

Elméleti mechanika B
Zárthelyi dolgozat, 1. témakör
2014. október 21., kedd

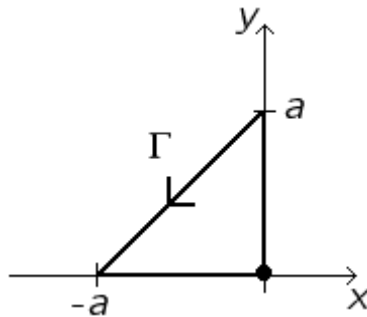
Minden feladatot 0 és 4 pont között értékelek. Az egyes feladatokra adott értéket az ott feltüntetett faktorral szorzom, és az így adódó pontszámok összege adja a ZH összpontszámát. Maximális összpontszám: 20 pont.

1. Tekintsük a következő erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = C(x - y)\mathbf{e}_x,$$

ahol C egy konstans paraméter, \mathbf{e}_x pedig az x irányú egységvektor. Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ görbe mentén! Lehet-e az eredmény alapján az erőter konzervatív?

(1x-es szorzó)



2. Tekintsük a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 + \frac{1}{2}k(x + a)^2 & , \text{ ha } x \leq -a, \\ V_0 & , \text{ ha } -a < x < 0, \\ V_0 + \alpha x & , \text{ ha } x \geq 0, \end{cases}$$

ahol $V_0, k, a, \alpha > 0$ konstans paraméterek. Mekkora E mechanikai energia mellett valósulhat meg mozgás ebben a potenciálban? A továbbiakban tekintsünk egy ilyen E energiát. Hol vannak a mozgás fordulópontjai? Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x = -a)$ és az $\dot{x}(x = 0)$ sebességet! Ezek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát! Periodikus-e a mozgás?

(2x-es szorzó)

3. Az ábra egy egyenes partú strandot ábrázol, a part hossza $2l$. A strand végeinél egy-egy (elhanyagolható szélességű) zátony nyúlik be a vízbe, ezek egyenként l hosszúságúak. A strandterületen kívül az egyenes part folytatódik. A víz hullámzik. A felszíni sebességének nincs a parttal párhuzamos komponense, a partra merőleges komponense pedig időben periodikusan változik: az ábrán jelölt koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned}v_{fx} &= 0, \\v_{fy} &= v_0 \cos(\omega t),\end{aligned}$$

ahol $v_0, \omega > 0$ konstansok. A $t = 0$ időpillanatban egy szondát indítunk el a bal oldali zátony végéről, azaz az ábrán jelölt koordináta-rendszer origójából (tömör karika) úgy, hogy nincsen a vízhez viszonyítva relatív kezdősebessége. A vízhez viszonyított relatív gyorsulását a következő módon állítja be a szonda:

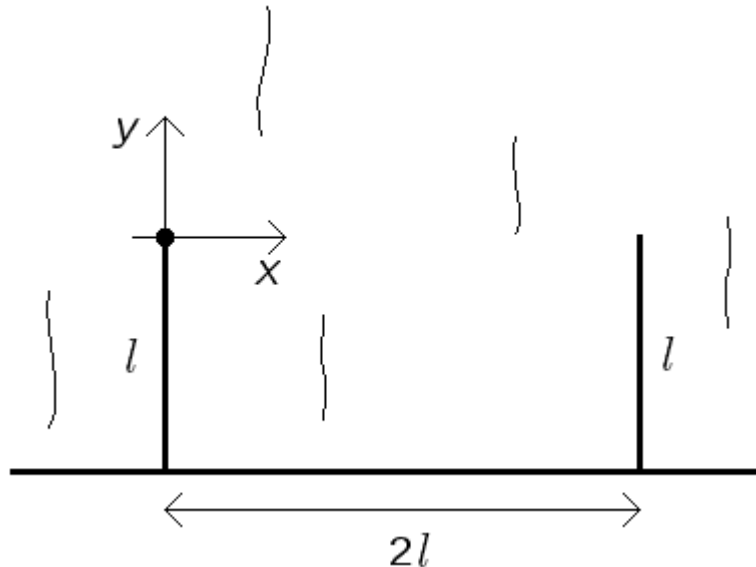
$$\begin{aligned}a_{relx} &= \frac{a_0}{l} x \operatorname{tg} \varphi, \\a_{rely} &= -\frac{1}{2} \frac{dv_{fy}}{dt},\end{aligned}$$

ahol x és φ a szonda aktuális pozíciójának az ábrán jelölt koordináta-rendszerben mért koordinátája, ill. síkbeli polárszöge, $a_0 > 0$ pedig egy konstans. Határozzuk meg a szonda mozgását leíró $\mathbf{r}(t)$ függvényt! (Feltesszük, hogy a szonda nem hagyja el a strandterületet.)

(2x-es szorzó)

Pluszpontért: Írjunk fel a feladat paramétereire egy olyan egyenletet, ami biztosítja, hogy a szonda pontosan a strand túlvégén benyúló zátony csúcsánál haladjon el!

(Az összpontszámban +3 pont)



Jó munkát!