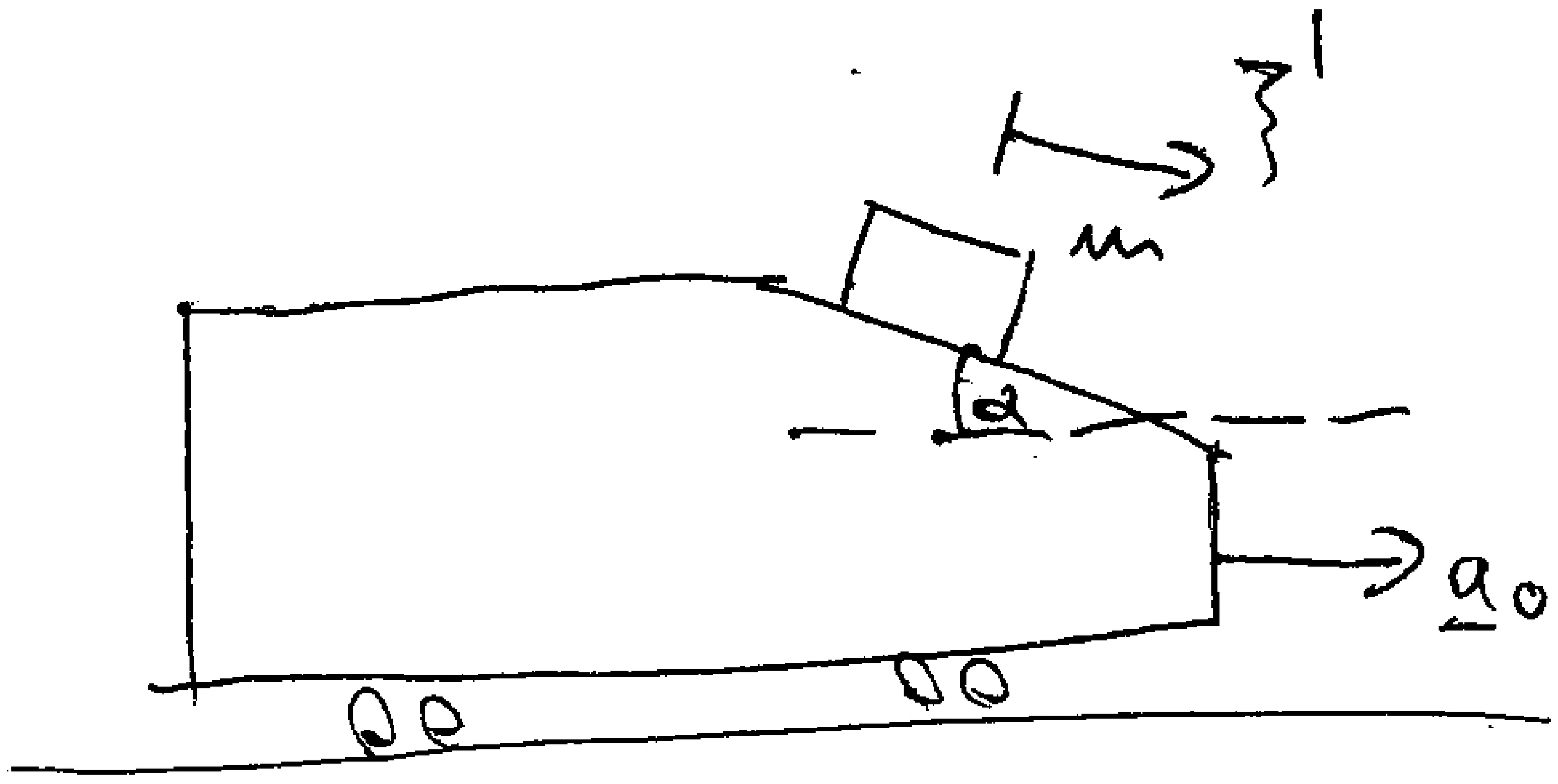
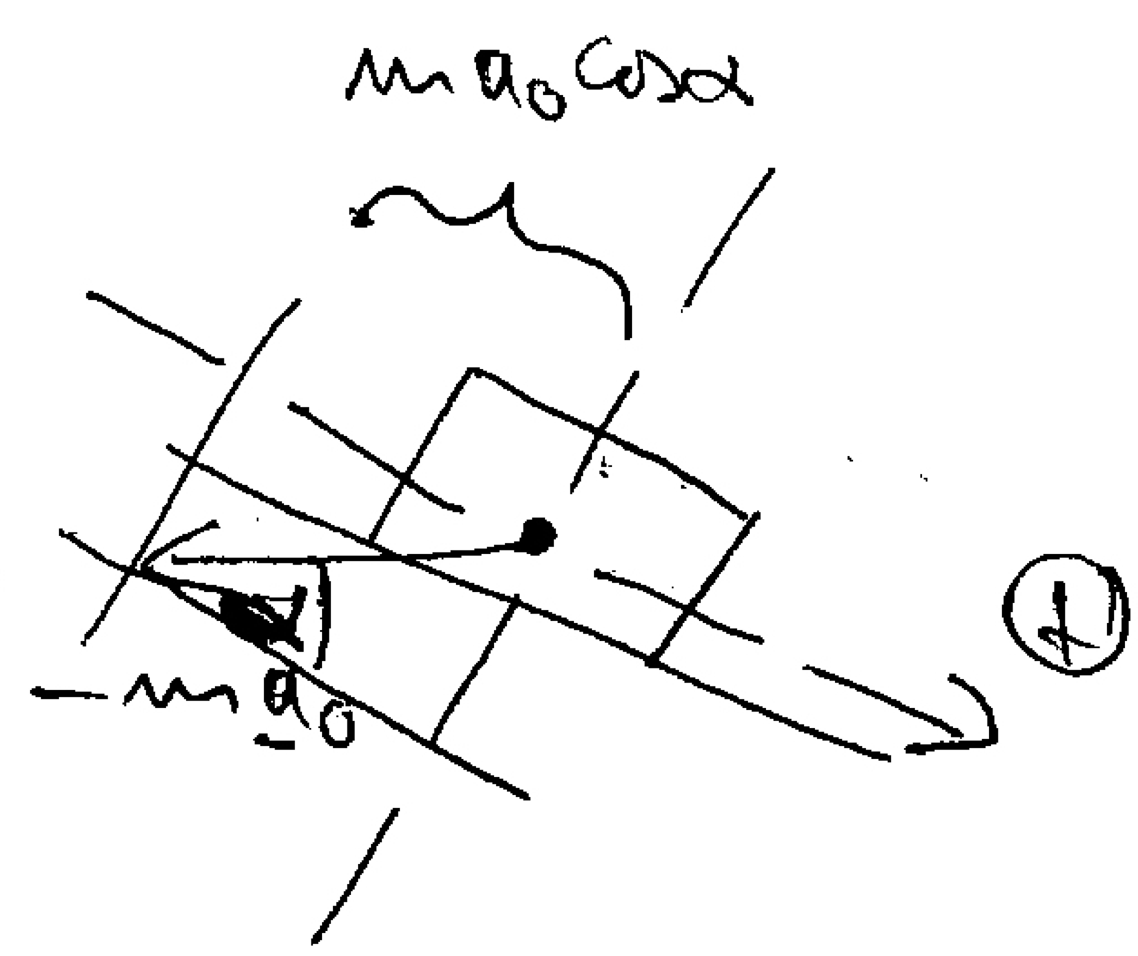
1. Legyen a test gyorsulása a kocsihoz viszonyítva 0: ekkor, kezdősebesség híján, nem mozdul el.



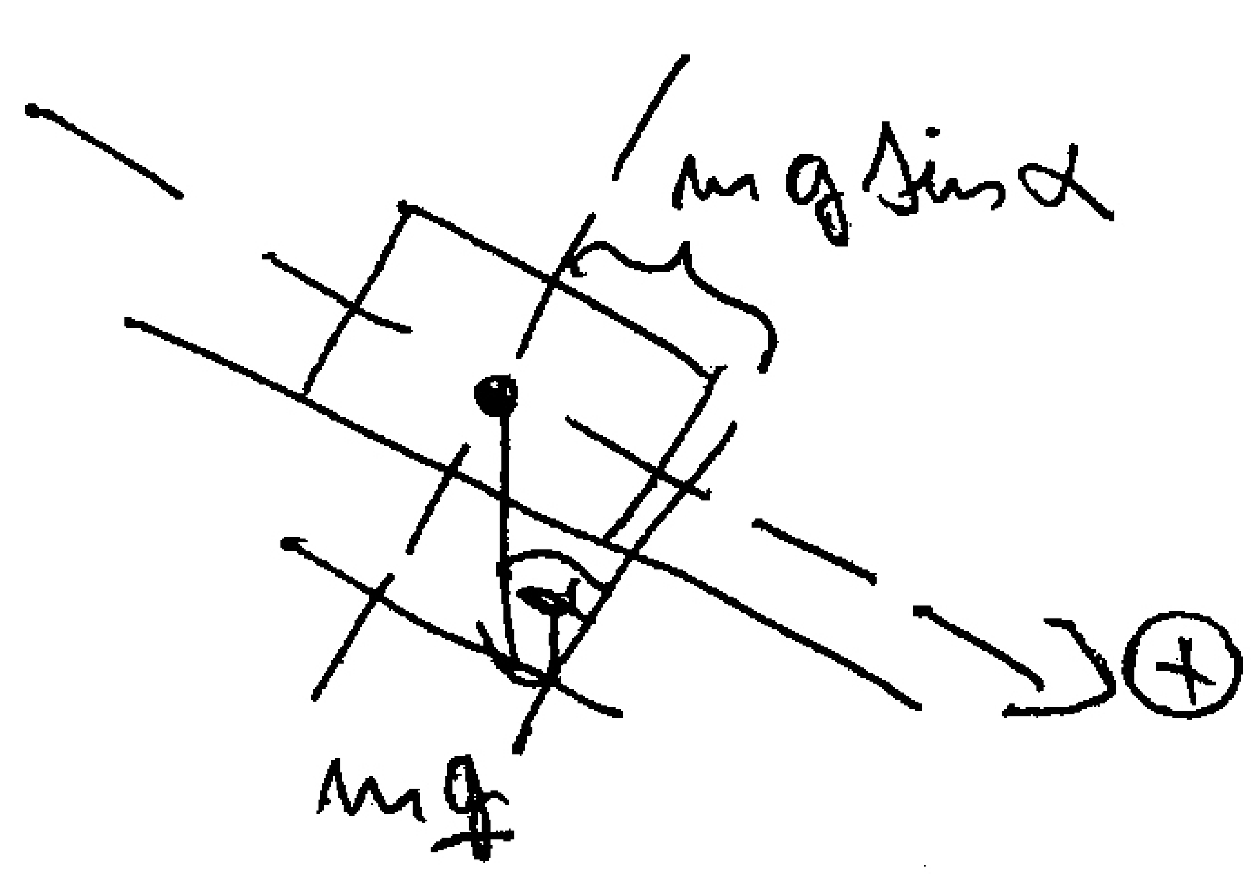
$$m\underline{a}' = -m\underline{a}_0 + m\underline{g} + \underline{N}$$

$$(m\underline{a}')_\parallel = m\ddot{\xi}'$$

$$(-m\underline{a}_0)_\parallel = -ma_0\cos\alpha$$



$$(m\underline{g})_\parallel = +mg\sin\alpha$$



$$(\underline{N})_\parallel = 0$$

$$m\ddot{\xi}' = -ma_0\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

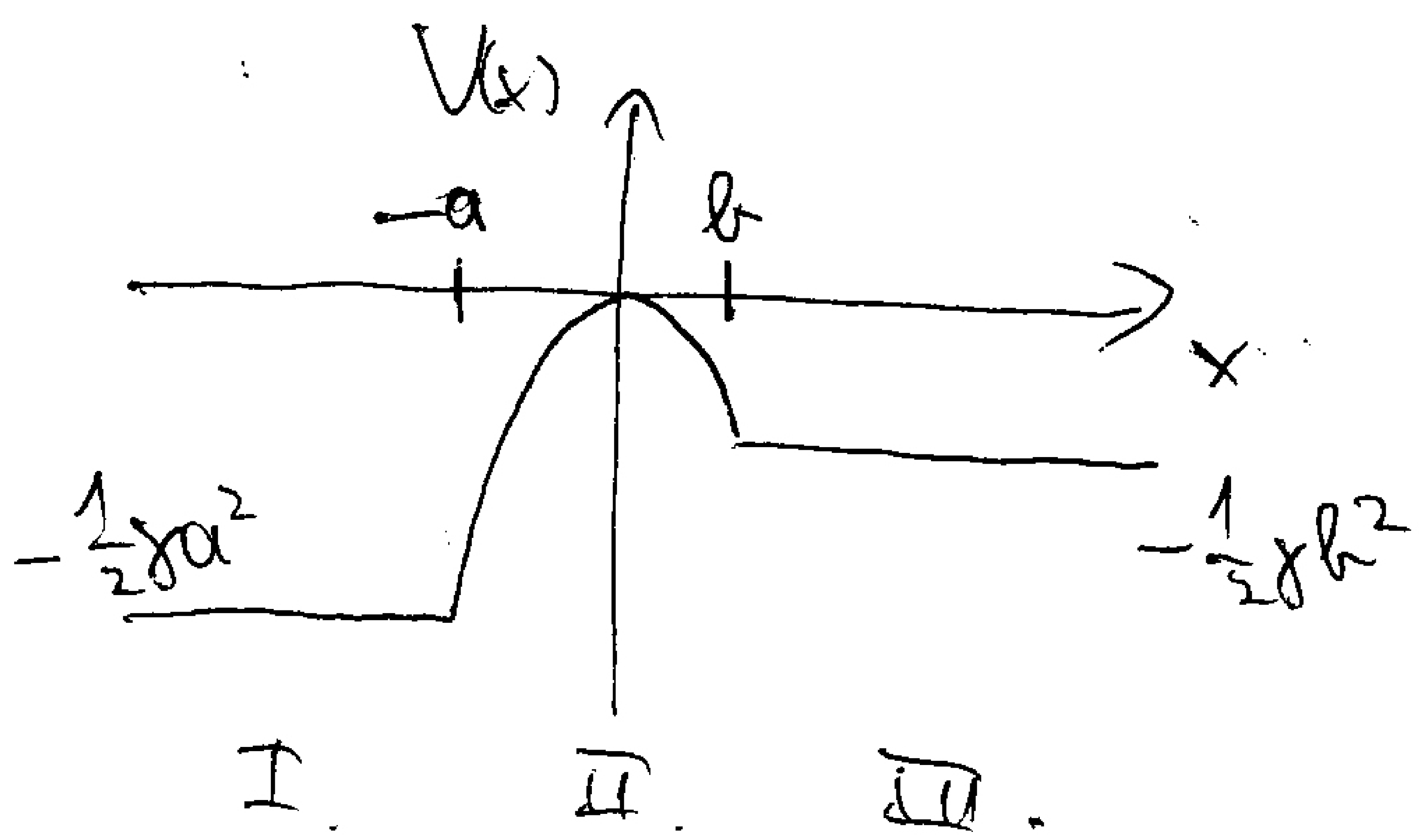
$$\ddot{\xi}' \overset{!}{=} 0$$

$$\to \quad -\cancel{m}a_0\cos\alpha + \cancel{m}g\sin\alpha \overset{!}{=} 0$$

$$|\underline{a}_0| = a_0 \overset{!}{=} g\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

2.

$$V(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\gamma a^2, & \text{ha } x<-a \text{ I.} \\ -\frac{1}{2}\gamma x^2, & \text{ha } -a\leq x\leq b \text{ II.} \\ -\frac{1}{2}\gamma b^2, & \text{ha } x>b \text{ III.} \end{cases}$$



Egyensúlyi pont: $V'(x)\big|_{x=x^*} \overset{!}{=} 0$

I. $V'(x)=0 \quad \forall x\in \text{I.}$

$\Rightarrow \forall x \in (-\infty, -a)$ egyensúlyi pont!

II. $V'(x)=-\gamma x \quad , -\gamma x^*_{II} \overset{!}{=} 0 \rightarrow x^*_{II}=0$

Itt ez az egy egyensúlyi pont van.

III. $V'(x)=0 \quad \forall x\in \text{III}.$

$\Rightarrow \forall x\in (b, \infty)$ egyensúlyi pont.

Nyugalom: $\dot{x}\big|_{x=x^*}=0$, $T=0$, $V(x)\big|_{x=x^*}=E$

I. A teljes tartományon: $E=V(x)=-\frac{1}{2}\gamma a^2$
mellett nyugalomban lesz a tömegpont.

II. $E=V(x)\big|_{x=x^*_{II}}=-\frac{1}{2}\gamma x^*_{II}=0$

III. A teljes tartományon: $E=V(x)=-\frac{1}{2}\gamma b^2$
mellett nyugalomban lesz a tömegpont.

$a>b \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\gamma a^2<-\frac{1}{2}\gamma b^2<0$

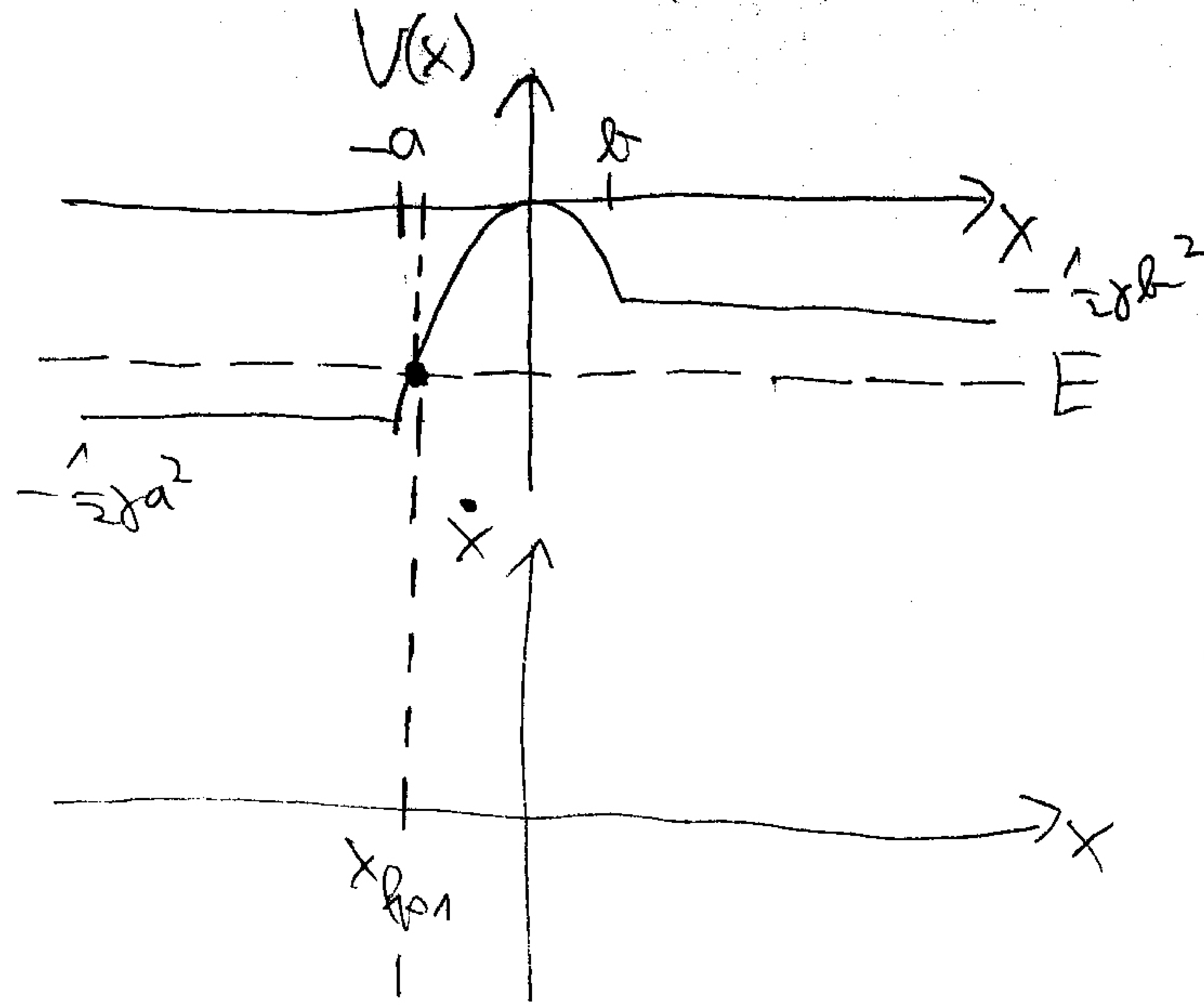
$\Downarrow$

Egy ilyen energiát tekintünk:

$$\underline{-\frac{1}{2}\gamma a^2<E<-\frac{1}{2}\gamma b^2}$$

Mivel $E<V(x)\big|_{x=x^*_{II}}$ és $E<V(x)\big|_{x\in(b,\infty)}$,
ezen az egyensúlyi pontokon nem tud áthaladni.
Mivel $E>V(x)\big|_{x\in(-\infty,-a)}$, az $x\in(-\infty,-a)$
egyensúlyi pontokon át tud haladni.
$\rightarrow$ Utóbbiakban a sebessége:

$$\dot{x}\big|_{x\in(-\infty,a)}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(x)\big|_{x\in(-\infty,a)}\right)}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{1}{2}\gamma a^2\right)}$$



Látható, hogy ennek a mozgásnak 1 fordulópontja lesz. Ez a II. tartományba esik, mert:

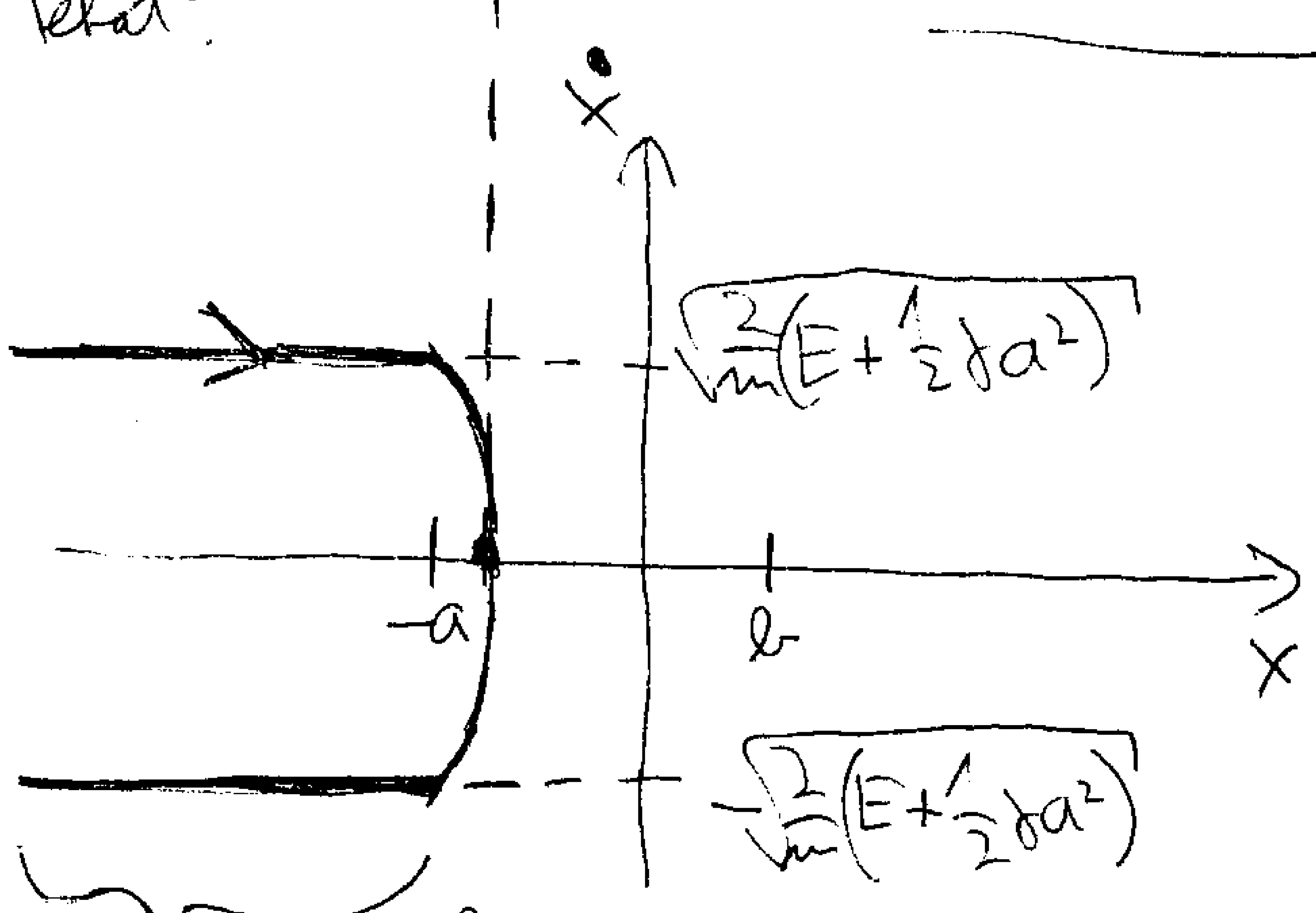
$$V(x_{fp}) \overset{!}{=} E$$

$$-\frac{1}{2}\gamma x_{fp}^2 \overset{!}{=} E$$

$$x_{fp_{1,2}} \overset{!}{=} \mp\sqrt{\frac{2E}{\gamma}}$$

Mivel $x_{fp_2} = \sqrt{\frac{2E}{\gamma}} > b$, ez a fordulópont nem valósul meg. x_{fp1} viszont igen.

Tehát:

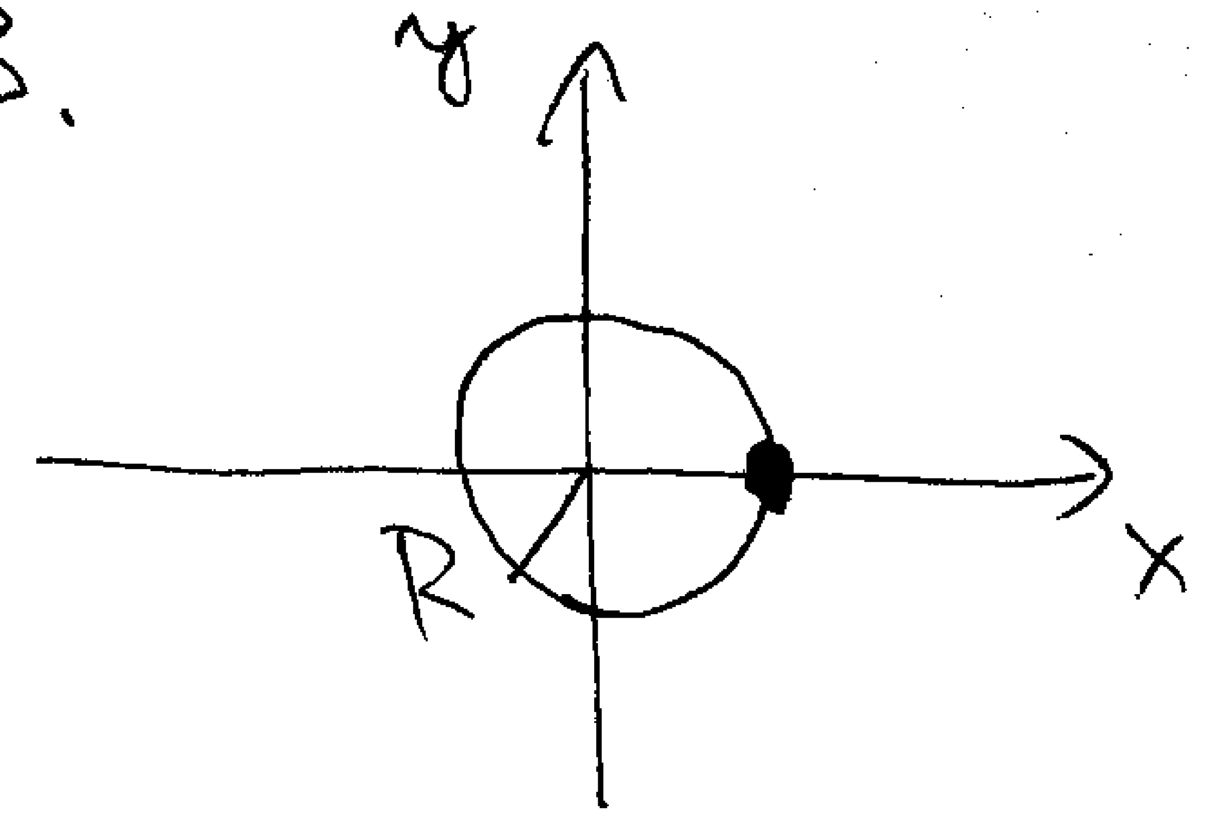


(Itt egy hiperbolába illesztődik a trajektória.)

Vegyük észre, hogy itt minden pont egyensúlyi pont. Ezeken halad át a tömegpont $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{1}{2}\gamma a^2\right)}$ sebességgel.

ZH1P6t/5

3.



$v_{fr} = 0$

$\omega_f = \omega_0 \frac{R}{r}$

$\underline{t=\tau}$: $v_{rel\,r} = 0$, $v_{rel\,\varphi} = 0$,

$x = R,\ y = 0 \Rightarrow r = R,\ \varphi = 0$

Lényegében:

$v_r(t) = ?,\ \varphi(t) = ?$

$v_{rel\,\varphi} = 0$

$\dot{v}_{rel\,r} = \tau^2 \frac{v_\varphi}{t^3}$

$v_r = v_{fr} + v_{rel\,r} = v_{rel\,r}$

$$v_{rel\,r}(t) = v_{rel\,r}(\tau) + \int_\tau^t \dot{v}_{rel\,r}(t')\,dt' = 0 + \int_\tau^t \tau^2 \frac{\overset{=?}{v_\varphi(t')}}{t'^3}\,dt'$$

$$v_\varphi = v_{f\varphi} + v_{rel\,\varphi} = v_{f\varphi} = \omega_f \cdot r = \omega_0 \frac{R}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r} = \omega_0 R$$

$$\rightarrow \boxed{v_r(t)} = v_{rel\,r}(t) = \int_\tau^t \tau^2 \frac{\omega_0 R}{t'^3}\,dt' =$$

$$= \tau^2 \omega_0 R \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\omega_0 R - \frac{1}{2}\omega_0 R \frac{\tau^2}{t^2}}$$

Ez szigorúan monoton növekvő függvény, így a limeszét keressük.

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} v_r(t) = \frac{1}{2}\omega_0 R}$$

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) + \int_\tau^t \underbrace{\omega(t')}_{=?}\, dt'$$

$$\omega = \omega_f + \omega_{rel} = \omega_f + \frac{v_{rel\varphi}}{r} = \omega_f + \frac{0}{r} = \omega_f = \omega_0 \cdot \frac{R}{r}$$

$r(t) = ?$

$$r(t) = r(\tau) + \int_\tau^t v_r(t')\,dt' = R + \int_\tau^t \left(\frac{1}{2}\omega_0 R - \frac{1}{2}\omega_0 R \frac{\tau^2}{t'^2}\right) dt' =$$

$$= R + \frac{1}{2}\omega_0 R(t-\tau) + \frac{1}{2}\omega_0 R \tau^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau}\right) =$$

$$= R - \omega_0 R \tau + \frac{1}{2}\omega_0 R t + \frac{1}{2}\omega_0 R \frac{\tau^2}{t}$$

$$\rightarrow \varphi(t) = 0 + \int_\tau^t \omega_0 \cdot \frac{R}{r(t')}\, dt' =$$

$\boxed{\text{Nem függ } R\text{-től.}}$

$$= \omega_0 \cdot \int_\tau^t \frac{\cancel{R}}{\cancel{R} - \omega_0 \cancel{R} \tau + \frac{1}{2}\omega_0 \cancel{R} t' + \frac{1}{2}\omega_0 \cancel{R} \frac{\tau^2}{t'}}\, dt' =$$

$$= \int_\tau^t \frac{t'}{\frac{1}{2}t'^2 + \left(\frac{1}{\omega_0} - \tau\right)t' + \frac{1}{2}\tau^2}\, dt' \quad \text{(Ez kiintegrálható.)}$$