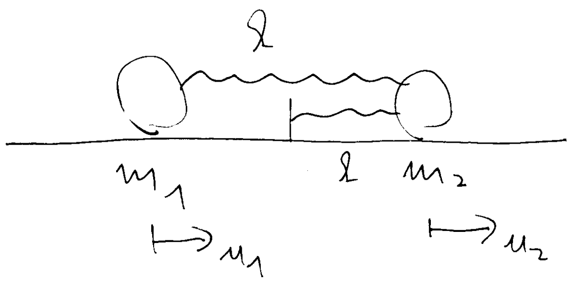
1.



$\omega_I^2 + \omega_{II}^2 = ?$

$$\ddot{u}_1 = -\frac{l}{m_1} u_1 + \frac{l}{m_1} u_2$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{l}{m_2} u_1 - \frac{l+l}{m_2} u_2$$

Ansätz:

$$u_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$$

$$u_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\lambda := -\omega^2$$

Nemtriv. mego.:

$$\begin{vmatrix} -\frac{l}{m_1} - \lambda & \frac{l}{m_1} \\ \frac{l}{m_2} & -\frac{2l}{m_2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{l}{m_1} + \frac{2l}{m_2}\right)\lambda + \frac{l}{m_1} \cdot \frac{2l}{m_2} - \frac{l}{m_1} \cdot \frac{l}{m_2} =$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{l}{m_1} + \frac{2l}{m_2}\right)\lambda + \frac{l^2}{m_1 m_2} \overset{!}{=} 0$$

$$\underbrace{\lambda_{I,II}}_{= -\omega_{I,II}^2} = \frac{-\left(\frac{l}{m_1} + \frac{2l}{m_2}\right) \pm \sqrt{\ldots}}{2}$$

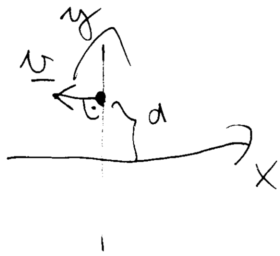
$$\Rightarrow \omega_I^2 = \frac{\left(\frac{l}{m_1} + \frac{2l}{m_2}\right) - \sqrt{\ldots}}{2}, \quad \omega_{II}^2 = \frac{\left(\frac{l}{m_1} + \frac{2l}{m_2}\right) + \sqrt{\ldots}}{2}$$

$$\omega_I^2 + \omega_{II}^2 = \underline{\underline{\frac{l}{m_1} + \frac{2l}{m_2}}}$$

2. $V(r) = -\frac{\alpha}{r^4} \Rightarrow U_{eff}(r) = \frac{N^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^4}$, de $N = ?$

Kezdeti feltétel:

$x = 0,\ y = a,\ v_x = u,\ v_y = 0$



$\Rightarrow r = a,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ v_r = 0,\ v_\varphi = -u$

$N = m r v_\varphi = -mau$

$\uparrow$

a kezdeti feltételre is nyilván igaz

$v_r = \dot{r} = 0$ miatt a kezdeti feltétel fordulópont $V_{eff}(r)$-ben.

Vagy körpályánk van, amikor a két fordulópont egybeesik.
A körpálya megfelelő, ugyanis a kezdeti hely a legközelebbi pont lesz az origóhoz (ahogyan minden más pontjára a pályának).

Körpálya:

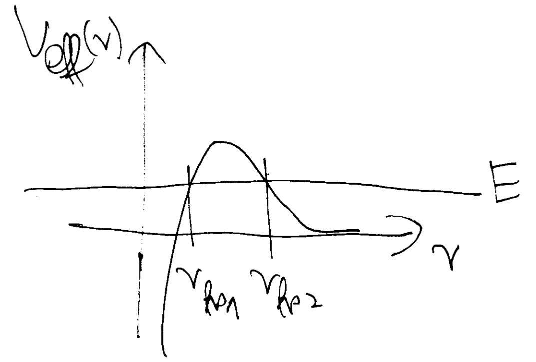
$$V'_{eff}(r) = -\frac{m^2 a^2 u^2}{m r^3} + 4\frac{\alpha}{r^5}$$

$$V'_{eff}(r)\Big|_{r=r^*=a} = -\frac{m^{\cancel{2}} \cancel{a^2} u^2}{\cancel{m} a^3} + 4\frac{\alpha}{a^5} = 0$$

$\boxed{\text{DE van más lehetőség is!}}$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{4\alpha}{ma^4},\ |u| = 2\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

Nem egybeeső fordulópontok:



A kezdeti feltétel lehet olyan fordulópont is, ahol az r-ben lejátszódó mozgásnak minimuma van. A jelen ábrán ez r_{fp2}.

((~~Mennyi is E? Kell ugyanis~~ (Ja nem, nem feltétlenül kell a legegyszerűbb megoldáshoz))

1. megő.

Tudjuk, hogy a keresett fordulópont nem más, mint a kezdeti feltétel:

$$r_{fp2} = a$$

Ennek a fordulópontnak az a tulajdonsága (ami a másiktól megkülönbözteti), hogy r-ben „bal oldali" (minimális) fordulópont, ahol tehát $V'_{eff}(r) < 0$. Írjuk ezt elő!

$$V'_{eff}(r)\Big|_{r=a} = -\frac{m a^2 u^2}{m a^3} + 4\frac{\alpha}{a^5} < 0$$

de nem körpálya

$$\Rightarrow \boxed{u^2 > \frac{4\alpha}{m a^4}}$$

A körpályával együtt a válasz: $\boxed{|u| \geq 2 \cdot \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}}$

2. mego.

Keressük meg a fordulópontokat!
Ehhez szükségünk lesz az E mechanikai energiára:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{N^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^4} \underset{\uparrow}{=} 0 + \frac{m^2a^2u^2}{2ma^2} - \frac{\alpha}{a^4} = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{\alpha}{a^4}$$

a kezdeti feltételek szerint (Nem meglepő.)

$$E = V_{eff}(r = r_{fp})$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mu^2 - \frac{\alpha}{a^4} = \frac{N^2}{2mr_{fp}^2} - \frac{\alpha}{r_{fp}^4} = \frac{m^2a^2u^2}{2mr_{fp}^2} - \frac{\alpha}{r_{fp}^4}$$

$$\left(\frac{1}{2}mu^2 - \frac{\alpha}{a^4}\right) r_{fp}^4 - \frac{1}{2}m a^2 u^2 r_{fp}^2 + \alpha = 0 \quad (*)$$

Tudjuk, hogy ennek az egyik megoldása $r_{fp2} = a$. Ezt szeretnénk mi nagyobbnak választani a másiknál, valamelyik formulájából kifejezhetjük ki, legpraktikusabb a szorzatosból:

Az „u" sebességet
Viète

$$r_{fp1}^2 r_{fp2}^2 = \alpha \Big/ \left(\frac{1}{2}mu^2 - \frac{\alpha}{a^4}\right), \text{ ahol } r_{fp2} = a \checkmark$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}mu^2 - \frac{\alpha}{a^4}\right) a^2 r_{fp1}^2 = \alpha$$

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{\alpha}{a^2 r_{fp1}^2} + \frac{\alpha}{a^4}$$

$$u^2 = \frac{2}{m} \cdot \frac{\alpha}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{r_{fp1}^2} + \frac{1}{a^2}\right)$$

az előző oldali ábra szerint ezt kéri a feladat:
$r_{fp1} \overset{!}{<} a$

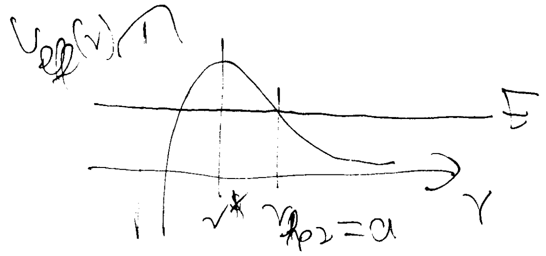
És itt most előírjuk a feladat kérését, hogy
$r_{fp1} \overset{!}{<} a$

amiből: $u^2 > \frac{2}{m} \cdot \frac{\alpha}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right)$, $|u| > \frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

Tehát $|u| > \frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$. ((Ugyanerre jutunk némi gondolkozás és alakítgatás után, ha a (*) egyenletből közvetlenül u^2-et fejezzük ki.))

A körpályával együtt tehát a válasz: $\boxed{|u| \geq \frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}}$

3. mego.



A kezdeti feltételünk szerint

$$N = -m a u \quad \text{és} \quad E = \frac{1}{2} m u^2 - \frac{\alpha}{a^4}.$$

Megkereshetjük a körpálya r^* sugarát. Az ábra alapján a feladat feltétele akkor teljesül, ha $r^* < a$.

(Ez egy alternatíva a (2. mego.) feltételére, hogy $r_{fp1} < a$.)

Nézzük tehát:

$$V_{eff}'(r)\Big|_{r=r^*} = -\frac{m^2 a^2 u^2}{m r^{*3}} + 4\frac{\alpha}{r^{*5}} = 0$$

Mi u-ra vagyunk kíváncsiak, HA $r^* < a$. Fejezzük ki ezért u^2-t!

$$+m\frac{a^2}{r^{*3}}u^2 = 4\frac{\alpha}{r^{*5}}$$

$$u^2 = \frac{4\alpha}{a^2 r^{*2} m}$$

Tehát: $u^2 > \frac{4\alpha}{a^2 \cdot a^2 \cdot m}$

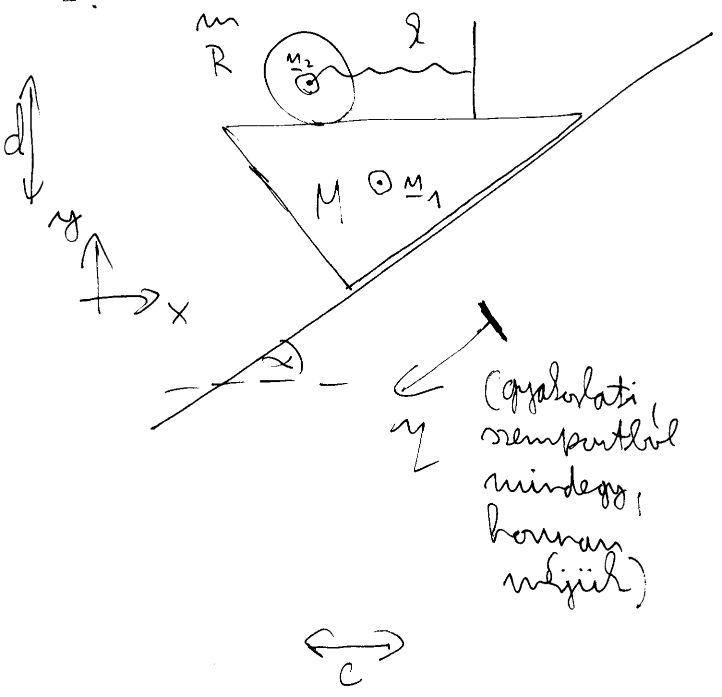
$$|u| > \frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

A körpályával együtt: $\boxed{|u| \geq \frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}}$

→ Ez az állapot „együtt mozog" a hosszból.

3.

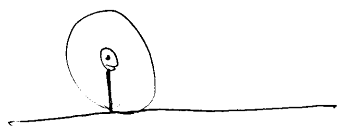
$\zeta \leftarrow$ ($\zeta = 0$ a rugó nyújtatlan állapotában)



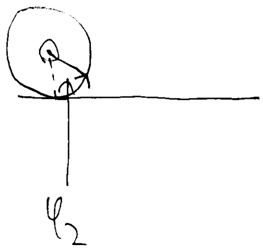
(gyakorlati szempontból mindegy, honnan mérjük)

1.) $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$

$\varphi_2 = 0$ $\qquad$ $\varphi_2 \neq 0$



amikor a rugó nyújtatlan



2.)
- lejtő
- $\varphi_1 =$ állandó
- $y_2 - y_1 =$ állandó
- tiszta gördülés

3.) ζ, η

4.)

$$x_1 = c_1 - \cos\alpha \cdot \eta$$

$$y_1 = d_1 - \sin\alpha \cdot \eta$$

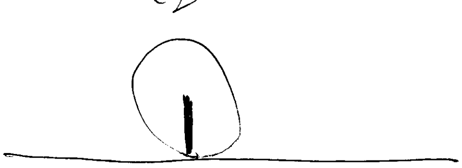
$$\varphi_1 = \Phi_1 = \text{állandó}$$

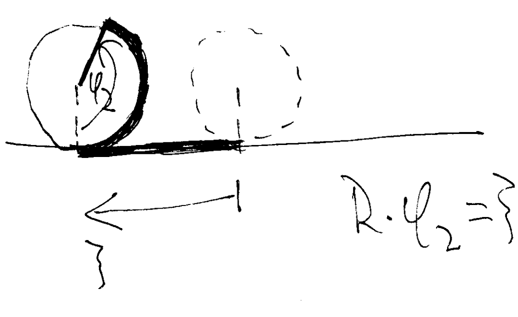
$$x_2 = x_1 + c - \zeta = c_1 - \cos\alpha \cdot \eta + d - \zeta$$

$$y_2 = y_1 + d = d_1 - \sin\alpha \cdot \eta + d$$

$$\varphi_2 = \zeta / R$$

$\varphi_2 = 0$





$R \cdot \varphi_2 = \zeta$

Tehát:

$$x_1 = c_1 - \cos\alpha \cdot \eta \qquad \dot{x}_1 = -\cos\alpha \cdot \dot{\eta}$$

$$y_1 = d_1 - \sin\alpha \cdot \eta \qquad \dot{y}_1 = -\sin\alpha \cdot \dot{\eta}$$

$$\varphi_1 = \phi_1 \qquad \dot{\varphi}_1 = 0$$

$$x_2 = c_1 + d - \cos\alpha \cdot \eta - \xi \qquad \dot{x}_2 = -\cos\alpha \cdot \dot{\eta} - \dot{\xi}$$

$$y_2 = d_1 + d - \sin\alpha \cdot \eta \qquad \dot{y}_2 = -\sin\alpha \cdot \dot{\eta}$$

$$\varphi_2 = \xi / R \qquad \dot{\varphi}_2 = \dot{\xi} / R$$

5.) $L = T - V$

$$\Theta_{\underline{m}_2} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}\Theta_{\underline{m}_1}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}\Theta_{\underline{m}_2}\dot{\varphi}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M\left(\cos^2\alpha\,\dot{\eta}^2 + \sin^2\alpha\,\dot{\eta}^2\right) + \frac{1}{2}\Theta_{\underline{m}_1}\cdot 0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m\left(\cos^2\alpha\,\dot{\eta}^2 + 2\cos\alpha\,\dot{\eta}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2 + \sin^2\alpha\,\dot{\eta}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} m R^2 \frac{\dot{\xi}^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)\dot{\eta}^2 + m\cos\alpha\,\dot{\eta}\dot{\xi} + \frac{3}{4} m \dot{\xi}^2$$

$$V = M g y_1 + m g y_2 + \frac{1}{2} k \xi^2 = \text{konstans} - (M+m) g \sin\alpha \cdot \eta + \frac{1}{2} k \xi^2$$

6.)

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -k\xi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = m\cos\alpha\,\ddot{\eta} + \frac{3}{2} m \ddot{\xi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m\cos\alpha\,\ddot{\eta} + \frac{3}{2} m\ddot{\xi} = -k\xi}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = (M+m) g \sin\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right) = (M+m)\ddot{\eta} + m\cos\alpha\,\ddot{\xi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(M+m)\ddot{\eta} + m\cos\alpha\cdot\ddot{\xi} = (M+m) g \sin\alpha}}$$