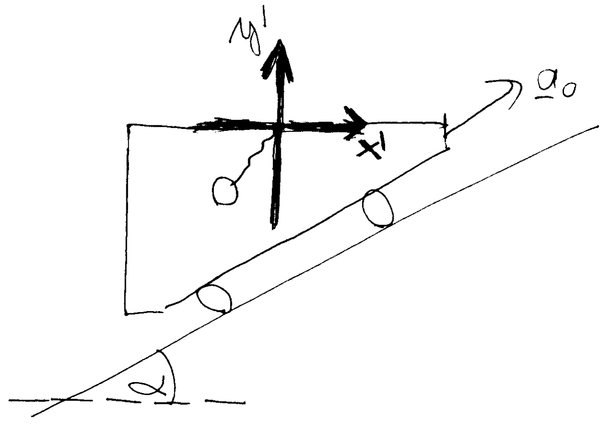
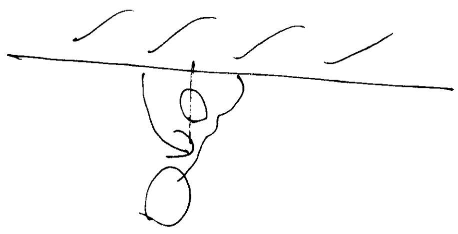
1.



Az egyszerűség kedvéért mérjük a szöget a vízszintestől (de bárhonnan lehet):



Így a rugó párhuzamos a lejtővel, ha $\phi = \alpha$.

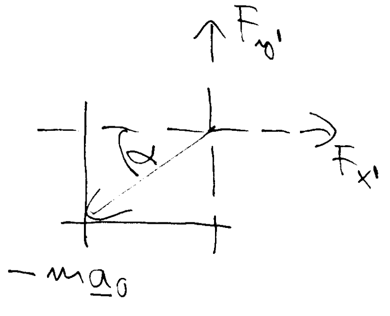
Írjuk fel az egyensúly feltételét a mozgásegyenlet segítségével:

$$m\underline{\ddot{r}}' = m\underline{g} + (-m\underline{a}_0) + \underline{F}_{rugó}$$

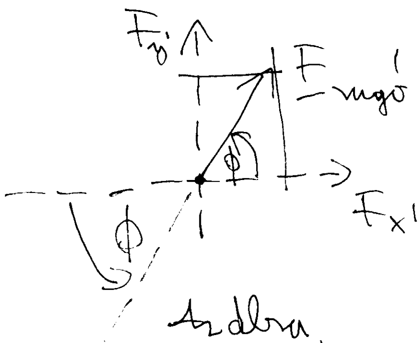
Egyensúlyban: $m\underline{\ddot{r}}' = 0 \quad \to \quad m\underline{g} + (-m\underline{a}_0) + \underline{F}_{rugó} = 0$

Komponensenként:

$$(m\underline{g})_{x'} = 0$$
$$(m\underline{g})_{y'} = -mg$$



$$(-m\underline{a}_0)_{x'} = -m a_0 \cos\alpha$$
$$(-m\underline{a}_0)_{y'} = -m a_0 \sin\alpha$$



$$(\underline{F}_{rugó})_{x'} = k\Delta l \cdot \cos\phi$$
$$(\underline{F}_{rugó})_{y'} = k\Delta l \cdot \sin\phi$$

Az ábra a megnyúlt rugó esetét, azaz a $\Delta l > 0$ esetet szemlélteti.

Negatív „megnyúlásra” is jó a képlet, hiszen akkor Δl előjelet vált, ami éppen ellentétes irányú erőt jelent.

$$-m a_0 \cos\alpha + k \Delta l \cos\phi = 0$$

$$-m g - m a_0 \sin\alpha + k \Delta l \sin\phi = 0$$

Azt szeretnénk, hogy $\phi = \alpha$ legyen. Lehetséges-e? Fejezzük ki $\operatorname{tg}\phi$-t!

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{m g + m a_0 \sin\alpha}{m a_0 \cos\alpha} = \frac{g + a_0 \sin\alpha}{a_0 \cos\alpha} = \frac{\frac{g}{a_0} + \sin\alpha}{\cos\alpha} \overset{!}{=} \operatorname{tg}\alpha$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{g}{a_0}}_{\text{Ennek kéne 0-nak lennie.}} + \operatorname{tg}\alpha$$

Ez nem lehetséges. (Csak a $\frac{g}{a_0} \to 0$ határesetben.)

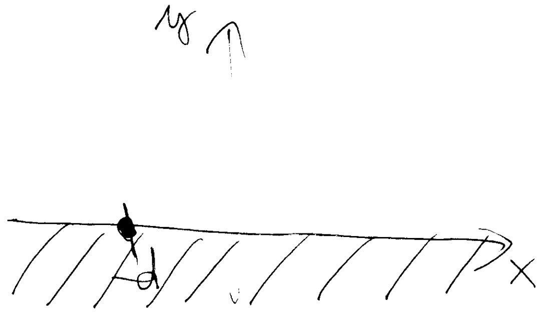
2. $v_{fr} = 0$

$$v_{f\varphi} = -\frac{d}{\tau} - \frac{v_0}{\tau} t$$

$t = 0$: $x = -d$, $y = 0$

$$v_{el\, r} = -v_0 \frac{x}{|x|}$$

$$v_{el\, \varphi} = -\frac{v_0}{d^2} r^2$$



$T = ?$, $r(t=T) = ?$, $\varphi(t=T) = ?$, amikor elkezd közeledni az origóhoz

---

Az origótól mért távolság „r". Mivel $\dot{r} = v_r$, azt az időpillanatot keressük, amikor v_r előjelet vált.

$$v_r = v_{fr} + v_{elr} = -v_0 \frac{x}{|x|} = \begin{cases} v_0, & \text{ha } x<0 \\ -v_0, & \text{ha } \cancel{x>0} \quad x>0 \end{cases}$$

Akkor vált előjelet, amikor $\boxed{x=0}$.
Síkbeli polárkoordinátákban,
a feladat geometriájával: $\boxed{\varphi=\frac{\pi}{2}}$
r pedig bármekkora.

$\Leftarrow$

$$\varphi(t) = ?$$

$$v_\varphi = v_{f\varphi} + v_{el\varphi} = -\frac{d}{\tau} - \frac{v_0}{\tau} t - \frac{v_0}{d^2} r^2$$

$r(t) = ?$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_r(t')\,dt' = +d + \int_0^t v_0\,dt' = +d + v_0 t \quad (\text{ha } t<T)$$

$r(t_0) = +d$

Mivel $x=0$ eléréséig $x<0$.

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{v_\varphi(t')}{r(t')}\,dt' = \pi + \int_0^t \frac{-\frac{d}{\tau} - \frac{v_0}{\tau}t' - \frac{v_0}{d^2}\cdot(+d+v_0t')^2}{+d+v_0t'}\,dt' =$$

$\varphi(t_0) = \pi$

$$= \pi + \int_0^t \left(\frac{-\frac{d}{\tau} - \frac{v_0}{\tau}t'}{+d+v_0t'} - \frac{v_0}{d^2}(+d+v_0t') \right) dt' =$$

$$= \pi + \int_0^t \left(-\frac{1}{\tau} - \frac{v_0}{d} - \frac{v_0^2}{d^2}t' \right) dt' =$$

$$= \pi - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d} \right) t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{d^2} \cdot t^2$$

$$\varphi(t=T) = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \quad \pi - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d}\right) \cdot T - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{d^2} \cdot T^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$T_{1,2} = \frac{\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{d^2} \cdot \frac{\pi}{2}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{d^2}\right)}$$

$$T_1 = \frac{\dots + \sqrt{\dots}}{\dots} < 0 \Rightarrow T = T_2 = \frac{\dots - \sqrt{\dots}}{\dots}$$

$$T = T_2 = -\frac{d^2}{v_0^2} \cdot \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d}\right) + \frac{d^2}{v_0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d}\right)^2 + \frac{v_0^2}{d^2} \cdot \pi}$$

$$\varphi(t=T) = \frac{\pi}{2}$$

$$r(t=T) = d + v_0 T = d - \frac{d^2}{v_0} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d}\right) + \frac{d^2}{v_0} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_0}{d}\right)^2 + \frac{v_0^2}{d^2} \cdot \pi}$$

(Egyébként: $x(t=T) = 0$, $y(t=T) = r(t=T)$)