

Elméleti mechanika B / Mechanika 2
Gyakorló feladatsor, 1. témakör

1. Egy $2l$ szélességű folyó sebességkomponensei a hely függvényében következők:

$$v_{fx}(y) = v_0 \left(\frac{y}{l} + 1 \right) \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right),$$

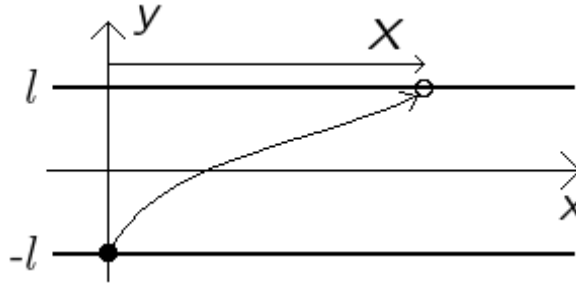
$$v_{fy} = 0.$$

A $t = 0$ időpillanatban az $x = 0$, $y = -l$ pontból (tömör karika) elindítunk egy vízben úszó szondát. A szonda folyóhoz viszonyított relatív sebességét időben az alábbi függvények adják meg:

$$v_{relx}(t) = a_0 t,$$

$$v_{rely}(t) = \frac{1}{2} b_0 t^2.$$

Milyen x koordinátánál (jelöljük ezt X -szel) fog a szonda a túlpartra érni?



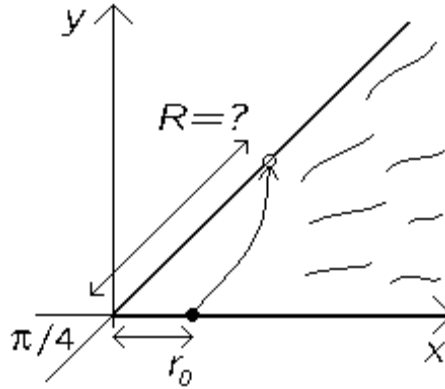
2. Az ábrán látható, forrást modellező, $\pi/4$ nyílásszögű folyó sebességének tangenciális komponense nincs, radiális sebességét pedig az alábbi függvény adja meg a φ polárszög függvényében:

$$v_{fr}(\varphi) = v_0 \left(1 - \frac{(\varphi - \pi/8)^2}{(\pi/8)^2} \right).$$

A $t = 0$ időpillanatban az $x = r_0$, $y = 0$ pontból (tömör karika) elindítunk egy vízben úszó szondát. A szonda radiális irányban a folyóval együtt mozog, a folyóhoz viszonyított relatív szögsebessége pedig időben állandó:

$$\dot{\varphi}_{rel}(t) \equiv \omega_{rel}(t) = \omega_0.$$

Milyen r koordinátánál (jelöljük R -rel) érkezik a szonda a túlpartra (üres karika)?



3. Egy $2l$ szélességű folyón megnyitnak egy zsilipet a $t = 0$ időpillanatban. Ezt követően a folyó sebességkomponensei az idő függvényében a következők:

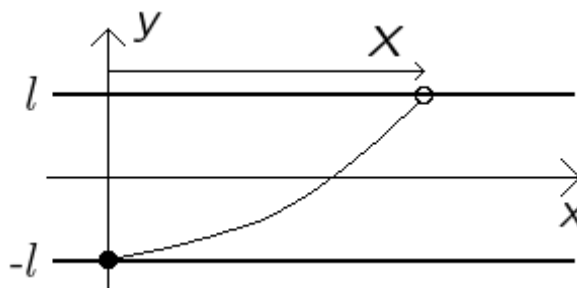
$$v_{fx}(t) = v_0 + \frac{1}{2}b_0t^2,$$

$$v_{fy}(t) = 0,$$

a folyó tetszőleges pontján mérve. A $t = 0$ időpillanatban az $x = 0$, $y = -l$ pontból (tömör karika) elindítunk egy vízen úszó szondát. A szonda a folyóhoz viszonyított relatív sebességét x irányban $-v_0$ értéken tartja. A szondának y irányú kezdősebessége nincs, az y irányú relatív gyorsulás pedig a szonda x pozíciójának a függvénye:

$$a_{rel y}(x) = a_0 \frac{x^2}{l^2}.$$

Milyen x koordinátánál (jelöljük ezt X -szel) fog a szonda a túlpartra érní (üres karika)?



4. Egy gyűrű alakú medencében a víz a belső peremtől a külső felé áramlik. A víz sebességének radiális, ill. tangenciális komponensét az alábbi függvények adják meg a pozíció függvényében:

$$v_{fr}(\varphi) = v_0 \sin^2 \varphi,$$

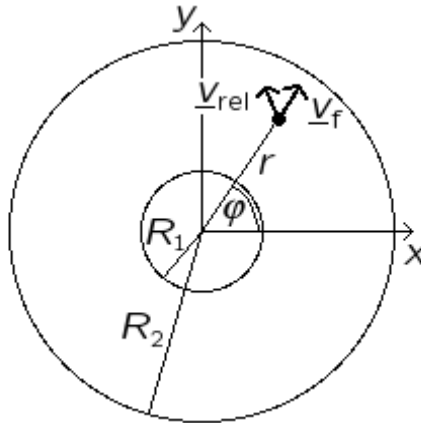
$$v_{f\varphi} = 0.$$

A $t = 0$ időpillanatban egy úszó indul el az $x = R_1$, $y = 0$ pontból. A vízhez viszonyított relatív sebességét a következő módon választja meg:

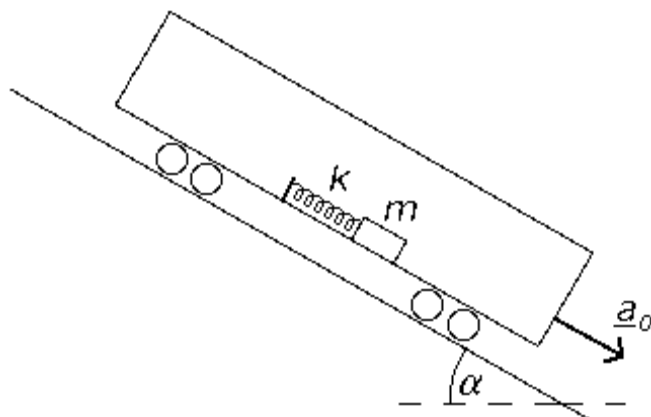
$$v_{relr}(t) = a_0 t,$$

$$v_{rel\varphi}(r) = u_1 \frac{r}{R_1},$$

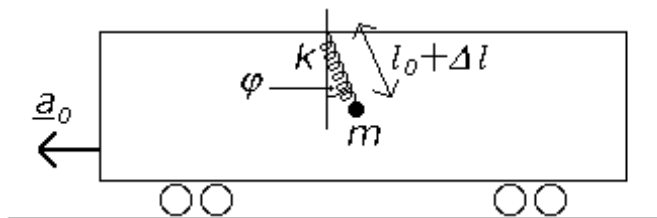
vagyis a vízhez viszonyított relatív radiális sebessége közvetlenül az időtől, a relatív tangenciális sebessége pedig az ő saját radiális pozíciójától függ. Milyen távol lesz az úszó a belső peremtől (jelöljük ezt a távolságot D -vel), mire megtesz egy kört a medencében?



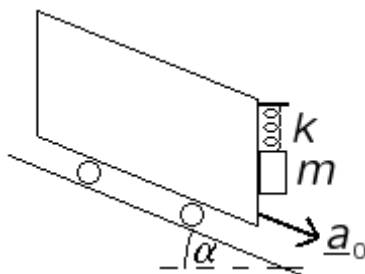
5. Egy kocsi \mathbf{a}_0 gyorsulással mozog egy α hajlásszögű lejtő mentén. A padlóján elhelyezkedő, k direkciós erejű rugóhoz egy m tömegű testet rögzítünk.
- Írjuk föl a test mozgásegyenletének a lejtővel párhuzamos komponensét a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben! Mérjük a test pozícióját a rugó nyújtatlan helyzetétől.
 - Mekkora lesz a rugó egyensúlyi megnyúlása?



6. Egy vasúti kocsi \mathbf{a}_0 gyorsulással mozog vízszintes irányban. A plafonra akasztunk egy elhanyagolható tömegű, k direkciós erejű rugót, amelynek a megnyújtatlan hossza l_0 . A rugó végéhez egy m tömegű testet rögzítünk. Jelölje a rugó megnyúlását Δl , a rugó hossz tengelyének a függőlegessel bezárt szögét φ . Mekkora az egyensúlyi φ^* szög és az egyensúlyi Δl^* megnyúlás?



7. Egy sikló kocsi \mathbf{a}_0 gyorsulással mozog egy α hajlásszögű lejtő mentén. A homlokfalára felfüggesztett k direkciós erejű rugóhoz egy m tömegű testet rögzítünk, amely felfekszik a homlokfalra, de a súrlódás elhanyagolható.
- Írjuk fel a test mozgásegyenletének a homlokfalal párhuzamos (azaz függőleges) komponensét a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben! MÉRJÜK a test pozícióját a rugó nyújtatlan helyzetétől.
 - Mekkora legyen a_0 , hogy a rugó egyensúlyi megnyúlása eltűnjön?



8. Rajzoljuk fel a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(x+a)^2 & , \text{ ha } x \leq -a, \\ V_0 \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & , \text{ ha } |x| < a, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ ha } x \geq a, \end{cases}$$

ahol $a, k, V_0 > 0$. Adjuk meg a mozgás fordulópontjait! Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x = -a)$, az $\dot{x}(x = 0)$ és az $\dot{x}(x = a)$ sebességeket! Mindennek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát! Diskutáljuk külön az a) $0 < E < V_0$ és a b) $E > V_0$ eseteket!

9. Tekintsük a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha x & , \text{ ha } x < 0, \\ 0 & , \text{ ha } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ ha } x \geq a, \end{cases}$$

ahol $\alpha, a, k > 0$. Adjuk meg a mozgás fordulópontjait! Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x = 0)$ és az $\dot{x}(x = a)$ sebességet! Mindennek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát! Diskutáljuk külön az a) $E < 0$ és a b) $E > 0$ eseteket!

10. Tekintsük a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} -\alpha x - V_0 & , \text{ ha } x \leq 0, \\ -V_0 \cos \frac{\pi x}{2a} & , \text{ ha } 0 < x \leq a, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ ha } x > a, \end{cases}$$

ahol $\alpha, V_0, a, k > 0$. Legyen $-V_0 < E < 0$. Hol van a mozgásnak fordulópontja? Írjuk fel a fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és $x \leq 0$ -ra nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg az $\dot{x}(x = 0)$ sebességet! Rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát!

11. Tekintsük a következő, az $x \in [0, \frac{\pi}{K}]$ intervallumon értelmezett 1 dimenziós potenciált:

$$V(x) = V_0 \sin^2(Kx).$$

Adjuk meg az egyensúlyi pont(ok) helyét! Vizsgáljuk meg, hogy milyen V_0 és K paraméterek mellett stabil(-ak)! Határozzuk meg, hogy stabil esetben mekkora a körülötte(-ük) kialakuló kis rezgések körfrekvenciája!

12. Van-e az alábbi, az $x \in (-a, a)$ intervallumon értelmezett 1 dimenziós potenciálnak olyan szélsőértéke, amelynek a környezetében kialakulhatnak kis rezgések? Ha igen, mi ezek körfrekvenciája?

$$V(x) = V_0 \left(\frac{a}{x+a} - \frac{a}{x-a} \right), \quad a > 0,$$

ahol $a, V_0 > 0$.

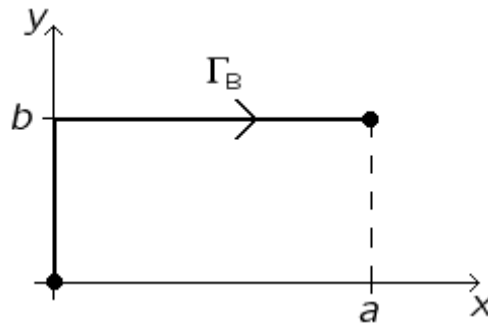
13. Tekintsük a következő erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Cx^2y\mathbf{e}_-,$$

ahol C egy konstans paraméter, \mathbf{e}_- pedig az alábbi egységvektor:

$$\mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ_B görbe mentén!



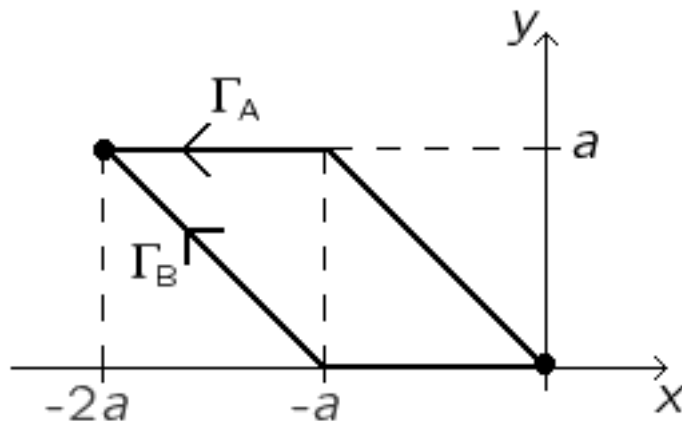
14. Tekintsük a következő erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Cy^2\mathbf{e}_+,$$

ahol C egy konstans paraméter, \mathbf{e}_+ pedig az alábbi egységvektor:

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

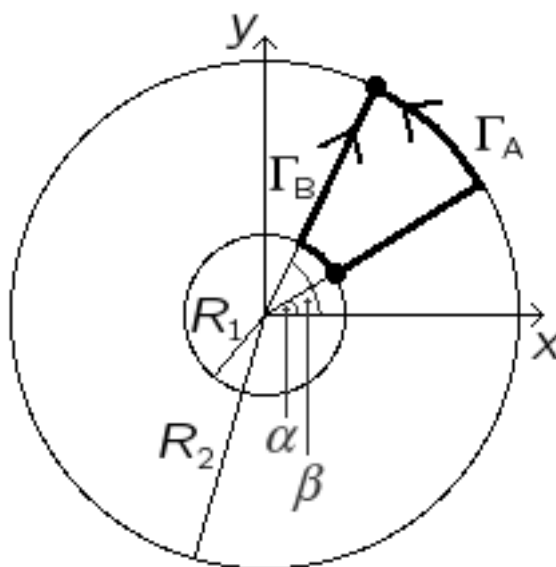
Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ_A és Γ_B görbék mentén! Lehet-e az eredmények alapján az erőter konzervatív?



15. Tekintsük a következő (Lennard-Jones-féle) erőteret:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\varepsilon \left[12 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - 6 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \frac{\mathbf{r}}{r^2},$$

ahol ε és σ konstans paraméterek. Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt Γ_A és Γ_B görbék mentén! Az eredmények alapján lehet-e az erőter konzervatív?



<http://theorphys.elte.hu/~drotos/emb2/Gyakorlo1.pdf>