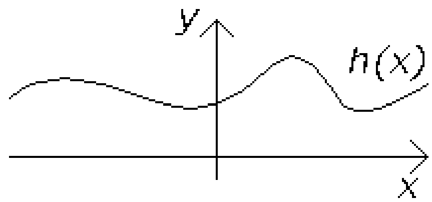
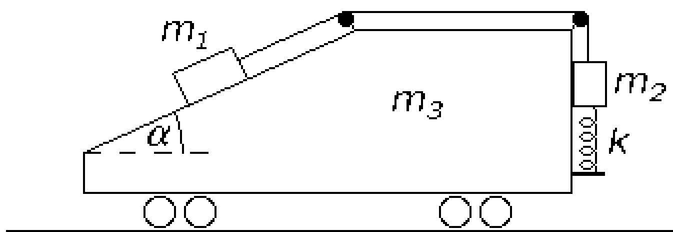
Elméleti mechanika B / Mechanika 2
Gyakorló feladatsor, 2. témakör

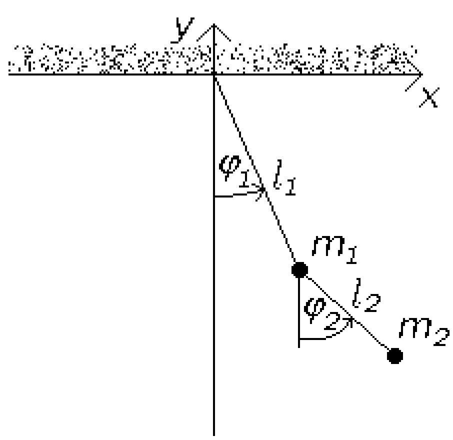
1. Határozzuk meg egy tetszőleges $h(x)$ függvénnyel jellemezhető domborzaton súrlódás nélkül mozgó tömegpont Lagrange-függvényét, majd származtassuk belőle az Euler–Lagrange-egyenletet!



2. Írjuk fel az ábrán látható, súrlódásmentes rendszer Lagrange-függvényét, és számítsuk ki az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t! (Feltesszük, hogy az m_2 tömegű test nem leng ki oldalirányban.)

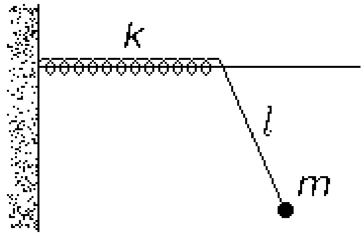


3. Függesszünk egy matematikai inga végére egy újabb matematikai ingát, és írjuk fel az így adódó ún. kettős inga Lagrange-függvényét, majd határozzuk meg az Euler–Lagrange-egyenleteket! *Javaslat: Használjuk általános koordinátáknak az ábrán látható* φ_1 *és* φ_2 *szögeket!*



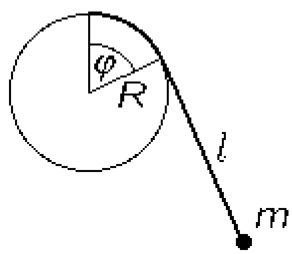
Kedvcsináló videó:
`http://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU`
A videón látható rendszer annyiban tér el az általunk vizsgálttól, hogy ott fizikai ingákról van szó, és a súrlódás nem hanyagolható el.

4. *(Elméleti fizikai példatár 11.26.)* l hosszúságú, m tömegű fonálinga felfüggesztési pontja k direkciós állandójú rugóhoz van rögzítve. A felfüggesztési pont vízszintesen mozoghat. Határozzuk meg a Lagrange-függvényt és az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!



5. Tekintsünk egy súrlódásmentes asztalt, melyre egy vízszintes helyzetű rugót helyezünk. A rugó direkciós ereje k, megnyújtatlan hossza l_0. A rugó egyik végét gombostűvel rögzítjük, a gombostű tengelye körül a rugó szabadon elfordulhat. A rugó másik végére egy m tömegű test kerül. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét, és származtassuk belőle az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!

6. *(11.27.)* l hosszúságú nyújthatatlan fonal (vastag vonal az ábrán) egyik végét R sugarú, függőleges síkban álló rögzített korong tetején rögzítjük. Másik végére m tömegű testet akasztunk. Határozzuk meg a Lagrange-függvényt, és írjuk fel az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!



7. Lássuk be, hogy centrális potenciál mellett a radiális irányú, effektív potenciálban történő mozgás mechanikai energiája megegyezik a centrális mozgás teljes mechanikai energiájával!

8. A Kepler-problémában adott E energia és N impulzusmomentum mellett milyen r értékeknél van a radiális mozgásnak fordulópontja? Diszkutáljuk külön az $E < 0$, az $E \to 0-$, az $E = 0$ és az $E > 0$ eseteket! Összhangban vannak-e a megfigyeléseink a különböző pályaalakokról tanultakkal?

9. Mozogjon egy m tömegű tömegpont a

$$V(r) = \alpha r$$

potenciálban, ahol $\alpha > 0$ egy ismert paraméter. A tömegpont N impulzusmomentuma adott. Mekkora sugarú körpálya valósulhat meg? Ezen milyen szögsebességgel haladhat a tömegpont? Stabil-e a körpálya? Ha igen, mekkora a körpálya körüli kis rezgések körfekvenciája? Záródik-e a síkban ezen kis rezgések pályája?

10. Mozogjon egy m tömegű tömegpont R sugarú körpályán a

$$V(r) = \alpha r\,, \quad \alpha > 0$$

potenciálban. Mekkora lehet a tömegpont impulzusmomentuma?

11. Tekintsük a következő centrális potenciált:

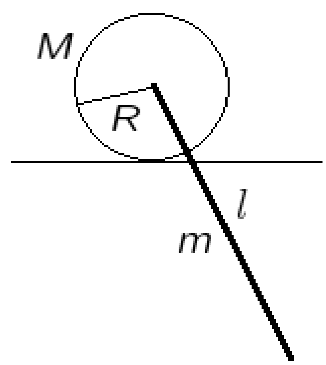
$$V(r) = \frac{1}{4}\gamma r^4\,, \quad \gamma > 0\,.$$

Egy m tömegű tömegpont mozgását ebben a potenciálban a

$$\varphi(t) = \Omega t$$

függvény írja le, Ω ismert konstans. A tömegpont N impulzusmomentuma adott. Mekkora a tömegpont sebessége? Mekkora a potenciálban szereplő γ paraméter? Mekkora a körpálya körüli kis rezgések körfrekvenciája?

12. *(12.42. nyomán)* M tömegű, R sugarú tárcsa (henger) csúszás nélkül (vagyis tisztán gördülve) mozoghat egy vízszintes sínen. Középpontjába m tömegű, l hosszúságú rudat erősítünk teljesen merev kapcsolattal, a rúd a sín mellett lenghet. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét, és határozzuk meg az Euler–Lagrange-egyenlet(ek)et!



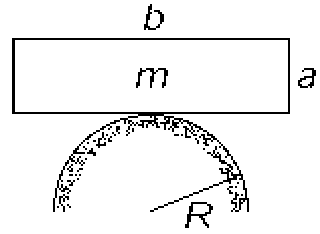
13. *(12.41.)* Írjuk fel az m tömegű, l hosszúságú homogén rúdból és a végére erősített M tömegű, R sugarú homogén korongból álló inga Lagrange-függvényét, ha

   a) a korong szabadon foroghat a rúdhoz rögzített vízszintes tengely körül,

   b) a korong a rúdhoz van rögzítve!

   A Lagrange-függvényből származtassuk az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!

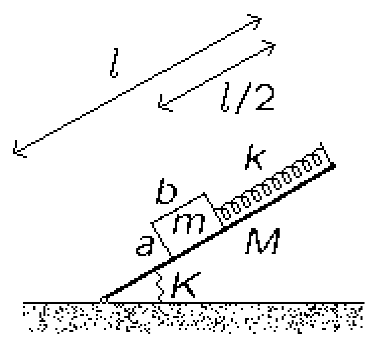
14. *(12.47.)* Rögzített, R sugarú, vízszintes tengelyű hengerfelület tetejére a vastagságú, b hosszúságú homogén téglatestet helyezünk. A téglatest a hengerfelületen tisztán gördül. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét, és számítsuk ki az Euler–Lagrange-egyenletet!



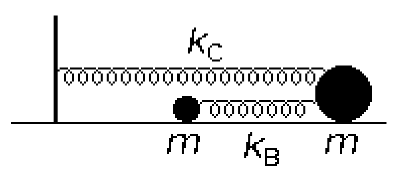
15. Egy M tömegű, téglatest alakú, l hosszúságú és *elhanyagolható* vastagságú lemez az egyik peremén csuklóval kapcsolódik a talapzathoz. A lemez és a talapzat között, a csukló körül egy K torziós együtthatójú torziós rugó hat, amelynek a potenciális energiája a következő alakú:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}K(\varphi - \alpha)^2 \,,$$

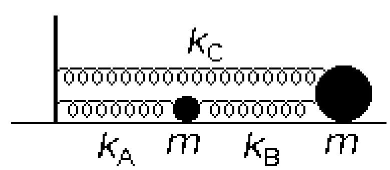
ahol φ a lemeznek a talapzattal bezárt szögét jelöli, α egy konstans paraméter. Az M tömegű lemez végéhez egy elhanyagolható tömegű, k direkciós erejű rugót rögzítünk, amelynek a megnyújtatlan hossza $l/2$. A rugó végéhez egy m tömegű, a, ill. b (*nem elhanyagolható*) oldalhosszúságú téglatestet csatolunk, amely felfekszik a lemezre. Határozzuk meg a rendszer Lagrange-függvényét, és írjuk fel az Euler–Lagrange-egyenlete(ke)t!



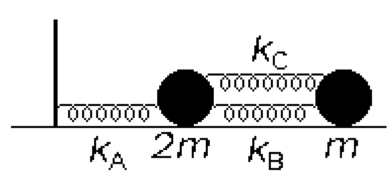
16. Határozzuk meg az ábrán látható golyós-rugós rendszer sajátfrekvenciáit!



17. Számítsuk ki az ábrán látható golyós-rugós rendszer sajátfrekvenciáit! Vizsgáljuk meg a $k_C \to 0$ és a $k_A \to 0$ határeseteket! Mi a kettő között a kapcsolat? A $k_B \to 0$ határesetben mit tapasztalunk?



18. Határozzuk meg az ábra golyós-rugós rendszerének a sajátfrekvenciáit! Mi a rugók „párhuzamos kapcsolására” vonatkozó tanulság?



http://theorphys.elte.hu/~drotos/emb2/Gyakorlo2.pdf