"Matematikai kiegészítés a fizikához" vizsga-ZH (2004.07.07)

- 1. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat

$$\int \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1}\,dx, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}, \qquad \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$$

- 2. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \qquad \int \sqrt{\mathrm{th} x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1-\mathrm{sh}^4 x}.$$

- 3. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat

$$\int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy, \qquad \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} xy dy\,dx.$$

- 4. Számítsuk ki az alábbi differenciálmennyiségeket

$$\mathrm{div}(r^n\,(\mathbf{ar})\,\mathbf{r}), \quad \mathrm{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{a}\,\mathrm{tg}(\mathbf{ar})), \quad \Delta(r^n \ln r).$$

- 5. Határozzuk meg az

$$f(x,y) = \frac{2+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

  függvény szélsőértékeit.

- 6. Számítsuk ki az $exp\{A\}$ függvényt ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 7. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet

$$y' \cos x + (2\sin y - 3x) = 0.$$

- 8. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet

$$y'' \frac{e^x}{x^2} + \sin y = 0.$$

- 9. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}.$$

- 10. Számítsuk ki az R sugarú homogén sűrűségű kör 2φ középponti szöghöz tarozó ívének tömegközéppontját.

- 11. Határozzuk meg az $x = r\,\cos\varphi$, $y = r\,\sin\varphi$, $z = h\,\varphi\; 0\ \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ csavarfelület felszínét.

- 12. Határozzuk meg a homogén sűrűségű R sugarú alap és r sugarú fedőkörű h magasságú csonkakúp tömegközéppontját.

- 13. Határozzuk meg az (x, y) sík felett fekvő azon térrész térfogatát, amely a

$$z = 4 - x^2 - y^2 \text{ és a } z = 2x^2 + 2y^2 - 8$$

forgási paraboloidok között fekszik, valamint az (x, y) sík $x^2 + y^2 \le \frac{\pi}{2}$ körlap feletti és a

$$z = \cos(-x^2 - y^2)$$

függvény által határolt térrészének térfogatát.

- 14. Határozzuk meg a

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

vektortér vonalmenti integrálját az

$$x = \cos^2 t,\ y = \frac{1}{2}\sin 2t,\ z = \sin t\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

görbe mentén.

- 15. Határozzuk meg a

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

vektortér felületi integrálját az

$$x = (3 + \cos u)\cos v, \quad y = (3 + \cos u)\sin v, \quad z = \sin v$$

gyűrűfelület (x, y) sík feletti darabja mentén felfelé mutató felületi normális mellett.

Alapintegrálok.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \text{ha } \alpha\neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$$

$$\int e^x\,dx = e^x+C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos\ x+C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x+C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x+C \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x+C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x+C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x+C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x+C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin\ x+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos\ x+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh} x+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch} x+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x+C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arcctg} x+C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arth} x+C,\ \text{ha } |x|<1 \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcth} x+C,\ \text{ha } |x|>1$$